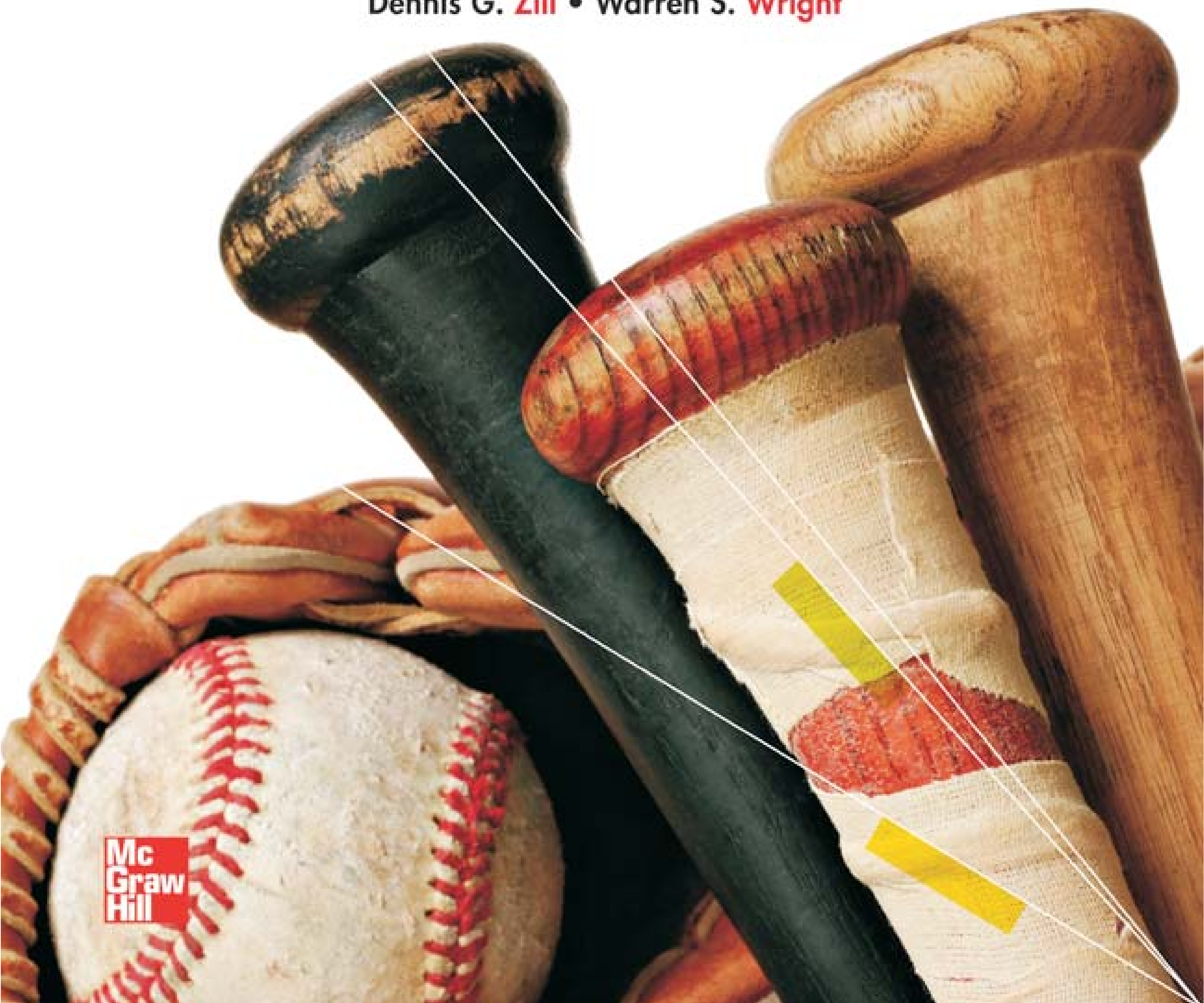
MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

CUARTA EDICIÓN

Dennis G. Zill • Warren S. Wright



MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

CUARTA EDICIÓN

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

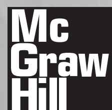
Michael R. Cullen
Late of Loyola Marymount University

Revisión técnica

Natella Antonyan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Lázaro Barajas de la Torre
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Querétaro

Miguel Ángel Hernández de la Torre
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Toluca



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha
Editora de desarrollo: Ana Laura Delgado
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Erika Jasso Hernán D'Bourneville/Carlos Roberto Cordero Pedraza/Gabriel Nagore Cazares

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

CUARTA EDICIÓN



Educación

Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0772-3
ISBN (tercera edición): 978-970-10-6514-3 (Volumen 1) y 978-970-10-6510-5 (Volumen 2).

1234567890 1345678902

Impreso en México *Printed in Mexico*

Prefacio

Esta obra se beneficia del estilo simple y ameno que ya es característica del estilo de Dennis Zill y presenta todos los temas que se tratan en un curso de ecuaciones diferenciales, enriquecidos con temas fundamentales de un curso de matemáticas avanzadas para ingeniería; así, integra un compendio de varios temas matemáticos que tienen en común, en términos generales, su necesidad y utilidad para cursos y carreras subsecuentes en ciencia e ingeniería. No hay ningún límite del número de temas que se puede incluir en un texto de este tipo. Por lo tanto, este libro representa la opinión de los autores, *en este momento,* de lo que constituye las "matemáticas para la ingeniería".

☰ Contenido del texto

Con el propósito de tener flexibilidad en la selección de los temas, el texto se divide en cinco partes principales o subdivisiones. Como puede observarse en los títulos de estas distintas partes, es claro que pensamos que la base de la ciencia/ingeniería relativa a las matemáticas es la teoría y las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Parte 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)

Los seis capítulos en esta parte constituyen un curso breve y completo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Con algunas modificaciones, estos capítulos corresponden a los capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9 del texto *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications,* 8a. edición, de Dennis G. Zill (Brooks/Cole Publishing Company).

Parte 2: Matrices (capítulo 7)

El capítulo 7, *Matrices*, es una introducción a los sistemas de ecuaciones algebraicas, determinantes y álgebra de matrices, con énfasis particular en los tipos de matrices que son útiles para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Las secciones sobre criptografía, código de corrector de errores, el método de los mínimos cuadrados y modelos discretos de compartimento se presentan como aplicaciones del álgebra de matrices.

Parte 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales (capítulos 8 y 9)

Esta parte tiene dos capítulos. El capítulo 8, *Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales*, y el 9, *Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales*, se basan estrechamente en el material de matrices que se presenta en el capítulo 7 de la parte 2. En el capítulo 8, los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden se resuelven utilizando los conceptos de eigenvalores y eigenvectores, diagonalización y mediante una función exponencial de matrices. En el capítulo 9, los conceptos de estabilidad se estimulan usando dos aplicaciones: flujo de fluido en un plano y el movimiento de una cuenta en un alambre.

Parte 4: Ecuaciones diferenciales parcial (capítulos 10-14)

El material principal sobre las series de Fourier y los problemas de valores en la frontera proviene de *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 6a. edición, de Dennis G. Zill y Michael R. Cullen (Brooks/Cole Publishing Company). El capítulo 10, *Funciones ortogonales y series de Fourier*, presenta los temas fundamentales de conjuntos de funciones ortogonales y expansiones de funciones en términos de una serie infinita de funciones ortogonales. Después, estos temas se utilizan en los capítulos 11 y 12, donde se resuelven problemas de valores en la frontera en coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas mediante el método de separación de variables. En el capítulo 13, *Método de transformada integral*, los problemas de valores en la frontera se resuelven con transformadas integrales de Laplace y Fourier.

Parte 5: Análisis complejo (capítulos 15-17)

Los capítulos 15, 16 y 17 abarcan números complejos básicos por medio de las aplicaciones de mapeo conformal en la solución del problema de Dirichlet. El material en sí puede servir fácilmente como una cuarta parte de un curso introductorio de variables complejas.

☰ Características de esta versión

- Se agregó al capítulo 3 una nueva sección sobre las funciones de Green para ecuaciones diferenciales ordinarias, *Ecuaciones diferenciales de orden superior*. Esta amplia sección y los ejercicios correspondientes se dividen en dos partes para que el profesor pueda presentar de manera conveniente este material durante dos clases. La primera parte aborda los problemas de valor inicial y la segunda los problemas de valores en la frontera.
- Se amplió la discusión de funciones de Bessel modificadas en la sección 5.3, *Funciones especiales*.
- Se amplió la sección 12.2, *Problemas en coordenadas cilíndricas* y se agregaron a los ejercicios 11.2 problemas de valores en la frontera que implican funciones de Bessel modificadas.
- Nuevos problemas, demasiados para mencionarlos, se han añadido a lo largo del texto.
- Ocho proyectos nuevos e interesantes aparecen al principio del texto. Abarcan temas de física, ingeniería y matemáticas y fueron escritos por Jeff Dodd, PhD:

    - *Cuando las ecuaciones diferenciales invadieron la geometría: problemas de tangente inverso del siglo XVII*
    - *Dos propiedades de la esfera*
    - *Fechamiento de potasio-argón*
    - *Dificultad con el momento oportuno: isócronas de Huygen y Leibniz*
    - *Control de la vibración: aislamiento de la vibración*
    - *Control de la vibración: amortiguador de la vibración*
    - *Formación de ondas: convección, difusión y flujo de tráfico*
    - *La desigualdad de incertidumbre en el procesamiento de señales*

☰ Diseño del texto

Cada capítulo empieza con una lista del contenido y una introducción a los temas del capítulo. Además, se ha aumentado la cantidad de notas informativas al margen y las anotaciones de guía para el estudiante en los ejemplos.

Cabe mencionar el nuevo orden de la numeración de las figuras, las definiciones y los teoremas. Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas en este texto, he cambiado el formato a un sistema de numeración de dos decimales. Por ejemplo, la interpretación de la "figura 1.2.3" es

Capítulo Sección del capítulo 1
↓ ↓
1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1.2

Este tipo de numeración hará que sea más fácil encontrar un teorema o una figura cuando se le refiere en una sección o un capítulo posterior. Además, para vincular mejor la figura con el texto, la *primera* referencia textual de cada figura se hace con el mismo estilo y color de fuente que el del número de la figura.

Por ejemplo, la primera referencia correspondiente a la primera figura en la sección 3.1 se presenta como **FIGURA 3.1.2** y todas las referencias subsecuentes se escriben con el estilo tradicional de figura 3.1.2.

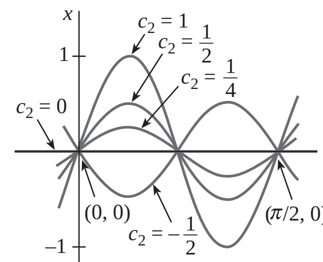


FIGURA 3.1.2 El PVF en (3) del ejemplo 3 tiene muchas soluciones

Complementos

Esta obra cuenta con la página web **www.mhhe.com/uni/zill_mapi4e**, en la que usted encontrará diversos recursos que le ayudarán en su proceso de aprendizaje. Entre éstos se incluye el capítulo 18, Vectores; el capítulo 19, Cálculo vectorial; el 20, Transformaciones conformes; y el capítulo 21, Probabilidad y estadística (en inglés). Además podrá consultar un capítulo sobre transformada Z, de la autoría del Dr. Ricardo Fernández del Busto y Ezeta, que forma parte de su obra *Análisis y diseño de sistemas de control digital* (México, McGraw Hill, 2012). Éstos los puede abrir con la clave de acceso: **zillwright**.

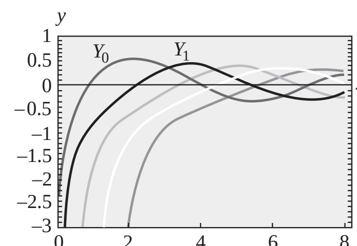


FIGURA 5.3.2 Funciones de Bessel de segundo tipo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Reconocimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, muchas personas dedicaron tiempo y energía a este proyecto. En primer lugar, quiero expresar mi apreciación al personal editorial, de producción y promoción de la casa editora del libro en inglés y a los siguientes revisores de esta y previas ediciones que aportaron muchas sugerencias, críticas valiosas e incluso algunas palabras de apoyo:

David Keyes, Columbia University
Sonia Henckel, Lawrence Technological University
Donald Hartig, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Jeff Dodd, Jacksonville State University
Vector Elias, University of Western Ontario
Cecilia Knoll, Florida Institute of Technology
William Criminale, University of Washington
Stan Freidlander, Bronx Community University
Herman Gollwitzer, Drexel University
Robert Hunt, Humboldt State University
Ronald Guenther, Oregon State University
Noel Harbertson, California State University
Gary Stoudt, Indiana University of Pennsylvania

También quisiera agradecer de manera especial a las siguientes personas:

- Professor Jeff Dodd, Mathematical, Computing, and Information Sciences Department, Jacksonville State University, por tomar tiempo de su apretada agenda académica para investigar y escribir los proyectos que aparecen al principio del texto.
- David Pallai, Editor, y Tim Anderson, Editor de Adquisiciones, por tolerar el desahogo de mis frustraciones.
- Amy Rose, Director de Producción, y Jennifer Bagdigian, Jefe de Producción, por su experiencia en las desgastantes rarezas del proceso de producción.
- Carol Wright por su ayuda en las etapas finales de la preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- Cathy Herrera, asistente administrativo de la Facultad de Matemáticas de Loyola Marymount University, por estar siempre disponible cuando la necesitaba.

Incluso con toda la ayuda antes mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura que contiene este producto final es responsabilidad del autor. Agradecería mucho estar informado de cualquier error o incorrección tipográfica. Las correcciones pueden enviarse a mi editor, Pablo Roig, a través de

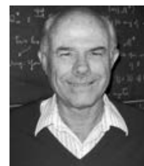
pablo_roig@mcgraw-hill.com

Para concluir, doy la bienvenida como coautor de este texto a mi colega de mucho tiempo, Warren Scott Wright, de la Universidad de Loyola Marymount, autor también de muchos de los suplementos que acompañan mis textos.

Dennis G. Zill



Warren S. Wright



Contenido









PROYECTO PARA LA SECCIÓN 2.2

Cuando las ecuaciones diferenciales invadieron la geometría: problemas de la tangente inversa en el siglo XVII

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

Los antiguos griegos clasificaron los problemas geométricos en tres tipos. **Problemas en el plano**, que eran aquellos que sólo requerían rectas y círculos, los cuales podrían construirse paso a paso mediante una regla y un compás. **Problemas de sólidos**, que requerían las secciones cónicas (la elipse, la hipérbola y la parábola), las cuales sólo pueden construirse intersecando conos y planos en el espacio tridimensional. **Problemas lineales**, que requerían curvas incluso más exóticas que podrían construirse únicamente mediante procesos mecánicos que implicaran la yuxtaposición de múltiples movimientos simultáneos. La geometría euclidiana proporcionó una teoría de problemas en el plano que se consideraron rigurosos debido a la claridad intuitiva y simplicidad de las construcciones de regla y compás. En contraste, se creó el prejuicio filosófico de que en los problemas en sólidos, y en especial los problemas lineales, nunca podrían tratarse de modo tan riguroso como los problemas en planos, pues la construcción de las curvas implicadas era o demasiado abstracto o demasiado complicado, o ambos. Apoyaba este prejuicio el hecho de que ciertos problemas que implican curvas sólidas y lineales no admitían un método de solución general en esa época, aunque podían resolverse en casos especiales mediante inteligentes argumentos *ad hoc*. Entre estos difíciles problemas sobresalía la determinación de las líneas tangentes de curvas, el cálculo de las áreas acotadas por las curvas (**cuadratura**) y el cálculo de las longitudes de arco de curva (**rectificación**).

La idea de que las curvas más allá de las rectas y círculos no podría integrarse del todo en una teoría rigurosa de la geometría persistió por siglos, pero finalmente empezó a cambiar en el siglo XVII, cuando el francés Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650), trabajando independientemente, catalizaron una revolución en el pensamiento aplicando las herramientas del álgebra a la geometría de curvas. Este enfoque, que formó los fundamentos de lo que llegó a convertirse en la geometría analítica, los facultó para formular los primeros métodos sistemáticos relativos a la determinación de rectas tangentes. Sin embargo, estos métodos fueron efectivos sólo para curvas algebraicas: curvas que son gráficas de ecuaciones polinomiales en dos variables. Esta clase de curvas incluye rectas, círculos, secciones cónicas y mucho más. Descartes estaba tan excitado acerca de lo que podría hacer dentro de esta clase de curvas algebraicas que formuló su propia teoría de la geometría con base en ella, completada con un método para construir geométricamente curvas algebraicas que fue mucho más liberal que el método de regla y compas de Euclides. Sin embargo, eran de interés en esa época ciertas **curvas trascendentales** o no algebraicas.

Una razón del nuevo interés en las curvas trascendentales tuvo que ver con el advenimiento de una nueva clase de problemas denominados **problemas de la tangente inversa**: problemas que no pedían determinar las rectas tangentes de una curva dada, sino más bien determinar una curva cuyas rectas tangentes ¿o quizá rectas asociadas tales como las rectas normales satisficieran alguna propiedad dada? En particular se descubrió que una curva cuya recta tangente satisfacía alguna condición geométrica natural podría convertirse sin dificultades en trascendental. Este hecho, aunado a la aparición de curvas trascendentales en la física matemática, hizo que resultara poco elegante tratar las curvas trascendentales como curiosidades aisladas apartadas del resto de la geometría. Lo que fue necesario era una teoría que abordara sistemáticamente los problemas geométricos asociados con rectas tangentes, cuadratura y rectificación y que implicara curvas algebraicas y trascendentales similares. Después, en el siglo XVII, esta teoría fue finalmente formulada. Se trató del cálculo, cuyos pioneros, trabajando de manera independiente, fueron en Inglaterra Isaac Newton (1643-1727) y en Alemania Gottfried Leibniz (1646-1716). Con el paso del tiempo, las técnicas basadas en el cálculo para la solución de problemas de tangente inversa se desarrollaron y aplicaron bastante más allá de problemas de geometría elemental, y a la larga se consolidaron en la teoría sistemática y eficiente de las ecuaciones diferenciales de primer orden que se presenta en este capítulo. En la actualidad, incluso aquellos problemas de tangente inversa que fueron desafíos de vanguardia para los grandes matemáticos del siglo XVII se encuentran ahora dentro de los conocimientos de un estudiante principiante de ecuaciones diferenciales.

Problemas relacionados

"Afirmo entonces que incluso hay otro análisis en geometría que es por completo diferente del de Viete y de Descartes, quienes no avanzaron lo suficiente al respecto, puesto que sus problemas más importantes no dependen de las ecuaciones a la cual se reduce toda la geometría de Descartes. A pesar de que él había avanzado de modo muy notable en su geometría (a saber, que la totalidad de los problemas se reducían a sus ecuaciones y líneas curvas), él mismo se vio forzado a reconocer este defecto en una de sus cartas; puesto que de Beaune le ha propuesto a él uno de estos extraños pero importantes problemas del método de tangente inversa, y él ha admitido que aún no lo tiene del todo claro."
—Gottfried Leibniz, carta personal, de *Philosophical Essays* por G. W. Leibniz, Roger Ariew y Daniel Garber, traductores y editores, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1989.

La figura 1 ilustra la terminología asociada con los problemas de tangente inversa. Se nos da una curva y un eje, el cual denominamos eje x. Suponga que la recta tangente de la curva en A interseca al eje x en D y que la recta normal a la curva en A interseca al eje x en B. Entonces la **tangente** y la **normal** de la curva en A son respectivamente definidas como los segmentos de recta $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$.

La **subtangente** y **subnormal** de la curva en A se definen respectivamente como las proyecciones de la tangente y normal A sobre el eje x esto es, los segmentos de recta $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$. (Desde luego, para una función decreciente, o una función cuya gráfica esta debajo del eje x, la imagen se verá un poco diferente, pero las definiciones son las mismas.)

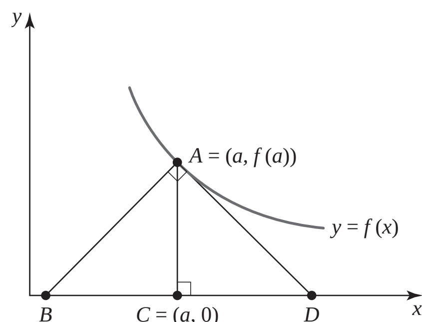


FIGURA 1 Proyecto de los problemas de la tangente inversa

En 1638 el noble francés Florimond Debeaune, seguidor y amigo de Descartes, planteó a éste en una carta lo que los historiadores de matemáticas citan como el verdadero primer problema de tangente inversa: encontrar una curva sobre la cual la razón entre la ordenada y el largo de la subtangente es proporcional a la diferencia entre la ordenada y la abscisa. En su respuesta a Debeaune, Descartes ideó tanto un método gráfico de dibujar estas curvas como un método numérico para calcular las coordenadas de puntos particulares en ellas. Sin embargo, no pudo dar fórmulas analíticas para las curvas, las cuales reconoció que no eran algebraicas y consecuentemente fuera del ámbito de su teoría general de geometría. Leibniz incluyó una solución de este problema en su primer artículo sobre su nueva teoría del cálculo, que apareció en 1684, como un ejemplo para demostrar el poder de sus métodos.

1. Empleando la figura 1, demostró que el problema de Debeaune se traduce en una ecuación diferencial $f'(a) = b(a - f(a))$ o $\dfrac{dy}{dx} = b(x - y)$ para alguna constante b.
2. Descartes replanteó este problema en términos de la nueva variable dependiente $z = x - y - 1/b$. Demuestre que con este cambio de variable, la ecuación diferencial en el problema 1 se convierte en $\dfrac{dz}{dx} = -\,bz$. Resuelva esta ecuación diferencial para determinar z como función de x. Después encuentre y como función de x en las **curvas de Debeaune**. (Habrá dos constantes en su fórmula: b y una constante de integración.)
3. Encuentre y resuelva una ecuación diferencial para las funciones f en cuyas gráficas la longitud de la subtangente en $A = (a, f(a))$ es constante. ¿Por qué este problema a menudo se refiere como un problema de Debeaune?

En algún tiempo entre 1672 y 1676, cuando Leibniz vivía en París, un prominente arquitecto, médico, anatomista y hombre de letras llamado Claude Perrault planteó a Leibniz una natural pregunta hermana de la de Debeaune: ¿cuáles curvas tienen tangentes de longitud constante? Perrault mostró a Leibniz una vívida realización física de una curva de este tipo al poner su reloj de bolsillo sobre la mesa, extender la cadena de reloj en una línea recta de manera que éste terminó en un borde de la mesa, y al jalar el extremo de la cadena a lo largo de ese borde, que se volvió entonces nuestro eje x y, puesto que en cada momento el reloj se movía en la dirección indicada por la cadena, la cadena misma es una tangente de longitud constante a la curva trazada por el reloj. Leibniz no publicó su solución a este problema hasta 1693.

4. Deduzca y resuelva una ecuación diferencial para la función $y = f(x)$ cuya gráfica resuelve el problema de Perrault. (Vea el problema 28 en los ejercicios de la sección 1.3 y el problema 27 en los ejercicios de repaso del capítulo 2. Tendrá que expresar x como función de y. La solución será un poco más simple si supone que la curva pasa a través del punto $(0, s)$, donde s es la longitud constante de la tangente.)

Una solución al problema de Perrault se conoce como una **tractriz**. Leibniz advirtió que una máquina basada en la realización física de Perrault de la tractriz podría, en efecto, producir mecánicamente una solución gráfica de la ecuación diferencial que define a la tractriz. Este pensamiento lo inspiró a diseñar una máquina que podría hacer lo mismo para otras ecuaciones diferenciales. Tal solucionador de ecuaciones diferenciales mecánicas basado en "movimiento traccional" fue diseñado y construido por muchos matemáticos en diversas épocas justo hasta el advenimiento de las computadoras electrónicas. La tractriz tiene otras aplicaciones de ingeniería que han resistido mejor la prueba del tiempo, lo que incluye aplicaciones en el diseño de objetos mecánicos tales como cojinetes, engranes, válvulas, así como el diseño de bocinas de audio.

En los problemas 5-7, deduzca una ecuación diferencial para la función $y = f(x)$ cuya gráfica satisface la propiedad dada. Luego encuentre una solución de la ecuación diferencial resultante. (Asegúrese de considerar cualesquiera soluciones singulares.) Finalmente advierta que, en contraste con los famosos problemas anteriores, las curvas resultantes habrían sido familiares para los antiguos griegos. Todas son rectas, círculos y secciones cónicas con orientación y ubicaciones particulares, descríbalas como tales.

5. La longitud de la normal en $A = (a, f(a))$ es constante.
6. La longitud de la subnormal en $A = (a, f(a))$ es constante.
7. La longitud de la normal en $A = (a, f(a))$ es igual a la distancia entre $A = (a, f(a))$ y el origen $(0, 0)$.

Ahora haga lo mismo para el problema 8. ¿Las curvas solución incluyen cualesquiera rectas, círculos o secciones cónicas? ¿Todas son algebraicas?

8. La longitud de la subtangente en $A = (a, f(a))$ es proporcional a a.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 2.5

Dos propiedades de la esfera

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo
y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

A pesar de su simple apariencia, la esfera tiene numerosas propiedades geométricas interesantes. Muchas de estas propiedades no son visualmente claras, sino que se revelan únicamente mediante una cercana inspección matemática. Aquí usamos diferentes ecuaciones como herramienta para estudiar este tipo de propiedades.

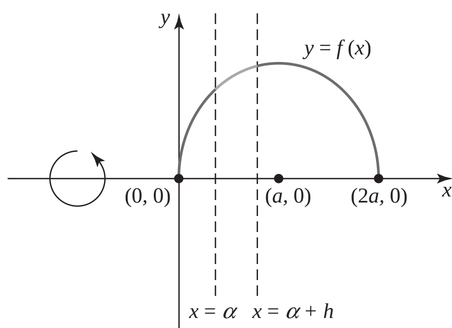


FIGURA 1

Considere una superficie de revolución S formada al girar la gráfica de una función positiva $y = f(x)$ alrededor del eje x. (Vea la figura 1.) De este modo S es **continua** (no tiene bordes pronunciados), suponga que f es diferenciable, así que S es **cerrada** (encierra una región en el espacio tridimensional), suponga que la gráfica de f tiene exactamente dos intersecciones con el eje x. Y puesto que S es **simétrica centralmente** (tiene un centro), suponga que para algún número positivo a la gráfica de f es simétrica con respecto a la recta vertical $x = a$, de manera que sus intersecciones con el eje x se ubican en (0, 0) y ($2a$, 0) y el punto (a, 0) es el centro de S.

Recuerde que el área de la superficie de la rebanada de S que yace entre los planos $x = \alpha$ y $x = \alpha + h$ es

$$A = \int_{\alpha}^{\alpha+h} 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{1}$$

Si la gráfica de f es un semicírculo

$$y^2 + (x - a)^2 = a^2$$
$$y = f\ x\ = \sqrt{a^2 - \ x - a)^2} \tag{2}$$

entonces S es una esfera de radio a. En este caso es fácil calcular que $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = a$ por lo que $A = 2\pi ah$. Advierta que A depende sólo de h (el ancho de la rebanada) y no de α (la localización de la rebanada). Ésta es una propiedad notable de la esfera.

Propiedad 1: El área de una rebanada de una esfera que yace entre dos planos paralelos depende sólo del ancho de la rebanada y no de la localización de la misma.

¿Cualquier otra superficie de revolución satisface esta propiedad? Note que A es una integral sobre un intervalo de ancho h, no de f, sino de la función $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Si A depende sólo de h y no de α, entonces el área bajo la gráfica de $y = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ sobre el intervalo $[\alpha, \alpha + h]$ depende únicamente de h (el ancho del intervalo) y no de α (la ubicación del intervalo). Esto sólo puede pasar si $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es una constante. Para ver esto, dibuje la gráfica de una función no constante e imagine integrarla sobre diferentes intervalos del mismo ancho pequeño.

1. Demuestre que si $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es constante entonces para alguna constante c

$$[f(x)]^2 + [f(x)f'(x)]^2 = c^2. \tag{3}$$

   Advierta que (3) es una ecuación diferencial de primer orden no lineal.

2. La apariencia de $f(x)f'(x)$ sugiere la sustitución $u = [f(x)]^2$. Emplee esta sustitución para reducir (3) a una ecuación diferencial separable para x como una función de u y encuentre todas las soluciones de (3). (¡Cuidado! Hay una solución singular que no se mostrará en la familia de parámetro 1 de soluciones de esta ecuación separable. ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta solución singular?)
3. ¿Cuáles funciones f en la figura 1 producen una superficie de revolución centralmente simétrica cerrada y continua S que satisface la propiedad 1?

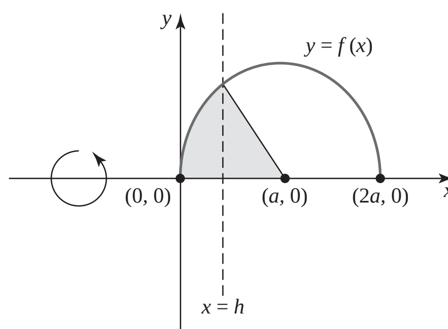


FIGURA 2

Considere ahora la región en forma de cono de helado producida al rotar la región de la figura 2 alrededor del eje x. Ésta consiste de un cono circular recto, cuyo vértice está en (a, 0) y cuya base está en $x = h$, cubierta por un **segmento extremo** de esa rebanada por el plano $x = h$. El volumen de esta región es

$$V = \underbrace{\frac{1}{3}\pi[f(h)]^2(a - h)}_{\text{volumen del cono}} + \underbrace{\int_0^h \pi[f(x)]^2\,dx}_{\text{volumen del segmento extremo}} \tag{4}$$

Cuando S es una esfera esta región recibe el nombre de **cono esférico** y el segmento extremo un **segmento esférico** de altura h. En este caso un cálculo utilizando (2) en (4) revela que $V = \frac{2}{3}\pi a^2 h$. Ésta es otra propiedad interesante de la esfera.

Propiedad 2: El volumen de un cono esférico es proporcional a la altura *h* del segmento esférico que forma el extremo de un cono esférico.

¿Alguna otra superficie de revolución satisface esta propiedad? Esto es, suponga que S es una superficie de revolución centralmente simétrica, cerrada y continua como en la figura 2 y que el volumen V dado por (4) es proporcional a h; ¿debe ser S una esfera?

4. Muestre que si V es proporcional a h, entonces para alguna constante c

$$\int_0^h [f(x)]^2\,dx + \frac{1}{3}[f(h)]^2(a - h) = ch. \tag{5}$$

5. Derive ambos lados de (5) con respecto a h, recordando el segundo teorema fundamental del cálculo, para obtener:

$$\frac{2}{3}[f(h)]^2 + \frac{2}{3}f(h)\,f'(h)\,(a - h) = c \qquad \text{o, sustituir } h \text{ con } x,$$

$$[f(x)]^2 + f(x)\,f'(x)\,(a - x) = c \quad \text{(no la misma “}c\text{”).} \tag{6}$$

6. Use la sustitución $u = [f(x)]^2$ para reducir (6) a una ecuación diferencial separable para u como función de x y encuentre una familia de parámetro 1 de soluciones.
7. ¿Cuáles funciones f en la figura 2 producen una superficie de revolución S centralmente simétrica, cerrada y continua que satisface la propiedad 2?

Reconocimiento: Gracias a Vincent Coll por la útil discusión sobre este tema.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN **2.7**

Fechamiento de potasio-argón

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

El potasio mineral, cuyo símbolo químico es K, es el octavo elemento más abundante en la corteza terrestre, conformando casi 2% de ella en peso, y uno de sus isótopos que ocurren naturalmente, K-40, es radiactivo. El decaimiento radiactivo de K-40 es más complejo que el del carbono 14, pues cada uno de sus átomos decae a través de una de dos diferentes reacciones de decaimiento nuclear en una de dos sustancias diferentes: el calcio mineral 40 (Ca 40) o el gas argón 40 (Ar 40). Los métodos de fechamiento se han desarrollado utilizando ambos de estos productos de decaimiento. En cada caso, la edad de una muestra se calcula utilizando la proporción de dos números; la cantidad del isótopo **padre** K 40 en la muestra y la cantidad del isótopo **hijo** (Ca 40 o Ar 40) en la muestra que es **radiogénico**, esto es, que se originó del decaimiento del isótopo padre después de la formación de la roca.

La cantidad de K 40 en una muestra se calcula con facilidad. K 40 comprende 1.17% del potasio que ocurre en forma natural, y este pequeño porcentaje se distribuye bastante uniformemente, de manera que la masa de K 40 en la muestra es sólo 1.17% de la masa total del potasio en la muestra, lo cual puede medirse. Pero por varias razones es complicado, y algunas veces problemático, determinar qué cantidad del Ca 40 en una muestra es radiogénico. En contraste, cuando se forma una roca ígnea por actividad volcánica, la totalidad del gas argón (y otros) atrapado previamente en la roca es desalojada por el calor intenso. En el momento de que la roca se enfría y se solidifica, el gas atrapado dentro de ella tiene la misma composición que la atmósfera. Hay tres isótopos estables del argón, y en la atmósfera éstos ocurren en las siguientes abundancias relativas: 0.063% Ar 38, 0.337% Ar 36 y 99.60% Ar 40. De estos sólo uno, el Ar 36 no es creado radiogénicamente por el decaimiento de algún elemento, así que cualquier Ar 40 en exceso de 99.60/0.337 = 295.5 veces la cantidad de Ar 36 debe ser radiogénico. De esta manera la cantidad de Ar 40 radiogénico en la muestra puede determinarse a partir de las cantidades de Ar 40 y Ar 36 en ella, la cual puede medirse.

Suponiendo que tenemos una muestra de roca para la cual la cantidad de K 40 y la cantidad de Ar 40 radiogénico se han determinado, ¿cómo podemos calcular la edad de la roca? Sea $P(t)$ la cantidad de K 40, $A(t)$ la cantidad de Ar 40 radiogénico y $C(t)$ la cantidad de Ca 40 radiogénico en la muestra como función del tiempo t en años desde la formación de la roca. Entonces el decaimiento de K 40 se modela por medio de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dA}{dt} = k_A P(t)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_C P(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = -(k_A + k_C)P(t)$$

donde $k_A = 0.581 \times 10^{-10}$ año^{-1} y $k_C = 4.962 \times 10^{-10}$ año^{-1}.

Problemas relacionados

1. Encuentre una fórmula para $P(t)$. ¿Cuál es la vida media de K 40?
2. Demuestre que

$$A(t) = \frac{k_A}{k_A + k_C} P(t)\left(e^{(k_A + k_C)t} - 1\right).$$

3. Después de un tiempo muy largo (esto es, considere que $t \to \infty$), ¿qué porcentaje del K 40 originalmente presente en la muestra se desintegra a Ar 40 y qué porcentaje se desintegra a Ca 40?
4. Demuestre que la edad t de la roca como una función de las cantidades presentes $P(t)$ de K 40 y $A(t)$ de Ar 40 radiogénico en la muestra es

$$t = \frac{1}{k_A + k_C} \ln\left[\frac{A(t)}{P(t)}\left(\frac{k_A + k_C}{k_A}\right) + 1\right].$$

5. Suponga que se encuentra que cada gramo de muestra de roca contiene 8.6×10^7 gramos de Ar 40 radiogénico y 5.3×10^{-6} gramos de K 40. ¿Qué tan vieja es la roca?

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 2.8

Tiempo engañoso: isócronas de Huygens y Leibniz

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

Poco antes de su muerte, Galileo Galilei (1564-1642) inició el primer intento para diseñar un reloj accionado por péndulo. En esa época, los relojes se accionaban dejando caer pesos o resortes, e incluso el mejor de ellos ganaba o perdía varios minutos al día. Galileo esperaba alcanzar una mayor exactitud con un péndulo. En particular, creía que había demostrado matemáticamente y verificado de manera experimental que un péndulo es isócrono, esto es, que el tiempo que tarda en completar una oscilación completa es el mismo sin importar el tamaño de la oscilación. En consecuencia, razonaba, la frecuencia de oscilación de un péndulo es un marcador especialmente confiable para el paso del tiempo puesto que mantiene estabilidad incluso si hay variaciones en el tamaño de la oscilación del péndulo. Galileo no vivió para completar su diseño, y aunque su hijo Vicenzio empezó a construir un reloj accionado por péndulo, murió en 1649 antes de que pudiera terminarlo.

Hablando de manera práctica, la idea de Galileo fue oportuna; el reloj accionado por péndulo resultó ser el siguiente gran paso hacia el registro del tiempo. Pero su apreciada creencia en la isocronicidad del péndulo se convirtió en un error. El gran científico y matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) construyó el primer reloj accionado por péndulo en 1656 y que mantenía el tiempo dentro de un minuto por día, y en menos de dos años Huygens y otros produjeron incluso mejores modelos que mantenían el tiempo exacto dentro de diez segundos al día. Sin embargo, durante este trabajo mediciones cuidadosas revelaron que un péndulo no es de hecho perfectamente isócrono, aunque para pequeñas oscilaciones de unos cuantos grados es bastante cercano a eso. La implicación inmediata de este descubrimiento fue simple. Con relojes con péndulos que oscilan únicamente unos cuantos grados. Sin embargo, Huygens quería ir más allá, y empezó a repetirse la pregunta: ¿cómo puede alcanzarse la isocronicidad perfecta si no es con un péndulo simple?

Para generalizar el movimiento del extremo libre de un péndulo durante la mitad de una oscilación completa, desde su punto más alto al más bajo, considere la figura 1. Hay una cuenta que se suelta desde una posición inicial, (x_0, y_0) en el tiempo $t = 0$ y que desliza hacia abajo en un alambre en el plano xy y que es lo suficientemente resbaloso para que la fricción sea despreciable, alcanzando a la larga el origen (0, 0). En el caso de un alambre circular, la cuenta se mueve como si estuviera oscilando en el extremo de un péndulo unido al centro del círculo. (Ya sea el alambre o el péndulo aplican una fuerza sobre la cuenta perpendicular a su dirección de movimiento que la restringe a moverse a un semicírculo.) Para permitir que la cuenta se mueva de otras maneras, simplemente consideramos alambres de diferentes formas que conectan (x_0, y_0) con (0, 0). En estas condiciones la pregunta de Huygens se convierte en: ¿para qué forma la cuenta descenderá hacia el origen en el mismo tiempo, sin que importe su punto de inicio (x_0, y_0)? En 1659, Huygens encontró la respuesta a su pregunta en una realización ingeniosa notable de la física geométrica sin la ayuda del cálculo o las ecuaciones diferenciales, ninguno de los cuales aún existía. Podemos responder esta cuestión de una manera mucho más sencilla. A partir del cálculo, necesitamos conocer si $s(t)$ representa la distancia a lo largo de la cuerda que la cuenta tiene que recorrer en el tiempo t, la velocidad ds/dt de la cuenta esta dada en términos de sus velocidades horizontal y vertical dx/dt y dy/dt por

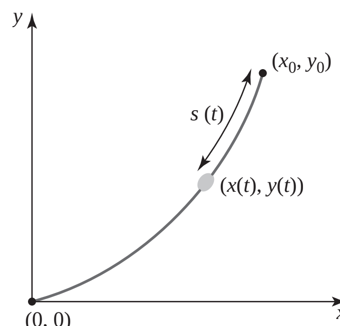


FIGURA 1

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \qquad (1)$$

Y de acuerdo con la física, necesitamos conocer lo que el mismo Galileo descubrió acerca del movimiento de un cuerpo que cae que se suelta (con velocidad inicial cero) desde una altura y_0:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(y_0 - y), \qquad (2)$$

donde g es la aceleración del objeto en caída libre debida a la gravedad.

Problemas relacionados

1. **La isócrona de Huygens.** Considere la longitud de arco s indicado en la figura 1 como una función de y a lo largo de la cuerva: $s = f(y)$. Entonces podemos calcular el tiempo que tarda la cuenta en descender desde (x_0, y_0) hasta el origen utilizando las ecuaciones (1) y (2) como sigue:

$$T(y_0) = \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{dy}\,dy = \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dy}\,dy = \int_{y_0}^{0} \left(\frac{-1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\right) f'(y)\,dy$$
$$= \int_{0}^{y_0} \frac{f'(y)}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\,dy.$$

a) Utilice el cambio de variable $y = y_0 z$ para mostrar que

$$T(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{f'(zy_0)\sqrt{y_0}}{\sqrt{1 - z}}\,dz.$$

b) Deseamos encontrar f tal que T es una función constante de y_0. Ciertamente esto será verdad si $0 < z < 1$, $f'(zy_0)\sqrt{y_0}$,

es una función sólo de z y no de y_0. Podemos asegurar lo anterior dejando $\frac{\partial}{\partial y_0}(f'(zy_0)\sqrt{y_0}) = 0$. Muestre que esta condición lleva a una ecuación diferencial no lineal $2f''(y)y + f'(y) = 0$ o para $0 < y < y_0$.

c) Esta última ecuación diferencial es de primer orden en f'. Resuélvala para demostrar que $f'(y) = c/\sqrt{y}$ para una constante $c > 0$.

d) Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre $(dy/dt)^2$ da por resultado $(ds/dy)^2 = (dx/dy)^2 + 1$. Use el resultado de c) para mostrar que

$$x = \int \sqrt{\frac{c - y}{y}}\, dy.$$

e) Emplee la sustitución trigonométrica $y = c\ \text{sen}^2\theta$, donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y las "identidades del ángulo medio" $\text{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ y $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, para demostrar que la curva que buscamos puede parametrizarse mediante

$$x = \frac{c}{2}(\phi + \text{sen}\,\phi) + k$$

$$y = \frac{c}{2}(1 - \cos\phi)$$

para alguna constante k y $0 \leq \phi \leq \pi$.

f) Demuestre que la curva dada en *e*) pasa por $(x, y) = (0, 0)$ sólo cuando $k = 0$, y que en este caso pasa por $(x, y) = (0, 0)$ cuando $\phi = 0$ y a través de (x_0, y_0) cuando ϕ_0 satisface

$$x_0 = \frac{c}{2}(\phi_0 + \text{sen}\,\phi_0)$$

$$y_0 = \frac{c}{2}(1 - \cos\phi_0).$$

g) Demuestre que este último sistema de ecuaciones puede resolverse para c y ϕ_0 en términos de x_0 y y_0 si y sólo si $0 < y_0/x_0 \leq 2/\pi$. (Así que una isócrona conecta (x_0, y_0) con el origen sólo cuando se cumple esta condición.)

h) La curva parametrizada en *e*) algunas veces se denomina una **cicloide invertida**. Cuando $k = 0$, se traza mediante un punto sobre un círculo de radio $c/2$ que viaja a lo largo de la línea $y = c$ mientras cuelga debajo de esta línea. Dibuje un diagrama de lo anterior, mostrando que la posición del círculo y el punto para $\phi = 0$, $\pi/2$ y π. (Para empezar, observe la cicloide en cualquier libro de cálculo o en la red.)

Huygens diseñó y construyó relojes de péndulos modificados para forzar el extremo libre del péndulo a seguir la trayectoria de una cicloide invertida. Pero aunque estas modificaciones inspiraron a más grandes matemáticos a partir de Huygens, no fueron de valor perdurable en el diseño de relojes puesto que resultó que introducían más problemas que los que resolvían. Huygens también se convirtió en el mentor matemático de Gottfried Leibniz (1646-1716), quien fue después uno de los fundadores del cálculo. El mismo Leibniz planteó un problema diferente con un sabor similar en 1687: ¿qué forma debe tomar el alambre de la figura 1 de manera que el tiempo que tarde la cuenta en caer una determinada distancia vertical sea el mismo en cualquier parte a lo largo de la trayectoria de descenso? Esto es equivalente a que la velocidad de la cuenta sea constante. Huygens fue el primero en responder a este reto, argumentando la solución y probando geométricamente que funcionaba. Empleando ecuaciones diferenciales, podemos resolverlo de manera sistemática. Necesitamos la siguiente generalización de la ecuación (2) que incluye una velocidad inicial v_0 distinta de cero para la cuenta:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(y_0 - y) + v_0^2. \qquad (3)$$

2. **La isócrona de Leibniz.** Sea la velocidad vertical constante dy/dt de la cuenta $v < 0$. Entonces puesto que $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = (dy/dt)^2[1 + (dx/dy)^2]$, tenemos, $v_0^2 = v^2(1 + m^2)$ donde $m = dx/dy$ a (x_0, y_0).

   a) Use las ecuaciones (1) y (3) para demostrar que

   $$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{2g}{v^2}(y_0 - y) + m^2.$$

   b) Encuentre la solución general de esta ecuación diferencial.

   c) Demuestre que al requerir que la curva solución pase por (x_0, y_0) se produce la solución particular

   $$\frac{3g}{v^2}(x_0 - x) + m^3 = \left[\frac{2g}{v^2}(y_0 - y) + m^2\right]^{3/2}.$$

   Bajo el cambio de variable $X = \frac{3g}{v^2}(x_0 - x) + m^3$, $Y = \frac{2g}{v^2}(y_0 - y) + m^2$ esta ecuación se vuelve $X^2 = Y^3$, la gráfica de la cual se conoce como una **parábola semicúbica**.

   d) Muestre que una cuenta que parte de (x_0, y_0) a lo largo de la isócrona descrita *c*) alcanza el origen cuando se cumple la siguiente condición:

   $$\left(\frac{3g}{v^2}x_0 + m^3\right)^2 = \left(\frac{2g}{v^2}y_0 + m^2\right)^3.$$

4. Modifique los pasos tomados en los incisos *a*)-*d*) del problema 2 para responder la siguiente pregunta: ¿qué forma debe tomar el alambre en la figura 1 de manera que el tiempo que tarda la cuenta en moverse una distancia horizontal determinada es el mismo en cualquier parte a lo largo de la trayectoria de descenso? Esto es equivalente a que la velocidad horizontal de la cuenta sea constante.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 3.8

Control de la vibración: aislamiento de la vibración

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

Una parte importante de la ingeniería mecánica es la supresión de vibraciones indeseables en maquinaria y estructuras. Si bien ésta es un área activa de investigación y desarrollo, los principios básicos que hay detrás de las estrategias de control de vibración usadas más comúnmente datan de hace 100 años y pueden ilustrarse con modelos muy simples de masa/resorte. Además, el análisis de estos modelos no requiere nada más allá de la teoría básica de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Aquí investigamos una estrategia para el control de vibración que puede modelarse utilizando una sola ecuación. En un proyecto posterior, usted investigará una estrategia diferente que se modela mediante un sistema de ecuaciones.

Suponga que una máquina (por ejemplo un motor de automóvil) que vibra en el curso de su operación debe montarse sobre algún tipo de base. Si la máquina se monta rígidamente sobre la base, sus vibraciones se transmitirán hacia y a través de la base. Esto podría ocasionar varios problemas, entre los que se incluye dañar la base o los soportes o una incomodidad inaceptable para las personas que utilizan el motor.

Una manera natural de tratar de minimizar tales efectos indeseables es insertar un aparato de montaje protector entre la maquinaria y la base. (En el caso de un motor de automóvil, este último no está unido rígidamente al auto, sino con partes llamadas soportes de motor.) Este tipo de dispositivo protector, llamado **aislador de vibración**, consiste por lo común en uno o más cojinetes de material elástico (hule, corcho o elastómeros más exóticos), un conjunto de resortes en espiral (tales como los que se encuentran en el interior de un colchón), una cámara sellada que contiene aire bajo presión (como el referido comúnmente resorte de aire) o alguna combinación de estos. Independientemente de los detalles de su diseño (y han sido otorgadas cientos de patentes para tales diseños), un aislador de vibración puede idealizarse mediante la configuración que se indica en la figura 1a). La máquina se representa mediante una masa *m,* la elasticidad del aislador por un resorte que tiene constante de resorte *k*, y el amortiguamiento del aislador por medio de un amortiguador que tiene constante de resorte β. Éste es meramente el sistema masa-resorte analizado en la sección 3.8. La ecuación que gobierna el movimiento de la masa *m* es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

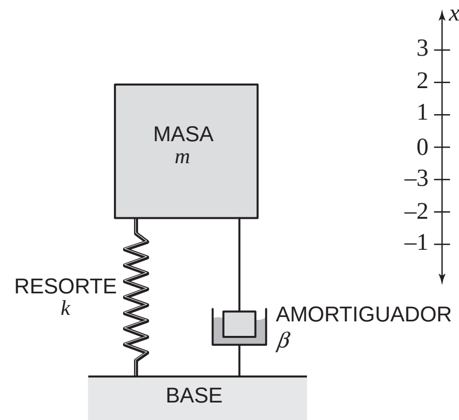


FIGURA 1(a)

donde *x* representa el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio, *t* es el tiempo, y la vibración de la máquina se representa por medio de un término forzado senoidal de la forma F_0 sen ωt. Cuantificaremos la eficacia de este arreglo a partir de su **transmisibilidad *T***:

$$T = \frac{\text{fuerza máxima transmitida a la base a través del aislador de vibración}}{\text{fuerza máxima ejercida sobre la base por una máquina unida rígidamente}} = \frac{F_T}{F_0}.$$

Puesto que los términos transitorios en la solución general de la ecuación anterior decaen exponencialmente con el tiempo, calcularemos la transmisibilidad con base en la solución de estado estable de (1). A fin de cuentas, deseamos entender cómo depende la transmisibilidad de los parámetros *k* y β.

1. Recuerde que una solución de estado permanente puede encontrarse en la forma

$$x_s = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{2}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Al sustituir la primera de estas formas en (1), demuestre que c_1 y c_2 satisfacen el sistema de ecuaciones

$$(k - m\omega^2)c_2 - \beta\omega c_1 = F_0$$
$$\beta\omega c_2 + (k - m\omega^2)c_1 = 0$$

y que

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\beta\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}.$$

2. La fuerza ejercida sobre la base a través del aislador de vibración es $\beta\frac{dx_s}{dt} + kx_s$. Use la segunda forma de X_s en (2) para demostrar que la magnitud máxima de esta fuerza es

$$F_T = A\sqrt{k^2 + (\beta\omega)^2}$$

y que la transmisibilidad puede expresarse como

$$T = \sqrt{\frac{1 + \left(2\frac{\beta}{\beta_c}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\frac{\beta}{\beta_c}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del resorte, $\beta_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$ es el valor de β que produce el amortiguamiento crítico en (2).

Advierta que hemos expresado T en términos de dos cantidades adimensionales: β/β_c y ω/ω_n. Así que es posible utilizar esta expresión para cuantificar la dependencia de T respecto a ω (esto es, la eficacia del aislador de vibración como una función de la frecuencia de la vibración de la máquina) de una manera que no hace referencia a una elección arbitraria de unidades.

3. Emplee una herramienta de graficación para graficar T como función de ω/ω_n para $\beta/\beta_c = 0$, 1/4, 1/2, 3/4 y 1, todos en el mismo conjunto de ejes. (Una ventana de observación de $0 \leq \omega/\omega_n \leq 3$ por $0 \leq T \leq 3$ mostrará las características relevantes de estas cinco gráficas.)
4. Mucho de lo que puede deducirse de estas gráficas, algunas de las cuales quizá no sean intuitivamente obvias y tal vez incluso parezcan contraintuitivas.

   a) Verifique tanto gráfica como algebraicamente que el punto $\sqrt{2}$ aparece sobre cada gráfica independientemente del valor de β/β_c.

   b) ¿Para qué valores de ω/ω_n el aislador de vibración reduce el valor máximo de la fuerza transmitida a la base ($T < 1$)? ¿Hay valores de ω/ω_n para los cuales el aislador de vibración empeora las cosas ($T > 1$)? Sus respuestas deben ser independientes de β/β_c.

   c) Verifique sus respuestas a *b*) algebraicamente trabajando con las desigualdades ($T < 1$) y ($T > 1$).

   d) La incorporación de cierto amortiguamiento ($\beta > 0$) protege la base contra la resonancia que ocurriría para $\beta = 0$ si ω debe, temporalmente o por algún accidente, acercarse a ω_n. Para valores fijos de ω y ω_n tales que ω/ω_n está dentro del rango determinado en *b*), ¿el incremento de la constante de amortiguamiento β del aislador de vibración (y aumentando también en consecuencia β/β_c) mejora o deteriora la eficacia?

   e) Resuma sus resultados para el ingeniero. ¿La constante de resorte k del aislador de vibración debe ser grande (correspondiendo a resortes "rígidos") o pequeña (correspondiendo a resortes "suaves")? ¿Cuál sería su consejo acerca del grado de amortiguamiento (es decir, el tamaño de β?

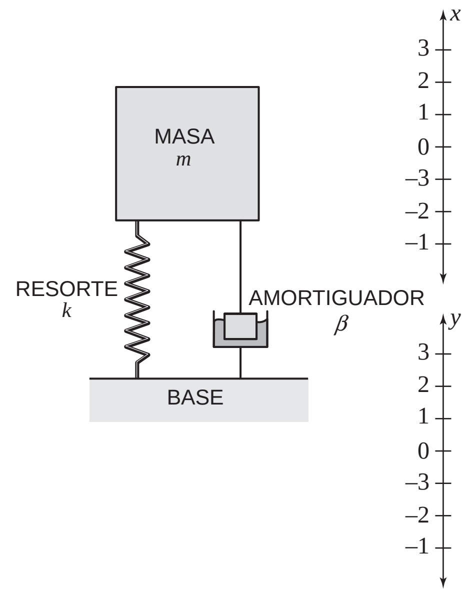


FIGURA 1(b)

El mismo tipo de aislador de vibración también puede emplearse en el sentido opuesto al que se consideró antes: para proteger un objeto montado sobre una base de las vibraciones de la misma. Por ejemplo, un reproductor de CD montado en un automóvil necesita protegerse de las vibraciones del automóvil. En una escala más grande, edificios enteros han sido construidos sobre cimientos que incorporan aisladores de vibración. Para modelar esta situación, refiérase a la figura 1b), donde x representa el desplazamiento vertical del objeto (masa m) de su posición de equilibrio y $y = Y_0$ sen ωt representa un movimiento senoidal de la base de manera que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y) - \beta\frac{d}{dt}(x - y). \qquad (3)$$

5. Sustituya la forma postulada de y en (3) para producir una ecuación diferencial de x de la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = Y_0\sqrt{k^2 + (\beta\omega)^2}\,\text{sen}\,(\omega t + \psi).$$

   Muestre entonces que una solución de estado uniforme de esta última ecuación puede encontrarse en la forma

$$x_s = TY_0\,\text{sen}\,(\omega t + \psi + \phi)$$

   donde T es como antes. (*Sugerencia*: ¡la mayor parte del trabajo ya se realizó en el problema 1!)

De este modo la transmisibilidad T es también una medida de la eficacia de un aislador de vibración desde este punto de vista alternativo, pero en referencia a la amplitud del movimiento transmitido desde una base hasta un objeto montado en vez de la amplitud de la fuerza transmitida desde la máquina montada a una base.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 3.11

Control de la vibración: absorbedores de la vibración

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

Estructuras grandes tales como edificios y puentes que se construyen a partir de muchas partes no pueden hacerse completamente rígidas. Éstas se mueven en respuesta a perturbaciones naturales, tales como el viento o la actividad sísmica, y por perturbaciones producto de la actividad humana, tales como el flujo de tráfico en un puente. En particular, cada estructura tiene un conjunto de frecuencias especiales llamadas frecuencias naturales, o frecuencias resonantes, a las cuales responderán en particular intensamente. Cuando se somete a fuerzas periódicas a una de estas frecuencias naturales, una estructura puede responder con vibraciones de una amplitud suficientemente grande como para hacer que sea incómodo para los ocupantes de la estructura, o incluso quizá peligrosa para la estructura misma. Si los ingenieros esperan que una estructura se someta a una fuerza periódica en o cerca de una de sus frecuencias naturales, deben incorporar en su diseño un dispositivo especial llamado **absorbedor de vibración sintonizado**. Éste es un dispositivo que suprime la vibración de la estructura a una de sus frecuencias naturales transfiriendo la energía que causaría tal vibración a la vibración de una masa secundaria. Los absorbedores de vibración sintonizados también se usan en estructuras más pequeñas. Por ejemplo, quizá haya visto pequeños objetos en forma de barras con pesas colgando de una línea de transmisión eléctrica. Son absorbedores de vibración sintonizados denominados amortiguadores Stockbridge que se instalan para proteger las líneas eléctricas de las vibraciones inducidas por el viento. Los absorbedores de vibración sintonizados también pueden encontrarse en maquinaria de todo tipo. (Por ejemplo, casi todos los automóviles contienen uno o más absorbedores de vibración sintonizados.)

Sin importar qué tan complicada pueda ser una estructura, nos interesa únicamente una de sus frecuencias naturales particulares, por lo que para nuestros propósitos una estructura puede modelarse como un sistema masa/resorte cuya frecuencia resonante representa la frecuencia natural problemática de la estructura. Además, sin importar qué tan complejos puedan ser los detalles de su diseño (y hay muchas variaciones basadas en aspectos tales como las masas que cuelgan de cables, las masas unidas a resortes, las masas suspendidas por péndulos e incluso los tanques de agua en movimiento) un absorbedor de vibración sintonizado es en esencia un sistema de masa/resorte unido a la estructura. Consecuentemente podemos usar el sistema acoplado de masa/resorte de la figura 1a) para modelar una estructura (masa m_1 *y* constante de resorte k_1) equipado con un absorbedor de vibración sintonizado (masa m_2 *y* constante de resorte k_2).

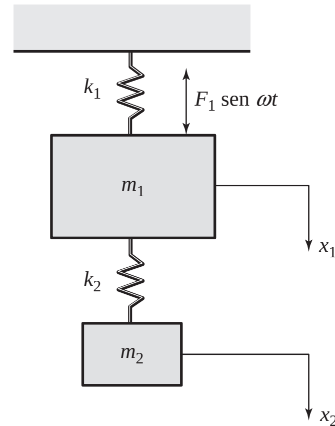


FIGURA 1(a)

De la sección 3.12, ya tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de tal sistema de masa/resorte, al cual sólo necesitamos agregar un término de forzamiento senoidal que actúe sobre m_1:

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1 \operatorname{sen} \omega t \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Deseamos investigar el comportamiento de este sistema cuando $t \to \infty$ para diferentes valores de la frecuencia de forzamiento ω, y afirmamos que podemos hacer esto determinando una solución particular del sistema, ignorando la solución general de la versión homogénea del mismo. Se podría objetar que puesto que no hay términos de amortiguamiento en el sistema, la solución general de la versión homogénea del sistema tiene términos que persisten cuando $t \to \infty$ para ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, si fuéramos a agregar un poco de amortiguamiento al sistema, la solución general de la versión homogénea del sistema resultante decaería exponencialmente cuando $t \to \infty$. Y en una estructura mecánica real, siempre hay algo de amortiguamiento. Es por ello que en el contexto de la modelación de una estructura mecánica real, podemos considerar una solución particular del sistema que represente el comportamiento de cualquier solución del sistema cuando $t \to \infty$.

A partir de nuestra experiencia con el método de coeficientes indeterminados para una sola ecuación de segundo orden, adquiere sentido buscar una solución particular de este sistema en la cual x_1 y x_2 son cada una de la forma c_1 sen $\omega t + c_2 \cos \omega t$. Pero puesto que no hay derivadas de primer orden y la segunda derivada de una función seno sigue siendo una función seno, podemos simplificar el asunto y buscar una solución particular de la forma

$$x_1 = A \operatorname{sen} \omega t, \quad x_2 = B \operatorname{sen} \omega t \tag{2}$$

donde A y B son constantes por determinar.

1. Al insertar la forma indicada en (2) en (1), muestre que A y B satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)A - k_2 B &= F_1 \\ -k_2 A + (k_2 - m_2\omega^2)B &= 0 \end{aligned}$$

y que

$$A = \left(\frac{F_1}{k_1}\right)\left[\frac{1 - (\omega/\omega_2)^2}{\left(1 + \mu\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) - \mu\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}\right]$$

donde $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ y $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ son las frecuencias naturales sólo de la estructura y sólo del absorbedor, respectivamente, $\mu = m_2/m_1$ es la razón entre la masa del absorbedor y la masa de la estructura, y F_1/k_1 es el desplazamiento estático de m_1 bajo la fuerza constante F_1.

Advierta que la masa m_1 no vibra en absoluto cuando la frecuencia natural ω_2 del absorbedor es igual a la frecuencia de forzamiento ω. De modo que para eliminar vibraciones de la estructura a su frecuencia natural, sintonizamos el absorbedor a la frecuencia natural de la estructura dejando $\omega_2 = \omega_1$. Es conveniente medir la amplitud de la vibración de la estructura con la cantidad $\left|\frac{A}{F_1/k_1}\right|$, la cual es adimensional y por lo tanto independiente de las unidades particulares de medición:

$$\frac{A}{F_1/k_1} = \frac{1 - (\omega/\omega_1)^2}{\left(1 + \mu - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) - \mu}.$$

2. Use una herramienta de graficación para graficar $\left|\frac{A}{F_1/k_1}\right|$ como función de $\frac{\omega}{\omega_1}$ para $\mu = 0.1$, 0.2, 0.3 y 0.4 en diferentes conjuntos de ejes. (Una ventana de observación de $0 \le \frac{\omega}{\omega_1} \le 2$ por $0 \le \left|\frac{A}{F_1/k_1}\right| \le 4$ mostrará los rasgos relevantes de estas cuatro gráficas.)

Observará que la única frecuencia natural ω_1 de la estructura ha sido sustituida por dos frecuencias naturales del ensamble estructura-absorbedor. Cuando la frecuencia de forzamiento ω coincide con alguna de estas dos frecuencias naturales, el absorbedor hace que las cosas empeoren induciendo vibraciones enormes de la estructura. Sin embargo, el absorbedor es efectivo para frecuencias forzadas de forzamiento cercanas a la frecuencia natural ω_1 de la estructura.

3. Con base en las gráficas que usted elaboró antes:
   a) ¿Qué sucede con las dos frecuencias naturales del ensamble estructura-absorbedor cuando aumenta μ?
   b) ¿Qué sucede con el intervalo de la frecuencia de forzamiento ω sobre el cual el absorbedor es efectivo?

Para suprimir la resonancia del ensamble estructura-absorbedor en sus dos frecuencias naturales, y disipar la energía que se transfiere de la estructura a las vibraciones de la masa del absorbedor m_2, podemos incorporar amortiguamiento en el absorbedor. Esto se representa en la figura 1b) mediante un amortiguador que proporciona amortiguamiento viscoso con una constante de amortiguamiento de β. El absorbedor de vibración amortiguado que resulta a veces se denomina **amortiguador de masa sintonizado**. Para escribir su ecuación de movimiento, sumamos los términos de amortiguamiento apropiados a (1) y obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + \beta(x_2' - x_1') + F_1 \operatorname{sen} \omega t \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - \beta(x_2' - x_1'). \end{aligned} \qquad (3)$$

Una solución de estado uniforme senoidal puede deducirse para este sistema de la forma

$$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1), \quad x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) \qquad (4)$$

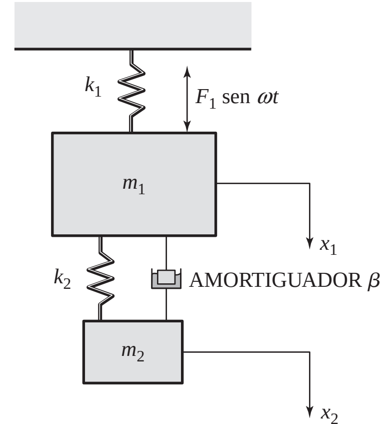


FIGURA 1(b)

donde A y B son constantes por determinar. Renunciamos a este cálculo aquí (porque es bastante largo y dificultoso), pero el resultado es que la amplitud A con la cual vibra la masa m_1 satisface

$$\left|\frac{A}{F_1/k_1}\right| = \sqrt{\frac{\left(2\frac{\beta}{\beta_c}s\right)^2 + (s^2 - r^2)^2}{\left(2\frac{\beta}{\beta_c}s\right)^2(s^2 - 1 + \mu s^2)^2 + (\mu r^2 s^2 - (s^2 - 1)(s^2 - r^2))^2}} \qquad (5)$$

donde μ, ω_1 y ω_2 son como antes, $r = \omega_2/\omega_1$, $\beta_c = 2\ m_2\ \omega_1$ y $s = \omega/\omega_1$.

4. *a*) Verifique que cuando $\beta = 0$, esta expresión se reduce a la expresión que se encontró en el problema 1.
   b) ¿Suponga que sintonizamos el amortiguador de masa sintonizada como lo hicimos en el caso no amortiguado ($r = 1$) y dejamos $\mu = 0.1$. Utilice una herramienta de graficación para graficar $\left|\frac{A}{F_1/k_1}\right|$ como una función de s para $\beta/\beta_c. = 1/20$, 1/8 y 1/2 en el mismo conjunto de ejes. (Una ventana de observación de $0.7 \le s \le 1.3$ mediante $0 \le \left|\frac{A}{F_1/k_1}\right| \le 18$ mostrará los rasgos relevantes de estas tres gráficas.)
   c) Describa cómo el comportamiento del amortiguador de masa sintonizado cambia cuando β/β_c aumenta de 0 a 1/2.

(Quizá desee incluir gráficas adicionales para valores de β/β_c entre los tres valores dados antes.) Compare su desempeño con el del absorbedor de vibración amortiguado para valores pequeños de β/β_c y para valores grandes de β/β_c, teniendo presente que hay dos cuestiones que considerar: supresión efectiva de las vibraciones en (y cerca) la frecuencia natural ω_1 de la estructura y la supresión de las resonancias potencialmente peligrosas del ensamble estructura-absorbedor a sus dos frecuencias naturales.

Debe notar el hecho visualmente asombroso de que hay dos puntos a través de los cuales pasan las tres gráficas del problema 4b). Puede demostrarse que para cualquier elección fija de r y μ, hay dos puntos tales que las gráficas de $\left|\dfrac{A}{F_1/k_1}\right|$ contra s pasan por estos dos puntos para todos los valores de β/β_c. La idea clásica de sintonización "óptima" para el amortiguador de masa sintonizado es elegir los parámetros r y β/β_c de manera que estos dos puntos especiales compartan el mismo valor de $\left|\dfrac{A}{F_1/k_1}\right|$, y por ello es que este valor común es (aproximadamente) el valor máximo de $\left|\dfrac{A}{F_1/k_1}\right|$.

5. Las fórmulas clásicas dadas en muchos libros de texto y manuales de ingeniería de vibraciones para la sintonización óptima del amortiguador de masa sintonizado son

$$r = \frac{1}{1 + \mu}$$

y

$$\frac{\beta}{\beta_c} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}.$$

Para un valor fijo de $\mu = 0.1$:

a) Emplee una herramienta de graficación para graficar las mismas tres gráficas que usted obtuvo en 4b) sobre el mismo conjunto de ejes, pero con $r = 1/(1 + \mu)$ en vez de $r = 1$. ¿Qué hace especial a esta elección de r?

b) Ahora emplee una herramienta de graficación para trazar la gráfica individual que corresponde a $r = 1/(1 + \mu)$ y $\dfrac{\beta}{\beta_c} = \sqrt{\dfrac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}$. ¿Qué hace que esta elección de $\dfrac{\beta}{\beta_c}$ sea especial?

Por último, advertimos que justo como puede eliminarse el mecanismo amortiguador del amortiguador de masa sintonizado de la figura 1b) para producir un absorbedor de vibración sintonizado no amortiguado con base únicamente en el resorte, como se analizó en los problemas 1-3, también es factible eliminar el resorte para producir un absorbedor de vibración basado en únicamente amortiguamiento viscoso que se denomina **absorbedor de vibración viscoso**. Este tipo de absorbedores son menos efectivos que los amortiguadores de masa sintonizados, pero son más fáciles de construir. Su desempeño puede analizarse dejando $k_2 = 0$ en (5).

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 11.4

Formación de ondas: convección, difusión y flujo de tráfico

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

La ecuación de calor y la ecuación de onda se obtuvieron en la sección 11.2 para describir fenómenos muy diferentes. Y en realidad su solución (estudiada en las secciones 11.3 y 11.4, respectivamente) se comportan de modo muy distinto. Sin embargo, muchas ecuaciones diferenciales importantes implican términos similares tanto a la de calor como a la de onda. Aquí estudiamos un ejemplo de lo anterior en el contexto del flujo de tráfico en una autopista, algunos de cuyos aspectos son modelados por los ingenieros de tráfico utilizando ecuaciones diferenciales.

Idealizamos una autopista de un sentido como el eje x y dejamos que t represente al tiempo. Representamos la distribución de automóviles en la autopista mediante una **función de densidad** $u(x, t)$ que da la densidad de autos (autos por unidad de longitud) en una posición x y tiempo t. Representamos el flujo de tráfico mediante una **función de flujo** $\phi(x, t)$ que proporcione el número de autos que pasan por la posición x por unidad de tiempo en el tiempo t. Por simplicidad, suponemos que los autos no entran o salen de la autopista. De tal modo, en un intervalo $\alpha \le x \le b$, la tasa de cambio del número de autos en el intervalo es igual al número de autos que entran al intervalo en $x = a$ menos el número de autos que dejan el intervalo en $x = b$:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x, t)\,dx = \phi(a, t) - \phi(b, t).$$

Esta relación puede convertirse en una ecuación diferencial, ya que en el tiempo t y en cualquier intervalo $a \le x \le b$,

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\,dx = -\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)\,dx$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx = 0 \qquad (1)$$

De lo cual se concluye que en cualquier tiempo t y en cualquier posición x,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la **ley de conservación general** que gobierna el flujo de tráfico bajo la suposición de que la cantidad total de tráfico se conserva. Otras suposiciones de modelado pueden incorporarse en la forma de la función de flujo ϕ, la cual es posible que dependa de x y de t directamente o a través de u y las derivadas de u.

Si todos los autos se mueven juntos a la misma velocidad, entonces $\phi = cu$, donde c es la velocidad, $c > 0$ indicando movimiento en la dirección x positiva y $c < 0$ indicando movimiento en la dirección x negativa. La ecuación resultante se conoce como la **ecuación de convección**:

$$u_t + cu_x = 0. \qquad (3)$$

1. Utilice los métodos del ejercicio 12 de la sección 11.4 para mostrar que la solución general de la ecuación de convección es $u(x, t) = f(x - ct)$, donde $u(x, 0) = f(x)$ es la densidad de tráfico inicial. De esta manera toda solución de la ecuación de convección es una solución de onda viajera de la ecuación de onda: una onda que mantiene su forma mientras se mueve con una velocidad constante.

Luego suponga que, quizá durante un embotellamiento de tráfico, éste se mueve de acuerdo con la función de flujo $\phi = -ku_x$ para alguna $k > 0$, esto es, el tráfico se mueve de las regiones de alta densidad a las de baja densidad a una tasa proporcional al negativo del gradiente de la densidad. La ecuación resultante se conoce tanto como la ecuación de calor como la **ecuación de difusión**:

$$u_t - ku_{xx} = 0. \qquad (4)$$

De tal modo, tanto la ecuación de calor como la ecuación de convección (la cual por el problema 1 es esencialmente una ecuación de onda en una dirección) son leyes de conservación.

Si bien es difícil imaginar el tráfico moviéndose realmente de acuerdo con la ecuación de difusión, incluso en un terrible embotellamiento, es fácil imaginar a los conductores tendiendo a buscar la densidad de tráfico menor mientras se mueven también hacia su destino. Esto puede modelarse mediante la función de flujo $\phi = cu - ku_x$, donde $k > 0$, lo que resulta en la **ecuación de difusión-convección**:

$$u_t + cu_x = ku_{xx}. \qquad (5)$$

2. Demuestre que si $u(x, t)$ satisface (5) entonces la función $u(\eta, t)$, donde $\eta = x - ct$ satisface la ecuación de difusión $u_t(\eta, t) = ku_{\eta\eta}(\eta, t)$. De este modo los procesos de convección y de difusión proceden independientemente en (5).

Los modelos de flujo de tráfico más realistas reflejan el hecho de que cuando aumenta la densidad de tráfico los autos se mueven más lentamente, y a cierta densidad crítica D cesan de moverse por completo. De tal manera vamos a representar la velocidad del auto $v(u)$ por una función de velocidad $v(u)$ tal que $v'(u) < 0$ y $v''(u) \le 0$ para $0 < u < D$ como en la figura 1. La función de flujo basada en v es $\phi(u) = uv(u)$ como en la figura 2 y la **ecuación de convección no lineal** resultante es

$$u_t + \phi'(u)u_x = 0. \qquad (6)$$

La incorporación de un efecto de difusión en (6) produce la ecuación de difusión-convección no lineal conocida como la **ecuación de Burgers generalizada**:

$$u_t + \phi'(u)u_x = ku_{xx}. \qquad (7)$$

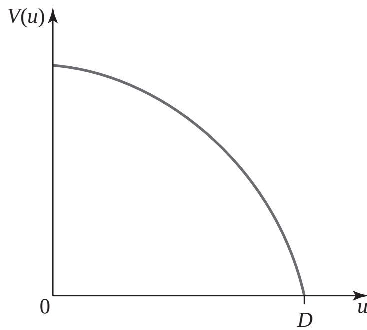


FIGURA 1 Velocidad del auto como una función de la densidad del tráfico

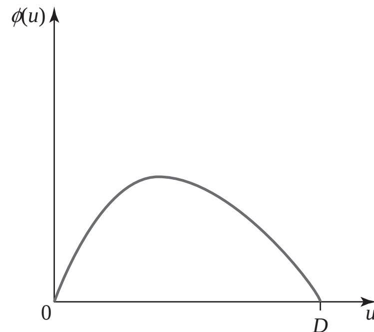


FIGURA 2 Flujo de tráfico como una función de la densidad de tráfico

3. Compruebe directamente (diferenciando) que bajo nuestras suposiciones sobre $v(u)$, $\phi''(u) < 0$ para $0 < u < D$ de manera que $\phi'(u)$ es una función decreciente de u para $0 \leq u \leq D$.
4. Al insertar la forma $u = f(x - ct)$ en (6), encuentre una ecuación diferencial ordinaria para f y demuestre que las únicas soluciones de onda viajera de (6) son una constante.

Aquí buscamos modelar la siguiente situación: tráfico de baja densidad que se mueve hacia adelante con alta velocidad encuentra tráfico de alta densidad que se mueve hacia adelante con baja velocidad. Todos hemos visto lo que realmente pasa: una zona de transición entre el tráfico de baja densidad y el de alta densidad se forma y se mueve de manera muy semejante a como lo hace una onda viajera. Sin embargo, de acuerdo con el problema 4 sabemos que no hay soluciones de onda viajera no triviales de (6).

Para empeorar las cosas es posible demostrar que con un flujo ϕ tal como el que hemos especificado, cualesquiera datos iniciales $u(x, 0)$ para (6) que ponen una región de tráfico de densidad menor detrás de una de densidad mayor, se llega a una solución de (6) que desarrolla una discontinuidad después de cierto tiempo finito. En esencia, el tráfico de baja densidad se mueve más rápido que el de alta densidad y a la larga lo captura. Si los conductores de baja densidad y alta velocidad no frenan hasta que la densidad de tráfico en su posición actual se vuelve alta como en (6), se presentará un cambio abrupto (esto es, discontinuo) en la densidad de tráfico y la velocidad. Todos hemos experimentado esto cuando hemos sido sorprendidos por un aumento imprevisto en la densidad de tráfico, y la reducción consecuente de su velocidad, y hemos tenido que pegarnos a los frenos para tratar de evitar un choque. En otras palabras, si el tráfico de baja densidad sigue al de alta densidad, la dependencia de la velocidad del tráfico sobre la densidad de tráfico en (6) dada por un flujo ϕ tal como el que hemos especificado incrementará el gradiente u_x de la densidad de tráfico u hasta el punto en el que u forma una discontinuidad de salto.

Desde luego, los conductores de hecho intentan ajustar sus velocidades no sólo de acuerdo con la densidad del tráfico en sus posiciones presentes, sino también de acuerdo con el gradiente de la densidad de tráfico (es decir, de acuerdo con lo que ven a cierta distancia delante de ellos). Con el fin de evitar cambios abruptos en la densidad de tráfico, tratan de permanecer a distancia frenando con tiempo cuando ven que la densidad de tráfico delante de ellos está aumentando. Este efecto se modela mediante el término de difusión en (7).

De tal modo buscamos una solución de onda viajera $u = f(x - ct)$ de (7) que satisfaga las siguientes condiciones para las densidades de tráfico u_1 y u_2 con $0 \leq u_1 < u_2 \leq D$:

$$\lim_{\eta\to-\infty} f(\eta) = u_1, \quad \lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = u_2 \quad \text{y} \quad \lim_{\eta\to\pm\infty} f'(\eta) = 0. \tag{8}$$

5. Inserte la forma $u = f(x - ct)$ en (7) para obtener una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de f y muestre que al antidiferenciar esta ecuación una vez se obtiene
$$\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{k}[\phi(f) - (cf + I)] \tag{9}$$
donde I es una constante de integración
6. Dejando que $\eta \to \leq \infty$, demuestre que para que se cumpla (8), I y c deben satisfacer
$$\phi(u_2) = cu_2 + I \quad \text{y} \quad \phi(u_1) = cu_1 + I. \tag{10}$$
7. Utilice un dibujo basado en la figura 2 para explicar por qué, para $0 \leq u_1 < u_2 \leq D$, siempre es posible elegir I y c de manera que se satisfaga (10).
8. Ahora fije u_1 y u_2 de manera tal que $0 \leq u_1 < u_2 \leq D$ y deje que I y c en (9) satisfaga (10).

   a) Utilizando su dibujo del problema 7, trace una gráfica de $y = \frac{1}{k}[\phi(f) - (cf + I)]$ y una línea de fase para la ecuación diferencial autónoma en (9). (Vea la sección 2.1.2.)
   b) Dibuje una gráfica de $y = f(\eta)$ para una solución de (9). (¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica, y por qué?)
   c) Si la solución de (9) en el caso especial en el que $k = 1$ se denota mediante $F(\eta)$, demuestre que $f(\eta) = F(\eta/k)$ satisface (9) por lo que para cualquier valor de k la solución de la onda viajera deseada de (7) es
   $$u = F\left(\frac{x - ct}{k}\right). \tag{11}$$
   d) Muestre que para cualquier valor de k,
   $$c = \frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1}. \tag{12}$$

e) Utilice su dibujo del problema 7 para demostrar que 7 puede ser positiva, negativa o cero. Describa lo que está ocurriendo en la autopista en cada uno de estos casos.

9. Sea $v(u) = 4 - 2u$ y $D = 2$ de manera que $\phi(u) = 4u - 2u^2$ para $0 \leq u \leq 2$. Resuelva (9) explícitamente en el caso especial en el que $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$. Después deje que $f(0) = 3/2$ y use una herramienta de graficación para graficar la función resultante f para $k = 10$, 1 y 1/10.

El efecto de la difusión se hace remarcablemente explícito en (11) y también debe ser claro en nuestras gráficas del problema 9. Cuanto más grande es el valor de k, tanto menos abrupta es la transición de la baja densidad a la alta densidad. Por otro lado, cuando $k \to 0$, transformando (7) en (6), las ondas viajeras (11) mantienen la misma velocidad c, pero se aproximan a la función

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{para } x - ct < 0 \\ u_2 & \text{para } x - ct > 0. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad de salto que se propaga con velocidad c. No es diferenciable donde $x = ct$, por lo que no puede satisfacer la ley de conservación diferencial (6) cuando $x = ct$. No obstante, es posible demostrar que satisface la correspondiente ley de conservación integral en (1) en cualquier intervalo $a \leq x \leq b$. Éste es un ejemplo de una **solución de onda de choque** de (6): una solución que satisface (1) sobre cualquier intervalo $a \leq x \leq b$ y satisface (6) en cualquier parte excepto a lo largo de cierta curva, denominada **trayectoria del choque** en el plano $x - t$, donde ésta es discontinua. Las ondas viajeras continuas (11) que se aproximan a la solución de la onda de choque cuando $k \to 0$ reciben el nombre de ***perfiles de choque***.

La ecuación de difusión-convección no lineal (7) tiene perfiles de choque continuos que modelan transiciones de baja densidad de tráfico a alta densidad de tráfico porque el efecto de agudización de la convección no lineal sobre la función de densidad se balancea con el efecto de alisamiento de la difusión. Las únicas soluciones de la ecuación de convección no lineal (6) que modelan tales transiciones son soluciones de onda de choque discontinuas. En general, las soluciones de onda de choque de leyes de conservación no lineales suelen considerarse físicamente significativas sólo cuando son los límites de perfiles de choque continuos obtenidos al balancear la convección no lineal con la difusión, ya que, en realidad, casi siempre está presente cierto efecto difusivo incluso si es muy pequeño. Por ejemplo, en las ecuaciones no lineales que gobiernan la velocidad de un fluido en movimiento, el efecto difusivo se debe a la conversión de energía cinética en calor por la fricción interna, proceso denominado **disipación**, que se incorpora en las ecuaciones utilizando una propiedad del fluido llamada **viscosidad**. Ésta es la razón por la que, aun en otros contextos, un término de difusión algunas veces se llama **término de disipación** o **término de viscosidad**, y el límite de la onda de choque de las soluciones del perfil de choque recibe el nombre algunas veces de límite de viscosidad que se disipa.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN 13.4

La desigualdad de incertidumbre en el procesamiento de señales

Jeff Dodd, PhD
Departamento de Matemáticas, Cómputo y Ciencias de la Información
Jacksonville State University

Los ingenieros en comunicaciones interpretan la transformada de Fourier como la descomposición de una señal $f(x)$ que transporta información, donde x representa el tiempo, en una superposición de "tonos" puros senoidales que tienen frecuencias representadas por una variable real. De hecho, los ingenieros suelen pensar acerca de la representación resultante "del dominio de frecuencias" ¡tanto o más que en la representación "del dominio del tiempo" (esto es, la señal misma)! Un hecho fundamental del procesamiento de señales es que cuanto más estrecha es una señal en el dominio del tiempo, tanto más amplia resulta en el dominio de la frecuencia. De manera inversa, cuanto más estrecha es una señal en el dominio de la frecuencia, tanto más amplia es en el dominio del tiempo. Este efecto es importante porque en la práctica una señal debe enviarse en un intervalo limitado de tiempo y utilizar un intervalo limitado, o "banda", de frecuencias. En este proyecto describimos e investigamos este intercambio entre la duración y ancho de banda tanto cualitativa como cuantitativamente. Los resultados de nuestra investigación sustentarán una regla práctica que se señala de manera común: el número de señales diferentes que puede enviarse en una cierta duración de tiempo utilizando cierta banda de frecuencias es proporcional al producto del tiempo de duración y el ancho de la banda de frecuencias.

Problemas relacionados

Emplearemos la forma compleja de la transformada de Fourier y de la transformada de Fourier inversa dadas en (5) y (6) de la sección 13.4. Utilizaremos la notación $\hat{f}(\alpha)$ para denotar la transforma de Fourier de una función $f(x)$ en una forma compacta que hace explícita su dependencia de f —esto es, $\hat{f}(\alpha) = \mathscr{F}\{f(x)\}$—. Tomamos f como una función de valores reales, y entramos en calor al notar dos propiedades simples que $\hat{f}$ disfruta.

1. Demuestre que si $\alpha > 0$, entonces $\hat{f}(-\alpha) = \overline{\hat{f}(\alpha)}$. Así que para cualquier α, $|\hat{f}(-\alpha)| = |\hat{f}(\alpha)|$. (Aquí las notaciones $\bar{z}$ y $|z|$ representan el conjugado y el módulo de un número complejo z, respectivamente.)
2. Si k es un número real, deje que $f_k(x) = f(x - k)$. Demuestre que

$$\hat{f}_k(\alpha) = e^{i\alpha k}\hat{f}(\alpha)$$

Así que el corrimiento de una señal en el tiempo no afecta los valores de $|\hat{f}(\alpha)|$ en el dominio de frecuencias.

Ya con estos hechos, consideramos ahora el efecto de estrechar o ensanchar una señal en el dominio del tiempo escalando simplemente la variable de tiempo.

3. Si c es un número positivo, sea $f_c(x) = f(cx)$. Demuestre que

$$\hat{f}_c(\alpha) = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

De tal modo estrechar la función de la señal f en el dominio del tiempo ($c > 1$) ensancha su transformada en el dominio de la frecuencia, y al estrechar la función de la señal f en el dominio del tiempo ($c < 1$), estrecha su transformada en el dominio de la frecuencia.

Para cuantificar el efecto que observamos en el problema 3, necesitamos establecer una medida del "ancho" de la gráfica de una función. La medida que se usa más comúnmente es el ancho de la raíz cuadrada media, que al aplicarse a una señal f en los dominios del tiempo y de la frecuencia produce una duración de la raíz cuadrada media $D(f)$ y un ancho de banda de raíz cuadrada media $B(f)$ dadas por

$$[D(f)]^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2[f(x)]^2\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\,dx}$$

y

$$[B(f)]^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2\,|\hat{f}(\alpha)|^2\,d\alpha}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\alpha)|^2\,d\alpha}.$$

El ancho de banda y la duración se calculan con respecto a los "centros" de $\alpha = 0$ y $x = 0$, pues, por los problemas 1 y 2, la gráfica de $|\hat{f}(\alpha)|^2$ es simétrica alrededor de $\alpha = 0$ en el dominio de la frecuencia, y la señal puede desplazarse horizontalmente en el dominio del tiempo sin afectar la gráfica de $|\hat{f}(\alpha)|^2$ en el dominio de la frecuencia.

4. Demuestre que para una familia de funciones $f_c(x)$ definida en el problema 3, $D(f_c) \cdot B(f_c)$ es independiente de c.
5. Demuestre que para la familia de funciones $f_c(x) = e^{-c|x|}$, $D(f_c) \cdot B(f_c) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. [*Sugerencia*: Por el problema 4 puede tomar sólo $f(x) = f_1(x)$. La integral de Fourier necesaria se deduce rápidamente del ejemplo 3 de la sección 13.3. Para calcular las integrales en $D(f)$ y $B(f)$, piense acerca de la integración por partes y por fracciones parciales, respectivamente.]

De este modo la duración y el ancho de banda de una señal son en un sentido inversamente proporcionales entre sí bajo el escalamiento de la variable de tiempo. ¿Qué sucede

con la constante de proporcionalidad? ¿Qué tan pequeñas pueden ser $D(f) \cdot B(f)$? Notablemente, hay un límite inferior para este producto.

6. Deduzca la **desigualdad de incertidumbre** si

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2\, d\alpha < \infty,$$

y

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|[f(x)]^2 = 0,$$

entonces $D(f) \cdot B(f) \geq \frac{1}{2}$. Siga estos pasos.

a) Establezca la fórmula de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2\, d\alpha.$$

[*Sugerencia*: Aplique el teorema de convolución dado en el problema 20, ejercicios 13.4 con $g(x) = f(-x)$.

Específicamente, aplique la fórmula para la transformada de Fourier inversa dada en (6) de la sección 13.4, demuestre que $\hat{g}(\alpha) = \overline{\hat{f}(\alpha)}$ y después deje $x = 0$.]

b) Establezca la desigualdad de Schwartz para funciones de valores reales h_1 y h_2,

$$\left|\int_a^b h_1(s)h_2(s)\, ds\right|^2 \leq \left(\int_a^b [h_1(s)]^2\, ds\right)\left(\int_a^b [h_2(s)]^2\, ds\right)$$

Con la igualdad ocurriendo sólo cuando $h_2 = ch_1$, donde c es una constante [*Sugerencia*: Escriba

$$\int_a^b [\lambda h_1(s) - h_2(s)]^2\, ds$$

como una expresión cuadrática $A\lambda^2 + B\lambda + C$ en la variable real λ. Advierta que el cuadrado es no negativo para toda λ y considere el discriminante $B^2 - 4AC$).]

c) Establezca la desigualdad de incertidumbre. [*Sugerencia*: Primero, aplique la desigualdad de Schwartz como sigue:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)f'(x)\, dx\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} [xf(x)]^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2\, dx\right).$$

Emplee integración por partes para demostrar que

$$\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)f'(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx.$$

Reescriba la segunda integral que aparece en el lado derecho de la desigualdad utilizando la propiedad operacional (11) de la sección 13.4 y la fórmula de Parseval.]

7. *a*) Demuestre que si f produce el mínimo valor posible de $D(f) \cdot B(f)$, entonces

$$f'(x) = cxf(x)$$

donde c es alguna constante. Resuelva esta ecuación diferencial para mostrar que $f(x) = de^{cx^2/2}$ para $c < 0$ y $d =$ una constante. (Una función de este tipo se denomina función gaussiana. Las funciones gaussianas desempeñan un importante papel en la teoría de la probabilidad.)

b) Tome la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación diferencial en el inciso *a*) para obtener una ecuación diferencial de $\hat{f}(\alpha)$ y demuestre que $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}(0)e^{\alpha^2/(2c)}$, donde c es la misma que en el inciso *a*). Necesitará el siguiente hecho:

$$\frac{d}{d\alpha}\hat{f}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x)e^{i\alpha x}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)e^{i\alpha x}\, dx = i\widehat{xf(x)}.$$

(En el problema 35 de los ejercicios 9.11, se muestra que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. A partir de este hecho usted puede deducir que $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi/|c|} \cdot d$.)

Así que el mínimo valor posible de $D(f) \cdot B(f)$ se alcanza para una función gaussiana, ¡cuya transformada de Fourier es otra función gaussiana!

La palabra "incertidumbre" se asocia con la desigualdad presentada en el problema 6 debido a que, a partir de un punto de vista más abstracto, es matemáticamente análoga al famoso principio de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica. (La interpretación de este principio de la mecánica cuántica es un asunto sutil, pero se entiende comúnmente como "cuanto más precisamente se determina la posición de una partícula, tanto menor es la precisión con la se conoce su momento, y viceversa.)



Horno solar en el desierto de Mojave, California

Parte 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Estructura del capítulo

El propósito de este breve capítulo es doble: presentar la terminología elemental de las **ecuaciones diferenciales** y analizar someramente la forma en que surgen las ecuaciones diferenciales con el fin de describir o modelar fenómenos físicos en términos matemáticos.

1.1 Definiciones y terminología

Introducción Los términos *diferencial* y *ecuación* indican, sin lugar a dudas, la resolución de cierto tipo de ecuaciones que contienen derivadas; sin embargo, antes de iniciar la resolución de cualquier ecuación, primero debemos aprender las definiciones elementales y la terminología del tema.

Una definición La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ representa en sí misma otra función $\phi'(x)$ que se encuentra mediante una regla específica. Por ejemplo, la función $y = e^{0.1x^2}$ es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, y su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si reemplazamos $e^{0.1x^2}$ por el símbolo y, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy. \tag{1}$$

Ahora imagine que un amigo suyo le proporciona sólo la **ecuación diferencial** de la expresión (1), y que usted no tiene idea de cómo se obtuvo. Su amigo le pregunta: ¿cuál es la función representada por el símbolo y? Entonces usted se enfrenta a *uno* de los problemas básicos encontrados en un curso de ecuaciones diferenciales: ¿cómo resolver una ecuación de este tipo para la función incógnita $y = \phi(x)$? Tal cuestión es más o menos equivalente al conocido problema del inverso del cálculo diferencial: dada una derivada, encontrar una antiderivada.

Antes de avanzar más, permítanos ofrecer una definición más precisa del concepto de una ecuación diferencial.

Definición 1.1.1 Ecuación diferencial

Se dice que una **ecuación diferencial (ED)** es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Con el objetivo de referirnos a ellas, debemos clasificar las ecuaciones diferenciales por **tipo**, **orden** y **linealidad**.

Clasificación por tipo Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \tag{2}$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina **ecuación diferencial parcial (EDP)**. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.

Notación A lo largo de este libro, las derivadas ordinarias se presentarán utilizando la **notación de Leibniz** dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, . . . , o la **notación prima** y', y'', y''', . . . Si se emplea esta última notación, las primeras dos ecuaciones diferenciales mostradas en (2) pueden expresarse de forma más compacta como $y' + 5y = e^x$ y $y'' - y' + 6y = 0$. En realidad, la notación de prima se utiliza para señalar solamente las primeras tres derivadas; la cuarta derivada se indica como $y^{(4)}$ en lugar de y''''. En términos generales, la n-ésima derivada será d^ny/dx^n o $y^{(n)}$. A pesar de ser menos conveniente de escribir y formar tipográficamente, la notación de Leibniz presenta una ventaja sobre la notación de prima en el sentido de que indica con claridad las variables independientes y dependientes. Por ejemplo, en la ecuación diferencial $d^2x/dt^2 + 16x = 0$, se observa de forma inmediata que el símbolo x representa ahora a la variable dependiente, mientras que la variable independiente será t. Además, es importante que usted conozca que en ingeniería y ciencias físicas ocasionalmente se utiliza la **notación de Newton por puntos** (a veces denominada despectivamente como notación de "manchas") para denotar las derivadas con respecto al tiempo t; de esta forma, la ecuación

diferencial $d^2s/dt^2 = -32$ se convierte en $\ddot{s} = -32$. Las derivadas parciales con frecuencia se indican mediante una **notación de subíndice** que muestra las variables independientes. Por ejemplo, las ecuaciones primera y segunda incluidas en (3) pueden a su vez indicarse como $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

Clasificación por orden El **orden de una ecuación diferencial** (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo,

$$\underset{\text{segundo orden}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\underset{\text{primer orden}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} - 4y = e^x$$

representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se escriben ocasionalmente en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Por ejemplo, si suponemos que y representa la variable dependiente en $(y - x)dx + 4xdy = 0$, entonces $y' = dy/dx$, y así al dividir entre el diferencial dx obtenemos la forma alternativa $4xy' + y = x$. Consulte el apartado de *Comentarios* al final de esta sección.

De manera simbólica, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como una variable dependiente empleando la forma general

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', ..., y^{(n)}$. Tanto por motivos prácticos como teóricos, de aquí en adelante debemos suponer que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria presentada en la forma (4) únicamente para la derivada más alta $y^{(n)}$ en términos de las variables $n + 1$ restantes. La ecuación diferencial

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

donde f es una función continua con valores reales, se denomina **forma normal** de (4). De este modo, cuando nos sea útil, debemos utilizar las formas normales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

para representar ecuaciones diferenciales generales ordinarias de primero y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es $y' = (x - y)/4x$. Consulte los *Comentarios*.

Clasificación por linealidad Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (4) es **lineal** si F es lineal en $y, y', ..., y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{6}$$

Dos casos especiales importantes de (6) son las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{7}$$

En la combinación aditiva del extremo izquierdo de (6) observamos que las dos propiedades características de una EDO lineal son:

Recuerde estas dos características de una EDO lineal. 

- La variable dependiente y así como todas sus derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1.
- Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ de $y, y', ..., y^{(n)}$ dependen a lo sumo de la variable independiente x.

Las ecuaciones siguientes, a su vez,

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x,$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Acabamos de demostrar que la primera ecuación es lineal en la variable y al escribirla en la forma alternativa $4xy' + y = x$. Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** simplemente es una ecuación que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como sen y o $e^{y'}$, no pueden aparecer en una ecuación lineal. Por lo tanto,

término no lineal: el coeficiente depende de y ↓ — término no lineal: función no lineal de y ↓ — término no lineal: potencia diferente de y ↓

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0,$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente.

Solución Como se indicó anteriormente, en el presente curso, uno de los objetivos es resolver —o encontrar soluciones de— ecuaciones diferenciales. En el siguiente cuadro se define el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición 1.1.2 Solución de una EDO

Toda función ϕ, definida sobre un intervalo I y que posea al menos n derivadas continuas sobre I, y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación sobre el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria (4) de n-ésimo orden será una función ϕ que posea al menos n derivadas y

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \text{ para toda } x \text{ en } I.$$

Se dice que ϕ *satisface* la ecuación diferencial sobre I. Para nuestros propósitos, también debemos asumir que una solución ϕ es una función con valores reales. En el análisis inicial se observó que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución de $dy/dx = 0.2xy$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

En ocasiones resultará conveniente indicar una solución mediante el símbolo alternativo *y(x)*.

Intervalo de definición No es posible considerar una *solución* de una ecuación diferencial ordinaria sin pensar al mismo tiempo en un *intervalo*. El intervalo I de la definición 1.1.2 se denomina de diversas maneras: **intervalo de definición**, **intervalo de validez** o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Compruebe que la función señalada representa una solución de la ecuación diferencial dada, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $dy/dx = xy^{1/2}$; $y = \frac{1}{16}x^4$ ***b***) $y'' - 2y' + y = 0$; $y = xe^x$

Solución Una forma de verificar que la función indicada representa una solución es revisar, después de sustituir, si cada extremo de la ecuación es igual para cada x localizada dentro del intervalo.

a) Del *extremo izquierdo*: $\dfrac{dy}{dx} = 4 \cdot \dfrac{x^3}{16} = \dfrac{x^3}{4}$

extremo derecho: $xy^{1/2} = x \cdot \left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x \cdot \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^3}{4}$,

observamos que cada extremo de la ecuación es igual para todo número real x. Advierta que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada positiva de $\frac{1}{16}x^4$.

b) A partir de las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos para todo número real x,

extremo izquierdo: $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$

extremo derecho: 0. ≡

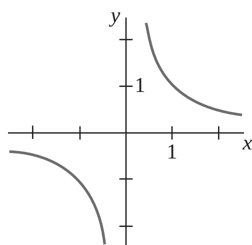
Observe también que en el ejemplo 1 cada ecuación diferencial posee la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. La solución a una ecuación diferencial idéntica a cero sobre un intervalo I se dice que es una **solución trivial**.

Curva de solución La gráfica de una solución ϕ de una EDO se denomina **curva de solución**. Ya que ϕ es una función diferenciable, será continua sobre su intervalo I de definición. De esta forma puede presentarse una diferencia entre la gráfica de la *función* ϕ y la gráfica de la *solución* ϕ. En otras palabras, el dominio de la función ϕ no necesita ser el mismo que el intervalo I de definición (o dominio) de la solución ϕ.

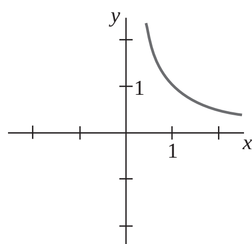
EJEMPLO 2 Comparación entre solución y función

Considerado en términos simples como una *función*, el dominio de $y = 1/x$ será el conjunto de todos los números reales x con excepción de 0. Cuando graficamos $y = 1/x$, trazamos puntos en el plano xy que corresponden a un acertado muestreo de números tomados a partir de su dominio. La función racional $y = 1/x$ es discontinua en 0, y su gráfica, en las cercanías de su origen, se presenta en la **FIGURA 1.1.1*a***). La función $y = 1/x$ no es diferenciable en $x = 0$ dado que el eje y (cuya ecuación es $x = 0$) representa una asíntota vertical de la gráfica.

Ahora $y = 1/x$ también es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$ (verifíquelo). Sin embargo, cuando decimos que $y = 1/x$ es una *solución* de esta ED, significa que es una función definida en un intervalo I sobre el cual es diferenciable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = 1/x$ será una solución de la ED sobre *todo* intervalo que no contenga a 0, tal como $(-3, -1)$, $(\frac{1}{2}, 10)$, $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Ya que las curvas de solución definidas por $y = 1/x$ sobre los intervalos $(-3, -1)$ y sobre $(\frac{1}{2}, 10)$ son básicamente segmentos o secciones de las curvas de solución definidas por $y = 1/x$ en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, respectivamente, tendrá sentido tomar el intervalo I más grande posible. De tal modo, tomaríamos a I para que fuera $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva de solución en el intervalo $(0, \infty)$ se muestra en la figura 1.1.1*b*). ≡



a) Función $y = 1/x$, $x \neq 0$



b) Solución $y = 1/x$, $(0, \infty)$

FIGURA 1.1.1 El ejemplo 2 ilustra la diferencia entre la función $y = 1/x$ y la solución $y = 1/x$

Soluciones explícitas e implícitas Usted debe estar familiarizado con los términos *funciones explícitas* e *implícitas* gracias a sus estudios de cálculo. Una solución en que la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y constantes se denomina **solución explícita**. Para nuestros propósitos, consideremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podemos manipular, evaluar y diferenciar utilizando las reglas estándar. En los últimos dos ejemplos hemos observado que $y = \frac{1}{16}x^4$, $y = xe^x$ y $y = 1/x$ son, a su vez, soluciones explícitas de $dy/dx = xy^{1/2}$, $y'' - 2y' + y = 0$, y $xy' + y = 0$. Además, la solución trivial $y = 0$ es una solución explícita de las tres ecuaciones. Cuando abordemos el problema de resolver realmente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias veremos que los métodos de solución no siempre llevan de forma directa a una solución explícita $y = \phi(x)$. Esto aplica en especial cuando se intenta resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Con frecuencia nos bastará con una relación o expresión $G(x, y) = 0$ que defina una solución ϕ de modo implícito.

Definición 1.1.3 Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación del tipo $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria (4) sobre un intervalo I siempre que exista al menos una función ϕ que satisfaga la relación así como a la ecuación diferencial sobre I.

Se encuentra fuera del alcance de este curso analizar las condiciones bajo las cuales una relación $G(x, y) = 0$ define una función diferenciable ϕ. Así que deberemos suponer que si la implementación formal de un método de solución lleva a una relación $G(x, y) = 0$, entonces existe al menos una función ϕ que satisface tanto a la relación (es decir, $G(x, \phi(x)) = 0$) como a la ecuación diferencial sobre un intervalo I. Si la solución implícita $G(x, y) = 0$ es sencilla, podríamos resolverla para y en términos de x y obtener una o más soluciones explícitas. Véase la sección de *Comentarios*.

EJEMPLO 3 Verificación de una solución implícita

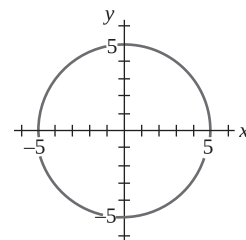
La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

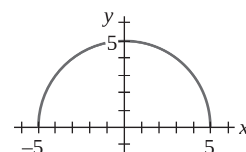
sobre el intervalo $-5 < x < 5$. Al diferenciar de forma implícita obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \qquad \text{o} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

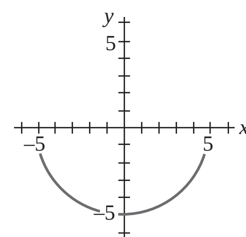
Al resolver la última ecuación para el símbolo dy/dx obtenemos (8). Además, al resolver $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ satisfacen la relación (es decir, $x^2 + \phi_1^2 = 25$ y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y representan soluciones explícitas definidas sobre el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas de solución presentadas en la **FIGURA 1.1.2*b*)** y 1.1.2*c*) son segmentos de la gráfica de la solución implícita de la figura 1.1.2*a*). ≡



a) Solución implícita
$x^2 + y^2 = 25$



b) Solución explícita
$y_1 = \sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$



c) Solución explícita
$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

FIGURA 1.1.2 Solución implícita y dos soluciones explícitas en el ejemplo 3

Toda relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfará de manera *formal* a (8) para cualquier constante c. Sin embargo, se entiende que la relación siempre deberá tener sentido en el sistema de números reales; de tal modo, por ejemplo, no podemos afirmar que $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una solución implícita de la ecuación. ¿Por qué no?

Como la diferencia entre una solución implícita y una solución explícita debe quedar clara de forma intuitiva, no menospreciaremos el problema afirmando siempre: "Aquí se encuentra una solución explícita (implícita)."

■ **Familias de soluciones** El estudio de las ecuaciones diferenciales es similar al del cálculo integral. En algunos libros, a una solución ϕ se le denomina en ocasiones como la **integral** de la ecuación, y su gráfica se conoce como una **curva integral**. Al evaluar una antiderivada o integral indefinida en cálculo, utilizamos una sola constante c de integración. En forma análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, *por lo general* obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones denominadas **familia de soluciones de un parámetro**. Al resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, buscamos obtener una **familia de soluciones de *n* parámetros** $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$. Lo cual significa que una ecuación diferencial simple puede poseer un número infinito de soluciones que corresponden al número ilimitado de opciones para el o los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que se encuentra libre de parámetros arbitrarios se denomina **solución particular**. Por ejemplo, la familia de un solo parámetro $y = cx - x\cos x$ representa una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifíquelo). La **FIGURA 1.1.3**, obtenida mediante el uso de un programa computacional de graficación, muestra las gráficas de algunas de las soluciones de esta familia. La solución $y = -x\cos x$, la curva oscura en la figura, es una solución particular que corresponde a $c = 0$. De forma similar, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y = c_1e^x + c_2xe^x$ representa una familia de soluciones de dos parámetros (verifíquelo) de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ del inciso *b*) del ejemplo 1. Algunas soluciones particulares de la ecuación son las soluciones triviales $y = 0$ ($c_1 = c_2 = 0$), $y = xe^x$ ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$), $y = 5e^x - 2xe^x$ ($c_1 = 5$, $c_2 = -2$), etcétera.

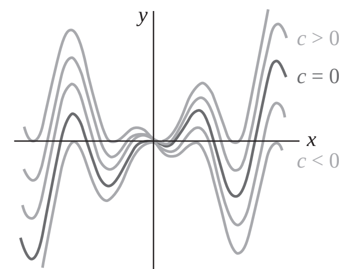


FIGURA 1.1.3 Algunas soluciones de $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$

En todos los ejemplos anteriores hemos utilizado x y y para denotar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero debería acostumbrarse a ver y trabajar con otros símbolos que denoten dichas variables. Por ejemplo, podríamos denotar la variable independiente como t y a la dependiente como x.

EJEMPLO 4 Utilización de distintos símbolos

Las funciones $x = c_1 \cos 4t$ y $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, en las que c_1 y c_2 son parámetros o constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1 \cos 4t$, las primeras dos derivadas con respecto a t son $x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t$ y $x'' = -16c_1 \cos 4t$. Al sustituir x'' y x obtenemos

$$x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16(c_1 \cos 4t) = 0.$$

De forma similar, para $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ tenemos $x'' = -16c_2 \operatorname{sen} 4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Por último, resulta sencillo verificar que la combinación lineal de soluciones para la familia de dos parámetros $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ es también una solución de la ecuación diferencial. ≡

El siguiente ejemplo demuestra que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida en forma segmentada.

EJEMPLO 5 Una solución definida en forma segmentada

Debemos verificar que la familia de un solo parámetro $y = cx^4$ es una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación diferencial $xy' - 4y \geq 0$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase la **FIGURA 1.1.4*a*)**. La función diferenciable definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

representa una solución particular de la ecuación pero no puede obtenerse a partir de la familia $y = cx^4$ mediante una elección simple de c; la solución se construye a partir de la familia al elegir $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \neq 0$. Observe la figura 1.1.4*b*). ≡

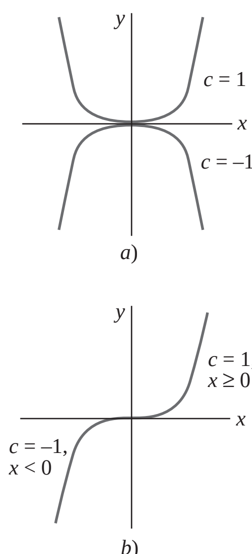


FIGURA 1.1.4 Algunas soluciones de $xy' - 4y = 0$ en el ejemplo 5

Solución singular En ocasiones una ecuación diferencial posee una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, es decir, una solución que no puede obtenerse mediante la especialización de *ninguno* de los parámetros de la familia de soluciones. Una solución adicional de este tipo se denomina **solución singular**. Por ejemplo, hemos observado que $y = \frac{1}{16}x^4$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ sobre $(-\infty, \infty)$. En la sección 2.2 demostraremos, mediante su resolución, que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ cuenta con la familia de soluciones de un parámetro $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$. Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Sin embargo, observe que la solución trivial $y = 0$ es una solución singular dado que no es miembro de la familia $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$; no existe forma de asignar un valor a la constante c para obtener $y = 0$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales Hasta este momento hemos analizado ecuaciones diferenciales individuales que contienen una función desconocida. Sin embargo con frecuencia, tanto en la teoría como en muchas aplicaciones, encontramos sistemas de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** está formado por dos o más ecuaciones que involucran las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente. Por ejemplo, si x y y simbolizan variables dependientes y t representa la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden estaría dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Una **solución** para un sistema como el (9) sería un par de funciones diferenciables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, definidas sobre un intervalo común I, que satisfagan a cada ecuación del sistema localizada en este intervalo. Consulte los problemas 33 y 34 de los ejercicios 1.1.

Comentarios

i) Es pertinente formular algunos comentarios finales acerca de las soluciones implícitas de ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 3 resolvimos la relación $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x para obtener dos soluciones explícitas, $\phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $\phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, de la ecuación diferencial (8). Sin embargo, no analice demasiado este ejemplo. A menos que le resulte sencillo, evidente, sea importante o se le indique, por lo general no es necesario intentar resolver una solución implícita $G(x, y) = 0$ para y de forma explícita en términos de x. Asimismo, no interprete mal el segundo enunciado posterior a la definición 1.1.3. Una solución implícita $G(x, y) = 0$ puede definir una función ϕ perfectamente diferenciable que sea una solución de una ED, aunque no podamos resolver $G(x, y) = 0$ utilizando métodos analíticos como álgebra. La curva de solución de ϕ puede ser un segmento o parte de la gráfica de $G(x, y) = 0$. Revise los problemas 41 y 42 de los ejercicios 1.1. Además, consulte el análisis que sigue al ejemplo 4 de la sección 2.2.

ii) A pesar de que en esta sección se ha enfatizado el concepto de una solución, recuerde que una ED no necesariamente debe contar con una solución. Observe el problema 35 de los ejercicios 1.1. La cuestión de la existencia de una solución será analizada en la siguiente sección.

iii) Puede no resultar evidente si una EDO de primer orden presentada en forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)dy = 0$ es lineal o no, pues no existe nada en esta notación que nos indique el símbolo que representa la variable dependiente. Consulte los problemas 9 y 10 de los ejercicios 1.1.
iv) Pareciera que no hay mayor problema en suponer que $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ pueda resolverse para $y^{(n)}$, sin embargo deberá tener cuidado con esto. Existen excepciones y algunos inconvenientes relacionados con esta suposición. Revise los problemas 48 y 49 de los ejercicios 1.1.
v) Si *toda* solución de una EDO de n-ésimo orden $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ sobre un intervalo I puede obtenerse a partir de una familia $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ de n parámetros mediante la elección adecuada de los parámetros c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces decimos que la familia representa la **solución general** de la ED. Al resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales debemos imponer restricciones relativamente simples sobre los coeficientes de la ecuación; mediante estas restricciones podemos asegurarnos de que no sólo existe una solución sobre un intervalo, sino que también una familia de soluciones arrojará todas las posibles soluciones. Las ecuaciones no lineales, con excepción de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo general son difíciles de resolver si no imposibles, en términos de *funciones elementales* familiares: combinaciones finitas de potencias enteras de x, raíces, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. Además, si se obtiene una familia de soluciones para una ecuación no lineal, no será evidente si esta familia contiene todas las soluciones. Por lo tanto, en un nivel práctico, la denominación "solución general" se aplica sólo a ecuaciones diferenciales lineales. Ahora no se preocupe por este concepto, pero tenga presentes las palabras "solución general", ya que regresaremos a ellas en la sección 2.3 y una vez más en el capítulo 3.

1.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 8, defina el orden de la ecuación diferencial presentada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal al compararla con (6).

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$
2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$
4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r + u)$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$
6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$
7. $(\operatorname{sen}\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$
8. $\ddot{x} - (1 - \frac{1}{3}\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$

En los problemas 9 y 10, determine si la ecuación diferencial de primer orden presentada es lineal en la variable dependiente indicada comparándola con la primera ecuación diferencial proporcionada en (7).

9. $(y^2 - 1)\,dx + x\,dy = 0$; en y; en x
10. $u\,dv + (v + uv - ue^u)\,du = 0$; en v; en u

En los problemas 11 a 14, verifique si la función indicada es una solución explícita de la ecuación diferencial presentada. Suponga un intervalo de definición I adecuado para cada solución.

11. $2y' + y = 0; \quad y = e^{2x/2}$
12. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24; \quad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$
13. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x$
14. $y'' + y = \tan x; \quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

En los problemas 15 a 18, verifique si la función señalada $y = \phi(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden presentada. Proceda igual que en el ejemplo 2, considerando a ϕ sólo como una *función*, proporcione su dominio. Luego considere a ϕ como una *solución* de la ecuación diferencial, establezca al menos un intervalo I de definición.

15. $(y - x)y' = y - x + 8; \quad y = x + 4\sqrt{x + 2}$
16. $y' = 25 + y^2; \quad y = 5\tan 5x$
17. $y' = 2xy^2; \quad y = 1/(4 - x^2)$
18. $2y' = y^3\cos x; \quad y = (1 - \operatorname{sen} x)^{-1/2}$

En los problemas 19 y 20, verifique si la expresión señalada es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden que se proporciona. Encuentre al menos una solución explícita $y = \phi(x)$ en cada caso. Utilice alguna herramienta de graficación para obtener la gráfica de una solución explícita. Proporcione un intervalo I de definición para cada solución ϕ.

19. $\dfrac{dX}{dt} = (X - 1)(1 - 2X); \quad \ln\left(\dfrac{2X - 1}{X - 1}\right) = t$
20. $2xy\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0; \quad -2x^2y + y^2 = 1$

En los problemas 21 a 24, verifique si la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial que se proporciona. Suponga un intervalo de definición I adecuado para cada solución.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P); \quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

22. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1e^{-x^2}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

24. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;$

$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$

25. Verifique si la función definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

26. En el ejemplo 3 observamos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ son soluciones de $dy/dx = -x/y$ sobre el intervalo $(-5, 5)$. Explique por qué la función definida en segmentos

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

no es una solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo $(-5, 5)$.

27. Encuentre valores de m apropiados para que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial proporcionada. Explique su razonamiento.

a) $y' + 2y = 0$ *b*) $y'' - 5y' + 6y = 0$

28. Encuentre valores de m apropiados para que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial proporcionada. Explique su razonamiento.

a) $xy'' + 2y' = 0$ *b*) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

En los problemas 29 a 32, utilice el concepto de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$, es una función constante si y sólo si, $y' = 0$ para determinar si la ecuación diferencial proporcionada tiene soluciones constantes.

29. $3xy' + 5y = 10$

30. $y' = y^2 + 2y - 3$

31. $(y - 1)y' = 1$

32. $y'' + 4y' + 6y = 10$

En los problemas 33 y 34, verifique si el par de funciones indicadas es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

33. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y,$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t},$

$y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t,$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}e^t,$

$y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^t$

Problemas de análisis

35. Construya una ecuación diferencial que no cuente con soluciones reales.

36. Construya una ecuación diferencial de la que usted esté seguro que tiene únicamente la solución trivial $y = 0$. Explique su razonamiento.

37. ¿Cuál es la función que a partir de cálculo usted sabe que su primera derivada es la propia función? ¿Y que su primera derivada es un múltiplo constante k de la propia función? Escriba cada respuesta en forma de una ecuación diferencial de primer orden con una solución.

38. ¿Cuál es la función (o funciones) que a partir de cálculo usted sabe que su segunda derivada es la propia función? ¿Y que su segunda derivada es el negativo de la misma función? Escriba cada respuesta en forma de una ecuación diferencial de segundo orden con una solución.

39. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$. Encuentre un intervalo de definición I. [*Sugerencia: I no* es el intervalo $(-\infty, \infty)$.]

40. Analice por qué tiene sentido suponer que la ecuación diferencial lineal $y'' + 2y' + 4y = 5 \operatorname{sen} t$ cuenta con una solución del tipo $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$, donde A y B son constantes. Luego encuentre las constantes A y B específicas de modo que $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$ sea una solución particular de la ED.

En los problemas 41 y 42, la figura dada representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ define implícitamente diversas soluciones de la ED. Con cuidado, reproduzca cada figura en una hoja de papel. Utilice lápices de distinto color para marcar los segmentos o partes de cada gráfica que correspondan a las gráficas de las soluciones. Recuerde que una solución ϕ debe ser una función y además diferenciable. Utilice la curva de solución para estimar el intervalo I de definición de cada solución ϕ.

41.

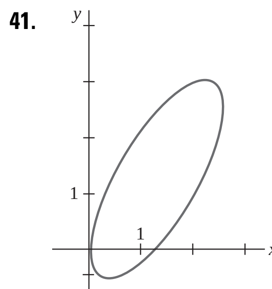


FIGURA 1.1.5 Gráfica del problema 41

42.

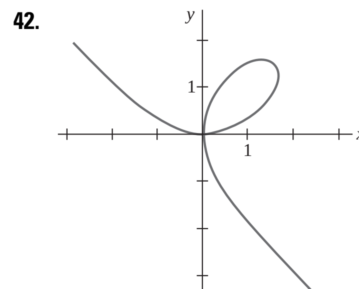


FIGURA 1.1.6 Gráfica del problema 42

43. Las gráficas de los miembros de la familia de un parámetro $x^3 + y^3 = 3cxy$ se denominan **folia de Descartes**. Verifique si esta familia es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}.$$

44. La gráfica de la **FIGURA 1.1.6** representa al miembro de la familia de folia del problema 43 que corresponde a $c = 1$. Analice lo siguiente: ¿cómo puede la ED del problema 43 ayudarnos a encontrar puntos sobre la gráfica de $x^3 + y^3 =$

$3xy$ donde la línea tangente sea vertical? ¿De qué forma nos ayuda conocer el lugar donde una línea tangente es vertical para determinar un intervalo de definición I de una solución ϕ de la ED? Compare sus ideas con sus estimaciones de los intervalos del problema 42.

45. En el ejemplo 3, el intervalo I más largo sobre el que las soluciones explícitas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se encuentran definidas es el intervalo abierto $(-5, 5)$. ¿Por qué el intervalo I de definición no puede ser el intervalo cerrado $[-5, 5]$?

46. En el problema 21 se proporciona una familia de soluciones de un parámetro para la ED $P' = P(1 - P)$. ¿Alguna curva de solución cruza a través del punto (0, 3)? ¿Y a través del punto (0, 1)?

47. Analice e ilustre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de las formas $dy/dx = f(x)$ y $d^2y/dx^2 = f(x)$.

48. La ecuación diferencial $x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$ presenta la forma señalada en (4). Determine si la ecuación puede expresarse en la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

49. La forma normal (5) de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es equivalente a (4) siempre que las dos formas cuenten con exactamente las mismas soluciones. Construya una ecuación diferencial de primer orden para la que $F(x, y, y') = 0$ no sea equivalente a la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

50. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ para la que $y = c_1x + c_2x^2$ sea una familia de soluciones de dos parámetros. Asegúrese de que su ecuación no contenga los parámetros arbitrarios c_1 y c_2.

Con frecuencia es posible obtener información cualitativa sobre una solución $y = \phi(x)$ de una ecuación diferencial a partir de la propia ecuación. Antes de iniciar con los problemas 51 a 54, recuerde el significado geométrico de las derivadas dy/dx y d^2y/dx^2.

51. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = e^{-x^2}$.

a) Explique por qué una solución de una ED debe ser una función creciente sobre todo intervalo del eje *x*.

b) ¿Cuáles son $\lim_{x\to-\infty} dy/dx$ y $\lim_{x\to\infty} dy/dx$? ¿Qué sugiere esto acerca de una curva de solución cuando $x \to \pm\infty$?

c) Determine un intervalo sobre el cual una curva de solución sea cóncava hacia abajo y un intervalo sobre el que la curva sea cóncava hacia arriba.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ para la ecuación diferencial cuya forma es sugerida por los incisos *a*) a *c*).

52. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = 5 - y$.

a) Ya sea por inspección visual o con el método sugerido en los problemas 29 a 32, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilice únicamente la ecuación diferencial para encontrar intervalos en el eje *y* sobre los cuales una solución no constante $y = \phi(x)$ sea creciente. Encuentre intervalos en el eje *y* sobre los que $y = \phi(x)$ sea decreciente.

53. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.

a) Ya sea por inspección visual o con el método sugerido en los problemas 29 a 32, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilice sólo la ecuación diferencial para encontrar intervalos en el eje *y* sobre los que una solución no constante $y = \phi(x)$ sea creciente; también, sobre los cuales $y = \phi(x)$ sea decreciente.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = a/2b$ es la coordenada *y* de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

d) Sobre los mismos ejes de coordenadas, trace las gráficas de las soluciones de dos constantes identificadas en el inciso *a*). Estas soluciones constantes dividen el plano *xy* en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma esté sugerida por los resultados de los incisos *b*) y *c*).

54. Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explique por qué no existen soluciones constantes de la ED.

b) Describa la gráfica de una solución $y = \phi(x)$. Por ejemplo, ¿una curva de solución puede tener algún extremo relativo?

c) Explique por qué $y = 0$ es la coordenada *y* de un punto de inflexión de una curva de solución.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma esté sugerida en los incisos *a*) a *c*).

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 55 y 56, utilice un programa computacional para calcular todas las derivadas y realizar las reducciones necesarias a fin de verificar que la función indicada representa una solución particular de la ecuación diferencial dada.

55. $y^{(4)} - 20y''' + 158y'' - 580y' + 841y = 0;$
$y = xe^{5x}\cos 2x$

56. $x^3y''' + 2x^2y'' + 20xy' - 78y = 0;$
$$y = 20\frac{\cos(5\ln x)}{x} - 3\frac{\operatorname{sen}(5\ln x)}{x}$$

1.2 Problemas de valor inicial

Introducción Con frecuencia enfrentamos problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales establecidas, es decir, condiciones impuestas sobre la incógnita $y(x)$ o sobre sus derivadas. En esta sección analizamos uno de estos problemas denominado *problema de valor inicial*.

■ **Problema de valor inicial** En cierto intervalo I que contiene a x_0, el problema de

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas de forma arbitraria, se denomina **problema de valor inicial (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se denominan **condiciones iniciales**.

■ **Problemas de valor inicial de primero y segundo orden** El problema presentado en (1) también se denomina **problema de valor inicial de *n*-ésimo orden**. Por ejemplo,

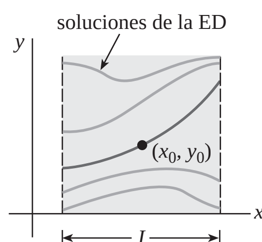


FIGURA 1.2.1 PVI de primer orden

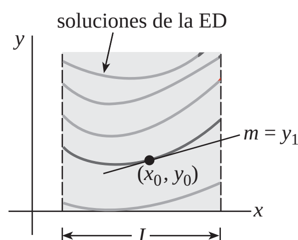


FIGURA 1.2.2 PVI de segundo orden

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

son problemas de valores iniciales de primero y segundo orden, respectivamente. Estos dos problemas resultan sencillos de interpretar en términos geométricos. Para (2) buscamos una solución de la ecuación diferencial sobre un intervalo I que contenga a x_0 de modo que una curva de solución cruce a través del punto establecido (x_0, y_0). Observe la **FIGURA 1.2.1**. Para (3) requerimos encontrar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no sólo cruce por (x_0, y_0), sino que también cruce en forma tal que la pendiente de la curva en este punto sea y_1. Vea la **FIGURA 1.2.2**. El término *condición inicial* se deriva de los sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan, respectivamente, la posición y la velocidad de un objeto en algún principio, o tiempo inicial, t_0.

Resolver un problema de valor inicial de n-ésimo orden con frecuencia implica utilizar una familia de soluciones de n parámetros de la ecuación diferencial dada para encontrar n constantes especializadas, de modo que la solución particular resultante de la ecuación también "ajuste" (satisfaga) las n condiciones iniciales.

EJEMPLO 1 Problemas de valor inicial de primer orden

Es posible verificar de forma simple que $y = ce^x$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación sencilla de primer orden $y' = y$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si especificamos una condición inicial, digamos $y(0) = 3$, al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia se determina la constante $3 = ce^0 = c$. Por lo tanto, la función $y = 3e^x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

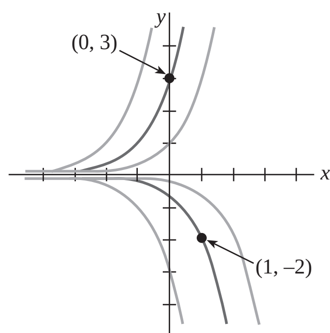


FIGURA 1.2.3 Soluciones de problemas de valor inicial en el ejemplo 1

Ahora, si precisamos que una solución de la ecuación diferencial atraviese el punto $(1, -2)$ en lugar de $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ arrojará $-2 = ce$ o $c = -2e^{-1}$. La función $y = -2e^{x-1}$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

Las gráficas de estas dos funciones se muestran en la **FIGURA 1.2.3**. ≡

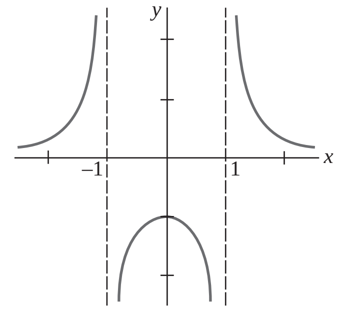
El siguiente ejemplo ilustra otro problema de valor inicial de primer orden. Aquí, observe cómo el intervalo de definición I de la solución $y(x)$ depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Intervalo *I* de definición de una solución

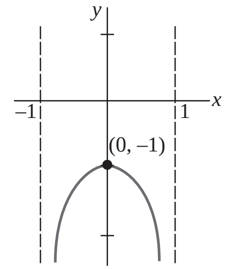
En el problema 6 de los ejercicios 2.2 se le solicitará mostrar que una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = 1/$

$(x^2 + c)$. Si imponemos la condición inicial $y(0) = -1$ entonces, al sustituir $x = 0$ y $y = -1$ en la familia de soluciones obtenemos $-1 = 1/c$ o $c = -1$. De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$. Ahora enfaticemos las siguientes tres diferencias.

- Considerado como una *función*, el dominio de $y = 1/(x^2 - 1)$ es el conjunto de números reales x para el que se define $y(x)$; éste es el conjunto de todos los números reales con excepción de $x = -1$ y $x = 1$. Observe la **FIGURA 1.2.4*a***).
- Considerado como una *solución de la ecuación diferencial* $y' + 2xy^2 = 0$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría tomarse como cualquier intervalo sobre el que $y(x)$ estuviera definida y fuera diferenciable. Como puede observarse en la figura 1.2.4*a*), los intervalos más grandes en los que $y = 1/(x^2 - 1)$ representa una solución son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.
- Considerado como una *solución del problema de valor inicial* $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría ser cualquier intervalo sobre el cual $y(x)$ estuviera definida, fuera diferenciable y contuviera el punto inicial $x = 0$; el intervalo más grande para el que esto es verdadero es $(-1, 1)$. Véase la figura 1.2.4*b*). ≡



a) Función definida para toda x excepto $x = \pm 1$



b) Solución definida sobre el intervalo que contiene a $x = 0$

FIGURA 1.2.4 Gráficas de la función y la solución del PVI del ejemplo 2

Revise los problemas 3 a 6 de los ejercicios 1.2 como una continuación del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Problema de valor inicial de segundo orden

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 observamos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para $x'' + 16x = 0$. Encuentre una solución del problema de valor inicial

$$x'' + 16x = 0, \quad x(\pi/2) = -2, \quad x'(\pi/2) = 1. \tag{4}$$

Solución Primero aplicamos $x(\pi/2) = -2$ a la familia de soluciones dada: $c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$. En vista de que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, encontramos que $c_1 = -2$. A continuación aplicamos $x'(\pi/2) = 1$ a la familia de un parámetro $x(t) = -2 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$. Si derivamos y luego establecemos $t = \pi/2$ y $x' = 1$, obtenemos $8 \operatorname{sen} 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, a partir de lo cual podemos observar que $c_2 = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$ es una solución de (4). ≡

Existencia y unicidad

Al considerar un problema de valor inicial surgen dos preguntas importantes:

¿Existe una solución del problema? Si la hay, ¿es única?

Para un problema de valor inicial como el de (2), nos preguntamos:

Existencia { *¿La ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ cuenta con soluciones?*
¿Alguna de las curvas de solución atraviesan el punto (x_0, y_0)?

Unicidad { *¿En qué momento podemos estar seguros de que existe precisamente una curva de solución atravesando el punto (x_0, y_0)?*

Observe que en los ejemplos 1 y 3 se utiliza la frase "*una* solución" en lugar de "*la* solución" del problema. El artículo indefinido "una" se aplica de forma deliberada para sugerir la posibilidad de que existan otras soluciones. En este punto no se ha demostrado que exista una sola solución para cada problema. El siguiente ejemplo ilustra un problema de valor inicial con dos soluciones.

EJEMPLO 4 Un problema de valor inicial puede tener varias soluciones

Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, de modo que el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(0) = 0$, cuenta con al menos dos soluciones. Como se ilustra en la **FIGURA 1.2.5**, las gráficas de ambas funciones cruzan a través del mismo punto (0, 0). ≡

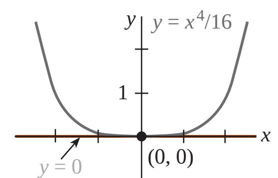


FIGURA 1.2.5 Dos soluciones de un mismo PVI en el ejemplo 4

Dentro de los límites de un curso formal de ecuaciones diferenciales podemos estar seguros de que la *mayoría* de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y de que las soluciones a los problemas de valor inicial *probablemente* serán únicas. Sin embargo, en la vida real, no es así. Por ello resulta conveniente saber con anticipación al intentar resolver un problema de

valor inicial, si existe una solución y, de ser así, si es la única solución al problema. Dado que vamos a considerar ecuaciones diferenciales de primer orden en los siguientes dos capítulos, estableceremos aquí, sin demostración, un teorema directo que ofrece las suficientes condiciones como para garantizar la existencia y unicidad de una solución al problema de valor inicial de primer orden de la forma presentada en (2). Tendremos que esperar al capítulo 3 para abordar la cuestión de la existencia y unicidad de un problema de valor inicial de segundo orden.

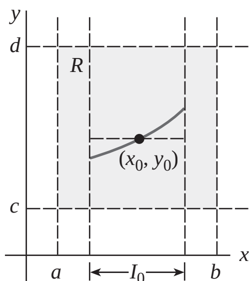


FIGURA 1.2.6 Región rectangular R

Teorema 1.2.1 Existencia de una solución única

Establecemos R como una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, la cual contiene al punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe cierto intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$ definida en I_0 que representa una solución del problema de valor inicial (2).

La conclusión anterior es uno de los teoremas más relevantes y populares que existen para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que los criterios de continuidad de $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son relativamente sencillos de verificar. La geometría del teorema 1.2.1 se ilustra en la **FIGURA 1.2.6**.

EJEMPLO 5 Vuelta al ejemplo 3

En el ejemplo 3 observamos que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ posee al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por (0, 0). El análisis de las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

muestra que éstas son continuas en la mitad del plano superior definido por $y > 0$. Así, el teorema 1.2.1 nos permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$, en la mitad del plano superior existe cierto intervalo con centro en x_0 sobre el cual la ecuación diferencial tiene una solución única. De tal modo, por ejemplo, incluso sin resolverlo, sabemos que existe cierto intervalo centrado en 2 sobre el cual el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ tiene una solución única. ≡

En el ejemplo 1, el teorema 1.2.1 garantiza que no existen otras soluciones al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$ distintas a $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto se deriva del hecho de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ son continuas en la totalidad del plano xy. Además puede demostrarse que el intervalo I sobre el que cada solución se encuentra definida es $(-\infty, \infty)$.

Intervalo de existencia y unicidad Suponga que $y(x)$ representa una solución al problema de valor inicial (2). Los siguientes tres conjuntos sobre el eje real x pueden no ser iguales: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I sobre el cual la solución $y(x)$ se encuentra definida o existe, y el intervalo I_0 de existencia *y* unicidad. En el ejemplo 2 de la sección 1.1 ilustramos la diferencia que hay entre el dominio de una función y el intervalo de definición I. Ahora supongamos que (x_0, y_0) es un punto situado al interior de la región rectangular R del teorema 1.2.1. Resulta que la continuidad de la función $f(x, y)$ sobre R es suficiente por sí misma para garantizar la existencia de al menos una solución de $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definida sobre algún intervalo I. El intervalo de definición I para este problema de valor inicial se toma, por lo general, como el intervalo más grande que contiene a x_0 sobre el que la solución $y(x)$ está definida y es diferenciable. El intervalo I depende tanto de $f(x, y)$ como de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Revise los problemas 31 a 34 dados en los ejercicios 1.2. La condición adicional de continuidad de la primera derivada parcial $\partial f/\partial y$ sobre R nos permite afirmar que no sólo existe una solución sobre algún intervalo I_0 que contiene a x_0, sino que además se trata de la *única* solución que satisface a $y(x_0) = y_0$. Sin embargo, el teorema 1.2.1 no ofrece ninguna información acerca del tamaño de los intervalos I e I_0; *el intervalo de definición I no requiere ser tan amplio como la región R y el intervalo I_0 de existencia y unicidad puede no ser tan amplio como I.* El número $h > 0$ que define al intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 - h)$, puede ser muy pequeño y por lo tanto es mejor considerar que la solución $y(x)$ es *única en un sentido local*, es decir, una solución definida cerca del punto (x_0, y_0). Consulte el problema 44 de los ejercicios 1.2.

Comentarios

i) Las condiciones del teorema 1.2.1 son suficientes pero no necesarias. Cuando $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas sobre una región rectangular R, siempre debe concluirse que una solución de (2) existe y es única mientras (x_0, y_0) sea un punto al interior de R. Sin embargo, cuando las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema 1.2.1 no se mantienen, entonces podría suceder que: el problema (2) aún *pueda* tener una solución y esta solución *pueda* ser única, o (2) *pueda* tener varias soluciones o no tener solución alguna. Una revisión del ejemplo 4 muestra que la hipótesis del teorema 1.2.1 no se sostiene sobre la línea $y = 0$ para la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$, y por lo tanto no sorprende que, como vimos en el ejemplo 3 de esta sección, existan dos soluciones definidas sobre un intervalo común $(-h, h)$ que satisfacen $y(0) = 0$. Por otro lado, las hipótesis del teorema 1.2.1 no se sostienen sobre la línea $y = 1$ para la ecuación diferencial $dy/dx = |y - 1|$. No obstante, puede demostrarse que la solución del problema de valor inicial $dy/dx = |y - 1|$, $y(0) = 1$, es única. ¿Puede adivinar esta solución?

ii) Se recomienda leer, analizar, responder y recordar posteriormente el problema 43 de los ejercicios 1.2.

1.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 y 2, $y = 1/(1 + c_1e^{-x})$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que incluya esta ecuación diferencial y la condición inicial proporcionada.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$ **2.** $y(-1) = 2$

En los problemas 3 a 6, $y = 1/(x^2 + c)$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ED de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que incluya esta ecuación diferencial y la condición inicial dada. Proporcione el intervalo I más grande sobre el que se encuentra definida la solución.

3. $y(2) = \frac{1}{3}$ **4.** $y(-2) = \frac{1}{2}$

5. $y(0) = 1$ **6.** $y(\frac{1}{2}) = -4$

En los problemas 7 a 10, $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para la ED de segundo orden ED $x'' + x = 0$. Encuentre una solución del PVI de segundo orden que incluya esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7. $x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

En los problemas 11 a 14, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Encuentre una solución del PVI de segundo orden que incluya esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

11. $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

12. $y(1) = 0, \quad y'(1) = e$

13. $y(-1) = 5, \quad y'(-1) = -5$

14. $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

En los problemas 15 y 16, determine mediante inspección visual al menos dos soluciones para el PVI de primer orden que se presenta.

15. $y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$ **16.** $xy' = 2y, \quad y(0) = 0$

En los problemas 17 a 24, determine una región del plano xy para la cual la ecuación diferencial proporcionada cuente con una solución única cuya gráfica cruce el punto (x_0, y_0) dentro de la región.

17. $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$ **18.** $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x\dfrac{dy}{dx} = y$ **20.** $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

21. $(4 - y^2)y' = x^2$ **22.** $(1 + y^3)y' = x^2$

23. $(x^2 + y^2)y' = y^2$ **24.** $(y - x)y' = y + x$

En los problemas 25 a 28, determine si el teorema 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ posee una solución única a través del punto proporcionado.

25. $(1, 4)$ **26.** $(5, 3)$

27. $(2, -3)$ **28.** $(-1, 1)$

29. ***a***) Mediante inspección visual, encuentre una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $xy' = y$. Verifique si cada miembro de la familia es una solución del problema de valor inicial $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Justifique el inciso *a*) mediante la determinación de una región R dentro del plano xy para la cual la ecuación diferencial $xy' = y$ tenga una solución única a través del punto (x_0, y_0) dentro de R.

c) Verifique si la función segmentada

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisface la condición $y(0) = 0$. Determine si esta función también es una solución para el problema de valor inicial del inciso *a*).

30. ***a***) Verifique si $y = \tan(x + c)$ es una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

b) Dado que $f(x, y) = 1 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo momento, la región R del teorema 1.2.1 puede considerarse equivalente a todo el plano xy. Utilice la familia de soluciones del inciso *a*) para encontrar una solución explícita al problema de valor inicial de primer orden $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Y aunque $x_0 = 0$ se encuentra dentro del intervalo $(-2, 2)$, explique por qué la solución no está definida en este intervalo.

c) Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial del inciso *b*).

31. ***a***) Verifique si $y = -1/(x + c)$ es una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y' = y^2$.

b) Dado que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo momento, la región R del teorema 1.2.1 puede considerarse equivalente a todo el plano xy. A partir de la familia del inciso *a*), encuentre una solución que satisfaga $y(0) = 1$, y otra que satisfaga $y(0) = -1$. Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial.

32. ***a***) A partir de la familia del inciso *a*) del problema 31, encuentre una solución que satisfaga $y' = y^2$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 \neq 0$. Explique por qué el intervalo de definición I más amplio para esta solución es $(-\infty, 1/y_0)$ o $(1/y_0, \infty)$.

b) Determine el intervalo de definición I más amplio para la solución del problema de valor inicial de primer orden $y' = y^2$, $y(0) = 0$.

33. ***a***) Verifique si $3x^2 - y^2 = c$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial $y\,dy/dx = 3x$.

b) A mano, trace la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Encuentre todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso *a*) definidas mediante esta relación. Proporcione el intervalo de definición I para cada solución explícita.

c) El punto $(-2, 3)$ se encuentra sobre la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$, ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso *b*) satisface $y(-2) = 3$?

34. ***a***) Utilice la familia de soluciones del inciso *a*) del problema 33 para encontrar una solución implícita del problema de valor inicial $y\,dy/dx = 3x$, $y(2) = -4$. Luego, a mano, trace la gráfica de la solución explícita de este problema y proporcione su intervalo de definición I.

b) ¿Existe alguna solución explícita de $y\,dy/dx = 3x$ que cruce el origen?

En los problemas 35 a 38 se proporciona la gráfica de un miembro de la familia de soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$. Haga coincidir la curva de solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

a) $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$

b) $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -4$

c) $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

d) $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

e) $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

f) $y(0) = -4$, $y'(0) = -2$

35.

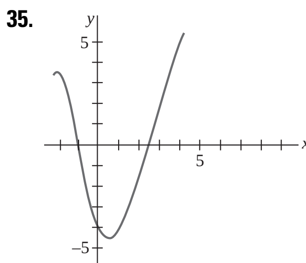


FIGURA 1.2.7 Gráfica del problema 35

36.

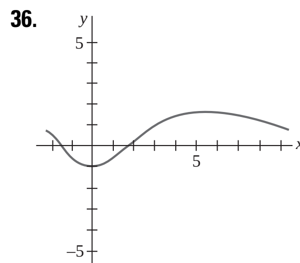


FIGURA 1.2.8 Gráfica del problema 36

37.

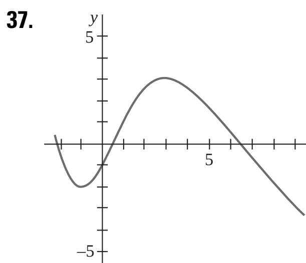


FIGURA 1.2.9 Gráfica del problema 37

38.

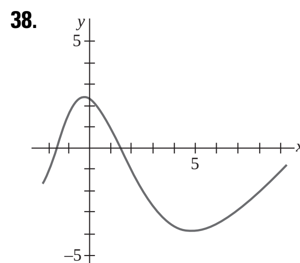


FIGURA 1.2.10 Gráfica del problema 38

≡ Problemas de análisis

En los problemas 39 y 40, utilice el problema 47 de los ejercicios 1.1 y los incisos (2) y (3) de esta sección.

39. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica en todo punto (x, y) cuente con la pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y tenga la intercepción y (0, 9).

40. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya segunda derivada sea $y'' = 12x - 2$ en cada punto (x, y) sobre su gráfica y $y = -x + 5$ sea tangente a la gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$.

41. Considere el problema de valor inicial $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine cuál de las dos curvas que presenta la **FIGURA 1.2.11** es la única curva de solución viable. Explique su razonamiento.

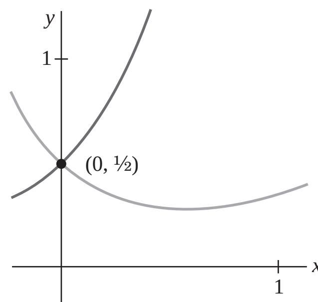


FIGURA 1.2.11 Gráfica del problema 41

42. Determine un valor posible de x_0 para el que la gráfica de la solución del problema de valor inicial $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ sea tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

43. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ posee una familia de soluciones de un parámetro y

que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en cierta región rectangular R del plano xy. Explique por qué no es posible que dos curvas de solución distintas se intersequen o sean tangentes entre sí en el punto (x_0, y_0) en R.

44. Las funciones

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4, \ -\infty < x < \infty$$

y
$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \tfrac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

cuentan con el mismo dominio pero, evidentemente, son distintas. Observe las **FIGURAS 1.2.12*a*)** y 1.2.12*b*), respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado del ejemplo 5.

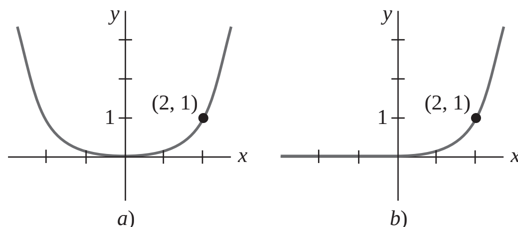


FIGURA 1.2.12 Dos soluciones para el PVI del problema 44

Modelo matemático

45. Crecimiento poblacional A partir de la siguiente sección observaremos que las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para describir o *modelar* diversos sistemas físicos. En este problema, suponga que se presenta un modelo del crecimiento poblacional de una pequeña comunidad por medio del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de individuos que hay en la comunidad y t es el tiempo medido en años. ¿Qué tan rápido, es decir, a qué ritmo se incrementa la población en $t = 0$? ¿A qué velocidad crece cuando es de 500 individuos?

1.3 Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Introducción En esta sección presentaremos la noción de *modelo matemático*. En términos generales, un modelo matemático es una descripción matemática de algo. Dicha descripción puede ser algo tan simple como una función. Por ejemplo, al analizar la caída de gotas de agua y las marcas que dejan sobre papel secante, Leonardo da Vinci dedujo que la velocidad de caída de un cuerpo está dada por $v = gt$. A pesar de que existen muchos tipos de modelos matemáticos, en esta sección nos concentraremos únicamente en ecuaciones diferenciales y analizaremos algunos modelos específicos de ecuaciones diferenciales aplicadas en áreas como biología, física y química. Una vez que hayamos analizado algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales en los capítulos 2 y 3 regresaremos, para resolverlos, a algunos de dichos modelos.

Modelos matemáticos Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico, o incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático**, el cual se construye con ciertos objetivos en mente. Por ejemplo, es posible que deseemos comprender los mecanismos presentes detrás de cierto ecosistema aplicándonos al estudio del crecimiento de las poblaciones animales localizadas en dicho sistema, o fechar un fósil por medio del análisis de la degeneración de una sustancia radiactiva contenida en él o en el estrato donde se descubrió.

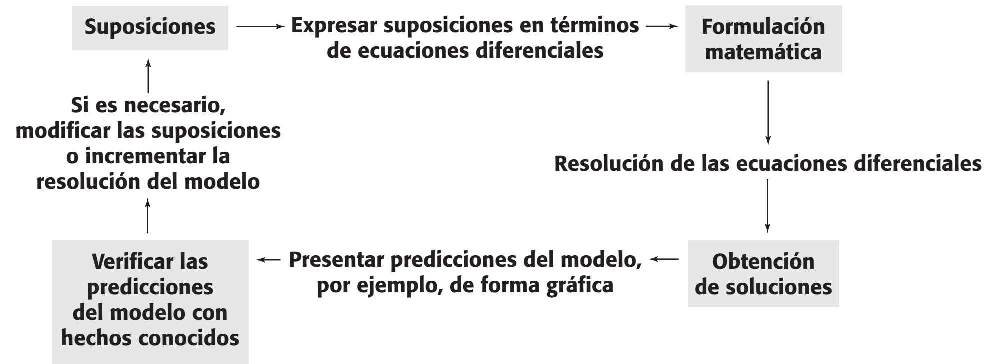
La construcción de un modelo matemático de un sistema inicia con la *identificación de las variables* responsables del cambio que se produzca en el sistema. Es posible que al principio decidamos no incorporar todas estas variables en el modelo. En este primer paso se especifica el **nivel de resolución** del modelo. A continuación, *formulamos un conjunto de premisas razonables* o hipótesis acerca del sistema que intentamos describir. Tales supuestos también incluirán cualquier ley empírica aplicable al sistema.

Para ciertos propósitos es perfectamente razonable aceptar modelos de baja resolución. Por ejemplo, podemos estar conscientes de que para modelar el movimiento de un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza de desaceleración correspondiente a la fricción del aire ocasionalmente se ignora en los cursos básicos de física; sin embargo, para

un científico cuya labor es predecir de manera precisa la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, la resistencia del aire y otros factores como la curvatura de la Tierra tienen que ser tomados en cuenta.

Ya que las suposiciones acerca de un sistema con frecuencia implican una *tasa de cambio* de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones puede implicar una o más ecuaciones que involucren *derivadas*. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez formulado un modelo matemático equivalente a una ecuación diferencial o a un sistema de ecuaciones diferenciales, se enfrenta el no menos importante problema de intentar resolverlo. *Si* podemos solucionarlo, entonces consideramos que el modelo será razonable cuando su solución sea consistente con datos experimentales o con hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Pero si las predicciones generadas por la solución no son adecuadas, podemos incrementar el nivel de resolución del modelo o formular premisas alternativas sobre los mecanismos causantes del cambio en el sistema. Los pasos del proceso de modelación se muestran en el siguiente diagrama.



Evidentemente, al incrementar la resolución se eleva la complejidad del modelo matemático y aumenta la probabilidad de que no podamos obtener una solución explícita.

Un modelo matemático de un sistema físico incluye, por lo general, a la variable de tiempo t. Una solución del modelo presentará entonces el **estado del sistema**; en otras palabras, para valores apropiados de t, los valores de la variable (o variables) dependiente describen al sistema en el pasado, el presente y el futuro.

Dinámicas de población Uno de los primeros intentos por modelar el **crecimiento poblacional** humano mediante las matemáticas fue realizado por el economista inglés Thomas Malthus, en 1798. Básicamente, la idea del modelo de Malthus representa la suposición de que el ritmo con que la población de un país crece en cierto tiempo es proporcional* a su población total en ese tiempo. En otras palabras, mientras más personas existan en el tiempo t, más serán en el futuro. En términos matemáticos, si $P(t)$ indica la población total en el tiempo t, entonces tal suposición puede expresarse como

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. A pesar de que este sencillo modelo no toma en cuenta muchos factores (por ejemplo, inmigración y emigración) que pueden influir sobre las poblaciones humanas para su crecimiento o disminución, resultó ser bastante preciso para predecir la población de Estados Unidos durante los años de 1790 a 1860. Las poblaciones que crecen a un ritmo descrito por (1) son raras, sin embargo, todavía se utiliza (1) para modelar el *crecimiento de pequeñas poblaciones durante breves intervalos de tiempo*, por ejemplo, el crecimiento de bacterias en cajas de Petri.

Decaimiento radiactivo El núcleo de un átomo está compuesto por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de tales combinaciones son inestables, es decir, los átomos decaen o transmutan en átomos de otra sustancia. Se dice que dichos núcleos inestables son

* Si dos cantidades u y v son proporcionales, esto se denota como $u \propto v$, lo cual significa que una cantidad es un múltiplo constante de la otra: $u = kv$.

radiactivos. Por ejemplo, con el tiempo el radio, que es altamente radiactivo, Ra-226, se transmuta en el gas radiactivo radón, Rn-222. En la modelación del fenómeno de **decaimiento radiactivo**, se supone que la velocidad dA/dt con que el núcleo de una sustancia decae es proporcional a la cantidad (en términos más precisos, al número de núcleos) $A(t)$ de la sustancia remanente en el tiempo t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Por supuesto, las ecuaciones (1) y (2) son idénticas; la diferencia sólo se encuentra en la interpretación de los símbolos y las constantes de proporcionalidad. Para el crecimiento, como se espera de (1), $k > 0$, y para el caso de (2) y el decaimiento, $k < 0$.

El modelo (1) para el crecimiento puede verse como la ecuación $dS/dt = rS$, la cual describe el crecimiento del capital S cuando una tasa de interés anual r se capitaliza de forma continua. El modelo (2) de decaimiento también se presenta en un entorno biológico, como el de la determinación de la vida media de un medicamento —el tiempo que toma para que 50% de éste se elimine del cuerpo por excreción o mediante el metabolismo—. En química, el modelo de decaimiento (2) se presenta como la descripción matemática de una reacción química de primer orden. El argumento es el siguiente:

Una sola ecuación diferencial puede actuar como modelo matemático para muchos fenómenos distintos.

Los modelos matemáticos con frecuencia vienen acompañados de ciertas condiciones secundarias. Por ejemplo, en (1) y (2) esperaríamos conocer, respectivamente, una población inicial P_0 y una cantidad inicial de sustancia radiactiva A_0 disponible. Si tal punto inicial en el tiempo se toma como $t = 0$, entonces sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$. En otras palabras, un modelo matemático puede consistir en un problema de valor inicial o, como veremos posteriormente en la sección 3.9, en un problema de valor en la frontera.

■ **Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento** De acuerdo con la **ley empírica de enfriamiento de Newton** —o de calentamiento—, la velocidad con que la temperatura de un cuerpo cambia es proporcional a la diferencia que hay entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, la denominada temperatura ambiental. Si $T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el momento t, T_m la temperatura del medio que lo rodea y dT/dt la velocidad a la que cambia la temperatura del cuerpo, la ley de Newton de enfriamiento y calentamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En cualquier caso, calentamiento o enfriamiento, si T_m es una constante, se sostiene que $k < 0$.

■ **Difusión de una enfermedad** Una enfermedad contagiosa —por ejemplo, un virus de gripe— se difunde en una comunidad por medio del contacto físico entre las personas. Si $x(t)$ indica el número de personas que han tenido contacto con la enfermedad y $y(t)$ el número de personas que no han sido expuestas a ésta, parece razonable suponer que la razón dx/dt a la que se difunde la enfermedad es proporcional al número de encuentros o *interacciones* entre estos dos grupos de gente. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, es decir, proporcional al producto xy, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

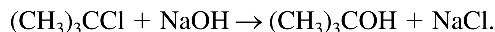
donde k es la constante acostumbrada de proporcionalidad. Suponga una pequeña comunidad que cuenta con una población fija de n personas. Si una persona infectada se introduce en esta comunidad, entonces puede sostenerse que $x(t)$ y $y(t)$ se encuentran relacionados por $x + y = n + 1$. Al utilizar esta última ecuación para eliminar a y en (4) obtendremos el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{5}$$

Una condición inicial evidente que acompaña a la ecuación (5) es $x(0) = 1$.

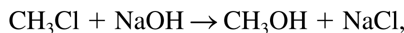
■ **Reacciones químicas** La desintegración de una sustancia radiactiva, controlada por la ecuación diferencial (2), se dice que es una **reacción de primer orden**. En química, pocas reacciones siguen esta misma ley empírica: si las moléculas de una sustancia A se descom-

ponen en moléculas más pequeñas, resulta natural suponer que la velocidad a la que se lleva a cabo esta descomposición será proporcional a la cantidad de la primera sustancia que no ha experimentado conversión; es decir, si $X(t)$ es la cantidad de sustancia A que permanece en cualquier momento, entonces $dX/dt = kX$, donde k es una constante negativa dado que X está disminuyendo. Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión de cloruro de t-butilo en alcohol t-butílico:



$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Únicamente la concentración de cloruro de t-butilo controla la velocidad de reacción. Pero en la reacción



$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl,$$

por cada molécula de cloruro de metilo se consume una molécula de hidróxido de sodio, formando así una molécula de alcohol metílico y una molécula de cloruro de sodio. En dicho caso, la tasa a la que se lleva a cabo la reacción es proporcional al producto de las concentraciones restantes de CH_3Cl y NaOH. Si X indica la cantidad de CH_3OH formada y α y β son las cantidades dadas de los primeros dos químicos A y B, entonces las cantidades instantáneas no convertidas al químico C son $\alpha - X$ y $\beta - X$, respectivamente. Por lo tanto, la velocidad de formación de C está dada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{6}$$

donde k representa una constante de proporcionalidad. Se dice que una reacción cuyo modelo está dado por la ecuación (6) es de **segundo orden**.

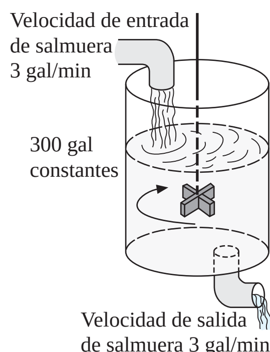


FIGURA 1.3.1 Tanque de mezcla

■ **Mezclas** La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden para la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque grande a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Observe la **FIGURA 1.3.1**. Si $A(t)$ indica la cantidad de sal (medida en libras) que hay en el tanque en el momento t, entonces la velocidad a que $A(t)$ cambia será una tasa neta de:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de sal}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{salida de sal}\end{pmatrix} = R_{entrada} - R_{salida}. \tag{7}$$

La velocidad de entrada $R_{entrada}$ a la que ingresa la sal al tanque es el producto de la concentración de sal del flujo de entrada y la velocidad del fluido de entrada. Observe que $R_{entrada}$ se mide en libras por minuto

$$R_{entrada} = \underbrace{(2 \text{ lb/gal})}_{\substack{\text{Concentración}\\ \text{de sal del flujo}\\ \text{de entrada de}}} \cdot \underbrace{(3 \text{ gal/min})}_{\substack{\text{Velocidad}\\ \text{de}\\ \text{salmuera}}} = \underbrace{(6 \text{ lb/min})}_{\substack{\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de sal}}}.$$

Ahora, como la solución está siendo bombeada hacia fuera del tanque a la misma velocidad a la que ingresa, la cantidad de galones de salmuera que hay dentro del tanque en el tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo tanto, la concentración de sal dentro del tanque, así como en el flujo de salida, es $c(t) = A(t)/300$ lb/gal, y la velocidad de salida R_{salida} de sal es

$$R_{salida} = \underbrace{\left(\frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal}\right)}_{\substack{\text{Concentración}\\ \text{de sal del flujo}\\ \text{de entrada de}}} \cdot \underbrace{(3 \text{ gal/min})}_{\substack{\text{Velocidad}\\ \text{de}\\ \text{salmuera}}} = \underbrace{\frac{A(t)}{100} \text{ lb/min}}_{\substack{\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de sal}}}.$$

Entonces, la velocidad neta (7) se convierte en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \qquad \text{o} \qquad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \tag{8}$$

Si $r_{entrada}$ y r_{salida} indican las velocidades de entrada y salida de las soluciones de salmuera,* entonces existen tres posibilidades $r_{entrada} = r_{salida}$, $r_{entrada} > r_{salida}$ y $r_{entrada} < r_{salida}$. En el análisis que llevó a (8) suponemos que $r_{entrada} = r_{salida}$. En los últimos dos casos, dentro del tanque, la cantidad de galones de salmuera está aumentando ($r_{entrada} > r_{salida}$) o disminuyendo ($r_{entrada} < r_{salida}$) a la velocidad neta $r_{entrada} - r_{salida}$. Véanse los problemas 10 a 12 de los ejercicios 1.3.

Drenado de un tanque En hidrodinámica, la **ley de Torricelli** establece que la velocidad v de flujo de salida de agua a través de un orificio plano ubicado en la parte inferior de un tanque lleno hasta una altura h será igual a la velocidad que un cuerpo (en este caso una gota de agua) adquiriría en caída libre desde una altura h; es decir, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta última expresión proviene de la ecuación de energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ con la energía potencial mgh y resolviendo para v. Suponga que un tanque lleno de agua puede drenar mediante un orificio bajo la influencia de la gravedad. Deseamos encontrar la altura h del agua restante en el tanque en el tiempo t. Considere el tanque mostrado en la **FIGURA 1.3.2**. Si el área del orificio es A_h (en pies^2) y la velocidad del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$ (en pies/s), entonces el volumen del agua que abandona el tanque por segundo es $A_h\sqrt{2gh}$ (en pies^3/s). De este modo, si $V(t)$ indica el volumen del agua que hay en el tanque en el tiempo t,

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

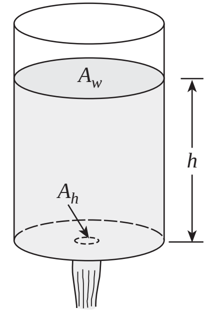


FIGURA 1.3.2 Agua drenando de un tanque

donde el signo negativo indica que V disminuye. Observe que aquí ignoramos la posibilidad de fricción en el orificio, la cual puede ocasionar una reducción en la velocidad del flujo en dicho lugar. Ahora, si el tanque es tal que el volumen de agua en el tiempo t puede expresarse como $V(t) = A_wh$, donde A_w (en pies^2) representa el área *constante* de la superficie superior del agua (véase figura 1.3.2), entonces $dV/dt = A_w dh/dt$. Al sustituir esta última expresión en (9) obtenemos la ecuación diferencial deseada para la altura del agua en el tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

Resulta interesante observar que la ecuación (10) sigue siendo válida incluso cuando A_w no es constante. En este caso, debemos expresar el área de la superficie superior del agua como una función h, es decir, $A_w = A(h)$. Véase el problema 14 en los ejercicios 1.3.

Circuitos en serie Considere el circuito en serie simple, o de lazo sencillo, que contiene al inductor, resistor y capacitor mostrados en la **FIGURA 1.3.3*a*)**. La corriente que circula en un circuito después que el interruptor se cierra se representa mediante $i(t)$; la carga sobre un capacitor en el tiempo t está señalada como $q(t)$. Las letras L, C y R representan inductancia, capacitancia y resistencia, respectivamente, y por lo general son constantes. Ahora, de acuerdo con la **segunda ley de Kirchhoff**, el voltaje $E(t)$ que se genera en un lazo cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el lazo. La figura 1.3.3*b*) también muestra los símbolos y las fórmulas apropiadas para señalar las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$, presente en el capacitor, mediante $i = dq/dt$, al sumar las tres caídas de voltaje

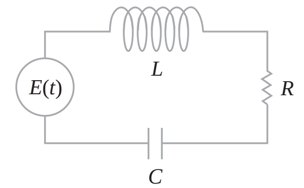
Inductor	Resistor	Capacitor
$L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$,	$iR = R\frac{dq}{dt}$,	$\frac{1}{C}q$

e igualar la suma al voltaje impreso, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{11}$$

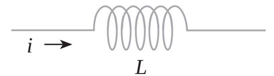
Examinaremos con mayor detalle una ecuación diferencial análoga a la (11) en la sección 3.8.

Caída libre Al construir el modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se desplaza en un campo de fuerza, muchas veces se empieza con la segunda ley de Newton del



a) Circuito en serie *LRC*

Inductor
inductancia L: henrys (h)
caída de voltaje a través: $L\frac{di}{dt}$



Resistor
resistencia R: ohms (Ω)
caída de voltaje a través: iR



Capacitor
capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje a través: $\frac{1}{C}q$

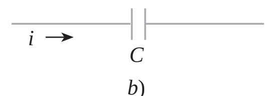


FIGURA 1.3.3 La corriente $i(t)$ y la carga $q(t)$ se miden en amperes (A) y coulombs (C), respectivamente

* No confundir estos símbolos con $R_{entrada}$ y R_{salida}, los cuales representan las velocidades de entrada y salida de *sal*.

movimiento. Recuerde de sus conocimientos de física básica que la **primera ley de Newton para el movimiento** afirma que un cuerpo puede permanecer en reposo o continuar moviéndose a velocidad constante a menos que actúe sobre él una fuerza externa. En cada caso, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas $F = \Sigma F_k$; es decir, el resultado neto o la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es cero, entonces la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley de Newton para el movimiento** indica: cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es igual a cero, entonces esta fuerza neta es proporcional a su aceleración a, o más exactamente, $F = ma$, donde m representa la masa del cuerpo.

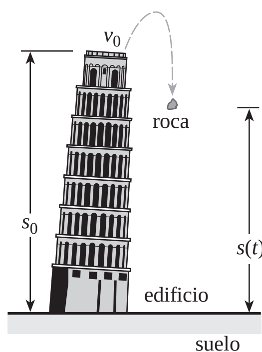


FIGURA 1.3.4 Posición de la roca medida en función del nivel del suelo

Ahora suponga que una roca es arrojada hacia arriba desde el techo de un edificio, como ilustra la **FIGURA 1.3.4**. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la roca en relación con el suelo en el tiempo t? La aceleración de la roca es la segunda derivada d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección ascendente es positiva y que ninguna fuerza actúa sobre la roca salvo la fuerza de gravedad, entonces la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{12}$$

En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $F = F_1 = -W$ de la roca cerca de la superficie de la Tierra. Recuerde que la magnitud del peso es $W = mg$, donde m es la masa del cuerpo y g la aceleración debida a la gravedad. En (12), el signo negativo se debe a que el peso de la roca es una fuerza dirigida hacia abajo, lo cual es contrario a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces s se determina a partir del problema de valor inicial de segundo orden

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \qquad s(0) = s_0,\ s'(0) = v_0. \tag{13}$$

Aunque no hemos resaltado las soluciones de las ecuaciones construidas, observamos que (13) puede resolverse integrando la constante $-g$ dos veces con respecto a t. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración. Usted podrá reconocer la solución de (13) utilizando conocimientos de física básica como la fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.

■ **Caída de cuerpos y resistencia del aire** Antes del famoso experimento de Galileo realizado en la Torre inclinada de Pisa, la mayoría de las personas creía que en caída libre los objetos más pesados, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos más ligeros, como una pluma. Desde luego, cuando se lanzaban simultáneamente una bala de cañón y una pluma desde la misma altura, *sí* caían a diferentes velocidades, pero no debido a que la bala de cañón fuera más pesada. La diferencia en las velocidades se debe a la resistencia del aire. La fuerza resistiva del aire se ignora en el modelo dado en (13). Bajo las mismas circunstancias, un cuerpo de masa m cayendo, como una pluma con baja densidad y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si tomamos, en esta circunstancia, la dirección positiva como orientada hacia abajo, entonces la fuerza neta que actúa sobre la masa estará dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, llamada **amortiguación viscosa**, que actúa en dirección opuesta o ascendente. Véase la **FIGURA 1.3.5**. Ahora, como v está relacionada con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton se convierte en $F = ma = m\,dv/dt$. Al igualar la fuerza neta de esta forma con la segunda ley de Newton se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo en el tiempo t,

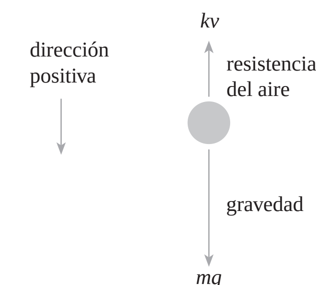


FIGURA 1.3.5 Cuerpo de masa m que cae

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{14}$$

En esta expresión k es una constante positiva de proporcionalidad llamada **coeficiente de arrastre**. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo recorre al caer en el tiempo t desde su punto inicial de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, (14) es una ecuación diferencial de segundo orden

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg. \tag{15}$$

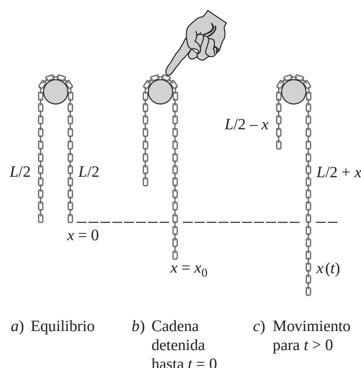


FIGURA 1.3.6 Cadena que se desliza sin fricción sobre una polea

■ **Cadena que se desliza** Suponga que una cadena uniforme de longitud en pies L está suspendida sobre una polea metálica clavada a la pared por encima del nivel del suelo. Asuma que la polea carece de fricción y que la cadena pesa ρ lb/ft. La **FIGURA 1.3.6*a*)** ilustra la posición en que la cadena cuelga en equilibrio; si se moviera un poco hacia la izquierda o la derecha,

la cadena se desprendería de la polea. Suponga que la dirección positiva se considera descendente, y que $x(t)$ denota la distancia que el extremo derecho de la cadena recorrería cayendo en el tiempo t. La posición de equilibrio corresponde a $x = 0$. En la figura 1.3.6*b*) la cadena se desplaza una cantidad de x_0 pies y se sostiene en la polea hasta soltarse en un tiempo inicial que se designa como $t = 0$. Para la cadena en movimiento, como ilustra la figura 1.3.6*c*), tenemos las siguientes cantidades:

$$\textit{peso de la cadena:}\;\; W = (L \text{ ft})\,(\rho \text{ lb/ft}) = L\rho,$$

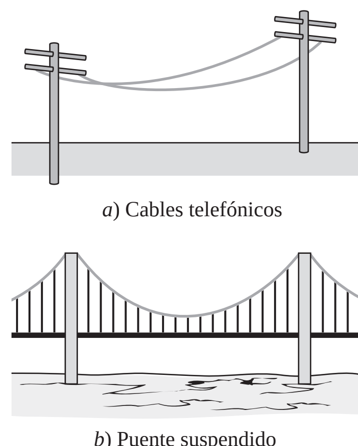
$$\textit{masa de la cadena:}\;\; m = W/g = L\rho/32$$

$$\textit{fuerza neta:}\;\; F = \left(\frac{L}{2} + x\right)\rho - \left(\frac{L}{2} - x\right)\rho = 2x\rho.$$

Dado que $a = d^2x/dt^2$, $ma = F$ se vuelve

$$\frac{L\rho}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = 2\rho x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{64}{L}x = 0. \tag{16}$$

■ **Cables suspendidos** Suponga que un cable flexible, un alambre o una cuerda pesada, está suspendido entre dos postes verticales. Ejemplos físicos de esto podrían ser un largo cable telefónico sujeto entre dos postes, **FIGURA 1.3.7*a*)** o dos cables que soportan el camino de un puente colgante, figura 1.3.7*b*). Nuestro objetivo es construir un modelo matemático para describir la forma que supone un cable de este tipo.



a) Cables telefónicos

b) Puente suspendido

FIGURA 1.3.7 Cables suspendidos entre postes verticales

Para comenzar, examinemos sólo una porción o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Como indica la parte a color de la **FIGURA 1.3.8**, este elemento del cable es la curva en un sistema coordinado rectangular con un eje y elegido para pasar entre el punto más bajo P_1 de la curva y el eje x elegido a unidades por debajo de P_1. Sobre el cable están actuando tres fuerzas: las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ presentes en el cable y que son tangentes a éste en P_1 y P_2, respectivamente, y la porción $\mathbf{W}$ de la carga vertical total entre los puntos P_1 y P_2. Digamos que $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$ y $W = |\mathbf{W}|$ denotan las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se distribuye entre componentes verticales y horizontales (cantidades escalares) $T_2 \cos\theta$ y $T_2 \operatorname{sen}\theta$. Debido al equilibrio estático, escribimos

$$T_1 = T_2 \cos\theta \qquad \text{y} \qquad W = T_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Al dividir la última ecuación entre la primera eliminamos T_2 y obtenemos $\tan\theta = W/T_1$. Pero como $dy/dx = \tan\theta$, llegamos a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}. \tag{17}$$

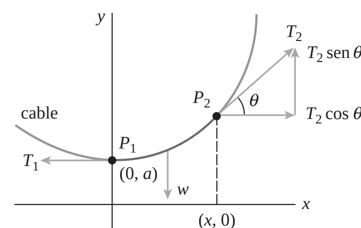


FIGURA 1.3.8 Elemento del cable

Esta simple ecuación diferencial de primer orden sirve como un modelo para la forma de un cable flexible tal como el cable telefónico que cuelga bajo su propio peso, al igual que para la forma de los cables que detienen el camino de un puente suspendido. Regresaremos a la ecuación (17) en los ejercicios 2.2 y en la sección 3.11.

Comentarios

Cada ejemplo de la presente sección ha descrito un sistema dinámico: uno que cambia o evoluciona con el paso del tiempo t. Como el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de las matemáticas que actualmente está en moda, relacionaremos de manera ocasional la terminología de tal área con el análisis en cuestión.

En términos más precisos, un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, llamadas **variables de estado**, junto con una regla que nos permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser un estado pasado, presente o futuro) en función de un estado prescrito en algún tiempo t_0. Los sistemas dinámicos se clasifican como sistemas de tiempo discreto o sistemas de tiempo continuo. En el presente curso nos ocuparemos sólo de los sistemas dinámicos de tiempo continuo —sistemas en los cuales *todas* las variables están definidas en un rango continuo de tiempo—. La regla o el modelo matemático de un sistema dinámico de tiempo continuo es una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales. El **estado del sistema** en un tiempo t es el valor de las variables de estado en ese tiempo; el estado específico del sistema en un tiempo t_0 lo constituyen simplemente las condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución al

problema de valor inicial se conoce como **respuesta del sistema**. Por ejemplo, en el caso anterior del decaimiento radiactivo, la regla es $dA/dt = kA$. Ahora, si se conoce la cantidad de sustancia radiactiva en algún tiempo t_0, digamos $A(t_0) = A_0$, entonces, al resolver la regla, se sabrá que la respuesta del sistema para $t \geq t_0$ es $A(t) = A_0e^{(t-t_0)}$ (véase la sección 2.7). La respuesta $A(t)$ es la variable única de estado para este sistema. En el caso de la roca lanzada desde el techo de un edificio, la respuesta del sistema, la solución de la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -g$ sujeta al estado inicial $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, es la función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, $0 \leq t \leq T$, donde el símbolo T representa el momento en que la roca toca el suelo. Las variables de estado son $s(t)$ y $s'(t)$, las cuales representan, respectivamente, la posición vertical de la roca por encima del suelo y su velocidad en el tiempo t. La aceleración $s''(t)$ *no* es una variable de estado puesto que sólo necesitamos saber la posición y la velocidad iniciales en el tiempo t_0 para determinar únicamente la posición de la piedra $s(t)$ y la velocidad $s'(t) = v(t)$ para cualquier tiempo en el intervalo $[t_0, T]$. La aceleración $s''(t) = a(t)$, desde luego, está dada por la ecuación diferencial $s''(t) = -g$, $0 < t < T$.

Un último comentario: no todo sistema estudiado en este texto es un sistema dinámico. También examinaremos algunos sistemas estáticos en los cuales el modelo sea una ecuación diferencial.

1.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

Dinámica poblacional

1. Bajo los mismos supuestos en que se basa el modelo presentado en (1), determine una ecuación diferencial que establezca la población $P(t)$ de un país que permite la inmigración a una tasa constante $r > 0$. ¿Cuál será la ecuación diferencial apropiada para determinar la población $P(t)$ del país cuando se permite a los individuos emigrar a una tasa constante $r > 0$?
2. El modelo poblacional presentado en (1) no toma en cuenta la mortalidad; la tasa de crecimiento es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo referente a una población cambiante en una comunidad, se supone que la tasa a la cual cambia la población es una tasa *neta* —es decir, la diferencia entre la tasa de nacimientos y la tasa de muertes en la comunidad—. Determine un modelo poblacional $P(t)$ si tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad son proporcionales a la población presente en el tiempo t.
3. Mediante el concepto de tasa neta presentado en el problema 2, determine una ecuación diferencial que represente una población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente en el tiempo t pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente en el tiempo t.
4. Modifique el modelo del problema 3 para la tasa neta a la cual cambia la población $P(t)$ de cierta clase de pez, pero también suponga que el pez se cosecha a una tasa constante de $h > 0$.

Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento

5. Una taza de café se enfría según la ley de Newton para el enfriamiento (3). Use los datos de la gráfica de temperaturas $T(t)$ ilustrada en la **FIGURA 1.3.9** para estimar las constantes T_m, T_0 y k en un modelo del tipo de un problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad T(0) = T_0.$$

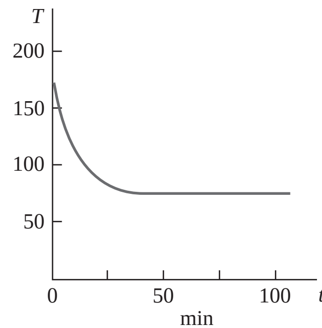


FIGURA 1.3.9 Curva de enfriamiento del problema 5

6. La temperatura ambiente T_m en (3) podría ser una función del tiempo t. Suponga que en un entorno controlado de manera artificial, $T_m(t)$ es periódica en un lapso de 24 horas, tal como ilustra la **FIGURA 1.3.10**. Diseñe un modelo matemático para la temperatura $T(t)$ de un cuerpo ubicado dentro de este entorno.

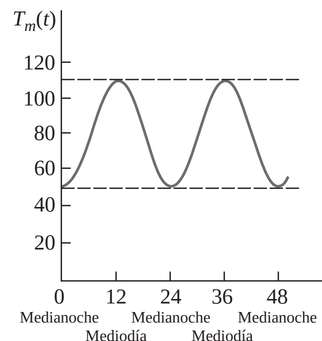


FIGURA 1.3.10 Temperatura ambiente del problema 6

☰ Propagación de una enfermedad y tecnología

7. Suponga que un estudiante portador del virus de la gripe regresó a su campus universitario aislado con población de 1 000 estudiantes. Determine una ecuación diferencial para establecer el número de estudiantes $x(t)$ que han contraído la gripe si la tasa a la cual se propaga la enfermedad es proporcional al número de interacciones dadas entre la cantidad de estudiantes con gripe y los estudiantes que aún no han sido expuestos al virus.

8. En el tiempo $t = 0$, una innovación tecnológica se introduce en una comunidad con población fija de n personas. Determine una ecuación diferencial que establezca el número de personas $x(t)$ que ha adoptado la innovación en el tiempo t si se supone que la tasa a la cual se difunde la innovación entre la comunidad es proporcional, de forma conjunta, a la cantidad de gente que la ha adoptado y al resto que no la ha adoptado.

☰ Mezclas

9. Suponga que un gran tanque mezclador contiene inicialmente 300 galones de agua en la cual se han disuelto 50 libras de sal. En el tanque se bombea agua pura a una velocidad de 3 galones por minuto, y cuando la disolución está bien mezclada, se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Determine una ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$ de sal presente en el tanque en el tiempo t. ¿Qué es $A(0)$?

10. Suponga que un gran tanque mezclador contiene inicialmente 300 galones de agua en la cual se han disuelto 50 libras de sal. Se bombea otra disolución salada en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto, y cuando la disolución está bien mezclada, se bombea hacia fuera a una velocidad *menor* de 2 galones por minuto. Si la contracción de la disolución entrante es de 2 lb/gal, determine una ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$ de sal presente en el tanque en el tiempo t.

11. En el problema 10, ¿cuál será la ecuación diferencial si la disolución bien mezclada se bombea hacia fuera a una velocidad *mayor* de 3.5 galones por minuto?

12. Generalice el modelo presentado en la expresión (8) suponiendo que el gran tanque contiene inicialmente un número N_0 de galones de salmuera; $r_{entrada}$ y r_{salida} son las velocidades de entrada y salida de la salmuera, respectivamente (medidas en galones por minuto); $c_{entrada}$ es la concentración de sal en el flujo de entrada; $c(t)$ es la concentración de sal en el tanque así como en el flujo de salida en el tiempo t (medida en libras de sal por galón), y $A(t)$ es la cantidad de sal presente en el tanque en el tiempo t.

☰ Drenado de un tanque

13. Suponga que está goteando agua de un tanque a través de un orificio circular con área A_h localizado en el fondo. Cuando el agua gotea a través del orificio, la fricción y la concentración de la corriente cerca de él reducen el volumen del agua que se escapa del tanque por segundo a $cA_h\sqrt{2gh}$, donde $c(0 < c < 1)$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua en el tiempo t para el tanque cúbico de la **FIGURA 1.3.11**. El radio del orificio es de 2 pulgadas, $g = 32$ ft/s^2.

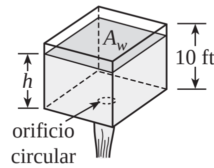


FIGURA 1.3.11 Tanque cúbico del problema 13

14. El tanque cónico circular recto que se muestra en la **FIGURA 1.3.12** pierde agua por un orificio circular localizado en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura del agua h en el tiempo t. El radio del orificio es de 2 pulgadas, $g = 32$ ft/s^2, y el factor de fricción/contracción que se presentó en el problema 13 es $c = 0.6$.

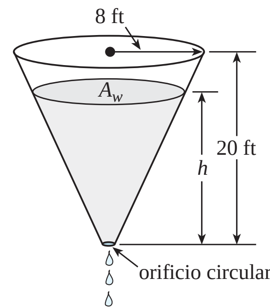


FIGURA 1.3.12 Tanque cónico del problema 14

☰ Circuitos en serie

15. Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, tal como se muestra en la **FIGURA 1.3.13**. Determine una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje suministrado es $E(t)$.

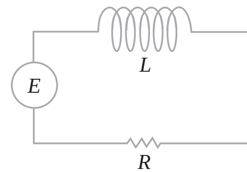


FIGURA 1.3.13 Circuito *LR* en serie para el problema 15

16. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, tal como se muestra en la **FIGURA 1.3.14**. Determine una ecuación diferencial para la carga $q(t)$ presente en el capacitor si la resistencia es R, la capacitancia es C, y el voltaje suministrado es $E(t)$.

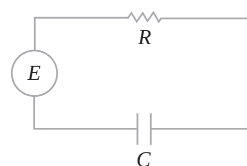


FIGURA 1.3.14 Circuito *RC* en serie para el problema 16

Caída libre y resistencia del aire

17. Para un movimiento de alta velocidad a través del aire, como el del paracaidista que se muestra en la **FIGURA 1.3.15** cayendo antes de que su paracaídas se abra, la resistencia del aire es más cercana a la velocidad instantánea $v(t)$ exponencial. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo que cae con una masa m si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

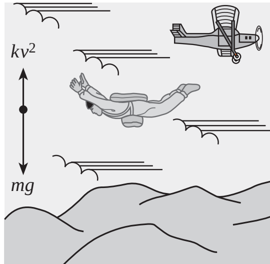


FIGURA 1.3.15 La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad en el problema 17

Segunda ley de Newton y el principio de Arquímedes

18. Un barril cilíndrico de s pies de diámetro con peso de w lb está flotando en el agua, como lo muestra la **FIGURA 1.3.16*a*)**. Después de un hundimiento inicial, el barril exhibe un movimiento oscilante hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una línea vertical. Mediante la figura 1.3.16*b*), determine una ecuación diferencial para el desplazamiento vertical $y(t)$ si se considera que el origen está sobre el eje vertical en la superficie del agua cuando el barril está en reposo. Use el **principio de Arquímedes**: la flotabilidad, o la fuerza ascendente del agua sobre el barril, es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la dirección descendente es positiva, que la densidad del agua es de 62.4 lb/ft^3, y que no hay resistencia entre el barril y el agua.

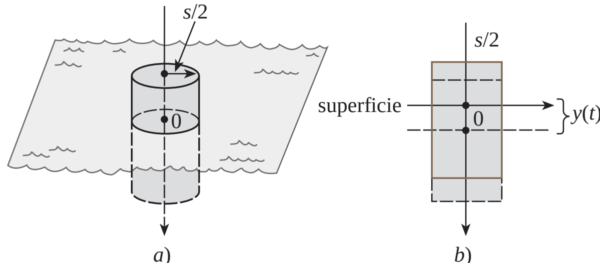


FIGURA 1.3.16 Movimiento oscilante hacia arriba y hacia abajo de un barril flotante para el problema 18

Segunda ley de Newton y ley de Hooke

19. Luego de que una masa m se ata a un resorte, éste se estira s unidades y después cuelga en reposo en la posición de equilibrio que muestra la **FIGURA 1.3.17*b*)**. Después de que el sistema resorte/masa se ha puesto en movimiento, hagamos que $x(t)$ denote la distancia dirigida de la masa más allá de la posición de equilibrio. Tal como indica la figura 1.3.17*c*), suponga que la dirección descendente es positiva y que el movimiento se presenta en línea recta vertical a través del centro de gravedad de la masa, y que las únicas fuerzas actuantes sobre el sistema son el peso de la masa y la fuerza de recuperación del resorte estirado. Aplique la **ley de Hooke**: la fuerza de recuperación de un resorte es proporcional a su elongación total. Determine una ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ en el tiempo t.

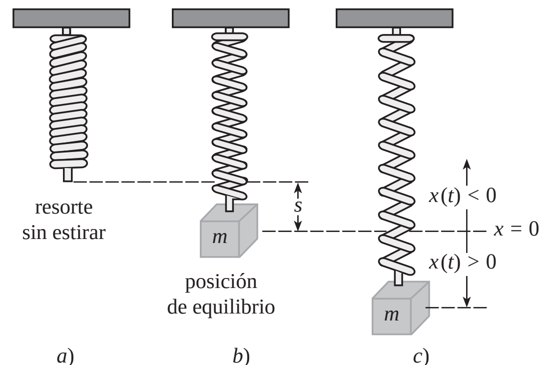


FIGURA 1.3.17 Sistema resorte/masa del problema 19

20. En el problema 19, ¿cuál será una ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ si el movimiento se presenta en un medio que imparte una fuerza viscosa, sobre el sistema resorte/masa, que es proporcional a la velocidad instantánea de la masa y actúa en dirección opuesta a la del movimiento?

Segunda ley de Newton y masa variable

Cuando la masa m de un cuerpo que se mueve a través de un campo de fuerza es variable, la **segunda ley de Newton** establece: si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es diferente de cero, entonces la fuerza neta F es igual a la tasa de cambio del *momentum* (cantidad del movimiento) del cuerpo con respecto al tiempo. Es decir,

$$F = \frac{d}{dt}(mv),^* \qquad (18)$$

donde mv es el *momentum* (cantidad del movimiento). Aplique esta formulación de la segunda ley de Newton en los problemas 21 y 22.

21. Una cadena de 10 pies de largo está enrollada holgadamente sobre el piso. Como lo muestra la **FIGURA 1.3.18**, un extremo de la cadena se jala verticalmente hacia arriba con una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 lb/ft. Determine una ecuación diferencial para el peso $x(t)$ del extremo localizado por encima del nivel del piso en el tiempo t. Suponga que la dirección positiva es ascendente.

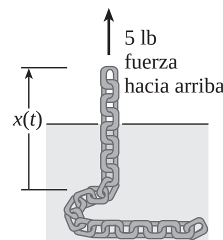


FIGURA 1.3.18 Cadena jalada hacia arriba, problema 21

* Observe que cuando m es constante, es lo mismo que $F = ma$.

22. Una cadena uniforme de longitud L, medida en pies, se sostiene verticalmente de manera que el extremo inferior apenas toca el piso como ilustra la **FIGURA 1.3.19**. La cadena pesa 2 lb/ft. El extremo superior sostenido y en reposo se suelta en $t = 0$ y la cadena cae directo hacia abajo. Ignore la resistencia del aire, suponga que la dirección positiva es descendente, y permita que $x(t)$ denote la longitud de la cadena sobre el piso en el tiempo t. Use el hecho de que la fuerza neta F, representada en (18) y que actúa sobre la cadena en el tiempo $t \geq 0$, es la constante $2L$ y muestre que una ecuación diferencial para $x(t)$ es

$$(L - x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Lg.$$

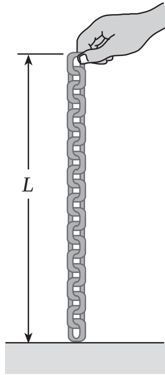


FIGURA 1.3.19 Cadena sostenida verticalmente, problema 22

Segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

23. Por virtud de la **ley de Newton de la gravitación universal**, la aceleración a de la caída libre de un cuerpo, como el del satélite mostrado en la **FIGURA 1.3.20**, cayendo desde una gran distancia hacia la superficie terrestre *no* es la constante g. En vez de ello, la aceleración a es inversamente proporcional a la distancia elevada al cuadrado a partir del centro de la Tierra, $a = k/r^2$, donde k es la constante de proporcionalidad. Para determinar k, use el hecho de que en la superficie terrestre $r = R$ y $a = g$. Si la dirección positiva es ascendente, aplique la segunda ley de Newton y su ley de la gravitación universal para encontrar una ecuación diferencial para la distancia r.

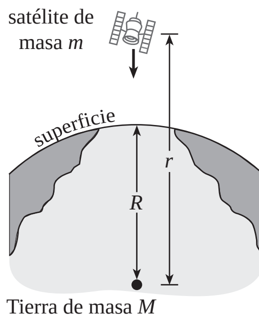


FIGURA 1.3.20 El satélite del problema 23

24. Suponga que se taladra un orificio hasta el centro de la Tierra y que una bola de boliche de masa m se deja caer dentro, como lo muestra la **FIGURA 1.3.21**. Construya un modelo matemático que describa el movimiento de la bola. En el tiempo t establezcamos: r indica la distancia desde el centro de la Tierra hasta la masa m, M denota la masa de la Tierra, M_r representa la masa de la porción de la Tierra dentro de una esfera con radio r, y δ denota la densidad constante de la Tierra.

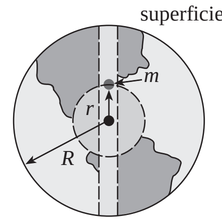


FIGURA 1.3.21 Abertura a través de la Tierra para el problema 24

Modelos matemáticos variados

25. Teoría del aprendizaje En la teoría del aprendizaje, se supone que la velocidad con que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad de material a memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de un tema a memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada en el tiempo t. Determine la ecuación diferencial para la cantidad $A(t)$.

26. Olvido En el problema 25, suponga que la velocidad a la que el material se *olvida* es proporcional a la cantidad memorizada en el tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$ cuando se tome en cuenta el olvido.

27. Inyección de un medicamento Cierto medicamento se inyecta al torrente sanguíneo de un paciente a velocidad constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, el medicamento se elimina a una velocidad que es proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en el tiempo t. Determine una ecuación diferencial que establezca la cantidad $x(t)$.

28. Tractriz Una persona P, a partir del origen, se mueve en dirección del eje x positivo jalando un peso a lo largo de la curva C, llamada **tractriz**, como se muestra en la **FIGURA 1.3.22**. El peso, inicialmente ubicado en el eje y en $(0, s)$, se jala mediante una cuerda de longitud constante s que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuación diferencial para la ruta que sigue el movimiento. Suponga que la cuerda siempre es tangente a C.

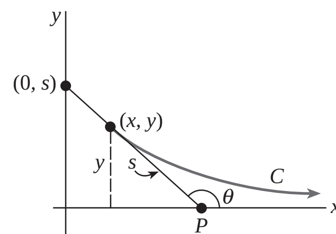


FIGURA 1.3.22 Curva tractriz del problema 28

29. Superficie reflejante Suponga que cuando la curva plana C mostrada en la **FIGURA 1.3.23** gira en torno al eje x genera una superficie de revolución con la propiedad de que todos los rayos luminosos L paralelos al eje x que golpean la super-

ficie se reflejan en un solo punto O (el origen). Use el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecuación diferencial que describa la forma de la curva C. Tal curva C es importante en aplicaciones que comprenden desde la construcción de telescopios hasta antenas satelitales, faros de automóvil y recolectores solares [*Sugerencia:* La observación de la figura muestra que podemos escribir $\phi = 2\theta$. ¿Por qué? Ahora use una identidad trigonométrica adecuada.]

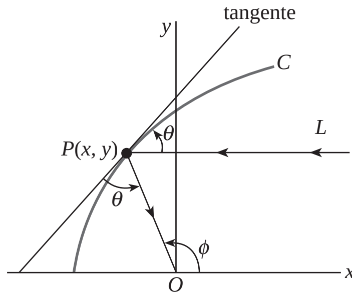


FIGURA 1.3.23 Superficie reflejante del problema 29

Problemas de análisis

30. Lea de nuevo el problema 37 en los ejercicios 1.1 y después ofrezca una solución explícita $P(t)$ para la ecuación (1). Encuentre una familia de soluciones de un solo parámetro de (1).

31. Lea nuevamente la oración que sigue a la ecuación (3) y suponga que T_m es una constante positiva. Analice por qué esperaríamos $k < 0$ en (3) en los casos de enfriamiento y calentamiento. Quizá comience por interpretar, digamos, $T(t) > T_m$ de una forma gráfica.

32. Lea otra vez el análisis que condujo a la ecuación (8). Si suponemos que al inicio el tanque contenía, digamos, 50 libras de sal, sería lógico pensar, puesto que la sal se está agregando al tanque de forma continua para $t > 0$, que $A(t)$ debe ser una función creciente. Con base en la ED, pero sin resolverla, analice cómo podría determinar el número de libras de sal que hay dentro del tanque después de un periodo largo.

33. Modelo poblacional La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, es un modelo de la población humana $P(t)$ de una comunidad determinada. Plantee una interpretación para resolver esta ecuación, es decir, ¿qué clase de población piensa usted que describe la ecuación diferencial?

34. Fluido giratorio Como se muestra en la **FIGURA 1.3.24*a*)**, un cilindro llenado parcialmente con fluido gira a una velocidad angular constante ω alrededor de un eje y vertical a través de su centro. El fluido giratorio es una superficie de revolución S. Para identificar S, primero establecemos un sistema de coordenadas consistente en un plano vertical determinado por el eje y y un eje x trazado perpendicular al eje y de manera que la intersección de los ejes (el origen) esté situada en el punto más bajo de la superficie S. Después buscamos una función $y = f(x)$, la cual representa la curva C de la intersección entre la superficie S y el plano coordinado vertical. Digamos que el punto $P(x, y)$ denota la posición de una partícula del fluido giratorio de masa m en el plano coordinado. Véase la figura 1.3.24*b*).

a) En P, hay una fuerza de reacción de magnitud F debido a las demás partículas del fluido, esta fuerza es normal a la superficie S. En virtud de la segunda ley de Newton, la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre la partícula es $m\omega^2 x$. ¿Cuál es esta fuerza? Use la figura 1.3.24*b*) para analizar la naturaleza y el origen de las ecuaciones

$$F \cos \theta = mg, \qquad F \operatorname{sen} \theta = m\omega^2 x.$$

b) Use el inciso *a*) para encontrar una ecuación diferencial de primer orden que defina la función $y = f(x)$.

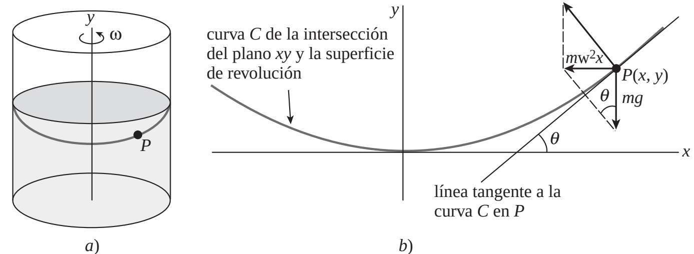


FIGURA 1.3.24 Fluido giratorio del problema 34

35. Caída de un cuerpo En el problema 23, suponga que $r = R + s$, donde s es la distancia de la superficie terrestre con respecto al cuerpo en caída. ¿Cómo se transforma la ecuación diferencial obtenida en el problema 23 cuando s es muy pequeña en comparación con R?

36. Gotas de lluvia que caen En meteorología, el término *virga* se refiere a la caída de gotas de lluvia o partículas de hielo que se evaporan antes de llegar al suelo. Suponga que una gota de lluvia típica tiene forma esférica. Comenzando en algún tiempo, designado como $t = 0$, una gota de radio r_0 cae de una nube desde el reposo y se empieza a evaporar.

a) Si se supone que una gota se evapora de tal manera que su forma sigue siendo esférica, entonces es lógico suponer que la velocidad a la que ocurre la evaporación, es decir, la velocidad con que la gota pierde masa, es proporcional a su área superficial. Demuestre que este último supuesto implica que la velocidad de disminución del radio r de la gota es una constante. Encuentre $r(t)$. [*Sugerencia:* Vea el problema 47 en los ejercicios 1.1.]

b) Si la dirección positiva es descendente, construya un modelo matemático para la velocidad v de una gota de lluvia que cae en el tiempo t. Ignore la resistencia del aire. [*Sugerencia:* Véase la introducción a los problemas 21 y 22.]

37. Que nieve El "problema del quitanieves" es un clásico y aparece en muchos textos sobre ecuaciones diferenciales, pero quizá se haya hecho famoso gracias a Ralph Palmer Agnew:

"Un día comenzó a nevar con gran intensidad y en forma permanente. Una máquina quitanieves empezó a funcionar a mediodía, a 2 millas durante la primera hora y a 1 milla la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?"

Si es posible, encuentre el texto titulado *Differential Equations*, de Ralph Palmer Agnew, McGraw-Hill, y después analice la construcción y solución del modelo matemático.

38. Lea de nuevo esta sección y clasifique cada modelo matemático como lineal o no lineal.

39. **Dinámica poblacional** Suponga que $P'(t) = 0.15\,P(t)$ representa un modelo matemático del crecimiento de cierto cultivo celular, donde $P(t)$ es el tamaño del cultivo (medido en millones de células) en el tiempo t (medido en horas). ¿Con cuánta rapidez crece el cultivo en el tiempo t cuando su tamaño llega a 2 millones de células?

40. **Decaimiento radiactivo** Suponga que

$$A'(t) = -0.0004332A(t)$$

representa un modelo matemático para el decaimiento del radio 226, donde $A(t)$ es la cantidad de radio (medido en gramos) restante en el tiempo t (medido en años). ¿Cuánta cantidad de radio resta en el tiempo t cuando la muestra está decayendo a una tasa de 0.002 gramos por año?

1 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 y 2, llene el espacio en blanco y después escriba ese resultado como una ecuación diferencial lineal de primer orden que no tenga el símbolo c_1 y cuya forma sea $dy/dx = f(x, y)$. Los símbolos c_1 y k representan constantes.

1. $\dfrac{d}{dx}c_1e^{kx} =$ ______________

2. $\dfrac{d}{dx}(5 + c_1e^{-2x}) =$ ______________

En los problemas 3 y 4, llene el espacio en blanco y después escriba ese resultado como una ecuación diferencial lineal de segundo orden sin los símbolos c_1 y c_2 y que tenga la forma $F(y, y'') = 0$. Los símbolos c_1, c_2 y k representan constantes.

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx) =$ ______________

4. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx) =$ ______________

En los problemas 5 y 6, calcule y' y y'' y después combine estas derivadas con y como una ecuación diferencial lineal de segundo orden sin los símbolos c_1 y c_2 y que tenga la forma $F(y, y', y'') = 0$. Los símbolos c_1 y c_2 representan constantes.

5. $y = c_1e^x + c_2xe^x$
6. $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

En los problemas 7 a 12, haga coincidir cada una de las ecuaciones diferenciales que se dan con una o más de estas soluciones:

a) $y = 0$, ***b)*** $y = 2$, ***c)*** $y = 2x$, ***d)*** $y = 2x^2$.

7. $xy' = 2y$
8. $y' = 2$
9. $y' = 2y - 4$
10. $xy' = y$
11. $y'' + 9y = 18$
12. $xy'' - y' = 0$

En los problemas 13 y 14 determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial que se da.

13. $y'' = y'$
14. $y' = y(y - 3)$

En los problemas 15 y 16, interprete cada enunciado como una ecuación diferencial.

15. En la gráfica de $y = \phi(x)$, la pendiente de la línea tangente en el punto $P(x, y)$ es la distancia elevada al cuadrado desde $P(x, y)$ hasta el origen.

16. En la gráfica de $y = \phi(x)$, la tasa a la que la pendiente cambia con respecto a x en un punto $P(x, y)$ es la negativa de la pendiente de la línea tangente en $P(x, y)$.

17. ***a)*** Proporcione el dominio de la función $y = x^{2/3}$.
b) Encuentre el intervalo I de definición más amplio sobre el que $y = x^{2/3}$ es una solución de la ecuación diferencial $3xy' - 2y = 0$.

18. ***a)*** Verifique si la familia de un solo parámetro $y^2 - 2y = x^2 - x + c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $(2y - 2)y' = 2x - 1$.
b) Encuentre un miembro de la familia de un solo parámetro dada en el inciso *a*) que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.
c) Use el resultado que obtuvo en el inciso *b*) para encontrar una función explícita $y = \phi(x)$ que satisfaga $y(0) = 1$. Proporcione el dominio de ϕ. ¿Es $y = \phi(x)$ una *solución* del problema de valor inicial? Si es así, encuentre su intervalo I de definición; si no, explique.

19. Dado que $y = -\dfrac{2}{x} + x$ es una solución de la ED $xy' + y = 2x$. Encuentre x_0 y el intervalo I más amplio para el cual $y(x)$ es una solución del problema de valor inicial.

$$xy' + y = 2x, \qquad y(x_0) = 1.$$

20. Suponga que $y(x)$ denota una solución del problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = -1$ y que $y(x)$ posee al menos una segunda derivada en $x = 1$. En alguna cercanía de $x = 1$, use la ED para determinar si $y(x)$ es creciente o decreciente, y si la gráfica de $y(x)$ es cóncava ascendente o cóncava descendente.

21. Una ecuación diferencial puede poseer más de una familia de soluciones.
a) Grafique los diferentes miembros de las familias $y = \phi_1(x) = x^2 + c_1$ y $y = \phi_2(x) = -x^2 + c_2$.
b) Verifique si $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial no lineal de primer orden $(y')^2 = 4x^2$.
c) Construya una función definida en forma segmentada que sea solución de la ED no lineal del inciso *b*) pero que no sea miembro de cualquier familia de soluciones del inciso *a*).

22. ¿Cuál es la pendiente de la tangente en la gráfica de la solución de $y' = 6\sqrt{y} + 5x^3$ que pasa por $(-1, 4)$?

En los problemas 23 a 26, verifique si la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial dada. Proporcione un intervalo de definición I para cada solución.

23. $y'' + y = 2\cos x - 2\operatorname{sen} x$; $\quad y = x \operatorname{sen} x + x\cos x$
24. $y'' + y \sec x$; $\quad y = x \operatorname{sen} x + (\cos x)\ln(\cos x)$
25. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\quad y = \operatorname{sen}(\ln x)$
26. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$;
$y = \cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x)) + (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x)$

27. La gráfica de una solución de un problema de valor inicial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$, $y(2) = y_0$, $y'(2) = y_1$, está dada en la **FIGURA 1.R.1**. Utilice esta gráfica para estimar los valores de y_0 y y_1.

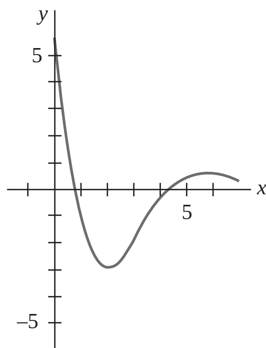


FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 27

28. Un tanque cilíndrico de 2 pies de radio y altura de 10 pies se llena a su máxima capacidad. Si inicialmente el tanque está lleno de agua, y el agua gotea por un orificio circular con radio de $\frac{1}{2}$ pulgada ubicado en el fondo, determine una ecuación diferencial para la altura h de agua en el tiempo t. Ignore la fricción y la contracción de agua en el orificio.

29. Considere un pequeño cohete lanzado verticalmente. Deje que $m(t)$ denote la masa total del cohete en el tiempo (t) (la cual es la suma de tres masas: la masa constante de la carga, la masa constante del vehículo y la cantidad variable de combustible). Si se supone que la dirección positiva es hacia arriba, la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea v del cohete y R es el empuje hacia arriba o la fuerza generada por el sistema de propulsión, encuentre un modelo matemático para la velocidad $v(t)$ del cohete. [*Sugerencia:* Véase (14) en la sección 1.3 y (18) en los ejercicios 1.3.]



Cohete del problema 29

30. En el problema 29, suponga que $m(t) = m_p + m_v + m_f(t)$, donde m_p es la masa constante de la carga, m_v es la masa constante del vehículo y $m_f(t)$ es la cantidad variable de combustible.

a) Demuestre que la tasa a la cual cambia la masa total del cohete es la misma que la tasa a la cual cambia la masa del combustible.

b) Si el cohete consume su combustible a una tasa constante λ, encuentre $m(t)$. Luego reescriba la ecuación diferencial del problema 29 en términos de λ y la masa total inicial $m(0) = m_0$.

c) Bajo la suposición del inciso *b*), demuestre que el tiempo de agotamiento $t_b > 0$ del cohete, o el tiempo en el cual se consume el combustible, es $t_b = m_f(0)/\lambda$, donde $m_f(0)$ es la masa inicial del combustible.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2

Estructura del capítulo

Iniciamos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales con ecuaciones de primer orden. En el presente capítulo presentamos las tres formas en que pueden analizarse las ecuaciones diferenciales: cualitativa, analítica y numéricamente.

En la sección 2.1 analizaremos las ecuaciones diferenciales (ED) en la forma **cualitativa**. Observaremos que con frecuencia una ED puede proporcionarnos información sobre el comportamiento de sus soluciones aun cuando no se tenga ninguna solución disponible. En las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 analizaremos las ED en la forma **analítica**, lo cual significa que estudiaremos técnicas especializadas para obtener soluciones explícitas e implícitas. En las secciones 2.7 y 2.8 aplicaremos estos métodos de solución a algunos de los modelos matemáticos presentados en la sección 1.3. Posteriormente, en la sección 2.6, revisaremos una técnica sencilla para “resolver” una ED en la forma **numérica**. Lo cual significa, a diferencia del método analítico donde las soluciones representan ecuaciones o fórmulas, que es posible utilizar una ED para estructurar un modo de obtener información cuantitativa acerca de una solución desconocida.

El capítulo finaliza con una introducción a la modelación matemática mediante sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.1 Curvas solución sin solución

■ **Introducción** Algunas ecuaciones diferenciales no cuentan con alguna solución. Por ejemplo, no existe una solución real que satisfaga a $(y')^2 + 1 = 0$. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que pueden encontrarse en forma **analítica**, es decir, soluciones de forma explícita o implícita encontradas al implementar un método de solución para una ecuación específica. Estos métodos de solución pueden implicar ciertas manipulaciones, como sustituciones, y ciertos procedimientos, como la integración. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones a pesar de que la ecuación diferencial no pueda ser resuelta en forma analítica. En otras palabras, cuando afirmamos que existe una solución de la ED, no queremos decir que también haya un método de solución que genera soluciones explícitas o implícitas. En el transcurso de los siglos, los matemáticos han desarrollado procedimientos ingeniosos para resolver ecuaciones muy especializadas; entonces no sorprende la existencia de un gran número de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse en forma analítica. Aunque estudiaremos algunos de estos métodos de solución para ecuaciones de primer orden en secciones posteriores del capítulo, por el momento supongamos tener una ecuación diferencial de primer orden con la forma normal $dy/dx = f(x, y)$ y que no podemos encontrar ni inventar un método para resolverla en forma analítica. Esto puede no ser tan malo como podría pensarse, dado que en ocasiones la propia ecuación diferencial puede "señalar" detalles acerca del "comportamiento" de sus soluciones. En la sección 1.2 vimos que siempre que $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ satisfacen ciertas condiciones de continuidad, es posible responder algunas preguntas **cualitativas** acerca de la existencia y la unicidad de las soluciones. En esta sección observaremos que a menudo pueden responderse otras preguntas cualitativas acerca de las propiedades de las soluciones —digamos, ¿cómo se comporta una solución cerca de cierto punto? o ¿cómo se comporta una solución cuando $x \to \infty$?— cuando la función f depende únicamente de la variable y.

Iniciamos nuestro estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden con dos formas de analizar una ED de manera cualitativa, las cuales nos permiten determinar, aproximadamente, la forma que debe tener la curva solución sin necesidad de resolver la ecuación.

2.1.1 Campos de direcciones

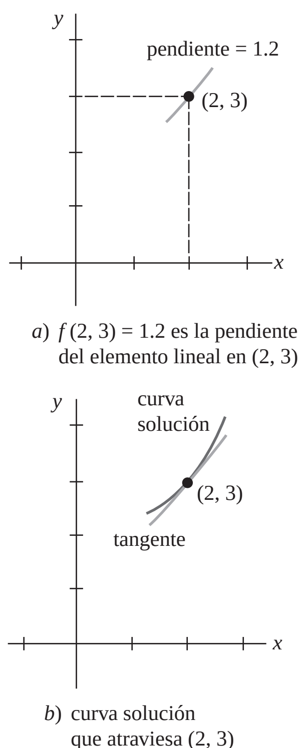
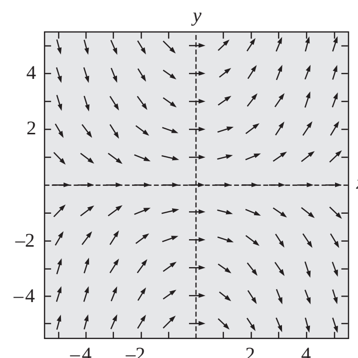


FIGURA 2.1.1 La curva solución es tangente al elemento lineal en (2, 3)

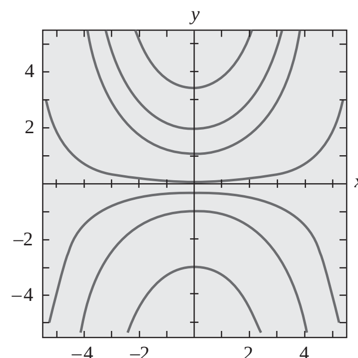
■ **Pendiente** Iniciemos, sin embargo, con un concepto simple de cálculo: la derivada dy/dx de una función diferenciable $y = y(x)$ proporciona la pendiente de las líneas tangentes en los puntos sobre su gráfica. Dado que una solución $y = y(x)$ para una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ es necesariamente una función diferenciable sobre su intervalo de definición I, también deberá ser continua en I. De este modo, la correspondiente curva solución sobre I no deberá tener discontinuidades y tendrá una línea tangente en cada punto $(x, y(x))$. La pendiente de la línea tangente en $(x, y(x))$ sobre una curva solución será el valor de la primera derivada dy/dx en este punto, y esto lo sabemos a partir de la ecuación diferencial: $f(x, y(x))$. Ahora supongamos que (x, y) representa un punto dentro de una región del plano xy sobre la cual se encuentra definida la función f. El valor $f(x, y)$ que la función f asigna al punto representa la pendiente de una línea, o como lo concebiremos, de un segmento de línea denominado **elemento lineal**. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = 0.2xy$, donde $f(x, y) = 0.2xy$. Digamos que, en el punto (2, 3), la pendiente de un elemento lineal es $f(2, 3) = 0.2(2)(3) = 1.2$. La **FIGURA 2.1.1*a*)** muestra un segmento de línea con pendiente 1.2 que pasa por el punto (2, 3). Como ilustra la figura 2.1.1*b*), *si* una curva solución pasa también por (2, 3), hará así tangente a este segmento de línea; en otras palabras, el elemento lineal es una línea tangente en miniatura en este punto.

■ **Campo de direcciones** Si evaluamos a f de un modo sistemático sobre una cuadrícula rectangular de puntos dentro del plano xy y trazamos un elemento lineal en cada punto (x, y) de la cuadrícula con pendiente $f(x, y)$, entonces el conjunto de todos estos elementos lineales se denominará **campo de direcciones** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Visualmente, el campo de direcciones señala la apariencia o forma de una familia de curvas solución para la ecuación diferencial y, en consecuencia, es posible visualizar de manera rápida ciertos aspectos cualitativos de las soluciones (regiones dentro del plano, por ejemplo,

donde una solución presente un comportamiento atípico). Una sola curva solución que atraviese un campo de direcciones deberá seguir el patrón de flujo del campo; será tangente a un elemento de línea cuando interseque un punto dentro de la cuadrícula.



a) Campo de direcciones para $dy/dx = 0.2xy$



b) Algunas curvas solución de la familia $y = ce^{0.1x^2}$

FIGURA 2.1.2 Campo de direcciones y curvas solución en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Campo de direcciones

El campo de direcciones para la ecuación diferencial $dy/dx = 0.2xy$ mostrado en la **FIGURA 2.1.2*a*)** se obtuvo utilizando un programa de computadora en el que se definió una cuadrícula de puntos de 5×5 (mh, nh), con m y n enteros, al configurar $-5 \le m \le 5$, $-5 \le n \le 5$ y $h = 1$. En la figura 2.1.2*a*), advierta que en cualquier punto situado sobre el eje x $(y = 0)$ y el eje y $(x = 0)$ las pendientes son $f(x, 0) = 0$ y $f(0, y) = 0$, respectivamente, de modo que los elementos lineales son horizontales. Además, en el primer cuadrante, observe que para un valor fijo de x los valores de $f(x, y) = 0.2xy$ se incrementan a medida que y aumenta; de forma similar, para una y fija, los valores de $f(x, y) = 0.2xy$ aumentan cuando lo hace x. Esto significa que a medida que x y y se incrementan, los elementos lineales prácticamente se vuelven verticales y tienen pendiente positiva ($f(x, y) = 0.2xy > 0$ para $x > 0$, $y > 0$). En el segundo cuadrante $|f(x, y)|$ aumenta cuando $|x|$ y y se incrementan, y de nuevo los elementos lineales se vuelven prácticamente verticales, pero esta vez tienen pendiente negativa ($f(x, y) = 0.2xy < 0$ para $x < 0$, $y > 0$). De izquierda a derecha, imagine una curva solución que inicia en un punto del segundo cuadrante, se desplaza rápidamente hacia abajo, se vuelve plana a medida que cruza el eje y, y luego, conforme ingresa al primer cuadrante, se desplaza rápidamente hacia arriba —en otras palabras, su forma sería cóncava hacia arriba, similar a una herradura—. A partir de esto podría deducirse que $y \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Ahora bien, en el tercero y cuarto cuadrantes, dado que $f(x, y) = 0.2xy > 0$ y $f(x, y) = 0.2xy < 0$, respectivamente, la situación se invierte; una curva solución crece y luego desciende conforme nos desplazamos de izquierda a derecha. En la expresión (1) de la sección 1.1 vimos que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $dy/dx = 0.2xy$; usted deberá verificar que una familia de soluciones de un parámetro para la misma ecuación está dada por $y = ce^{0.1x^2}$. Para efectos de comparación con la figura 2.1.2*a*), algunas gráficas representativas de los miembros de esta familia se muestran en la figura 2.1.2*b*). ≡

EJEMPLO 2 Campo de direcciones

Utilice un campo de direcciones para trazar una curva solución aproximada para el problema de valor inicial $dy/dx = \text{sen } y$, $y(0) = -\frac{3}{2}$.

Solución Antes de continuar, recuerde que a partir de la continuidad de $f(x, y) = \text{sen } y$ y $\partial f/\partial y = \cos y$, el teorema 1.2.1 garantiza la existencia de una sola curva solución que pasa por cualquier punto especificado (x_0, y_0) en el plano. Nuevamente configuramos nuestro programa de computadora para una región rectangular de 5×5 y especificamos (debido a la condición inicial) puntos en dicha región con separación vertical y horizontal de $\frac{1}{2}$ unidad; es decir, en puntos (mh, nh), $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros de forma que $-10 \le m \le 10$, $-10 \le n \le 10$. El resultado se muestra en la **FIGURA 2.1.3**. Dado que el extremo derecho de $dy/dx = \text{sen } y$ es 0 en $y = 0$ y en $y = -\pi$, los elementos lineales son horizontales en todos los puntos cuyas segundas coordenadas son $y = 0$ o $y = -\pi$. Resulta lógico entonces que una curva solución que cruza el punto inicial $(0, -\frac{3}{2})$ presente la forma ilustrada en la figura. ≡

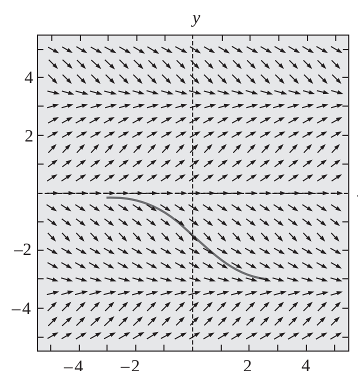


FIGURA 2.1.3 Campo de direcciones para $dy/dx = \text{sen } y$ en el ejemplo 2

■ **Creciente y decreciente** La interpretación de la derivada dy/dx como una función que proporciona la pendiente juega el papel principal en la construcción de un campo de direcciones. A continuación se utilizará otra propiedad de la primera derivada, a saber: si $dy/dx > 0$ (o $dy/dx < 0$) para toda x en un intervalo I, entonces la función diferenciable $y = y(x)$ será creciente (o decreciente) en I.

Comentarios

Trazar un campo de direcciones a mano es sencillo pero laborioso; probablemente se trata de una de esas tareas sobre las que puede argumentarse que sólo se hace una o dos veces en la vida, ya que en términos generales se lleva a cabo más eficientemente usando un programa de computadora.

Previamente a las calculadoras, computadoras personales y programas de cómputo, se utilizaba el **método de isoclinas** para facilitar el trazado de un campo de direcciones a mano. Para la ED $dy/dx = f(x, y)$, todo miembro de la familia de curvas $f(x, y) = c$, siendo c una constante, se denomina **isoclina**. Los elementos lineales que se trazan a través de los puntos sobre una isoclina específica, digamos, $f(x, y) = c_1$, tienen la misma pendiente c_1. En el problema 15 de los ejercicios 2.1 se le presentarán dos oportunidades de trazar un campo de direcciones a mano.

2.1.2 Ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden

Ecuaciones diferenciales sin variable independiente En la sección 1.1 dividimos la categoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en dos tipos: lineales y no lineales. Ahora consideraremos brevemente otro tipo de clasificación para las ecuaciones diferenciales ordinarias, una clasificación que es de particular importancia en el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Se dice que una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable dependiente no aparece explícitamente es **autónoma**. Si el símbolo x identifica a la variable independiente, entonces una ecuación diferencial autónoma de primer orden puede expresarse como $F(y, y') = 0$ o en la forma normal como

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{1}$$

A lo largo del siguiente análisis supondremos que f en (1) y su derivada f' son funciones continuas de y sobre cierto intervalo I. Las ecuaciones de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\substack{\uparrow \\ f(y)}}{1 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\substack{\uparrow \\ f(x,\,y)}}{0.2xy}$$

son autónoma y no autónoma, respectivamente.

Muchas ecuaciones diferenciales que aparecen en aplicaciones o representando modelos de leyes físicas que no cambian con el tiempo son autónomas. Como hemos visto en la sección 1.3 en un contexto de aplicación, con frecuencia se utilizan símbolos distintos de y y x para representar a las variables dependiente e independiente. Por ejemplo, si el tiempo se representa como t, entonces el análisis de

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad \frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x), \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad \frac{dA}{dt} = 6 - \frac{1}{100}A,$$

donde k, n y T_m son constantes, muestra que cada ecuación es independiente del tiempo. Por ello, *todas* las ecuaciones diferenciales de primer orden presentadas en la sección 1.3 son independientes del tiempo y, por lo tanto, autónomas.

Puntos críticos Los ceros de la función f en la ecuación (1) son de especial importancia. Se dice que un número real c es un **punto crítico** de la ecuación diferencial autónoma (1) si representa un cero de f, es decir, $f(c) = 0$. Un punto crítico también se denomina **punto de equilibrio** o **punto estacionario**. Ahora observe que si sustituimos la función constante $y(x) = c$ en (1), entonces ambos lados de la ecuación equivalen a cero. Esto significa que:

Si c es un punto crítico de (1), *entonces $y(x) = c$ es una solución constante de la ecuación diferencial autónoma.*

A la solución constante $y(x) = c$ de (1) se le denomina **solución de equilibrio**; las de equilibrio son las *únicas* soluciones constantes de (1).

Como ya se mencionó antes, es posible saber cuándo una solución no constante $y = y(x)$ de (1) es creciente o decreciente mediante la determinación del signo algebraico de la derivada dy/dx; para el caso de (1), esto se hace al identificar los intervalos sobre el eje y para los cuales la función $f(y)$ es positiva o negativa.

EJEMPLO 3 Una ecuación diferencial autónoma

La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde a y b son constantes positivas, presenta la forma normal $dP/dt = f(P)$, la cual equivale a (1) con t y P actuando como x y y, respectivamente y, por lo tanto, es autónoma. A partir de $f(P) = P(a - bP) = 0$, observamos que 0 y a/b son puntos críticos de la ecuación, y en consecuencia las soluciones de equilibrio son $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$. Al colocar los puntos críticos sobre una línea vertical, dividimos la línea en tres intervalos: $-\infty < P < 0$, $0 < P < a/b$, $a/b < P < \infty$. Las flechas trazadas sobre la línea que se muestra en la **FIGURA 2.1.4** indican el signo algebraico de $f(P) = P(a - bP)$ en estos intervalos y si una solución no constante $P(t)$ es creciente o decreciente en un intervalo. La tabla siguiente explica la figura.

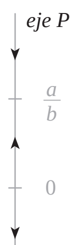
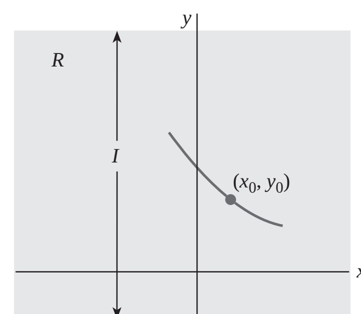


FIGURA 2.1.4 Retrato fase para el ejemplo 3

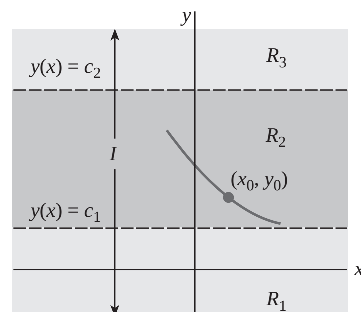
Intervalo	Signo de $f(P)$	$P(t)$	Flecha
$(-\infty, 0)$	negativo	decreciente	apunta hacia abajo
$(0, a/b)$	positivo	creciente	apunta hacia arriba
$(a/b, \infty)$	negativo	decreciente	apunta hacia abajo

La figura 2.1.4 se denomina **retrato fase de una dimensión** o simplemente **retrato fase** para la ecuación diferencial $dP/dt = P(a - bP)$. La línea vertical se denomina **línea de fase**. ≡

■ **Curvas solución** Sin tener que resolver una ecuación diferencial autónoma, por lo general es posible obtener información importante acerca de sus curvas solución. Ya que la función f en (1) es independiente de la variable x, podemos considerar que f está definida en el intervalo $-\infty < x < \infty$ o en $0 \leq x < \infty$. Además, dado que tanto f como su derivada f' son funciones continuas de y sobre cierto intervalo I del eje y, las conclusiones fundamentales del teorema 1.2.1 se mantienen en cierta franja horizontal o región R en el plano xy correspondiente a I, y de esta manera sólo una curva solución de (1) pasa por cualquier punto (x_0, y_0) en R. Observe la **FIGURA 2.1.5*a*)**. Para efectos del análisis, supongamos que (1) posee exactamente dos puntos críticos, c_1 y c_2, y que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ son líneas horizontales, las cuales segmentan la región R en tres subregiones R_1, R_2 y R_3, según ilustra la figura 2.1.5*b*). Sin comprobarlas, presentamos algunas conclusiones que podemos extraer acerca de una solución no constante $y(x)$ de (1):



a) Región R



b) Subregiones R_1, R_2 y R_3

FIGURA 2.1.5 Las líneas $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ dividen a R en tres subregiones horizontales

- Si (x_0, y_0) se encuentra dentro de una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$, y $y(x)$ representa una solución cuya gráfica cruza por este punto, entonces $y(x)$ permanecerá dentro de la subregión R_i para toda x. Tal como lo ilustra la figura 2.1.5*b*), la solución $y(x)$ en R_2 está limitada en la parte inferior por c_1 y en la parte superior por c_2, es decir, $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x. La curva solución permanecerá dentro de R_2 para toda x debido a que la gráfica de una solución no constante de (1) no puede cruzar la gráfica de ninguna solución de equilibrio $y(x) = c_1$ o $y(x) = c_2$. Revise el problema 33 de los ejercicios 2.1.
- Para efectos de continuidad de f, debemos contar con $f(y) > 0$ o $f(y) < 0$ para toda x localizada dentro de una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$. En otras palabras, $f(y)$ no puede cambiar de signo dentro de una subregión. Revise el problema 33 de los ejercicios 2.1.
- Dado que $dy/dx = f(y(x))$ es positiva o negativa dentro de una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$, una solución $y(x)$ será estrictamente monótona, es decir, $y(x)$ será creciente o decreciente dentro de una subregión R_i. Por lo tanto, $y(x)$ no puede ser oscilatoria ni tener un extremo relativo (máximo o mínimo). Revise el problema 33 de los ejercicios 2.1.
- Si $y(x)$ está *limitada en su parte superior* por un punto crítico c_1 (como en una subregión R_1 donde $y(x) < c_1$ para toda x), entonces su gráfica debe aproximarse a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_1$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Si $y(x)$ se encuentra *limitada*, esto es, acotada en sus partes superior e inferior por dos puntos críticos consecutivos (como dentro de una subregión R_2 donde $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x), entonces su gráfica deberá aproximarse a las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$, una cuando $x \to \infty$ y la otra cuando $x \to -\infty$. Si $y(x)$ está *limitada en la parte inferior* por un punto crítico (como en la subregión R_3, donde $c_2 < y(x)$ para toda x), entonces su gráfica debe aproximarse a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_2$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Vea el problema 34 en los ejercicios 2.1.

Con la información anterior en mente, examinemos de nuevo la ecuación diferencial del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Vuelta al ejemplo 3

Los tres intervalos determinados en el eje P o línea de fase por los puntos críticos $P = 0$ y $P = a/b$ ahora corresponden, en el plano tP, a las tres subregiones:

$$R_1: -\infty < P < 0, \qquad R_2: 0 < P < a/b, \qquad R_3: a/b < P < \infty,$$

donde $-\infty < t < \infty$. El retrato fase de la figura 2.1.4 nos dice que $P(t)$ es decreciente en R_1, creciente en R_2 y decreciente en R_3. Si $P(0) = P_0$ es un valor inicial, entonces, en R_1, R_2 y R_3 tenemos, respectivamente, lo siguiente:

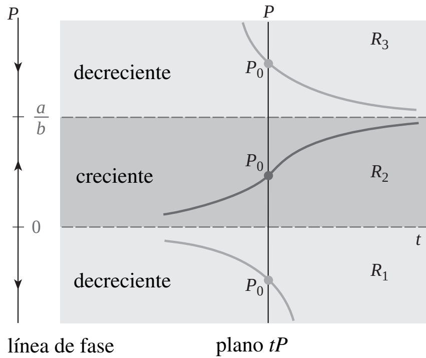


FIGURA 2.1.6 Retrato fase y curvas solución en cada una de las tres subregiones del ejemplo 4

i) Para $P_0 < 0$, $P(t)$ está acotada por arriba. Dado que $P(t)$ es decreciente, $P(t)$ disminuye sin acotamiento para t creciente, y de igual modo $P(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$. Esto significa que el eje t negativo, la gráfica de la solución de equilibrio $P(t) = 0$, representa una asíntota horizontal para una curva solución.

ii) Para $0 < P_0 < a/b$, $P(t)$ está acotada. Como $P(t)$ es creciente, $P(t) \to a/b$ cuando $t \to \infty$ y $P(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$. Las gráficas de las dos soluciones de equilibrio $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$ son líneas horizontales que representan asíntotas horizontales para cualquier curva solución que inicie en esta subregión.

iii) Para $P_0 > a/b$, $P(t)$ está acotada en la parte inferior. Como $P(t)$ es decreciente, $P(t) \to a/b$ cuando $t \to \infty$. La gráfica de la solución de equilibrio $P(t) = a/b$ representa una asíntota horizontal para una curva solución.

En la **FIGURA 2.1.6**, la línea de fase es el eje P en el plano tP. Para que resulte más claro, la línea de fase original de la figura 2.1.4 se reproduce a la izquierda del plano en el cual están sombreadas las subregiones R_1, R_2 y R_3. Las gráficas de las soluciones de equilibrio $P(t) = a/b$ y $P(t) = 0$ (el eje t) se muestran en la figura como líneas discontinuas; los trazos sólidos representan gráficas típicas de $P(t)$ que ilustran los tres casos recién analizados. ≡

En una subregión tal como R_1 en el ejemplo 4, donde $P(t)$ es decreciente y sin acotamiento por abajo, necesariamente debemos tener $P(t) \to -\infty$. *No* debe interpretarse que esta expresión significa que $P(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$; podríamos tener $P(t) \to -\infty$ cuando $t \to T$, donde $T > 0$ es un número finito que depende de la condición inicial $P(t_0) = P_0$. Si pensamos en términos dinámicos, $P(t)$ podría "dispararse" en tiempo finito; en términos gráficos, $P(t)$ podría tener una asíntota vertical en $t = T > 0$. Un comentario similar se aplicaría a la subregión R_3.

La ecuación diferencial $dy/dx = \text{sen}\, y$ en el ejemplo 2 es autónoma y tiene un número infinito de puntos críticos dado que $\text{sen}\, y = 0$ en $y = n\pi$, n es un entero. Además, ahora sabemos que la solución $y(x)$ que atraviesa $(0, -\frac{3}{2})$ está acotada arriba y abajo por dos puntos críticos consecutivos $(-\pi < y(x) < 0)$ y es decreciente ($\text{sen}\, y < 0$ para $-\pi < y < 0$), la gráfica de $y(x)$ debe aproximarse a las gráficas de las soluciones de equilibrio como asíntotas horizontales: $y(x) \to -\pi$ cuando $x \to \infty$ y $y(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 5 Curvas solución de una ecuación diferencial autónoma

La ecuación autónoma $dy/dx = (y - 1)^2$ posee el punto crítico 1. A partir del retrato fase de la **FIGURA 2.1.7*a***), concluimos que una solución $y(x)$ es una función creciente en las subregiones $-\infty < y < 1$ y $1 < y < \infty$, por donde $-\infty < x < \infty$. Para una condición inicial $y(0) = y_0 < 1$, una solución $y(x)$ es creciente y está acotada en su parte superior por 1 y, en consecuencia, $y(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$; para $y(0) = y_0 > 1$, una solución $y(x)$ será creciente y no estará acotada.

Ahora $y(x) = 1 - 1/(x + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones para la ecuación diferencial (véase el problema 4 en los ejercicios 2.2). Una condición inicial dada determina un valor para c. Para las condiciones iniciales, digamos, $y(0) = -1 < 1$ y $y(0) = 2 > 1$, encontramos, a su vez, que $y(x) = 1 - 1/(x + \frac{1}{2})$ y así $y(x) = 1 - 1/(x - 1)$. Como se muestra en las figuras 2.1.7*b*) y *c*), la gráfica de cada una de estas funciones racionales posee una asíntota vertical. Pero tenga presente que las soluciones de los problemas de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, y(0) = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, y(0) = 2$$

están definidas sobre intervalos especiales. Estos intervalos son, respectivamente,

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}, \ -\frac{1}{2} < x < \infty \quad \text{y} \quad y(x) = 1 - \frac{1}{x - 1}, \ -\infty < x < 1.$$

En las figuras 2.1.7*b*) y *c*), las curvas solución son los segmentos de las gráficas mostrados en trazo sólido. Como lo pronosticó el retrato fase, para la curva solución de la figura 2.1.7*b*), $y(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$; para la curva solución de la figura 2.1.7*c*), $y(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ a partir de la izquierda.

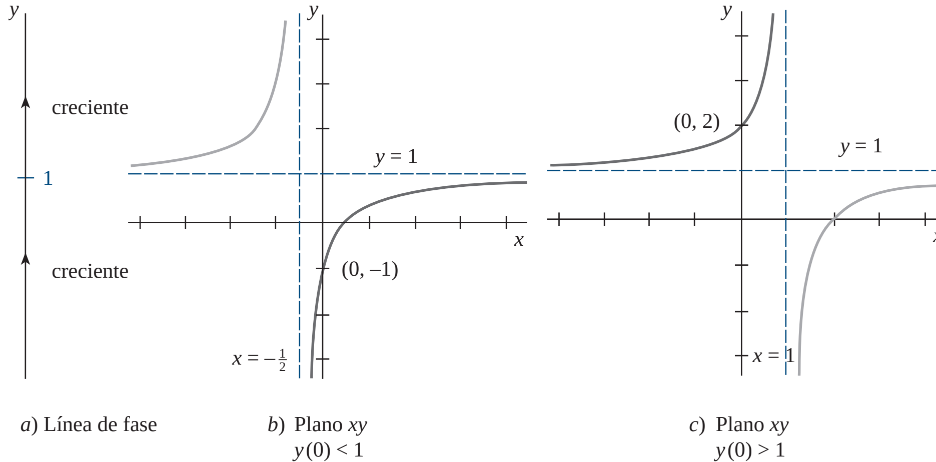


FIGURA 2.1.7 Comportamiento de soluciones cerca de $y = 1$ en el ejemplo 5

Atractores y repulsores Suponga que $y(x)$ representa una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma dada en (1) y que c es un punto crítico de la ED. Básicamente existen tres tipos de comportamiento que $y(x)$ puede exhibir cerca de c. En la **FIGURA 2.1.8** hemos colocado a c sobre cuatro líneas de fase verticales. Cuando ambas puntas de flecha en cualquier lado del punto señalado como c apuntan *hacia* c, como en la figura 2.1.8*a*), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) lo bastante cerca de c exhiben el comportamiento asintótico $\lim_{x\to\infty} y(x) = c$. Por esta razón, se dice que el punto crítico c es **asintóticamente estable**. Si usamos una analogía física, una solución que inicia cerca de c es parecida a una partícula cargada que, en el transcurso del tiempo, es arrastrada hacia una partícula de carga opuesta; por lo tanto, a c también se le conoce como **atractor**. Cuando ambas puntas de flecha en cualquier lado del punto rotulado como c apuntan al lado *contrario* de c, como en la figura 2.1.8*b*), todas las soluciones $y(x)$ de (1) que empiezan desde un punto inicial (x_0, y_0) se alejan de c a medida que x aumenta. En este caso, se dice que el punto crítico c es **inestable**. A un punto crítico inestable también se le llama **repulsor**, por razones obvias. El punto crítico c ilustrado en las figuras 2.1.8*c*) y *d*) no es atrayente ni repelente, pero como c exhibe características tanto de un atractor como de un repulsor —es decir, una solución que empieza desde un punto inicial (x_0, y_0) lo bastante cerca de c es atraída hacia c de un lado y repelida del otro—, se dice que el punto crítico c es **semiestable**. En el ejemplo 3, el punto crítico a/b es asintóticamente estable (un atractor) y el punto crítico 0 es inestable (un repulsor). En el ejemplo 5, el punto crítico 1 es semiestable.

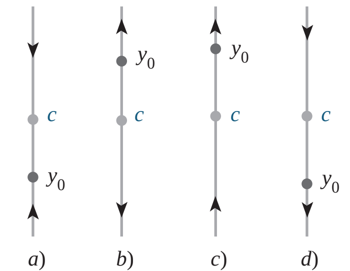


FIGURA 2.1.8 El punto crítico c es un atractor en *a*), un repulsor en *b*), y semiestable en *c*) y *d*)

Ecuaciones diferenciales autónomas y campos directores Si una ecuación diferencial de primer orden es autónoma, entonces observamos, partiendo del lado derecho de su forma normal $dy/dx = f(y)$, que las pendientes de los elementos lineales que pasan por los puntos localizados en el cuadriculado rectangular utilizado para construir el campo de direcciones de la ecuación diferencial dependen únicamente de la coordenada y de los puntos. En otras palabras, los elementos lineales que atraviesen los puntos de cualquier línea *horizontal* deben tener la misma pendiente; las pendientes de los elementos lineales ubicados a lo largo de cualquier línea *vertical*, por supuesto, variarán. Esto se puede apreciar mediante la observación de la banda gris horizontal y la banda vertical coloreada de la **FIGURA 2.1.9**. Esta figura exhibe un campo de direcciones para la ecuación autónoma $dy/dx = 2y - 2$. Con tales datos en mente, vuelva a examinar la figura 2.1.3.

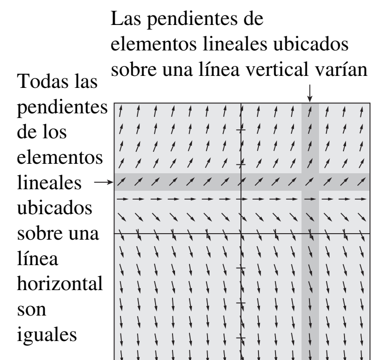


FIGURA 2.1.9 Campo de direcciones para una ecuación diferencial autónoma

2.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

2.1.1 Campos de direcciones

En los problemas 1 a 4, reproduzca el campo de direcciones dado generado por computadora. Después trace a mano una curva solución aproximada que atraviese cada uno de los puntos indicados. Utilice diferentes lápices de color para cada curva solución.

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

a) $y(-2) = 1$ ***b***) $y(3) = 0$

c) $y(0) = 2$ ***d***) $y(0) = 0$

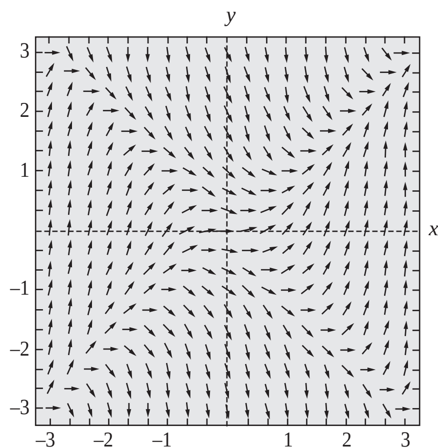


FIGURA 2.1.10 Campo de direcciones para el problema 1

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^2}$

a) $y(-6) = 0$ ***b***) $y(0) = 1$

c) $y(0) = -4$ ***d***) $y(8) = -4$

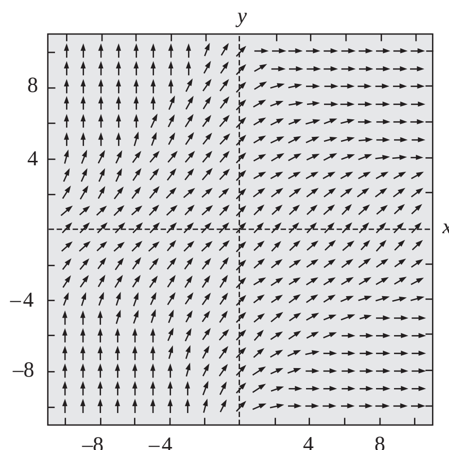


FIGURA 2.1.11 Campo de direcciones para el problema 2

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy$

a) $y(0) = 0$ ***b***) $y(-1) = 0$

c) $y(2) = 2$ ***d***) $y(0) = -4$

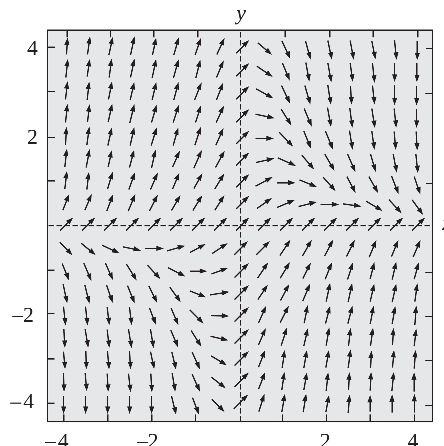


FIGURA 2.1.12 Campo de direcciones para el problema 3

4. $\dfrac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)\cos y$

a) $y(0) = 1$ ***b***) $y(1) = 0$

c) $y(3) = 3$ ***d***) $y(0) = -\frac{5}{2}$

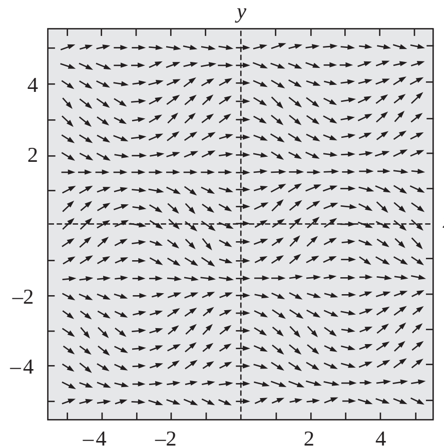


FIGURA 2.1.13 Campo de direcciones para el problema 4

En los problemas 5 a 12, utilice un programa de cómputo para obtener un campo de direcciones de la ecuación diferencial dada. Trace a mano una curva solución aproximada que atraviese cada uno de los puntos dados.

5. $y' = x$

a) $y(0) = 0$

b) $y(0) = -3$

6. $y' = x + y$

a) $y(-2) = 2$

b) $y(1) = -3$

7. $y\dfrac{dy}{dx} = -x$

a) $y(1) = 1$

b) $y(0) = 4$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$

a) $y(0) = 1$

b) $y(-2) = -1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x^2 + y$

a) $y(0) = \dfrac{1}{2}$

b) $y(2) = -1$

10. $\dfrac{dy}{dx} = xe^y$

a) $y(0) = -2$

b) $y(1) = 2.5$

11. $y' = y - \cos\dfrac{\pi}{2}x$

a) $y(2) = 2$

b) $y(-1) = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{y}{x}$

a) $y(-\frac{1}{2}) = 2$

b) $y(\frac{3}{2}) = 0$

En los problemas 13 y 14, las figuras dadas representan la gráfica de $f(y)$ y $f(x)$, respectivamente. Trace a mano un campo de direcciones sobre una cuadrícula adecuada para $dy/dx = f(y)$ (problema 13) y después para $dy/dx = f(x)$ (problema 14).

13.

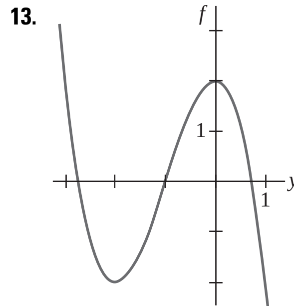


FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 13

14.

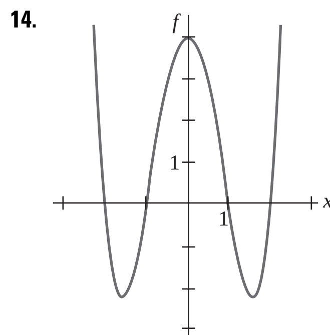


FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 14

15. En los incisos *a*) y *b*), trace **isoclinas** $f(x, y) = c$ para la ecuación diferencial dada usando los valores de c indicados. Construya un campo de direcciones sobre una cuadrícula y, cuidadosamente, trace ahí los elementos lineales con la pendiente adecuada en los puntos elegidos sobre cada isoclina. En cada caso, use este campo direccional aproximado y trace una curva solución aproximada para el problema de valor inicial que consiste en la ED y la condición inicial $y(0) = 1$.

a) $dy/dx = x + y$; c es un entero que satisface a $-5 \leq c \leq 5$

b) $dy/dx = x^2 + y^2$; $c = \frac{1}{4}$ $c = 1$, $c = \frac{9}{4}$, $c = 4$

Problemas de análisis

16. *a*) Considere el campo de direcciones de la ecuación diferencial $dy/dx = x(y - 4)^2 - 2$, pero no utilice tecnología para obtenerlo. Describa las pendientes de los elementos lineales presentes en las líneas $x = 0$, $y = 3$, $y = 4$ y $y = 5$.

b) Considere el problema de valor inicial $dy/dx = x(y - 4)^2 - 2$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 < 4$. ¿Puede una solución $y(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$? Analice esta propuesta a partir de la información dada en el inciso *a*).

17. Para una ED de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, una curva localizada en el plano definido por $f(x, y) = 0$ se denomina **isoclina nula** de la ecuación, dado que un elemento lineal ubicado en un punto de la curva tiene pendiente cero. Use un programa de cómputo para obtener un campo de direcciones sobre un cuadriculado rectangular de puntos para $dy/dx = x^2 - 2y$ y después sobreponga la gráfica de la isoclina nula $y = \frac{1}{2}x^2$ en el campo de direcciones. Analice el comportamiento de las curvas solución en regiones del plano definidas por $y < \frac{1}{2}x^2$ y por $y > \frac{1}{2}x^2$. Trace algunas curvas solución aproximadas. Intente generalizar sus observaciones.

18. *a*) Identifique las isoclinas nulas (véase el problema 17) en los problemas 1, 3 y 4. Con un lápiz de color, encierre en un círculo cualquier elemento lineal presente en las **FIGURAS 2.1.10, 2.1.12** y **2.1.13** que usted considere pueda ser un elemento lineal en un punto sobre una isoclina nula.

b) ¿Cuáles son las isoclinas nulas de una ED autónoma de primer orden?

2.1.2 Ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden

19. Considere la ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = y - y^3$ y la condición inicial $y(0) = y_0$. Trace a mano la gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores dados.

a) $y_0 > 1$

b) $0 < y_0 < 1$

c) $-1 < y_0 < 0$

d) $y_0 < -1$

20. Considere la ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = y^2 - y^4$ y la condición inicial $y(0) = y_0$. Trace a mano la gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores dados.

a) $y_0 > 1$

b) $0 < y_0 < 1$

c) $-1 < y_0 < 0$

d) $y_0 < -1$

En los problemas 21 a 28, encuentre los puntos críticos y el retrato fase de la ecuación diferencial autónoma de primer orden dada. Clasifique cada punto crítico como asintóticamente estable, inestable o semiestable. Trace a mano las curvas solución típicas en las regiones en el plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

21. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 3y$

22. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y^3$

23. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 2)^4$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 10 + 3y - y^2$

25. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(4 - y^2)$

26. $\dfrac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = y\ln(y + 2)$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^y - 9y}{e^y}$

En los problemas 29 y 30, considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde está dada la gráfica de f. Use esta gráfica para ubicar los puntos críticos de cada ecuación diferencial. Trace un retrato fase de cada ecuación diferencial. Bosqueje a mano las curvas solución típicas en las subregiones determinadas en el plano xy por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

29.

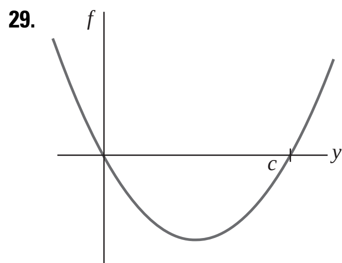


FIGURA 2.1.16 Gráfica para el problema 29

30.

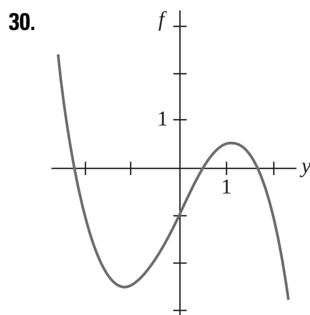


FIGURA 2.1.17 Gráfica para el problema 30

Problemas de análisis

31. Considere la ED autónoma $dy/dx = (2/\pi)y - \text{sen}\, y$. Determine los puntos críticos de la ecuación, y analice una forma de obtener su retrato fase. Clasifique los puntos críticos como asintóticamente estables, inestables o semiestables.

32. Se dice que un punto crítico c de una ED autónoma de primer orden está **aislado** si existe algún intervalo abierto que contenga a c pero a ningún otro punto crítico. ¿Puede existir una ED autónoma en la forma dada en (1) para la cual *todo* punto crítico sea no aislado? Analice; no es necesario un pensamiento profundo.

33. Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación autónoma $dy/dx = f(y)$ y que c es un punto crítico de la ED. Analice. ¿Por qué la gráfica de $y(x)$ no puede cruzar la gráfica de la solución de equilibrio $y = c$? ¿Por qué $f(y)$ no puede cambiar de signos en una de las subregiones? ¿Por qué $y(x)$ no puede ser oscilatoria o tener un extremo relativo (máximo o mínimo)?

34. Suponga que $y(x)$ es una solución de la ecuación autónoma $dy/dx = f(y)$ y está acotada en sus partes superior e inferior por dos puntos críticos consecutivos $c_1 < c_2$, como en la subregión R_2 de la figura 2.1.5*b*). Si $f(y) > 0$ en la región, entonces $\text{lím}_{x\to\infty} y(x) = c_2$. Analice por qué no puede existir un número $L < c_2$ tal que $\text{lím}_{x\to\infty} y(x) = L$. Como parte de su análisis, considere lo que le sucede a $y'(x)$ conforme $x \to \infty$.

35. Mediante la ecuación autónoma (1), analice cómo es posible obtener información acerca de dónde se ubican los puntos de inflexión de una curva solución.

36. Considere la ED autónoma $dy/dx = y^2 - y - 6$. Utilice sus ideas sobre el problema 35 y encuentre intervalos en el eje y para los cuales las curvas solución sean cóncavas hacia arriba e intervalos donde tales curvas sean cóncavas hacia abajo. Analice por qué *cada* curva solución de un problema de valor inicial presentado en la forma $dy/dx = y^2 - y - 6$, $y(0) = y_0$, donde $-2 < y_0 < 3$ tiene un punto de inflexión con la misma coordenada y. ¿Qué es esa coordenada y? Trace con cuidado la curva solución para la cual $y(0) = -1$. Repita para $y(2) = 2$.

37. Suponga que la ED autónoma dada en (1) no tiene puntos críticos. Analice el comportamiento de las soluciones.

Modelos matemáticos

38. Modelo poblacional La ecuación diferencial del ejemplo 3 es un reconocido modelo poblacional. Suponga que tal ED se cambia a

$$\frac{dP}{dt} = P(aP - b),$$

donde a y b son constantes positivas. Analice qué le sucede a la población P a medida que el tiempo t aumenta.

39. Velocidad terminal La ecuación diferencial autónoma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde k es una constante positiva de proporcionalidad y g es la aceleración debida a la gravedad, es un modelo de la velocidad v de un cuerpo de masa m que está cayendo bajo la influencia de la gravedad. Como el término $-kv$ representa la resistencia del aire, la velocidad de un cuerpo que cae desde una gran altura no aumenta sin límite a medida que aumenta el tiempo t.

a) Utilice un retrato fase de la ecuación diferencial para encontrar la velocidad limitante, o terminal, del cuerpo. Explique su razonamiento.

b) Encuentre la velocidad terminal del cuerpo si la resistencia del aire es proporcional a v^2. Véanse las páginas 22 y 26.

40. Reacciones químicas Cuando se combinan ciertas clases de químicos, la velocidad a la cual se forma un nuevo compuesto está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Aquí $X(t)$ denota la cantidad en gramos del nuevo compuesto formado en el tiempo t. Véase la página 20.

a) Utilice un retrato fase de la ecuación diferencial para predecir el comportamiento de X cuando $t \to \infty$.

b) Considere el caso en que $\alpha = \beta$. Utilice un retrato fase de la ecuación diferencial para predecir el comportamiento de X conforme $t \to \infty$ cuando $X(0) < \alpha$ y cuando $X(0) > \alpha$.

c) Compruebe que una solución explícita de la ED para cuando $k = 1$ y $\alpha = \beta$ es $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Encuentre una solución que satisfaga a $X(0) = \alpha/2$. Localice una solución que satisfaga a $X(0) = 2\alpha$. Grafique estas dos soluciones. ¿El comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$ concuerda con sus respuestas del inciso *b*)?

2.2 Ecuaciones separables

Introducción Considere las ecuaciones de primer orden $dy/dx = f(x, y)$. Cuando f no depende de la variable y, es decir, $f(x, y) = g(x)$, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

se puede resolver por integración. Si $g(x)$ es una función continua, al integrar ambos lados de (1) se produce la solución $y = \int g(x)\,dx = G(x) + c$, donde $G(x)$ es una antiderivada (integral indefinida) de $g(x)$. Por ejemplo, si $dy/dx = 1 + e^{2x}$, entonces $y = \int (1 + e^{2x})dx$ o $y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

Una definición La ecuación (1), así como su método de solución, es sólo un caso especial en el que f en $dy/dx = f(x, y)$ es un producto de una función de x y una función de y.

Definición 2.2.1 Ecuación separable

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

es **separable** o que tiene **variables separables**.

Observe que al dividir entre la función $h(y)$, una ecuación separable se puede expresar como

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{2}$$

donde, por conveniencia, hemos denotado $1/h(y)$ mediante $p(y)$. En esta última forma podemos darnos cuenta de inmediato que (2) se reduce a (1) cuando $h(y) = 1$.

Ahora, si $y = \phi(x)$ representa una solución de (2), debemos tener $p(\phi(x))\phi'(x) = g(x)$ y, por lo tanto,

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $dy = \phi'(x)\,dx$ y entonces (3) será lo mismo que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \quad \text{o} \quad H(y) = G(x) + c, \tag{4}$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = 1/h(y)$ y $g(x)$, respectivamente.

Método de solución La ecuación (4) señala el procedimiento empleado para resolver ecuaciones separables. Una familia de soluciones de un parámetro, dada por lo general en forma implícita, se obtiene al integrar ambos lados de $p(y)dy = g(x)\,dx$.

No hay necesidad de usar dos constantes en la integración de una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, entonces la diferencia de $c_1 - c_2$ puede reemplazarse por una sola constante c, como en la expresión (4). En muchos casos a lo largo de los capítulos siguientes, renombraremos las constantes de una forma que convenga a cada ecuación. Por ejemplo, los múltiplos de constantes o las combinaciones de constantes algunas veces pueden reemplazarse por una sola constante.

Al resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, utilice sólo una constante.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0$.

Solución Si dividimos entre $(1 + x)y$, podremos escribir $dy/y = dx/(1 + x)$, a partir de lo cual se deduce que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1+x|+c_1} = e^{\ln|1+x|} \cdot e^{c_1} \quad \leftarrow \text{leyes de los exponentes}$$

$$= |1 + x|e^{c_1}$$

$$= \pm e^{c_1}(1 + x). \qquad \leftarrow \begin{cases} |1 + x| = 1 + x, & x \geq -1 \\ |1 + x| = -(1 + x), & x < -1 \end{cases}$$

Si se renombra $\pm e^{c_1}$ como c entonces se tiene $y = c(1 + x)$.

Solución alternativa Como cada integral da como resultado un logaritmo, una elección cuidadosa de la constante de integración sería $\ln|c|$ en lugar de c. Al escribir de nuevo la segunda línea de la solución como $\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|$ es posible combinar los términos del lado derecho mediante las propiedades de los logaritmos. A partir de $\ln|y| = \ln|c(1 + x)|$, podemos obtener inmediatamente $y = c(1 + x)$. Aun cuando las integrales indefinidas no sean *todas* logaritmos, todavía puede resultar ventajoso usar $\ln|c|$. Sin embargo, no se puede dar una regla. ≡

En la sección 1.1 estudiamos que una curva solución puede ser sólo un segmento o un arco de la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$.

EJEMPLO 2 Curva solución

Resuelva el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $\quad y(4) = -3$.

Solución Al escribir de nuevo la ecuación como $y\,dy = -x\,dx$ obtenemos

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

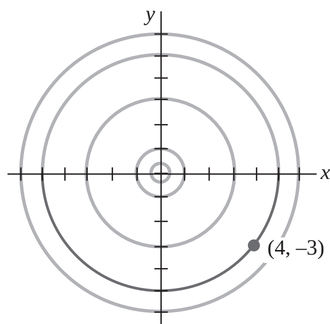


FIGURA 2.2.1 Curva solución para el problema de valor inicial del ejemplo 2

Podemos escribir el resultado de la integración como $x^2 + y^2 = c^2$ al reemplazar la constante $2c_1$ por c^2. Esta solución de la ecuación diferencial representa una familia de círculos concéntricos centrados en el origen.

Ahora, cuando $x = 4$, $y = -3$, de forma que $16 + 9 = 25 = c^2$. Por lo tanto, el problema de valor inicial determina el círculo $x^2 + y^2 = 25$ con radio de 5. Debido a su simplicidad, podemos resolver esta solución implícita para obtener una solución explícita que satisfaga la condición inicial. En el ejemplo 3 de la sección 1.1 vimos esta solución como $y = \phi_2(x)$ o $y = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$. Una curva solución es la gráfica de una *función* diferenciable. En este caso, la curva solución será el semicírculo inferior, mostrado en la **FIGURA 2.2.1**, que contiene al punto $(4, -3)$. ≡

■ **Pérdida de una solución** Debemos tener cuidado al separar variables, dado que los divisores de las variables pueden ser cero en algún punto. En particular, si r es un cero de la función $h(y)$, sucede entonces que la sustitución de $y = r$ en $dy/dx = g(x)h(y)$ convierte a ambos lados en cero; en otras palabras, $y = r$ es una solución constante de la ecuación diferencial. Pero después de separar las variables, observe que el lado derecho de $dy/h(y) = g(x)\,dx$ no está definido en r. En consecuencia, $y = r$ puede no mostrarse en la familia de soluciones que se obtenga luego de aplicar la integración y simplificación. Recuerde, tal solución se denomina solución singular.

EJEMPLO 3 Pérdida de una solución

Resuelva $dy/dx = y^2 - 4$.

Solución Escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \quad \text{o} \quad \left[\frac{\frac{1}{4}}{y - 2} - \frac{\frac{1}{4}}{y + 2}\right]dy = dx. \tag{5}$$

En (5), la segunda ecuación es el resultado de usar fracciones parciales en el lado izquierdo de la primera ecuación. Al integrar y aplicar las leyes logarítmicas se tiene

$$\frac{1}{4}\ln|y - 2| - \frac{1}{4}\ln|y + 2| = x + c_1 \quad \text{o} \quad \ln\left|\frac{y - 2}{y + 2}\right| = 4x + c_2 \quad \text{o} \quad \frac{y - 2}{y + 2} = e^{4x + c_2}.$$

Aquí hemos reemplazado $4c_1$ por c_2. Por último, después de reemplazar e^{c_2} por c y resolver la última ecuación para y, se obtiene la familia de soluciones de un parámetro

$$y = 2\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{6}$$

Ahora, si factorizamos el lado derecho de la ecuación diferencial como $dy/dx = (y - 2)(y + 2)$ sabremos, por el análisis realizado en la sección 2.1, que $y = 2$ y $y = -2$ son dos soluciones constantes (de equilibrio). La solución $y = 2$ es miembro de la familia de soluciones definidas por (6) que corresponden al valor $c = 0$. No obstante, $y = -2$ es una solución singular; no se puede obtener a partir de (6) para ninguna elección del parámetro c. Esta última solución se perdió en las primeras etapas del proceso de solución. Una revisión de (5) indica con claridad que debimos excluir a $y = \pm 2$ en estos pasos. ≡

EJEMPLO 4 Problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial

$$\cos x(e^{2y} - y)\frac{dy}{dx} = e^y \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 0.$$

Solución Al dividir la ecuación entre $e^y \cos x$ se tiene

$$\frac{e^{2y} - y}{e^y}\,dy = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,dx.$$

Antes de integrar, usamos una división adecuada de términos en el lado izquierdo y la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ en el lado derecho. Entonces

integración por partes → $$\int (e^y - ye^{-y})\,dy = 2\int \operatorname{sen} x\,dx$$

produce

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = -2\cos x + c. \tag{7}$$

La condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$ implica que $c = 4$. Por lo tanto, una solución del problema de valor inicial es

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x. \tag{8}$$ ≡

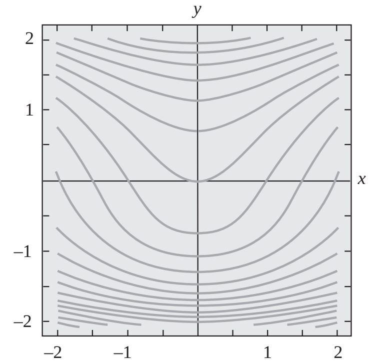


FIGURA 2.2.2 Curvas de nivel de $G(x, y) = c$, donde $G(x, y) = e^y + ye^{-y} + e^{-y} + 2\cos x$

Uso de computadoras En el recuadro de *Comentarios* incluido al final de la sección 1.1 mencionamos que puede resultar difícil usar una solución implícita $G(x, y) = 0$ para encontrar una solución explícita $y = \phi(x)$. La ecuación (8) muestra que la tarea de resolver y en términos de x puede presentar más problemas que la ardua labor de intercambiar símbolos (¡esto simplemente no es posible!). Soluciones implícitas como la (8) son un poco frustrantes; ni la gráfica de la ecuación ni el intervalo sobre el cual una solución que satisfaga $y(0) = 0$ está definida son evidentes. El problema de "ver" cuál es la apariencia de una solución implícita puede superarse en algunos casos mediante la tecnología. Una forma de hacerlo* es utilizar la aplicación de gráficos de contorno de un sistema computacional algebraico (CAS, por sus siglas en inglés). Recuerde de sus conocimientos de cálculo multivariable que para una función de dos variables $z = G(x, y)$, las *curvas bidimensionales* definidas por $G(x, y) = c$, donde c es constante, se llaman *curvas de nivel* de la función. Con ayuda de un CAS, en la **FIGURA 2.2.2** ilustramos algunas curvas de nivel de la función $G(x, y) = e^y + ye^{-y} + e^{-y} + 2\cos x$. La familia de soluciones definidas por la expresión (7) son las curvas de nivel $G(x, y) = c$. La **FIGURA 2.2.3** ilustra la curva de nivel $G(x, y) = 4$, la cual representa la solución particular (8). La otra curva mostrada en la figura 2.2.3 es la curva de nivel $G(x, y) = 2$, y es el miembro de la familia $G(x, y) = c$ que satisface a $y(\pi/2) = 0$.

Si una condición inicial lleva a una solución particular mediante la determinación de un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones para una ecuación diferencial

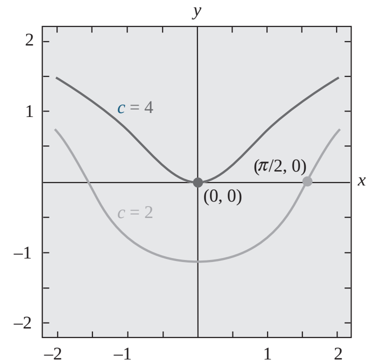


FIGURA 2.2.3 Curvas de nivel de $c = 2$ y $c = 4$

* En la sección 2.6 analizamos otros tipos de procedimientos basados en el concepto de un método numérico.

de primer orden, es natural que la mayoría de los estudiantes (y profesores) se relajen y conformen con esto. No obstante, quizá una solución de un problema de valor inicial no sea única. En el ejemplo 4 de la sección 1.2 vimos que el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0, \tag{9}$$

tiene al menos dos soluciones, $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$. Ahora estamos en posición de resolver la ecuación. Al separar las variables e integrar $y^{-1/2}dx = xdx$ resulta

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{o} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

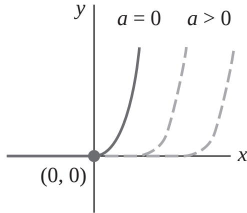


FIGURA 2.2.4 Soluciones de (9) definidas por tramos

Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$ y, por lo tanto, necesariamente $c = 0$. Luego, $y = \frac{1}{16}x^4$. La solución trivial $y = 0$ se perdió al dividir entre $y^{1/2}$. Además, el problema de valor inicial (9) posee infinitamente más soluciones, puesto que para cualquier opción del parámetro $a \geq 0$, la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x^2 - a^2)^2/16, & x \geq a \end{cases}$$

satisface tanto la ecuación diferencial como la condición inicial. Véase la **FIGURA 2.2.4**.

Comentarios

i) Si g es una función continua sobre un intervalo I que contiene a x_0 entonces, con base en el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt = g(x).$$

En otras palabras, $\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$ es una antiderivada de la función g. Hay ocasiones en que esta forma es conveniente. Por ejemplo, si g es continua sobre un intervalo I que contiene a x_0, entonces la solución del problema simple de valor inicial $dy/dx = g(x)$, $y(x_0) = y_0$, definido en I, estará dada por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Deberá comprobar esto por usted mismo. Dado que una antiderivada de una función continua no siempre se puede expresar en términos de funciones elementales, quizás esto sea lo mejor que podremos hacer para obtener una solución explícita de un problema de valor inicial.

ii) En algunos de los ejemplos anteriores vimos que en una familia de soluciones de un parámetro para una ecuación diferencial de primer orden la constante se puede renombrar cuando sea conveniente. Además, fácilmente puede suceder que dos individuos que resuelven la misma ecuación de manera correcta obtengan expresiones diferentes en sus respuestas. Por ejemplo, mediante separación de variables, podemos mostrar que las familias de soluciones de un parámetro para la ED $(1 + y^2)\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$ son

$$\arctan x + \arctan y = c \quad \text{o} \quad \frac{x + y}{1 - xy} = c.$$

Conforme avance por las siguientes secciones, tenga en cuenta la probabilidad de que las familias de soluciones sean equivalentes en el sentido de que una familia puede obtenerse a partir de otra, ya sea mediante aplicación de álgebra y trigonometría o por volver a nombrar la constante. Véanse los problemas 27 y 28 en los ejercicios 2.2.

2.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 22, resuelva la ecuación diferencial dada mediante separación de variables.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2$

3. $dx + e^{3x}dy = 0$ **4.** $dy - (y - 1)^2 dx = 0$

5. $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$ **6.** $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ **8.** $e^x y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

9. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y + 1}{x}\right)^2$ **10.** $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$

11. $\csc y\, dx + \sec^2 x\, dy = 0$

12. $\operatorname{sen} 3x\, dx + 2y \cos^3 3x\, dy = 0$

13. $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$

14. $x(1 + y^2)^{1/2} dx = y(1 + x^2)^{1/2} dy$

15. $\dfrac{dS}{dr} = kS$ **16.** $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$

17. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$ **18.** $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

21. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$ **22.** $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

En los problemas 23 a 28, encuentre una solución implícita y una explícita para el problema de valor inicial dado.

23. $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$

25. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$

26. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$

27. $\sqrt{1 - y^2}\, dx - \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}/2$

28. $(1 + x^4)dy + x(1 + 4y^2)\, dx = 0, \quad y(1) = 0$

29. *a*) Encuentre una solución del problema de valor inicial consistente en la ecuación diferencial del ejemplo 3 y las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y(0) = -2$, $y(\frac{1}{4}) = 1$.

b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial del ejemplo 4 cuando $\ln c_1$ se utiliza como la constante de integración situada en el *lado izquierdo* de la solución y 4 $\ln c_1$ es reemplazada por $\ln c$. Después resuelva los mismos problemas de valor inicial del inciso *a*).

30. Encuentre una solución de $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$ que atraviese los puntos indicados.

a) $(0, 1)$ *b*) $(0, 0)$ *c*) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *d*) $(2, \frac{1}{4})$

31. Encuentre una solución singular del problema 21 y del problema 22.

32. Demuestre que una solución implícita de

$$2x \operatorname{sen}^2 y\, dx - (x^2 + 10) \cos y\, dy = 0$$

está dada por $\ln(x^2 + 10) \operatorname{cosec} y = c$. Encuentre las soluciones constantes, si las hubiera, que se hayan perdido en la solución de la ecuación diferencial.

Con frecuencia un cambio radical en la forma de la solución de una ecuación diferencial corresponde a un cambio muy pequeño en la condición inicial o en la propia ecuación. En los problemas 33 a 36, encuentre una solución explícita para el problema de valor inicial dado. Utilice una herramienta de graficación para trazar la gráfica de cada solución. Compare cada curva solución en las inmediaciones de (0, 1).

33. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1$

34. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1.01$

35. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0.01, \quad y(0) = 1$

36. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0.01, \quad y(0) = 1$

37. Toda ecuación autónoma de primer orden $dy/dx = f(y)$ es separable. Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y $y_4(x)$ de la ecuación diferencial $dy/dx = y - y^3$ que satisfaga, a su vez, las condiciones iniciales $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = \frac{1}{2}$, $y_3(0) = -\frac{1}{2}$ y $y_4(0) = -2$. Use una herramienta de graficación para trazar las gráficas de cada solución. Compare estas gráficas con las pronosticadas en el problema 19 de los ejercicios 2.1. Proporcione el intervalo de definición exacto para cada solución.

38. *a*) La ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = 1/(y - 3)$ no tiene puntos críticos. No obstante, coloque el 3 sobre una línea de fase y obtenga un retrato fase de la ecuación. Obtenga d^2y/dx^2 para determinar dónde son cóncavas hacia arriba las curvas solución y dónde son cóncavas hacia abajo (véanse los problemas 35 y 36 en los ejercicios 2.1). Use el retrato fase y la concavidad para trazar a mano algunas curvas solución típicas.

b) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y $y_4(x)$ de la ecuación diferencial del inciso *a*) que satisfagan, a su vez, las condiciones iniciales $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 2$, $y_3(1) = 2$ y $y_4(-1) = 4$. Bosqueje cada solución y compárela con sus gráficas del inciso *a*). Proporcione el intervalo de definición exacto para cada solución.

39. *a*) Encuentre una solución explícita del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{2y}, \quad y(-2) = -1.$$

b) Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la solución del inciso *a*). Utilice la gráfica para calcular el intervalo de definición *I* de la solución.

c) Determine el intervalo exacto *I* de definición empleando métodos analíticos.

40. Repita los inciso *a*), *b*) y *c*) del problema 39 para el PVI que consiste en la ecuación diferencial del problema 7 y la condición $y(0) = 0$.

≡ Problemas de análisis

41. *a*) Explique por qué el intervalo de definición de la solución explícita $y = \phi_2(x)$ del problema de valor inicial del ejemplo 2 es el intervalo *abierto* $(-5, 5)$.

b) ¿Es posible que cualquier solución de la ecuación diferencial atraviese el eje x? ¿Considera usted que $x^2 + y^2 = 1$ es una solución implícita del problema de valor inicial $dy/dx = -x/y$, $y(1) = 0$?

42. *a*) Si $a > 0$, analice las diferencias, si las hubiera, entre las soluciones de problemas de valor inicial que consistan en la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$ y cada una de las condiciones iniciales $y(a) = a$, $y(a) = -a$, $y(-a) = a$ y $y(-a) = -a$.

b) ¿Tiene solución el problema de valor inicial $dy/dx = x/y$, $y(0) = 0$?

c) Resuelva $dy/dx = x/y$, $y(1) = 2$ y proporcione el intervalo exacto I de definición de su solución.

43. En los problemas 37 y 38 vimos que toda ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = f(y)$ es separable. ¿Este hecho ayuda en la solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + y^2}\,\text{sen}^2 y$, $y(0) = \frac{1}{2}$? Analice. Trace a mano una posible curva solución para el problema.

44. Sin usar tecnología, ¿cómo resolvería usted

$$(\sqrt{x} + x)\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + y?$$

Ponga en práctica sus ideas.

45. Encuentre una función cuyo cuadrado más el cuadrado de su derivada sea 1.

46. *a*) La ecuación diferencial del problema 27 es equivalente a la forma normal

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$$

en la región cuadrada del plano xy definida por $|x| < 1$, $|y| < 1$. Pero la cantidad situada bajo el radical es positiva también en las regiones definidas por $|x| > 1$, $|y| > 1$. En el plano xy, trace todas las regiones para las cuales esta ecuación diferencial contiene soluciones reales.

b) Resuelva la ED del inciso *a*) en las regiones definidas por $|x| > 1$, $|y| > 1$. Después, encuentre una solución implícita y otra explícita de la ecuación diferencial sujeta a $y(2) = 2$.

≡ Modelo matemático

47. Puente colgante En la ecuación (17) de la sección 1.3 vimos que un modelo matemático para la forma de un cable flexible tendido entre dos soportes verticales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}, \tag{10}$$

donde W denota la porción de la carga vertical total entre los puntos P_1 y P_2 mostrados en la figura 1.3.8. La ED (10) es separable bajo las siguientes condiciones que describen un puente colgante.

Supongamos que los ejes x y y son como indica la **FIGURA 2.2.5**, es decir, el eje x corre a lo largo de la carretera horizontal y el eje y atraviesa el punto $(0, a)$, que es el punto más bajo de un cable tendido sobre el tramo de puente, y coincide con el intervalo $[-L/2, L/2]$. En el caso de un puente colgante, el supuesto acostumbrado es que la carga vertical en (10) es sólo una carretera uniforme distribuida a lo largo del eje horizontal. En otras palabras, se supone que el peso de todos los cables es insignificante en comparación con el peso de la carretera, y que el peso por unidad de longitud de la carretera (digamos, libras por pie horizontal) es una constante ρ. Utilice esta información para formular y resolver un problema adecuado de valor inicial a partir del cual se determine la forma (una curva con ecuación $y = \phi(x)$) de cada uno de los dos cables tendidos en un puente colgante. Exprese su solución del PVI en términos de altura h y longitud L. Véase la figura 2.2.5.

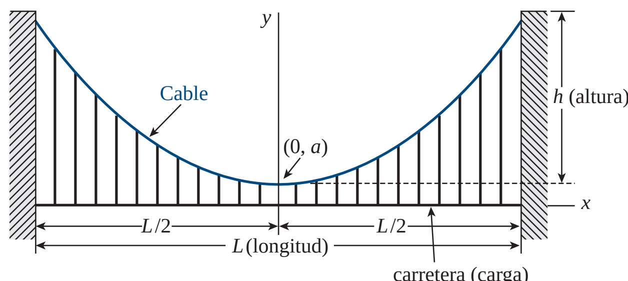


FIGURA 2.2.5 Forma de un cable para el problema 47

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

48. *a*) Utilice un programa CAS y el concepto de curvas de nivel para trazar gráficas representativas de los miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x + 5}{3y^2 + 1}$. Experimente con diferentes cantidades de curvas de nivel, así como con diversas regiones rectangulares definidas por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

b) En ejes coordenados separados, trace las gráficas de las soluciones particulares que correspondan a las condiciones iniciales: $y(0) = -1$; $y(0) = 2$; $y(-1) = 4$; $y(-1) = -3$.

49. *a*) Encuentre una solución implícita del PVI:

$$(2y + 2)\,dy - (4x^3 + 6x)\,dx = 0, \quad y(0) = -3.$$

b) Use el inciso *a*) para encontrar una solución explícita $y = \phi(x)$ del PVI.

c) Considere su respuesta al inciso *b*) sólo como una *función*. Utilice una herramienta de graficación o un CAS para trazarla, y después use la gráfica para calcular su dominio.

d) Con ayuda de la aplicación búsqueda de raíces de un CAS, determine el intervalo I de definición más largo aproximado de la *solución* $y = \phi(x)$ calculada en el inciso *b*). Utilice una herramienta de graficación o un CAS para trazar en este intervalo la curva solución para el PVI.

50. *a*) Utilice un CAS y el concepto de curvas de nivel para trazar las gráficas representativas de los miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1 - x)}{y(-2 + y)}$. Experimente con diferentes cantidades

de curvas de nivel, así como con diversas regiones rectangulares en el plano xy hasta que su resultado se parezca a la **FIGURA 2.2.6**.

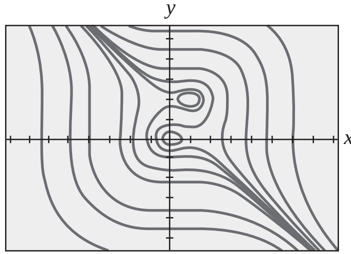


FIGURA 2.2.6 Curvas de nivel para el problema 50

b) En ejes coordenados separados, trace la gráfica de la solución implícita que corresponda a la condición inicial $y(0) = \frac{3}{2}$. Utilice un lápiz de color para definir aquel segmento de la gráfica que corresponda a la curva solución de una solución ϕ que satisfaga la condición inicial. Con ayuda de una aplicación para localizar raíces de un CAS, determine el intervalo de definición I más largo aproximado de la solución ϕ. [*Sugerencia:* Primero encuentre los puntos sobre la curva del inciso *a*) donde la tangente sea vertical.]

c) Repita el inciso *b*) para la condición inicial $y(0) = -2$.

2.3 Ecuaciones lineales

■ **Introducción** Continuamos con nuestra búsqueda de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo que examinaremos las ecuaciones lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales son una familia de ecuaciones diferenciales especialmente "amistosa" en cuanto a que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de orden superior, siempre hay una buena posibilidad de encontrar alguna clase de solución de la ecuación que podamos considerar.

■ **Una definición** La forma de una ED lineal de primer orden se presentó en la ecuación (7) de la sección 1.1. Esta forma, el caso en que $n = 1$ en la expresión (6) de esa sección, se reproduce aquí por comodidad.

Definición 2.3.1 Ecuación lineal

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y.

Cuando $g(x) = 0$, se dice que la ecuación lineal (1) es **homogénea**; de lo contrario, es **no homogénea**.

■ **Forma estándar** Al dividir ambos lados de (1) entre el primer coeficiente $a_1(x)$ obtenemos una forma todavía más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2}$$

Buscamos una solución de (2) sobre un intervalo I para el cual ambas funciones, P y f, sean continuas.

En el análisis siguiente, ilustramos una propiedad y un procedimiento y finalizamos con una fórmula representativa de la forma que toda solución de (2) debe tener. Pero más que la fórmula, la propiedad y el procedimiento son importantes, pues estos dos conceptos se aplican también a las ecuaciones lineales de orden superior.

■ **La propiedad** La ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución es la **suma** de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

y y_p es una solución particular de la ecuación (2) no homogénea. Para apreciar esto, observe

$$\frac{d}{dx}[y_c + y_p] + P(x)[y_c + y_p] = \underbrace{\left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right]}_{0} + \underbrace{\left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right]}_{f(x)} = f(x).$$

La ED homogénea La ecuación homogénea (3) también es separable. Este hecho nos permite encontrar y_c si escribimos (3) como

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$$

e integramos. Al resolver para y se tiene $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por conveniencia, establezcamos $y_c = cy_1(x)$, donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. El hecho es que $dy_1/dx + P(x)y_1 = 0$ será de utilidad después para determinar y_p.

La ED no homogénea Ahora podemos calcular una solución particular de la ecuación (2) mediante un procedimiento conocido como **variación de parámetros**. La idea básica es encontrar una función u de manera que $y_p = u(x)y_1(x) = u(x)\,e^{-\int P(x)dx}$ sea una solución de (2). En otras palabras, nuestro supuesto para y_p es el mismo que para $y_c = cy_1(x)$ salvo que c es reemplazada por el "parámetro variable" u. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (2) se tiene

$$\overset{\text{regla del producto}}{\overbrace{u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx}}} + P(x)uy_1 = f(x) \quad \text{o} \quad u\overset{\text{cero}}{\overbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}} + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

así que

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x).$$

Al separar las variables e integrarlas después se tiene

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \quad \text{y} \quad u = \int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx.$$

Con base en la definición de $y_1(x)$, vemos que $1/y_1(x) = e^{\int P(x)\,dx}$. Por lo tanto,

$$y_p = uy_1 = \left(\int\frac{f(x)}{y_1(x)}dx\right)e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx,$$

y

$$y = y_c + y_p = ce^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx. \tag{4}$$

En consecuencia, si (2) tiene una solución, debe ser de la forma (4). Por otro lado, comprobar que (4) constituye una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación (2) es un ejercicio fácil.

No se debe memorizar la fórmula dada en (4). Existe una forma equivalente pero más sencilla para resolver (2). Si (4) se multiplica por

$$e^{\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

y después

$$e^{\int P(x)\,dx}y = c + \int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx \tag{6}$$

se deriva,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x), \tag{7}$$

obtenemos

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = e^{\int P(x)\,dx}f(x). \tag{8}$$

Al dividir el último resultado entre $e^{\int P(x)\,dx}$ se obtiene (2).

Método de solución El método recomendado para resolver (2) consiste en realidad en (6)-(8) desarrollado en sentido inverso. En otras palabras, si (2) se multiplica por (5), se obtiene (8). El lado izquierdo de (8) se conoce como la derivada del producto de $e^{\int P(x)\,dx}$ por y.

Esto nos da (7). Después integramos ambos lados de (7) para obtener la solución (6). Debido a que podemos resolver (2) mediante la integración después de multiplicar por $e^{\int P(x)\,dx}$, esta función se conoce como **factor integrante** de la ecuación diferencial. Por conveniencia, resumimos estos resultados. Nuevamente, enfatizamos que no debe memorizar la fórmula (4), sino cada vez realizar el siguiente procedimiento.

Solución de una ecuación lineal de primer orden

i) Convierta una ecuación lineal de la forma (1) a la forma estándar (2), y después determine $P(x)$ y el factor integrante $e^{\int P(x)\,dx}$.

ii) Multiplique (2) por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y de y: escriba

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

y después integre ambos lados de esta ecuación.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial lineal

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6$.

Solución Esta ecuación lineal puede resolverse mediante separación de variables. Por otra parte, como la ecuación ya está en su forma estándar (2), vemos que el factor integrante es $e^{\int(-3)\,dx} = e^{-3x}$. Multiplicamos la ecuación por su factor y observamos que

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x} \quad \text{es lo mismo que} \quad \frac{d}{dx}\left[e^{-3x}y\right] = 6e^{-3x}.$$

Cuando se integran ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$. Así que una solución de la ecuación diferencial es $y = -2 + ce^{3x}$, $-\infty < x < \infty$. ≡

Cuando en la expresión (1) a_1, a_0 y g son constantes, la ecuación diferencial es autónoma. En el ejemplo 1, usted puede comprobar a partir de la forma $dy/dx = 3(y + 2)$ que -2 es un punto crítico y que es inestable y un repulsor. Así, una curva solución con un punto inicial por arriba o abajo de la gráfica de la solución de equilibrio $y = -2$ se aleja de esta línea horizontal conforme x aumenta.

Constante de integración En el análisis general y en el ejemplo 1 observe que hemos hecho caso omiso de una constante de integración al evaluar la integral indefinida en el exponente de $e^{\int P(x)dx}$. Si recuerda las leyes de los exponentes y el hecho de que el factor integrante multiplica ambos lados de la ecuación diferencial, podrá estar en condiciones de responder por qué es innecesario escribir $\int P(x)dx + c$. Véase el problema 44 en los ejercicios 2.3.

Solución general Suponga de nuevo que en (2) las funciones P y f son continuas en un intervalo común I. En los pasos que llevan a (4) mostramos que *si* (2) tiene una solución en I, tal solución debe tener la forma dada en (4). Por el contrario, verificar que toda función de la forma dada en (4) es una solución de la ecuación diferencial (2) en I es un ejercicio de diferenciación sencillo. En otras palabras, (4) es una familia de soluciones de un solo parámetro de la ecuación (2) y *toda* solución de (2) definida en I es miembro de esta familia. En consecuencia, tenemos razones para denominar a (4) la **solución general** de la ecuación diferencial en el intervalo I. Ahora, al expresar (2) en la forma normal $y' = F(x, y)$ podemos identificar $F(x, y) = -P(x)y + f(x)$ y $\partial F/\partial y = -P(x)$. A partir de la continuidad de P y f en el intervalo I, se desprende que F y $\partial F/\partial y$ son también continuas en I. Con el teorema 1.2.1 como justificación, concluimos que existe una y sólo una solución para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9}$$

definido en *cierto* intervalo I_0 que contiene a x_0. Pero cuando x_0 está en I, encontrar una solución de (9) sólo es cuestión de encontrar un valor apropiado de c en (4); es decir, a cada x_0 en I le corresponde una c distinta. En otras palabras, el intervalo I_0 de existencia y unicidad expresado en el teorema 1.2.1 para el problema de valor inicial (9) es el intervalo entero I.

EJEMPLO 2 Solución general

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución Al dividir entre x obtenemos la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{10}$$

A partir de esta forma identificamos $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y observamos que P y f son continuas en $(0, \infty)$. Por lo tanto, el factor integrante es

podemos usar ln x en lugar de ln $|x|$ dado que $x > 0$

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aquí hemos usado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Ahora multiplicamos (10) por x^{-4},

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x, \quad \text{y obtenemos} \quad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

De la integración por partes se deduce que la solución general definida en $(0, \infty)$ es $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ o $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$. ≡

Salvo en el caso de que el primer coeficiente sea 1, la reformulación de la ecuación (1) en la forma estándar (2) requiere que se divida entre $a_1(x)$. Los valores de x para los cuales $a_1(x) = 0$ se denominan **puntos singulares** de la ecuación. Los puntos singulares son potencialmente problemáticos. Específicamente en (2), si $P(x)$ (formada al dividir $a_0(x)$ entre $a_1(x)$) es discontinua en un punto, la discontinuidad puede trasladarse a las soluciones de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 3 Solución general

Encuentre la solución general de $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

Solución Escribimos la ecuación diferencial en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \tag{11}$$

e identificamos $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua en $(-\infty, -3)$, en $(-3, 3)$ y en $(3, \infty)$, debemos resolver la ecuación en los intervalos primero y tercero. En estos intervalos el factor integrante es

$$e^{\int x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Después de multiplicar la forma estándar (11) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2 - 9}\,y\right] = 0 \quad \text{y al integrar resulta} \quad \sqrt{x^2 - 9}\,y = c.$$

Así, para $x > 3$ o $x < -3$, la solución general de la ecuación es $y = c/\sqrt{x^2 - 9}$. ≡

Observe en el ejemplo anterior que $x = 3$ y $x = -3$ son puntos singulares de la ecuación y que toda función incluida en la solución general $y = c/\sqrt{x^2 - 9}$ es discontinua en estos puntos. Por otro lado, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación diferencial dada en el ejemplo 2, pero la solución general $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ es digna de mencionar en cuanto a que toda función presente en esta familia de un parámetro es continua en $x = 0$ y está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y no sólo en $(0, \infty)$ como se expresa en la solución. No obstante, la familia $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ definida en $(-\infty, \infty)$ no se puede considerar como solución general de la ED, dado que el punto singular $x = 0$ sigue ocasionando un problema. Véase el problema 39 en los ejercicios 2.3.

EJEMPLO 4 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} + y = x, y(0) = 4$.

Solución La ecuación se encuentra en su forma estándar, y $P(x) = 1$ y $f(x) = x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. El factor integrante es $e^{\int dx} = e^x$ y, por lo tanto, al integrar

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = xe^x$$

se obtiene $e^x y = xe^x - e^x + c$. Resolver esta última ecuación para y produce la solución general $y = x - 1 + ce^{-x}$. Pero de la condición inicial se desprende que $y = 4$ cuando $x = 0$. Sustituir estos valores en la solución general resulta en $c = 5$. Por lo tanto, la solución del problema es

$$y = x - 1 + 5e^{-x}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

≡

Recuerde que la solución general de toda ecuación diferencial lineal de primer orden es una suma de dos soluciones especiales: y_c, la solución general de la ecuación homogénea asociada (3), y y_p, una solución particular de la ecuación no homogénea (2). En el ejemplo 4 identificamos $y_c = ce^{-x}$ y $y_p = x - 1$. La **FIGURA 2.3.1**, obtenida con ayuda de una herramienta de graficación, muestra a (12) junto con otras soluciones representativas de la familia $y = x - 1 + ce^{-x}$. Es interesante observar que conforme x se hace más grande, las gráficas de *todos* los miembros de la familia se acercan a la gráfica de $y_p = x - 1$, la cual se muestra en la figura 2.3.1. Esto se debe a que la contribución de $y_c = ce^{-x}$ a los valores de una solución se vuelve insignificante para valores crecientes de x. Decimos que $y_c = ce^{-x}$ es un **término transitorio** dado que $y_c \to 0$ cuando $x \to \infty$. Mientras que este comportamiento no es característico de todas las soluciones generales de ecuaciones lineales (véase el ejemplo 2), la noción de un transitorio muchas veces resulta importante en problemas aplicados.

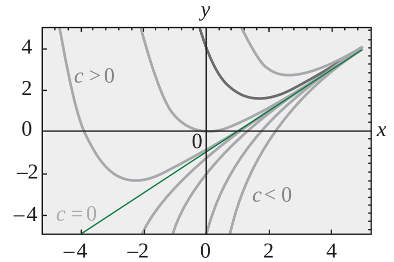


FIGURA 2.3.1 Algunas soluciones de la ED del ejemplo 4

Coeficientes discontinuos En aplicaciones, los coeficientes $P(x)$ y $f(x)$ incluidos en (2) pueden ser continuos por tramos. En el siguiente ejemplo, $f(x)$ es continuo por tramos en $[0, \infty)$ con una sola discontinuidad, es decir, una discontinuidad de salto (finita) en $x = 1$. Resolvemos el problema en dos partes correspondientes a los dos intervalos sobre los cuales f está definida. Entonces es posible agrupar las dos soluciones en $x = 1$ de manera que $y(x)$ sea continua en $[0, \infty)$.

EJEMPLO 5 Un problema de valor inicial

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), y(0) = 0$ donde $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

Solución La gráfica de la función discontinua f se muestra en la **FIGURA 2.3.2**. Resolvemos la ED para $y(x)$ primero en el intervalo $[0, 1]$ y después en el intervalo $(1, \infty)$. Para $0 \le x \le 1$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \frac{d}{dx}[e^x y] = e^x.$$

Al integrar esta última ecuación y resolver para y se tiene $y = 1 + c_1e^{-x}$. Dado que $y(0) = 0$, debemos tener $c_1 = -1$ y, por lo tanto, $y = 1 - e^{-x}$, $0 \le x \le 1$. Luego, para $x > 1$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

lleva a $y = c_2e^{-x}$. En consecuencia, podemos escribir

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ c_2e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

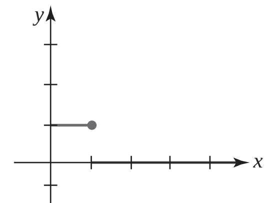


FIGURA 2.3.2 La $f(x)$ discontinua mencionada en el ejemplo 5

Si recurrimos a la definición de continuidad en un punto, es posible determinar c_2 de manera que la función anterior sea continua en $x = 1$. El requerimiento de que $\lim_{x\to 1^+} y(x) = y(1)$ implica que $c_2e^{-1} = 1 - e^{-1}$ o $c_2 = e - 1$. Como se ve en la **FIGURA 2.3.3**, la función

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases} \tag{13}$$

es continua en el intervalo $[0, \infty)$. ≡

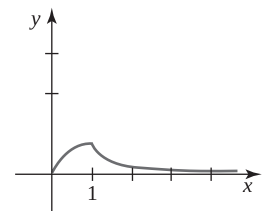


FIGURA 2.3.3 Gráfica de la función en (13) del ejemplo 5

Vale la pena considerar a (13) y a la figura 2.3.3 un poco más; le recomendamos leer y resolver el problema 42 en los ejercicios 2.3.

Funciones definidas por integrales Algunas funciones simples no poseen antiderivadas que sean funciones elementales, y las integrales de estas clases de funciones se llaman **no elementales**. Por ejemplo, quizá haya visto en cálculo que $\int e^{x^2}dx$ y $\int \text{sen}\, x^2 dx$ son integrales no elementales. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes están *definidas* en términos de integrales no elementales. Dos funciones de este tipo son la **función de error (erf)** y la **función de error complementaria (erfc)**:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \quad \text{y} \quad \text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt. \tag{14}$$

Dado que $(2/\sqrt{\pi})\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = 1$ a partir de (14) se observa que la función de error erf(x) y la función de error complementaria erfc(x) están relacionadas mediante erfc(x) + erfc$(x) = 1$. Debido a su importancia en áreas como probabilidad y estadística, la función de error se ha tabulado ampliamente. Observe que erf$(0) = 0$ es un valor funcional evidente. Los valores de erf(x) también se pueden encontrar mediante un CAS. Antes de trabajar en el siguiente ejemplo, se le recomienda volver a leer la sección *i*) del apartado *Comentarios* incluido al final de la sección 2.2.

EJEMPLO 6 La función de error

Resuelva el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,\ y(0) = 1$.

Solución Dado que la ecuación ya está en su forma estándar, vemos que el factor integrante es e^{-x^2}, y a partir de

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}] = 2e^{-x^2} \quad \text{obtenemos} \quad y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + ce^{x^2}. \tag{15}$$

Al aplicar $y(0) = 1$ a la última expresión se tiene que $c = 1$. Por lo tanto, la solución al problema es

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2} = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\,\text{erf}(x)].$$

La gráfica de esta solución, mostrada en la **FIGURA 2.3.4** entre otros miembros de la familia definida por (15), se obtuvo con ayuda de un sistema computacional de álgebra (CAS). ≡

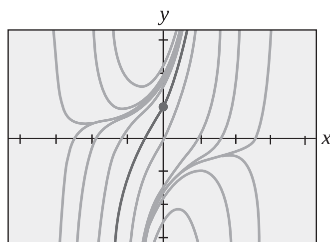


FIGURA 2.3.4 Algunas soluciones de la ED en el ejemplo 6

Uso de computadoras Algunos sistemas computacionales algebraicos son capaces de producir soluciones explícitas para ciertas clases de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, para resolver la ecuación $y' + 2y = x$, usamos los comandos de entrada

```
DSolve[y′[x] + 2 y[x] == x, y[x], x]          (en Mathematica)
y   dsolve(diff(y(x), x) + 2*y(x) = x, y(x));   (en Maple)
```

Traducido a símbolos estándar, el resultado de cada programa es

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + ce^{-2x}.$$

Comentarios

i) En ocasiones, una ecuación diferencial de primer orden no es lineal en una variable pero lo es en la otra. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

no es lineal en la variable y, pero su recíproco

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2$$

se reconoce como lineal en la variable x. Deberá verificarse que el factor integrante $e^{\int(-1)dy} = e^{-y}$ y la integración por partes produzcan una solución implícita de la primera ecuación: $x = -y^2 - 2y - 2 + ce^y$.

ii) Debido a que los matemáticos pensaron que eran descriptivas, "adoptaron" ciertas palabras empleadas en ingeniería y se las apropiaron. La palabra *transitorio*, usada antes en esta sección, es uno de esos términos. En análisis futuros, los términos *entrada* y *salida* aparecerán ocasionalmente. La función f incluida en la expresión (2) se llama **entrada** o **función impulsora**; una solución de la ecuación diferencial para determinada entrada se denomina **salida** o **respuesta**.

2.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 24, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada. Proporcione el intervalo más largo sobre el cual está definida la solución general. Determine si existe algún término transitorio en la solución general.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

4. $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$

5. $y' + 3x^2y = x^2$

6. $y' + 2xy = x^3$

7. $x^2y' + xy = 1$

8. $y' = 2y + x^2 + 5$

9. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

11. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

12. $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

13. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$

14. $xy' + (1 + x)y = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$

15. $y\,dx - 4(x + y^6)dy = 0$

16. $y\,dx = (ye^y - 2x)dy$

17. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 1$

18. $\cos^2 x \operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$

19. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

20. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

21. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$

22. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

23. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

24. $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

En los problemas 25 a 32, resuelva el problema de valor inicial dado. Proporcione el intervalo I más largo sobre el cual está definida la solución.

25. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

26. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

27. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E; \quad i(0) = i_0$, L, R, E e i_0 son constantes

28. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m); \quad T(0) = T_0$, K, T_m y T_0 son constantes

29. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

30. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$

31. $\left(\dfrac{e^{-2\sqrt{x}} - y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{dy} = 1, \quad y(1) = 1$

32. $(1 + t^2)\dfrac{dx}{dt} + x = \tan^{-1} t, \quad x(0) = 4$

[*Sugerencia:* En su solución sea $u = \tan^{-1} t$.]

En los problemas 33 a 36, siga el procedimiento del ejemplo 5 para resolver el problema de valor inicial dado. Use una herramienta de graficación para trazar la función continua $y(x)$.

33. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = f(x), y(0) = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

34. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), y(0) = 1$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

35. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x), y(0) = 2$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

36. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & -0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}$$

37. Proceda igual que en el ejemplo 5 para resolver el problema de valor inicial $y' + P(x)y = 4x$, $y(0) = 3$, donde

$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ -2/x, & x > 1. \end{cases}$$

Use una herramienta de graficación para trazar la función continua $y(x)$.

38. Considere el problema de valor inicial $y' + e^x y = f(x)$, $y(0) = 1$. Exprese la solución del PVI para $x > 0$ como una integral no elemental cuando $f(x) = 1$. ¿Cuál es la solución cuando $f(x) = 0$? ¿Y cuando $f(x) = e^x$?

39. Exprese la solución del problema de valor inicial $y' - 2xy = 1$, $y(1) = 1$, en términos de erf(x).

Problemas de análisis

40. Vuelva a leer el análisis que sigue al ejemplo 1. Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden para la cual todas las soluciones no constantes se acerquen a la asíntota horizontal $y = 4$ cuando $x \to \infty$.

41. Lea de nuevo el ejemplo 2 y después analice, con base en el teorema 1.2.1, la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial constituido por $xy' - 4y = x^6e^x$ y la condición inicial dada.

a) $y(0) = 0$

b) $y(0) = y_0$, $y_0 > 0$

c) $y(x_0) = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$

42. Vuelva a leer el ejemplo 3 y después encuentre la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-3, 3)$.

43. Lea otra vez el análisis que sigue al ejemplo 4. Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden para la cual todas las soluciones sean asintóticas con respecto a la línea $y = 3x - 5$ cuando $x \to \infty$.

44. Vuelva a leer el ejemplo 5 y después analice por qué es técnicamente incorrecto decir que la función expresada en (13) es una *solución* del PVI presente en el intervalo $[0, \infty)$.

45. *a*) Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $xy' + a_0(x)y = g(x)$ para la cual $y_c = c/x^3$ y $y_p = x^3$. Proporcione un intervalo en el cual $y = x^3 + c/x^3$ sea la solución general de la ecuación diferencial.

b) Proporcione una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para la ED encontrada en el inciso *a*) de manera que la solución del PVI sea $y = x^3 - 1/x^3$. Repita la operación si la solución es $y = x^3 + 2/x^3$. Proporcione un intervalo de definición I para cada una de estas soluciones. Grafique las curvas solución. ¿Hay algún problema de valor inicial cuya solución esté definida en $(-\infty, \infty)$?

c) ¿Cada PVI que se encuentra en el inciso *b*) es único? Es decir, ¿puede haber más de un PVI para el cual, digamos, $y = x^3 - 1/x^3$, x en algún intervalo I, sea la solución?

46. Al determinar el factor integrante (5), no usamos una constante de integración para evaluar $\int P(x)dx$. Explique por qué usar $\int P(x)dx + c$ no tiene efecto sobre la solución de (2).

47. Suponga que $P(x)$ es continua en algún intervalo I y que a es un número incluido en I. ¿Qué se puede decir acerca de la solución del problema de valor inicial $y' + P(x)y = 0$, $y(a) = 0$?

Modelos matemáticos

48. Series de decaimiento radiactivo El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en el estudio del decaimiento de un tipo especial de series de elementos radiactivos:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes. Analice cómo resolver este sistema sujeto a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Ponga en práctica sus ideas.

49. Marcapasos cardiaco Un marcapasos para el corazón consta de un interruptor, una batería de voltaje constante E_0, un capacitor con capacitancia constante C y el corazón como un resistor con resistencia constante R. Cuando el interruptor se cierra, el capacitor carga; cuando el interruptor se abre, el capacitor descarga, enviando un estímulo eléctrico al corazón. Durante el tiempo en que el corazón está siendo estimulado, el voltaje E que pasa por el corazón satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E.$$

Resuelva la ED sujeta a $E(4) = E_0$.

Tareas para el laboratorio de cómputo

50. *a*) Exprese la solución del problema de valor inicial $y' - 2xy = -1$, $y(0) = \sqrt{\pi}/2$, en términos de erfc(x).

b) Utilice tablas o un CAS para encontrar el valor de $y(2)$. Use un CAS para graficar la curva solución para el PVI $(-\infty, \infty)$.

51. *a*) La **función integral seno** se define mediante $\text{Si}(x) = \int_0^x (\text{sen}\, t/t)dt$, donde el integrando está definido como 1 en $t = 0$. Exprese la solución $y(x)$ del problema de valor inicial $x^3y' + 2x^2y = 10\,\text{sen}\, x$, $y(1) = 0$, en términos de Si(x).

b) Utilice un CAS para graficar la curva solución del PVI para $x > 0$.

c) Utilice un CAS para encontrar el valor del máximo absoluto de la solución $y(x)$ para $x > 0$.

52. *a*) La **integral seno de Fresnel** se define mediante $S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)dt$. Exprese la solución $y(x)$ del problema de valor inicial $y' - (\text{sen}\, x^2)y = 0$, $y(0) = 5$, en términos de $S(x)$.

b) Use un CAS para trazar la gráfica de la curva solución para el PVI sobre $(-\infty, \infty)$.

c) Se sabe que $S(x) \to \frac{1}{2}$ cuando $x \to \infty$ y $S(x) \to -\frac{1}{2}$ cuando $x \to -\infty$. ¿Hacia dónde se aproxima la solución $y(x)$ cuando $x \to \infty$? ¿Y cuando $x \to -\infty$?

d) Utilice un CAS para encontrar los valores del máximo absoluto y del mínimo absoluto de la solución $y(x)$.

2.4 Ecuaciones exactas

■ **Introducción** Aunque la ecuación diferencial simple $y dx + x dy = 0$ es separable, podemos resolverla de manera alternativa si reconocemos que el lado izquierdo es equivalente al diferencial del producto de x por y, es decir, $y dx + x dy = d(xy)$. Al integrar ambos lados de la ecuación obtenemos de inmediato la solución implícita $xy = c$.

■ **Diferencial de una función de dos variables** Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy, entonces su diferencial (también llamado diferencial total) es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{1}$$

Ahora, si $f(x, y) = c$, a partir de (1) se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \tag{2}$$

En otras palabras, dada una familia de curvas de un parámetro $f(x, y) = c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden al calcular el diferencial. Por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = c$, entonces (2) resulta en

$$(2x - 5y)\, dx + (-5x + 3y^2)\, dy = 0. \tag{3}$$

Para cumplir nuestros propósitos resulta más importante modificar el problema; es decir, dada una ED de primer orden como (3), ¿podemos reconocer que es equivalente al diferencial $d(x^2 - 5xy + y^3) = 0$?

Definición 2.4.1 Ecuación exacta

Una expresión diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es una **diferencial exacta** en una región R del plano xy si corresponde al diferencial de alguna función $f(x, y)$. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Por ejemplo, la ecuación $x^2y^3 dx + x^3y^2 dy = 0$ es exacta, debido a que el lado izquierdo es $d(\frac{1}{3}x^3y^3) = x^2y^3 dx + x^3y^2 dy$. Observe que si $M(x, y) = x^2y^3$ y $N(x, y) = x^3y^2$, entonces $\partial M/\partial y = 3x^2y^2 = \partial N/\partial x$. El teorema 2.4.1 muestra que la igualdad de estas derivadas parciales no es una coincidencia.

Teorema 2.4.1 Criterio para una diferencial exacta

Digamos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuos y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN Prueba de la necesidad

En aras de la sencillez, supongamos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y). Ahora, si la expresión $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es exacta, existe alguna función f de forma tal que para toda x en R,

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Por lo tanto, $$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad de las parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$. ≡

La parte de suficiencia del teorema 2.4.1 consiste en mostrar que existe una función f para la cual $\partial f/\partial x = M(x, y)$ y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que se cumpla (4). La construcción de la función f refleja en realidad un procedimiento básico para resolver ecuaciones exactas.

Método de solución Dada una ecuación de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, determine si se cumple la igualdad en (4). Si lo hace, entonces existe una función f para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y).$$

Podemos encontrar f al integrar $M(x, y)$ con respecto a x, mientras y se mantiene constante:

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y), \tag{5}$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora, al derivar (5) con respecto a y y suponer $\partial f/\partial y = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx + g'(y) = N(x, y).$$

Esto da $$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx. \tag{6}$$

Por último, integramos (6) con respecto a y y sustituimos el resultado en (5). La solución implícita de la ecuación es $f(x, y) = c$.

Aquí resulta pertinente apuntar algunas observaciones. Primero, es importante darse cuenta de que en (6) la expresión $N(x, y) - (\partial/\partial y) \int M(x, y)\, dx$ es independiente de x, debido a que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\, dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Segundo, también podríamos comenzar el procedimiento anterior con el supuesto de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Después de integrar N con respecto a y y diferenciar entonces ese resultado, encontraríamos los análogos de (5) y (6), respectivamente, como

$$f(x, y) = \int N(x,y)\, dy + h(x) \quad \text{y} \quad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)\, dy.$$

En cualquier caso, *ninguna de estas fórmulas debe memorizarse*.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resuelva $2xy\, dx + (x^2 - 1)\, dy = 0$.

Solución Con $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$ tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta y, en consecuencia, por el teorema 2.4.1, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos, después de integrar,

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Si tomamos la derivada parcial de la última expresión con respecto a y y establecemos el resultado igual a $N(x, y)$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1. \quad \leftarrow N(x, y)$$

Se deduce que $\quad g'(y) = -1 \quad$ y $\quad g(y) = -y.$

Por consiguiente, $f(x, y) = x^2y - y$, y así la solución de la ecuación en forma implícita es $x^2y - y = c$. Fácilmente puede advertirse que la forma explícita de la solución es $y = c/(1 - x^2)$ y está definida sobre cualquier intervalo que no contenga $x = 1$ ni $x = -1$. ≡

La solución de la ED del ejemplo 1 *no* es $f(x, y) = x^2 - y$, sino $f(x, y) = c$; o si utilizamos una constante en la integración de $g'(y)$, podremos escribir la solución como $f(x, y) = 0$. Observe, también, que la ecuación podría resolverse por separación de variables.

◀ Observe la forma de la solución. Es $f(x, y) = c$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resuelva $(e^{2y} - y \cos xy)\, dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)\, dy = 0.$

Solución La ecuación es exacta debido a que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy \operatorname{sen} xy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

De modo que existe una función $f(x, y)$ para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para variar, comenzaremos ahora con el supuesto de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$;

que es, $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}\, dy - x\int \cos xy\, dy + 2\int y\, dy.$$

Recuerde: la razón por la cual x puede aparecer frente al símbolo $\int$ es que, en la integración con respecto a y, se trata a x como una constante ordinaria. De esto se deriva

$$f(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy \quad \leftarrow M(x, y)$$

por lo tanto, $h'(x) = 0$ o $h(x) = c$. En consecuencia, una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0.$$ ≡

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$, $y(0) = 2$.

Solución Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\, dx + y(1 - x^2)\, dy = 0$$

reconocemos que la ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación implica que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$. Al integrar se obtiene

$$h(x) = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

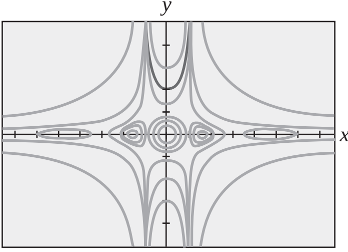


FIGURA 2.4.1 Algunas curvas solución presentes en la familia (7) del ejemplo 3

Por lo tanto, $\dfrac{y^2}{2}(1 - x^2) - \dfrac{1}{2}\cos^2 x = c_1$ o $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c,$ **(7)**

donde $2c_1$ se ha reemplazado por c. La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ demanda que $4(1) - \cos^2(0) = c$; por lo tanto, $c = 3$. Una solución implícita del problema será entonces $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3$.

La curva solución del PVI forma parte de una interesante familia de curvas y es la curva mostrada en la **FIGURA 2.4.1**. Las gráficas de los miembros de la familia de soluciones de un parámetro dadas en (7) pueden obtenerse de varias formas, dos de las cuales son: mediante programas computacionales para graficar las curvas de nivel, tal como se analizó en la sección anterior, o con una herramienta de graficación y trazando cuidadosamente las funciones explícitas obtenidas para diferentes valores de c al resolver $y^2 = (c + \cos^2 x)/(1 - x^2)$ para y. ≡

■ **Factores de integración** Recuerde que en la sección previa a ésta vimos que el lado izquierdo de la ecuación lineal $y' + P(x)y = f(x)$ puede transformarse en una derivada cuando multiplicamos la ecuación por un factor integrante. La misma idea básica funciona ocasionalmente para una ecuación diferencial inexacta $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Es decir, a veces podemos encontrar un **factor integrante** $\mu(x, y)$ de modo que después de multiplicar, el lado izquierdo de

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{8}$$

es una diferencial exacta. En un intento por encontrar μ recurrimos al criterio (4) para obtener mayor precisión. La ecuación (8) es exacta si, y sólo si, $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, donde los subíndices denotan derivadas parciales. Por la regla del producto de la diferenciación, la última ecuación es lo mismo que $\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N$ o

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu. \tag{9}$$

Aunque, M, N, M_y, N_x son funciones conocidas de x y y, la dificultad para determinar la $\mu(x, y)$ incógnita a partir de (9) estriba en que necesitaremos resolver una ecuación diferencial parcial. Dado que no estamos preparados para hacerlo, elaboraremos un supuesto de simplificación. Suponga que μ es una función de una variable, digamos que μ depende sólo de x. En este caso $\mu_x = du/dx$ y (9) pueden escribirse como

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{10}$$

Aún seguimos en una situación sin solución si el cociente $(M_y - N_x)/N$ depende tanto de x como de y. No obstante, si después de efectuar todas las simplificaciones algebraicas evidentes resulta que el cociente $(M_y - N_x)/N$ depende sólo de la variable x, entonces (10) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Podemos finalmente determinar que μ (10) es *separable* y *lineal*. De las secciones 2.2 o 2.3 se deriva que $\mu(x) = e^{\int((M_y - N_x)/N)dx}$. Igualmente, de (9) se deduce que si μ depende sólo de la variable y, entonces

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{11}$$

En este caso, si $(N_x - M_y)/M$ es una función de y sólo entonces podremos resolver (11) para μ.

Resumimos los resultados para la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{12}$$

- Si $(M_y - N_x)/N$ es una función sólo de x, entonces un factor integrante para la ecuación (11) es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}. \tag{13}$$

- Si $(N_x - M_y)/M$ es una función sólo de y, entonces un factor integrante para la ecuación (11) es

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}. \tag{14}$$

EJEMPLO 4 Una ecuación diferencial no exacta convertida en exacta

La ecuación diferencial no lineal de primer orden $xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$ no es exacta. Con las identificaciones $M = xy$, $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$ encontramos las derivadas parciales $M_y = x$ y $N_x = 4x$. El primer cociente de (13) no nos lleva a ningún lado puesto que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

depende de x y de y. No obstante, (14) produce un cociente que depende sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}.$$

El factor integrante será entonces $e^{\int 3dy/y} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$. Después de multiplicar la ED dada por $\mu(y) = y^3$ la ecuación resultante es

$$xy^4 dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0.$$

El estudiante deberá verificar que ahora la última ecuación sea exacta y mostrar, aplicando el método introducido en esta sección, que una familia de soluciones es $\frac{1}{2}x^2x^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c$. ≡

Comentarios

i) Cuando compruebe la exactitud de una ecuación, asegúrese de que ésta es de la forma precisa $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Algunas veces, una ecuación diferencial se escribe como $G(x, y)\,dx = H(x, y)\,dy$. En este caso, primero escríbala de nuevo como $G(x, y)\,dx - H(x, y)\,dy = 0$, y después identifique $M(x, y) = G(x, y)$ y $N(x, y) = -H(x, y)$ antes de usar (4).

ii) En algunos textos sobre ecuaciones diferenciales, el estudio de las ecuaciones exactas es anterior al de las ecuaciones diferenciales lineales. Si esto fuera así, el método para encontrar factores de integración que se acaba de analizar se puede usar para derivar un factor integrante para $y' + P(x)y = f(x)$. Al volver a escribir la última ecuación en la forma diferencial $(P(x)y - f(x))\,dx + dy = 0$ vemos que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x).$$

A partir de (13) llegamos al factor integrante ya conocido $e^{\int P(x)\,dx}$ y usado en la sección 2.3.

2.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 20, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\text{sen}\, y - y\,\text{sen}\, x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\,\text{sen}\, 3x = 0$
7. $(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(x - y^3 + y^2\,\text{sen}\, x)\,dx = (3xy^2 + 2y\cos x)\,dy$

10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

11. $\left(y\ln y - e^{-xy}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} + x\ln y\right)dy = 0$

12. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $\left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{3}{x} - 1$

15. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

17. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

18. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

19. $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$

20. $\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \dfrac{t}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los ejercicios 21 a 26, resuelva el problema de valor inicial dado.

21. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

22. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0, \quad y(0) = 1$

23. $(4y + 2t - 5)\,dt + (6y + 4t - 1)\,dy = 0, \quad y(-1) = 2$

24. $\left(\dfrac{3y^2 - t^2}{y^5}\right)\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{t}{2y^4} = 0, \quad y(1) = 1$

25. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0,$
$y(0) = e$

26. $\left(\dfrac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x), \quad y(0) = 1$

En los problemas 27 y 28, encuentre el valor de k de manera que la ecuación diferencial dada sea exacta.

27. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

28. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

En los problemas 29 y 30, compruebe que la ecuación diferencial dada no sea exacta. Multiplique la ecuación diferencial dada por el factor integrante indicado $\mu(x, y)$ y verifique si la nueva ecuación es exacta. Resuelva.

29. $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)\,dx + 2x \cos x\,dy = 0;$
$\mu(x, y) = xy$

30. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0; \;\; \mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

En los problemas 31 a 36 resuelva la ecuación diferencial dada encontrando, como en el ejemplo 4, un factor integrante apropiado.

31. $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

32. $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$

33. $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0$

34. $\cos x\,dx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right)\operatorname{sen} x\,dy = 0$

35. $(10 - 6y + e^{-3x})\,dx - 2\,dy = 0$

36. $(y^2 + xy^3)\,dx + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

En los ejercicios 37 y 38, resuelva el problema de valor inicial dado encontrando, como en el ejemplo 4, un factor integrante adecuado.

37. $x\,dx + (x^2y + 4y)\,dy = 0, \quad y(4) = 0$

38. $(x^2 + y^2 - 5)\,dx = (y + xy)\,dy, \quad y(0) = 1$

39. ***a***) Demuestre que una familia de soluciones uniparamétrica de soluciones de la ecuación

$$(4xy + 3x^2)\,dx + (2y + 2x^2)\,dy = 0$$

es $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.

b) Demuestre que las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(1) = 1$ determinan la misma solución implícita.

c) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial dada en el inciso *a*), de manera que $y_1(0) = -2$ y $y_2(1) = 1$. Use una herramienta de graficación para trazar $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

≡ Problemas de análisis

40. Considere el concepto del factor integrante usado en los problemas 29 a 38. ¿Las dos ecuaciones $M\,dx + N\,dy = 0$ y $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ son necesariamente equivalentes en el sentido de que la solución de una es también solución de la otra? Analice.

41. Vuelva a revisar el ejemplo 3 y después analice por qué podemos concluir que el intervalo de definición de la solución explícita del PVI (la curva de la figura 2.4.1) es $(-1, 1)$.

42. Analice cómo se pueden encontrar las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ de manera que cada ecuación diferencial sea exacta. Ponga en práctica sus ideas.

a) $M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$

b) $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \dfrac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0$

43. Algunas veces las ecuaciones diferenciales se resuelven gracias a una idea ingeniosa. Aquí le presentamos un pequeño ejercicio de ingenio: aunque la ecuación diferencial

$$\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + y\,dy = 0$$

no es exacta, demuestre la forma en que el reacomodo $(x\,dx + y\,dy)/\sqrt{x^2 + y^2} = dx$ y la observación $\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = x\,dx + y\,dy$ pueden llevarnos a resolverla.

44. Verdadero o falso: toda ecuación separable de primer orden $dy/dx = g(x)h(y)$ es exacta.

≡ Modelo matemático

45. **Cadena que cae** Un segmento de una cadena uniforme de 8 ft de longitud está enredado holgadamente alrededor de una clavija situada a la orilla de una plataforma horizontal elevada, y la parte restante de la cadena cuelga en reposo sobre la orilla de la plataforma. Véase la **FIGURA 2.4.2**. Suponga que la longitud de la cadena colgante es de 3 ft, que la cadena pesa 2 lb/ft, y que la dirección positiva es hacia abajo. En $t = 0$ segundos, el peso de la porción colgante ocasiona que sobre la plataforma la cadena se desenrolle suavemente y caiga hacia el piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena colgante que sobresale de la plataforma en el momento $t > 0$, entonces su velocidad es $v = dx/dt$. Cuando se ignoran todas las fuer-

zas resistivas, es posible demostrar que un modelo matemático que relaciona a v con x está dado por

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x.$$

a) Vuelva a escribir este modelo en la forma diferencial. Proceda como en los problemas 31 a 36 y resuelva la ED para v en términos de x encontrando un factor integrante adecuado. Encuentre una solución explícita $v(x)$.
b) Determine la velocidad a la cual la cadena abandona la plataforma.

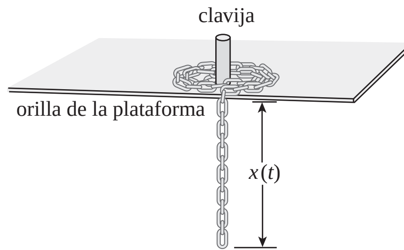


FIGURA 2.4.2 Cadena que se desenrolla, problema 45

Tareas para el laboratorio de cómputo

46. ***a***) La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \left[1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dy = 0$$

es una familia de curvas que se pueden interpretar como **líneas de corriente** de un flujo de fluido en torno a un objeto circular cuyo límite está descrito por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva esta ED y observe que la solución es $f(x, y) = c$ para $c = 0$.

b) Use un CAS para trazar las líneas de corriente para $c = 0$, ±0.2, ±0.4, ±0.6 y ±0.8 en tres formas diferentes. Primero, use la **curva del contorno** de un CAS. Segundo, resuelva para x en términos de la variable y; trace las dos funciones de y resultantes para los valores dados de c, y entonces combine las gráficas. Tercero, use el CAS para resolver una ecuación cúbica para y en términos de x.

2.5 Soluciones por sustitución

Introducción Por lo general, resolvemos una ecuación diferencial al reconocerla como cierto tipo de ecuación (digamos, separable) y llevando a cabo entonces un procedimiento, constituido por pasos matemáticos específicos para la ecuación, que produzca una función que satisfaga la ecuación. Muchas veces, el primer paso para resolver una ecuación diferencial determinada consiste en transformarla en otra ecuación diferencial mediante una **sustitución**. Por ejemplo, suponga que deseamos transformar la ecuación de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ mediante la sustitución de $y = g(x, u)$, donde u se considera como una función de la variable x.

Si g posee primeras derivadas parciales, entonces la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}.$$

Al reemplazar dy/dx por $f(x, y)$ y y por $g(x, u)$ en la derivada anterior, obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$f(x, g(x, u)) = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx},$$

que, después de resolver para du/dx, tiene la forma $du/dx = F(x, u)$. Si podemos determinar una solución $u = \phi(x)$ de esta segunda ecuación, entonces una solución de la ecuación diferencial original es $y = g(x, \phi(x))$.

Ecuaciones homogéneas Si una función f posee la propiedad $f(tx, ty) = t^{\alpha}f(x, y)$ para algún número real α, entonces se dice que f es una **función homogénea** de grado α. Por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ es considerada no homogénea. Una ED de primer orden escrita en la forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se dice que es **homogénea** si ambos coeficientes M y N son funciones homogéneas del *mismo* grado. En otras palabras, (1) es homogénea si

$$M(tx, ty) = t^{\alpha}M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^{\alpha}N(x, y).$$

Una ecuación diferencial lineal de primer orden ED $a_1y' + a_0y = g(x)$ es homogénea cuando $g(x) = 0$.

Aquí la palabra "homogénea" no significa lo mismo que cuando se aplicó a las ecuaciones diferenciales lineales. Véanse las secciones 2.3 y 3.1.

Si M y N son funciones homogéneas de grado α, también podemos escribir

$$M(x, y) = x^{\alpha}M(1, u) \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^{\alpha}N(1, u) \quad \text{donde } u = y/x, \tag{2}$$

y

$$M(x, y) = y^{\alpha}M(v, 1) \quad \text{y} \quad N(x, y) = y^{\alpha}N(v, 1) \quad \text{donde } v = x/y. \tag{3}$$

Véase el problema 31 en los ejercicios 2.5. Las propiedades (2) y (3) sugieren las sustituciones que se pueden emplear para resolver una ecuación diferencial homogénea. En específico, *cualquiera* de las dos sustituciones $y = ux$ o $x = vy$, donde u y v sean nuevas variables dependientes, reducirá una ecuación homogénea a una ecuación diferencial *separable* de primer orden. Para demostrar esto observe que, como una consecuencia de (2), una ecuación homogénea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se puede volver a escribir como

$$x^{\alpha}M(1, u)\,dx + x^{\alpha}N(1, u)\,dy = 0 \quad \text{o} \quad M(1, u)\,dx + N(1, u)\,dy = 0,$$

donde $u = y/x$ o $y = ux$. Al sustituir el diferencial $dy = udx + xdu$ en la última ecuación y acomodar términos, obtenemos una ED separable en las variables u y x:

$$M(1, u)\,dx + N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

$$[M(1, u) + uN(1, u)]\,dx + xN(1, u)\,du = 0$$

o

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\,du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

Nos apresuramos a señalar que la fórmula anterior no debe memorizarse; en vez de eso, *el procedimiento debe realizarse en cada ocasión*. La prueba de que las sustituciones $x = vy$ y $dx = vdy + ydv$ también llevan a una ecuación separable se sigue en forma semejante a partir de (3).

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial homogénea

Resuelva $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

Solución La inspección de $M(x, y) = x^2 + y^2$ y $N(x, y) = x^2 - xy$ muestra que estos coeficientes son funciones homogéneas de grado 2. Si establecemos $y = ux$, entonces $dy = u\,dx + x\,du$, por lo que, después de sustituir, la ecuación dada se convierte en

$$(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] = 0$$

$$x^2(1 + u)\,dx + x^3(1 - u)\,du = 0$$

$$\frac{1 - u}{1 + u}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0. \quad \leftarrow \text{división larga}$$

Luego de la integración, la última línea da

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|. \quad \leftarrow \text{al volver a sustituir } u = y/x$$

Mediante las propiedades logarítmicas, podemos escribir la solución anterior como

$$\ln\left|\frac{(x + y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad (x + y)^2 = cxe^{y/x}.$$

≡

Aunque cualquiera de las sustituciones indicadas puede usarse para toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica intentamos con $x = vy$ siempre que la función $M(x, y)$ sea más simple que $N(x, y)$. También podría suceder que, después de usar una sustitución, nos podamos encontrar con integrales difíciles o imposibles de evaluar en forma cerrada; alternar sustituciones puede dar como resultado un problema fácil.

Ecuación de Bernoulli La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{4}$$

donde n es cualquier número real, se llama **ecuación de Bernoulli**. Observe que para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (4) es lineal. Para $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma (4) a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial de Bernoulli

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

Solución Primero escribimos de nuevo la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

al dividir entre x. Con $n = 2$, sustituimos luego $y = u^{-1}$ y

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena}$$

en la ecuación dada y simplificamos. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, digamos, $(0, \infty)$ es

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}.$$

Al integrar

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}u] = -1$$

se tiene $x^{-1}u = -x + c$ o $u = -x^2 + cx$. Como $u = y^{-1}$ tenemos $y = 1/u$, y entonces una solución de la ecuación dada es $y = 1/(-x^2 + cx)$. ≡

Observe que no hemos obtenido la solución general de la ecuación diferencial original no lineal planteada en el ejemplo 2, puesto que $y = 0$ es una solución singular de la ecuación.

Reducción para separación de variables Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{5}$$

siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables mediante sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. El ejemplo 3 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 + 7, \quad y(0) = 0.$

Solución Si establecemos $u = -2x + y$, entonces $du/dx = -2 + dy/dx$, y así la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7 \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

La última ecuación es separable. Si usamos fracciones parciales,

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx \quad \text{o} \quad \frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] du = dx$$

e integramos, resulta

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1 \quad \text{o} \quad \frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \qquad \leftarrow \text{reemplace } e^{6c_1} \text{ por } c$$

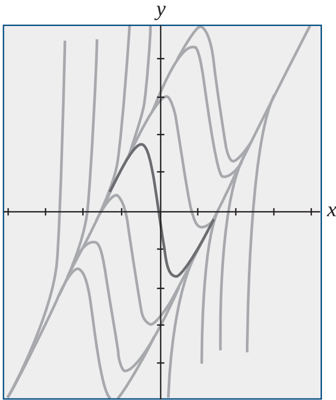


FIGURA 2.5.1 Algunas soluciones de ED en el ejemplo 3

Al resolver la última ecuación para u y después volver a sustituir se obtiene la solución

$$u = \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}} \quad \text{o} \quad y = 2x + \frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}. \tag{6}$$

Por último, al aplicar la condición inicial $y(0) = 0$ a la última ecuación de (6) resulta $c = -1$. Con ayuda de una herramienta de graficación, en la **FIGURA 2.5.1** mostramos la gráfica de la solución particular

$$y = 2x + \frac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}$$

en gris oscuro junto con las gráficas de algunos otros miembros de la familia de soluciones (6). ≡

2.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 14, cada ED es homogénea.

En los problemas 1 a 10, resuelva cada ecuación diferencial mediante una sustitución apropiada.

1. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$

2. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$

3. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$

4. $y\,dx = 2(x + y)\,dy$

5. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$

6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

9. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2},\ x > 0$

En los ejercicios 11 a 14, resuelva el problema de valor inicial dado.

11. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\ y(1) = 2$

12. $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy,\ y(-1) = 1$

13. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

14. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = e$

En los problemas 15 a 22, cada ED es una ecuación de Bernoulli.

En los problemas 15 a 20, resuelva cada ecuación diferencial mediante una sustitución apropiada.

15. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

16. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

18. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

19. $t^2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$

20. $3(1 + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

En los ejercicios 21 y 22, resuelva el problema de valor inicial dado.

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$

22. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

En los problemas 23 a 30, cada ED es de la forma presentada en la expresión (5) de esta sección.

En los problemas 23 a 28, resuelva cada ecuación diferencial mediante la sustitución apropiada.

23. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

28. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

En 29 y 30, resuelva el problema de valor inicial dado.

29. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y), \quad y(0) = \pi/4$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \quad y(-1) = -1$

Problemas de análisis

31. Explique por qué siempre es posible expresar cualquier ecuación diferencial homogénea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Podría usted empezar demostrando que

$$M(x, y) = x^{\alpha}M(1, y/x) \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^{\alpha}N(1, y/x).$$

32. Escriba la ecuación diferencial homogénea

$$(5x^2 - 2y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

en la forma dada en el problema 31.

33. ***a)*** Determine dos soluciones singulares para la ED del problema 10.

b) Si la condición inicial $y(5) = 0$ es como se establece en el problema 10, entonces ¿cuál será el intervalo más largo I sobre el cual se define la solución? Use una herramienta de graficación para trazar la curva solución del problema de valor inicial.

34. En el ejemplo 3, la solución $y(x)$ se vuelve ilimitada cuando $x \to \pm\infty$. No obstante, $y(x)$ es asintótica con respecto a una curva cuando $x \to -\infty$ y con respecto a una curva diferente cuando $x \to \infty$. Encuentre las ecuaciones de esas curvas.

35. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

se conoce como **ecuación de Riccati**.

a) Una ecuación de Riccati se puede resolver mediante la sucesión de dos sustituciones *siempre y cuando* conozcamos una solución particular y_1 de la ecuación. Demuestre que la sustitución $y = y_1 + u$ reduce la ecuación de Ricatti a una ecuación de Bernoulli (4) con $n = 2$. La ecuación de Bernoulli puede reducirse entonces a una ecuación lineal mediante la sustitución de $w = u^{-1}$.

b) Encuentre una familia de soluciones de un parámetro para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,$$

donde $y_1 = 2/x$ sea una solución conocida de la ecuación.

36. Diseñe una sustitución adecuada para resolver

$$xy' = y\ln(xy).$$

Modelos matemáticos

37. Cadena que cae En el problema 45 de los ejercicios 2.4, vimos que un modelo matemático apropiado para calcular la velocidad v de una cadena que se resbala por la orilla de una plataforma horizontal elevada es

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x.$$

En ese problema se le pidió a usted que resolviera la ED convirtiéndola en una ecuación exacta mediante un factor integrante. Esta vez, resuelva la ED suponiendo que se trata de una ecuación de Bernoulli.

38. Crecimiento poblacional En el estudio de la dinámica poblacional, uno de los modelos más famosos de una población creciente pero acotada es la **ecuación logística**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde a y b son constantes positivas. Aunque regresaremos a esta ecuación y la resolveremos con un método alternativo en la sección 3.2, resuélvala esta primera vez considerando que se trata de una ecuación de Bernoulli.

2.6 Un método numérico

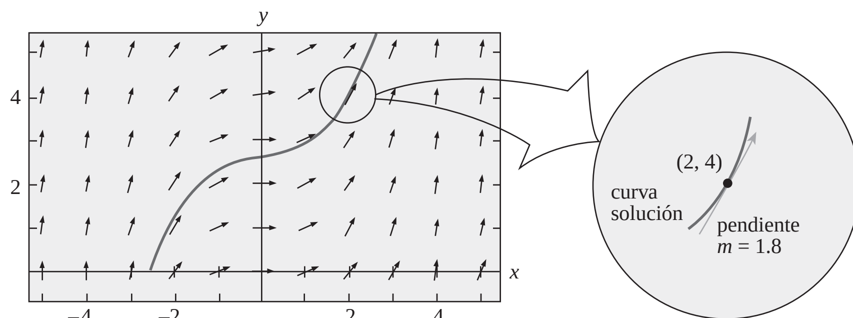
Introducción En la sección 2.1 vimos que es posible recabar información *cualitativa* a partir de una ecuación diferencial de primer orden, en lo que respecta a sus soluciones, incluso antes de intentar resolverla. En las secciones 2.2 a 2.5 examinamos ecuaciones diferenciales de primer orden de *manera analítica*, es decir, desarrollamos procedimientos para obtener soluciones explícitas e implícitas reales. Pero muchas ecuaciones diferenciales poseen soluciones imposibles de obtener analíticamente. En estos casos, "resolvemos" la ecuación diferencial de *manera numérica*; esto significa usar la ED como base de un algoritmo para *aproximar* la solución desconocida. Es práctica común referirse al algoritmo como un *método numérico*, a la solución aproximada como una *solución numérica* y a la gráfica de una solución numérica como una *curva solución numérica*.

En esta sección sólo vamos a considerar los métodos numéricos más simples. En el capítulo 6 presentaremos un extenso tratamiento del tema.

Uso de la línea tangente Supongamos que el problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

posee una solución. Una de las técnicas más simples para aproximar esta solución es usar líneas tangentes. Por ejemplo, digamos que $y(x)$ representa la solución desconocida del problema de valor inicial de primer orden $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$. No es posible resolver directamente la ecuación diferencial no lineal aplicando los métodos considerados en las secciones 2.2, 2.4 y 2.5; sin embargo, aún podemos encontrar valores numéricos aproximados de la función $y(x)$ desconocida. Específicamente, suponga que deseamos saber el valor de $y(2.5)$. El PVI tiene una solución y, como lo sugiere el flujo del campo de direcciones en la **FIGURA 2.6.1*a*)**, una curva solución debe tener una forma similar a la curva mostrada.



a) Campo de direcciones para $y \geq 0$

b) Elemento lineal en (2, 4)

FIGURA 2.6.1 Ampliación de las inmediaciones del punto (2, 4)

El campo de direcciones de la figura 2.6.1*a*) se generó de manera que los elementos lineales atraviesan los puntos de una cuadrícula con coordenadas enteras. A medida que la curva solución atraviesa el punto inicial (2, 4), en este punto el elemento lineal es una línea tangente con la pendiente dada por $f(2, 4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8$. Como puede verse en la figura 2.6.1*a*) y en el "acercamiento" mostrado en la figura 2.6.1*b*), cuando x se acerca a 2 los puntos ubicados en la curva solución se acercan a los puntos localizados sobre la línea tangente (el elemento lineal). Usando el punto (2, 4), la pendiente $f(2, 4) = 1.8$ y la forma punto-pendiente de una línea, encontramos que una ecuación de la línea tangente es $y = L(x)$, donde $L(x) = 1.8x + 0.4$. Esta última ecuación, llamada **linealización** de $y(x)$ en $x = 2$, se puede usar para aproximar valores $y(x)$ localizados en las inmediaciones de $x = 2$. Si $y_1 = L(x_1)$ denota el valor de una coordenada y sobre la línea tangente y $y(x_1)$ es la coordenada y en la curva solución correspondiente a una coordenada x x_1 que es cercana a $x = 2$, entonces $y(x_1) \approx y_1$. Si elegimos, digamos, $x_1 = 2.1$, entonces $y_1 = L(2.1) = 1.8(2.1) + 0.4 = 4.18$ y, por lo tanto, $y(2.1) \approx 4.18$.

Método de Euler Para generalizar el procedimiento que acabamos de ilustrar, usamos la linealización de la solución desconocida $y(x)$ de (1) en $x = x_0$:

$$L(x) = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0. \tag{2}$$

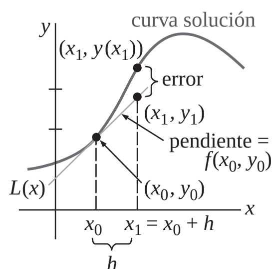


FIGURA 2.6.2 Aproximación de $y(x_1)$ mediante una línea tangente

La gráfica de esta linealización es una línea recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0). Ahora hacemos que h sea un incremento positivo del eje x, como indica la **FIGURA 2.6.2**. Entonces, al reemplazar x por $x_1 = x_0 + h$ en (2), obtenemos

$$L(x_1) = f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + y_0 \quad \text{o} \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

donde $y_1 = L(x_1)$. En la línea tangente, el punto (x_1, y_1) es una aproximación al punto $(x_1, y(x_1))$ ubicado sobre la curva solución. Por supuesto, la exactitud de la aproximación $y_1 \approx y(x_1)$ depende en gran medida del tamaño del incremento h. Por lo general, debemos elegir este **tamaño del paso** para ser "razonablemente pequeño". Ahora repetimos el proceso mediante una segunda "línea tangente" en (x_1, y_1).* En el análisis anterior, al reemplazar (x_0, y_0) con un nuevo punto de inicio (x_1, y_1) obtenemos una aproximación $y_2 \approx y(x_2)$ correspondiente a dos pasos de longitud h desde x_0, es decir, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$ y

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

* Ésta no es una línea tangente real dado que (x_1, y_1) descansa sobre la primera tangente y no en la curva solución.

Si continuamos de esta forma, veremos que $y_1, y_2, y_3 \ldots$, pueden definirse de manera recursiva mediante la fórmula general

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{3}$$

donde $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Este procedimiento de usar "líneas tangentes" sucesivas se denomina **método de Euler**.

TABLA 2.6.1 $h = 0.1$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.10	4.1800
2.20	4.3768
2.30	4.5914
2.40	4.8244
2.50	5.0768

TABLA 2.6.2 $h = 0.05$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.05	4.0900
2.10	4.1842
2.15	4.2826
2.20	4.3854
2.25	4.4927
2.30	4.6045
2.35	4.7210
2.40	4.8423
2.45	4.9686
2.50	5.0997

EJEMPLO 1 Método de Euler

Considere el problema de valor inicial $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$. Aplique el método de Euler para obtener una aproximación a $y(2.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

Solución Con la identificación $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h(0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2).$$

Entonces, para $h = 0.1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $n = 0$, encontramos

$$y_1 = y_0 + h(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2) = 4 + 0.1(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2) = 4.18,$$

la cual, como ya vimos, es una estimación del valor de $y(2.1)$. No obstante, si usamos el tamaño del paso mínimo $h = 0.05$, toma dos pasos llegar a $x = 2.1$. De

$$y_1 = 4 + 0.05(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2) = 4.09$$

$$y_2 = 4.09 + 0.05(0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2) = 4.18416187$$

tenemos $y_1 \approx y(2.05)$ y $y_2 \approx y(2.1)$. El resto de los cálculos se llevó a cabo mediante un programa de cómputo; los resultados se resumen en las tablas 2.6.1 y 2.6.2. En estas tablas vemos que toma cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$, respectivamente, llegar a $x = 2.5$. También, cada entrada debe redondearse a cuatro lugares decimales. ≡

En el ejemplo 2 aplicamos el método de Euler a una ecuación diferencial para la cual ya hemos encontrado una solución. Hacemos esto para comparar los valores de las aproximaciones y_n determinados en cada paso con los valores reales de la solución $y(x_n)$ del problema de valor inicial.

EJEMPLO 2 Comparación entre valores exactos y aproximados

Considere el problema de valor inicial $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Aplique el método de Euler para obtener una aproximación a $y(1.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

Solución Con la identificación $f(x, y) = 0.2xy$, (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_n y_n),$$

donde $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$. Una vez más, con ayuda de un programa de cómputo obtenemos los valores presentados en las tablas 2.6.3 y 2.6.4.

TABLA 2.6.3 $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.0200	1.0212	0.0012	0.12
1.20	1.0424	1.0450	0.0025	0.24
1.30	1.0675	1.0714	0.0040	0.37
1.40	1.0952	1.1008	0.0055	0.50
1.50	1.1259	1.1331	0.0073	0.64

TABLA 2.6.4 $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.0100	1.0103	0.0003	0.03
1.10	1.0206	1.0212	0.0006	0.06
1.15	1.0318	1.0328	0.0009	0.09
1.20	1.0437	1.0450	0.0013	0.12
1.25	1.0562	1.0579	0.0016	0.16
1.30	1.0694	1.0714	0.0020	0.19
1.35	1.0833	1.0857	0.0024	0.22
1.40	1.0980	1.1008	0.0028	0.25
1.45	1.1133	1.1166	0.0032	0.29
1.50	1.1295	1.1331	0.0037	0.32

≡

En el ejemplo 1, los valores verdaderos se calcularon a partir de la solución conocida $y = e^{0.1(x^2-1)}$ (verificar). También, el **error absoluto** se define como

$$|\textit{valor verdadero} - \textit{aproximación}|.$$

El **error relativo** y el **porcentaje de error relativo** se definen a su vez, como:

$$\frac{\textit{error absoluto}}{|\textit{valor verdadero}|} \quad \text{y} \quad \frac{\textit{error absoluto}}{|\textit{valor verdadero}|} \times 100.$$

Al comparar las dos últimas columnas de las tablas 2.6.3 y 2.6.4, resulta evidente que la precisión de las aproximaciones mejora a medida que disminuye el tamaño del paso h. También, vemos que aunque el porcentaje relativo de error aumenta con cada paso, ello no parece ser tan malo. Pero usted no debe dejarse engañar por un ejemplo. Si en el ejemplo 2 simplemente cambiamos el coeficiente localizado al lado derecho de la ED de 0.2 a 2, entonces aumenta en forma alarmante el porcentaje relativo de errores en $x_n = 1.5$. Véase el problema 4 en los ejercicios 2.6.

Advertencia. ▶ El método de Euler es sólo una de muchas formas diferentes en que una ecuación diferencial puede aproximarse. Aunque es atractivo por su simplicidad, *el método de Euler rara vez se usa en cálculos serios*. Hemos presentado el tema sólo para darle una idea de los métodos numéricos. Los métodos que aportan una precisión significativamente mayor, en especial el **método de Runge Kutta de cuarto orden** incluido en el capítulo 6, se estudiarán y analizarán con más detalle. Nos referiremos a este importante procedimiento como el **método RK4**.

■ **Solucionadores numéricos** No importa si realmente podemos encontrar una solución explícita o implícita, cuando existe una ecuación diferencial, representa una curva uniforme en el plano cartesiano. La idea básica en que se fundamenta *cualquier* método numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es aproximar de algún modo los valores y de una solución para valores preseleccionados de x. Comenzamos en un punto inicial especificado (x_0, y_0) sobre una curva solución y procedemos a calcular paso por paso una secuencia de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cuyas coordenadas y y_i se aproximen a las coordenadas y $y(x_i)$ de los puntos $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \ldots, (x_n, y(x_n))$ situados en la gráfica de la solución $y(x)$ generalmente desconocida. Al tomar las coordenadas x juntas (es decir, para valores de h) y unir los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ con segmentos de línea cortos, obtenemos una curva poligonal que aparenta ser uniforme y cuyas características cualitativas esperamos se asemejen a las de una curva solución real. El trazado de las curvas es una tarea adecuada para una computadora. Un programa de cómputo diseñado para implementar un método numérico o trazar una representación visual de una curva solución aproximada que se ajuste a los datos numéricos producidos por este método se conoce como **programa de solución numérica**. Existen muchos programas de solución numérica en el mercado, ya sea como parte de un paquete computacional más grande —digamos, el de un sistema algebraico de cómputo— o como programa independiente. Algunos de estos programas simplemente trazan las aproximaciones numéricas generadas, mientras que otros generan tanto datos numéricos duros como las correspondientes **curvas solución numéricas** o aproximadas. Un ejemplo de cómo se conectan esencialmente los puntos de las gráficas generadas por un programa de solución numérica son las dos gráficas poligonales negras de la **FIGURA 2.6.3**, que son curvas solución numéricas para el problema de valor inicial $y' = 0.2xy$, $y(0) = 1$, sobre el intervalo $[0, 4]$ obtenido a partir del método de Euler y del método RK4 empleando un tamaño del paso $h = 1$. La curva más fluida es la gráfica de la solución exacta $y = e^{0.1x^2}$ del problema de valor inicial. Note que en la figura 2.6.3, aun con un salto tan ridículamente grande como $h = 1$, el método RK4 produce la "curva solución" más creíble. La curva solución numérica obtenida con el método RK4 es difícil de distinguir de la curva solución real trazada sobre el intervalo $[0, 4]$ cuando se utiliza un tamaño del paso más normal de $h = 0.1$.

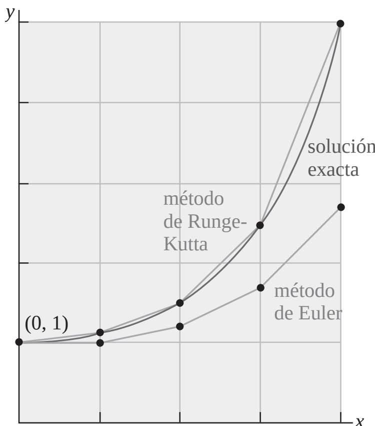


FIGURA 2.6.3 Comparación de métodos numéricos

■ **Uso de un programa de solución numérica** No es necesario tener conocimiento de métodos numéricos diversos para usar un programa de solución numérica. Esta herramienta necesita, por lo general, que la ecuación diferencial se exprese en su forma normal $dy/dx = f(x, y)$. Los programas de solución numérica que sólo generan curvas requieren normalmente que usted les proporcione la función $f(x, y)$ y los datos iniciales x_0 y y_0, y que especifique el método

numérico deseado. Si la idea es aproximar el valor numérico de $y(a)$, entonces el programa puede requerir además que se le especifique un valor para h, o, de manera equivalente, el número de pasos que deseamos dar para llegar a $x = a$ a partir de $x = x_0$. Por ejemplo, si deseamos aproximar $y(4)$ para el PVI ilustrado en la figura 2.6.3, si comenzamos en $x = 0$, se necesitan cuatro pasos para llegar a $x = 4$ con un tamaño del paso de $h = 1$; 40 pasos son equivalentes a un tamaño del paso de $h = 0.1$. Aunque no es nuestra intención explorar aquí los diferentes problemas que podemos encontrar cuando intentamos aproximar cantidades matemáticas, usted debe estar consciente al menos de que un programa de solución numérica puede descomponer ciertos puntos o dar un panorama incompleto o equivocado cuando se aplica a algunas ecuaciones diferenciales de primer orden expresadas en la forma normal. La **FIGURA 2.6.4** ilustra la curva solución numérica obtenida al aplicar el método de Euler a cierto problema de valor inicial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, $y(0) = 1$. Resultados equivalentes se obtuvieron cuando se utilizaron tres programas de solución numérica comerciales distintos, la gráfica aún representa difícilmente una curva solución verosímil. (¿Por qué?) Cuando un programa de solución numérica tiene dificultades, quedan muchos recursos de los cuales servirse; tres de los más obvios son: disminución del tamaño del paso, usar otro método numérico o intentar con un programa de solución numérica diferente.

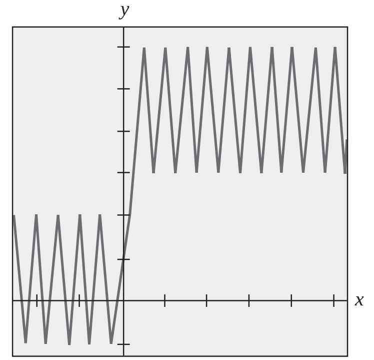


FIGURA 2.6.4 Curva solución no muy útil

2.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 y 2, utilice el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor indicado. Lleve a cabo el método recursivo de (3) a mano, primero con $h = 0.1$ y después con $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$; $y(1.2)$

2. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.2)$

En los problemas 3 y 4, use el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor indicado. Primero utilice $h = 0.1$ y después $h = 0.05$. Encuentre una solución explícita para cada problema de valor inicial y después elabore tablas similares a las tablas 2.6.3 y 2.6.4.

3. $y' = y$, $y(0) = 1$; $y(1.0)$

4. $y' = 2xy$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$

En los problemas 5 a 10, use un programa de solución numérica y el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor indicado. Primero use $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

5. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$

7. $y' = (x - y)^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$

8. $y' = xy + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$

9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$

10. $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$

En los problemas 11 y 12, use un programa de solución numérica para obtener una curva solución numérica para el problema de valor inicial dado. Primero aplique el método de Euler y después el método RK4; establezca $h = 0.25$ en cada caso. Superponga ambas curvas solución sobre los mismos ejes de coordenadas. Si es posible, utilice un color diferente para cada curva. Repita, con $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

11. $y' = 2(\cos x)y$, $y(0) = 1$

12. $y' = y(10 - 2y)$, $y(0) = 1$

≡ Problemas de análisis

13. Emplee un programa de solución numérica y el método de Euler para aproximar $y(1, 0)$, donde $y(x)$ es la solución a $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$. Primero use $h = 0.1$ y después $h = 0.05$. Repita con el método RK4. Analice cuál podría ser la causa de que las aproximaciones a $y(1.0)$ difieran tanto.

2.7 Modelos lineales

Introducción En esta sección resolveremos algunos de los modelos lineales de primer orden presentados en la sección 1.3.

Crecimiento y decaimiento El problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad, sirve como un modelo para diversos fenómenos que implican **crecimiento** o **decaimiento**. En la sección 1.3 hemos visto que en biología,

durante periodos cortos, se observa que la tasa de crecimiento de ciertas poblaciones (bacterias, animales pequeños) es proporcional a la población presente en el tiempo t. Si se conoce la cantidad de población presente en algún momento inicial arbitrario t_0, entonces puede usarse la solución de (1) para pronosticar la población futura —es decir, en los tiempos $t > t_0$. En (1), la constante de proporcionalidad k puede determinarse a partir de la solución del problema de valor inicial usando una medición posterior de x en algún tiempo $t_1 > t_0$. En física y química, (1) es vista en forma de una *reacción de primer orden*, esto es, una reacción cuya tasa o velocidad dx/dt es directamente proporcional a la primera potencia de la concentración de reactivo x en un tiempo t. La descomposición o decaimiento del U-238 (uranio) por acción de la radiactividad en Th-234 (torio) es una reacción de primer orden.

EJEMPLO 1 Crecimiento bacterial

Cierto cultivo tiene inicialmente un número P_0 de bacterias. En $t = 1$ h, la cantidad medida de bacterias es de $\frac{3}{2}P_0$. Si la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que las bacterias se tripliquen.

Solución Resolvemos primero la ecuación diferencial en (1) al reemplazar el símbolo x por P. Con $t_0 = 0$, la condición inicial es $P(0) = P_0$. Entonces, usamos la observación empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k.

Observe que la ecuación diferencial $dP/dt = kP$ es tanto separable como lineal; y cuando se escribe en la forma estándar de una ED lineal de primer orden,

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0,$$

podemos observar por inspección que el factor integrante es e^{-kt}. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por este término de inmediato da

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-kt}P\right] = 0.$$

Al integrar ambos lados de la ecuación resulta $e^{-kt}P = c$ o $P(t) = ce^{kt}$. En $t = 0$ se deduce que $P_0 = ce^0 = c$ y, por lo tanto, $P(t) = P_0e^{kt}$. En $t = 1$ tenemos $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$ o $e^k = \frac{3}{2}$. A partir de la última ecuación obtenemos $k = \ln \frac{3}{2} = 0.4055$. Así, $P(t) = P_0e^{0.4055t}$. Para encontrar el tiempo al cual la cantidad de bacterias se triplica, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ para t. Deducimos que $0.4055t = \ln 3$, y así

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71\,\text{h}.$$

Véase la **FIGURA 2.7.1**. ≡

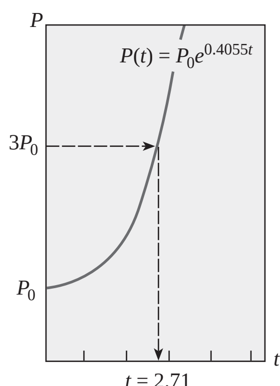


FIGURA 2.7.1 Tiempo en que la población inicial se triplica en el ejemplo 1

En el ejemplo 1, observe que la cantidad real P_0 de bacterias presentes en el tiempo $t = 0$ no cumple función alguna en determinar el tiempo requerido para que la cantidad presente en el cultivo se triplique. El tiempo necesario para que una población inicial de, digamos, 100 o 1 000 000 de bacterias se multiplique sigue siendo aproximadamente de 2.71 horas.

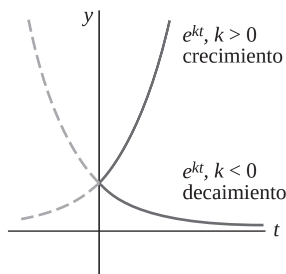


FIGURA 2.7.2 Crecimiento ($k > 0$) y decaimiento ($k < 0$)

Como se muestra en la **FIGURA 2.7.2**, la función exponencial e^{kt} se incrementa conforme lo hace t para $k > 0$, y disminuye a medida que lo hace t para $k < 0$. Por lo tanto, los problemas que describen el crecimiento (ya sea de poblaciones, bacterias o incluso capital) están caracterizados por un valor positivo de k, en tanto los problemas que implican decaimiento (como en la desintegración radiactiva) producen un valor negativo k. En consecuencia, decimos que k es o una **constante de crecimiento** ($k > 0$) o una **constante de decaimiento** ($k < 0$).

■ Vida media En física, el término **vida media** es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo que le toma desintegrarse a la mitad de los átomos presentes en una cantidad inicial A_0, o transmutar en átomos de otro elemento. Cuanto más larga sea la vida media de una sustancia, tanto más estable será. Por ejemplo, la vida media del radio altamente radiactivo Ra-226, es de aproximadamente 1 700 años. En todo este tiempo, la vida media de cierta cantidad de Ra-226 se transmuta en radón, Rn-222. El isótopo de uranio que se presenta con más frecuencia, el U-238, tiene una vida media de casi 4 500 000 000 de años. En alrededor de 4 500 millones de años, la mitad de cierta cantidad de U-238 transmutará en plomo, Pb-206.

EJEMPLO 2 Vida media del plutonio

Un reactor generador convierte el uranio-238 relativamente estable en un isótopo de plutonio-239. Después de 15 años se determina que el 0.043% de la cantidad inicial A_0 del plutonio se ha desintegrado. Encuentre la vida media del isótopo si la tasa de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

Solución Suponemos que $A(t)$ denota la cantidad de plutonio restante en cualquier tiempo. Como en el ejemplo 1, la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0, \tag{2}$$

es $A(t) = A_0e^{kt}$. Si 0.043% de los átomos de A_0 se ha desintegrado, entonces el 99.957% de la sustancia permanece. Para encontrar la constante de decaimiento, k, usamos $0.99957A_0 = A(15)$, es decir, $0.99957A_0 = A_0e^{15k}$. Al resolver para k se tiene $k = \frac{1}{15}\ln 0.99957 = -0.00002867$. Por lo tanto, $A(t) = A_0e^{-0.00002867t}$. Ahora la vida media es el valor correspondiente al tiempo en que $A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Resolviendo para t se obtiene $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{-0.00002867t}$ o $\frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$. La última ecuación da

$$t = \frac{\ln 2}{0.00002867} \approx 24\,180 \text{ años.}$$ ≡

Fechado por carbono Alrededor de 1950, un equipo de científicos de la Universidad de Chicago liderados por el químico Willard Libby diseñó un método para usar el carbono radiactivo como un medio con el cual determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría de fechado por carbono se basa en que el isótopo de carbono-14 (C-14) se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La relación entre la cantidad de C-14 con respecto al carbono ordinario que hay en la atmósfera resulta ser una constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivientes es igual a la que tiene la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14, ya sea por respirar o por comer, se detiene. Así, al comparar la cantidad proporcional del C-14 presente en, digamos, un fósil con la relación constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de la edad del fósil. El método está basado en el conocimiento de la vida media del C-14. El valor calculado de Libby para la vida media del C-14 fue de unos 5 600 años y es conocido como la **vida media de Libby**. Hoy en día el valor aceptado de manera común para la vida media del C-14 es la **vida media de Cambridge** que es cercana a los 5 730 años. Por su trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. El método de Libby se ha usado para fechar el mobiliario de madera encontrado en las tumbas egipcias, las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto, y la sábana del enigmático Sudario de Turín. Véase el problema 12 de los ejercicios 2.7.

EJEMPLO 3 Edad de un fósil

Se encontró que un hueso fosilizado contiene 0.1% de la cantidad original de C-14. Determinar la edad del fósil.

Solución El punto de partida es otra vez $A(t) = A_0e^{kt}$. Para determinar el valor de la constante de decaimiento k tomamos como base que $\frac{1}{2}A_0 = A(5\,730)$ o $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5\,730k}$. La última ecuación implica $5\,730k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ y obtenemos entonces $k = -(\ln 2)/5\,730 = -0.00012097$. Por lo tanto, $A(t) = A_0e^{-0.00012097t}$. Con $A(t) = 0.001A_0$ tenemos $0.001A_0 = A_0e^{-0.00012097t}$ y $-0.00012097t = \ln(0.001) = -\ln 1\,000$. Así

$$t = \frac{\ln 1\,000}{0.00012097} \approx 57\,103 \text{ años.}$$ ≡

La fecha determinada en el ejemplo 3 en realidad está en el límite de precisión de este método. La técnica normal del carbono-14 se limita a casi 10 vidas medias del isótopo, o alrededor de 60 000 años. Una razón de ello es que el análisis químico necesario para obtener una medición exacta del C-14 restante se vuelve un tanto difícil en torno del punto de $0.001A_0$. Por otro lado, este análisis demanda la destrucción de una muestra muy grande del espécimen. Si esta medición se lleva a cabo de manera indirecta, con base en la radiactividad real del

espécimen, entonces resulta muy difícil distinguir entre la radiación del fósil y la radiación normal de su entorno. Sin embargo, recientemente, el uso de un acelerador de partículas ha permitido a los científicos separar de manera directa el C-14 del estable carbono-12 (C-12). Cuando se calcula el valor exacto de la relación de C-14 con respecto a C-12, la precisión del método se puede ampliar de 70 000 a 100 000 años. Otras técnicas isotópicas, como usar potasio-40 y argón-40, pueden arrojar fechas de varios millones de años. En ocasiones es posible aplicar métodos no isotópicos basados en el uso de aminoácidos.

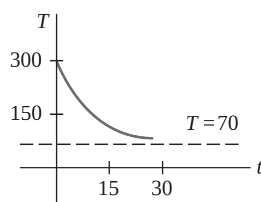
Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton En la ecuación (3) de la sección 1.3 vimos que la formulación matemática de la ley empírica de Newton sobre el enfriamiento de un objeto está dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, $T(t)$ es la temperatura del objeto para $t > 0$, y T_m es la temperatura ambiente —es decir, la temperatura del medio que circunda al objeto—. En el ejemplo 4 supusimos que T_m es constante.

EJEMPLO 4 Enfriamiento de un pastel

Cuando un pastel se retira del horno, tiene una temperatura de 300° F. Tres minutos más tarde, su temperatura es de 200° F. ¿Cuánto tiempo le llevará al pastel enfriarse hasta llegar a la temperatura ambiente de 70° F?



a)

$T(t)$	t (min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

b)

FIGURA 2.7.3 La temperatura de un pastel que se enfría en el ejemplo 4

Solución En (3) hacemos la identificación $T_m = 70$. Entonces debemos resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 300 \tag{4}$$

y determinar el valor de k de manera que $T(3) = 200$.

La ecuación (4) es tanto lineal como separable. Al separar las variables,

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt,$$

se tiene $\ln|T - 70| = kt + c_1$, y por lo tanto $T = 70 + c_2e^{kt}$. Cuando $t = 0$, $T = 300$, de manera que $300 = 70 + c_2$ da $c_2 = 230$, y, en consecuencia, $T = 70 + 230e^{kt}$. Por último, la medición $T(3) = 200$ lleva a $e^{3k} = \frac{13}{23}$ o $k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0.19018$. Así,

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}. \tag{5}$$

Observamos que (5) no proporciona una solución finita para $T(t) = 70$ dado que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 70$. Sin embargo, de manera intuitiva esperamos que el pastel alcance la temperatura ambiente después de un razonablemente largo periodo. ¿Cuánto es "largo"? Por supuesto, no debemos preocuparnos por el hecho de que el modelo (4) no se ajuste a nuestra intuición física. Los incisos *a*) y *b*) de la **FIGURA 2.7.3** muestran claramente que el pastel estará cerca de la temperatura ambiente en una media hora. ≡

Mezclas La mezcla de dos fluidos algunas veces da origen a una ecuación diferencial lineal de primer orden. Cuando en la sección 1.3 analizamos la mezcla de dos soluciones salinas, supusimos que la tasa $x'(t)$ a la cual cambia la cantidad de sal presente en el tanque de mezclado era una tasa neta:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix}\text{tasa de entrada}\\ \text{de la sal}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de salida}\\ \text{de la sal}\end{pmatrix} = R_{entrada} - R_{saida}. \tag{6}$$

En el ejemplo 5 resolvemos la ecuación (8) de la sección 1.3.

EJEMPLO 5 Mezcla de dos soluciones salinas

Recuerde que el gran tanque considerado en la sección 1.3 contenía 300 galones de una solución salina. La sal estaba entrando y saliendo del tanque; una solución salina entraba en el tanque a una tasa de 3 galones por minuto, mezclándose con la solución ahí presente,

y la mezcla se bombeó a una tasa de 3 galones por minuto. La concentración de la sal en el flujo entrante, o solución de ingreso, era de 2 lb/gal, y por lo tanto la sal ingresaba al tanque a la tasa de $R_{entrada} = (2 \text{ lb/gal}) \cdot (3 \text{ gal/min}) = 6$ lb/min y salía del tanque a una tasa de $R_{salida} = (x/300 \text{ lb/gal}) \cdot (3 \text{ gal/min}) = x/100$ lb/min. A partir de estos datos y de (6) obtuvimos la ecuación (8) de la sección 1.3. Ahora planteemos la siguiente pregunta: si inicialmente había 50 libras de sal disuelta en los 300 galones, ¿cuánta sal habrá en el tanque después de un largo periodo?

Solución Para encontrar la cantidad de sal $x(t)$ presente en el tanque en el tiempo t, resolvamos el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{100}x = 6, \quad x(0) = 50.$$

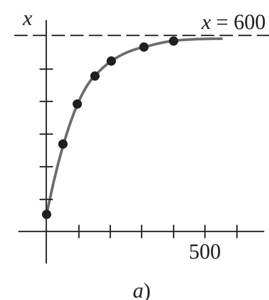
Observe aquí que la condición es la cantidad inicial de sal $x(0) = 50$ en el tanque, y no la cantidad inicial de líquido en el tanque. Ahora, puesto que el factor integrante de la ecuación diferencial lineal es $e^{t/100}$, podemos escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}[e^{t/100}x] = 6e^{t/100}.$$

Al integrar la última ecuación y resolver para x se tiene la solución general $x(t) = 600 + ce^{-t/100}$. Cuando $t = 0$, $x = 50$, entonces tenemos que $c = -550$. Por lo tanto, la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t está dada por

$$x(t) = 600 - 550e^{-t/100}. \qquad (7)$$

La solución (7) se usó para construir la tabla de la **FIGURA 2.7.4*b*)**. También, en (7) y en la figura 2.7.4*a*) se puede ver que $x(t) \to 600$ cuando $t \to \infty$. Desde luego, esto es lo que esperaríamos en un caso así; durante un periodo largo, la cantidad de libras de sal presente en la solución debe ser (300 gal)(2 lb/gal) = 600 lb. ≡



a)

t (min)	*x* (lb)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

FIGURA 2.7.4 Libras de sal presentes en el tanque en función del tiempo en el ejemplo 5

En el ejemplo 5 supusimos que la velocidad a la cual la solución se bombea hacia dentro es igual a la velocidad de salida. No obstante, esta situación no es necesaria; la solución salina mezclada puede bombearse hacia fuera a una velocidad r_{salida} más rápida o más lenta que la $r_{entrada}$, a la cual la otra solución salina se bombea hacia dentro. Por ejemplo, si la solución perfectamente mezclada del ejemplo 5 se bombea hacia fuera a la velocidad más lenta de, digamos, $r_{salida} = 2$ galones por minuto, el líquido se acumulará en el tanque a la velocidad de $r_{entrada} - r_{salida}$ $(3 - 2)$ gal/min = 1 gal/min. Después de t minutos hay $300 + t$ galones de salmuera en el tanque y, por lo tanto, la concentración del flujo de salida es $c(t) = x/(300 + t)$. Entonces, la velocidad de salida de la sal es $R_{salida} = c(t) \cdot r_{salida}$ o

$$R_{saida} = \left(\frac{x}{300 + t}\text{ lb/gal}\right) \cdot (2 \text{ gal/min}) = \frac{2x}{300 + t}\text{ lb/min.}$$

Por lo tanto, la ecuación (6) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2x}{300 + t} \qquad \text{o} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{2}{300 + t}x = 6.$$

Compruebe que la solución de la última ecuación sujeta a $x(0) = 50$ sea $x(t) = 600 + 2t - (4.95 \times 10^7)(300 + t)^{-2}$. Véase el análisis de (8) en la sección 1.3, el problema 12 en los ejercicios 1.3 y los problemas 22 a 26 en los ejercicios 2.7.

■ **Circuitos en serie** Para un circuito en serie compuesto por sólo un resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff señala que la suma de la caída de voltaje a través del inductor $(L(di/dt))$ y la caída de voltaje a través del resistor (iR) es igual a la cantidad de voltaje suministrado $(E(t))$ al circuito. Véase la **FIGURA 2.7.5**.

Por lo tanto, obtenemos la ecuación diferencial lineal para la corriente $i(t)$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \qquad (8)$$

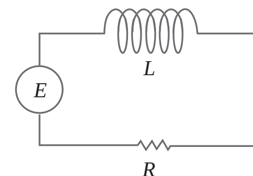


FIGURA 2.7.5 Circuito *LR* en serie

donde L y R son constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. La corriente $i(t)$ se conoce también como **respuesta** del sistema.

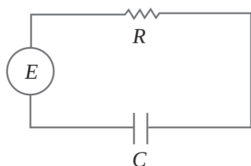


FIGURA 2.7.6 Circuito RC en serie

La caída de voltaje a través de un capacitor con capacitancia C está dada por $q(t)/C$, donde q es la carga sobre el capacitor. Por lo tanto, para el circuito en serie mostrado en la **FIGURA 2.7.6**, la segunda ley de Kirchhoff da

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{9}$$

Pero la corriente i y la carga q están relacionadas por $i = dq/dt$, de manera que (9) se convierte en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{10}$$

EJEMPLO 6 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie cuya inductancia es de $\frac{1}{2}$ henry y su resistencia de 10 ohms. Determine la corriente i si la corriente inicial es cero.

Solución A partir de (8) vemos que se debe resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12$$

siempre y cuando $i(0) = 0$. Primero, multiplicamos la ecuación diferencial por 2 y escribimos en ambos lados el factor integrante e^{20t}. Entonces obtenemos

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}.$$

Al integrar cada lado de la última ecuación y resolver para i se tiene $i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$. Ahora $i(0) = 0$ implica que $0 = \frac{6}{5} + c$ o $c = -\frac{6}{5}$. Por lo tanto, la respuesta es $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$. ≡

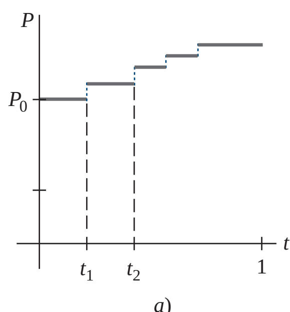
Con base en la expresión (4) de la sección 2.3 podemos escribir una solución general de (8):

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L}\int e^{(R/L)t}E(t)\,dt + ce^{-(R/L)t}. \tag{11}$$

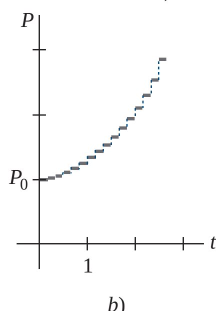
en particular, cuando $E(t) = E_0$ es una constante, (11) se convierte en

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t}. \tag{12}$$

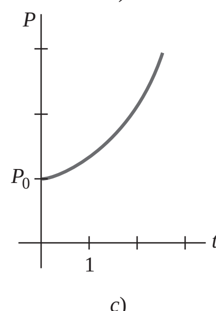
Observe que cuando $t \to \infty$, el segundo término de (12) se acerca a cero. Tal término se denomina, por lo general, **término transitorio**; a cualquier término restante se le conoce como la parte de **estado estable** de la solución. En este caso, E_0/R también se llama **corriente del estado estable**; entonces, para valores de tiempo grandes, la corriente presente en el circuito parece estar gobernada simplemente por la ley de Ohm ($E = iR$).



a)



b)



c)

FIGURA 2.7.7 El crecimiento poblacional es un proceso discreto

Comentarios

La solución $P(t) = P_0e^{0.4055t}$ para el problema de valor inicial del ejemplo 1 describió la población de una colonia de bacterias en cualquier tiempo $t > 0$. Por supuesto, $P(t)$ es una función continua que acepta *todos* los números reales incluidos en el intervalo $P_0 \leq P < \infty$. Pero dado que estamos hablando de una población, el sentido común dicta que P sólo puede aceptar valores enteros positivos. Además, no esperaríamos que la población crezca de manera continua —es decir, cada segundo, cada microsegundo, y así sucesivamente— como lo pronostica nuestra solución; puede haber intervalos $[t_1, t_2]$ durante los cuales no se presente ningún crecimiento. Quizás, entonces, la gráfica mostrada en la **FIGURA 2.7.7*a*)** sea una descripción más realista de P que la gráfica de una función exponencial. Usar una función continua que describa un fenómeno discreto es más cuestión de conveniencia que de exactitud. No obstante, para algunos propósitos puede resultar satisfactoria si nuestro modelo describe el sistema con mucho detalle cuando se observa a través del tiempo de manera macroscópica, como en las figuras 2.7.7*b*) y *c*), y no microscópica, figura 2.7.7*a*). Tenga en mente que un modelo matemático no es la realidad.

2.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

≡ Crecimiento y decaimiento

1. La población de una comunidad aumenta a una tasa que es proporcional al número de personas presente en el tiempo t. Si una población inicial P_0 se ha duplicado en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse?; ¿y en cuadruplicarse?

2. Se sabe que la población de la comunidad creciente del problema 1 es de 10 000 individuos después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 10$?

3. La población de cierta ciudad crece a una tasa que es proporcional a la población presente en el tiempo t. La población inicial de 500 individuos aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 30$?

4. En cierto cultivo, la población de bacterias crece a una tasa que es proporcional a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias; luego de 10 horas, 2 000. ¿Cuál fue el número inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, se deteriora a una tasa que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene vida media de 3.3 horas. Si un gramo de este isótopo está presente en un inicio, ¿cuánto tiempo le tomará descomponerse al 90% del plomo?

6. En un principio, estaban presentes 100 miligramos de cierta sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había disminuido en 3%. Si la tasa de decaimiento es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el tiempo t, encuentre la cantidad restante después de 24 horas.

7. Determine la vida media de la sustancia radiactiva descrita en el problema 6.

8. ***a***) Considere el problema de valor inicial $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$, como el modelo del decaimiento de una sustancia radiactiva. Muestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.

b) Muestre que la solución del problema de valor inicial dado en el inciso *a*) se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.

c) Si una sustancia radiactiva tiene la vida media T dada en el inciso *a*), ¿cuánto le tomará a la cantidad inicial A_0 de la sustancia en decaer a $\frac{1}{8}A_0$?

9. Cuando un haz vertical de luz atraviesa un medio transparente, la tasa a la cual su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio (en pies). En agua marina clara, la intensidad a 3 pies por debajo de la superficie es el 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál será la intensidad del haz a 15 pies por debajo de la superficie?

10. Cuando el interés se compone de manera continua, la cantidad de dinero aumenta a una tasa que es proporcional a la cantidad S presente en el tiempo t, es decir, $dS/dt = rS$, donde r es la tasa anual de interés.

a) Encuentre la cantidad de dinero acumulado al final de 5 años cuando se depositen \$5 000 en una cuenta de ahorros que produzca $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto de manera continua.

b) ¿En cuántos años se habrá duplicado la suma inicial depositada?

c) Utilice una calculadora para comparar la cantidad obtenida en el inciso *a*) con la cantidad $S = 5000\,(1 + \frac{1}{4}(0.0575))^{5(4)}$ que se acumula cuando el interés se compone de manera trimestral.

≡ Fechado por carbono

11. Los arqueólogos han utilizado piezas de madera quemada, o carbón, encontradas en el sitio para datar la antigüedad de pinturas prehistóricas y dibujos plasmados en las paredes y techos de una cueva localizada en Lascaux, Francia. Véase la **FIGURA 2.7.8**. Use la información de la página 71 para determinar la edad aproximada de una pieza de madera quemada si se encontró que el 85.5% del C-14 acumulado en los árboles vivos del mismo tipo se había deteriorado.

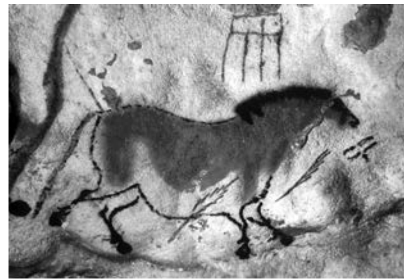


FIGURA 2.7.8 Pintura en la pared de una cueva, problema 11

12. Muchas personas creen que el Sudario de Turín, que muestra la imagen negativa del cuerpo de un hombre aparentemente crucificado, fue el manto mortuorio de Jesús de Nazaret. Véase la **FIGURA 2.7.9**. En 1988, el Vaticano concedió el permiso para que se investigara su antigüedad mediante el fechado por carbono. Tres laboratorios científicos independientes analizaron las telas y concluyeron que el sudario tenía aproximadamente 660 años de antigüedad,* una edad que concordaba con su aparición histórica. Con base en esta edad, determine cuál es el porcentaje de la cantidad original de C-14 que permanecía en la tela hasta 1988.

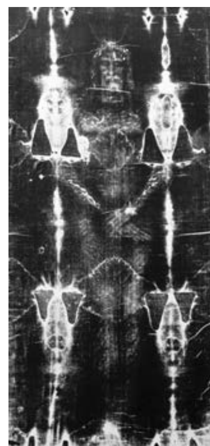


FIGURA 2.7.9 Imagen del sudario presentado en el problema 12

*Algunos académicos no están de acuerdo con este hallazgo. Para obtener más información acerca de este fascinante misterio, véase la página web del Sudario de Turín en http://www.shroud.com.

Ley de Newton sobre enfriamiento y calentamiento

13. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura es de 70° F, y se lleva a un lugar donde la temperatura del aire es de 10° F. Después de medio minuto, el termómetro marca 50° F. ¿Cuál es la temperatura que marcará en $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo le llevará al termómetro alcanzar los 15° F?

14. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 5° F. Después de un minuto el termómetro marca 55° F, y luego de 5 minutos marca 30° F. ¿Cuál es la temperatura inicial del interior de la habitación?

15. Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era de 20° C, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en un segundo? ¿Cuánto le llevará alcanzar los 98° C?

16. Dos grandes recipientes *A* y *B* del mismo tamaño se llenan con diferentes líquidos. Estos líquidos se mantienen a 0° C y 100° C, respectivamente. Una pequeña barra de metal con temperatura inicial de 100° C se introduce en el recipiente *A*. Después de un minuto, la temperatura de la barra es de 90° C; luego de 2 minutos la barra se saca y al instante se transfiere al otro recipiente. Pasado un minuto en el recipiente *B*, la temperatura de la barra se eleva en 10°. ¿Cuánto tiempo, desde el inicio de todo el proceso, le llevará a la barra alcanzar los 99.9° C?

17. Un termómetro que marca 70° F se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio localizada en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro marca 110° F después de $\frac{1}{2}$ minuto y 145° F luego de un minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

18. En $t = 0$, una probeta sellada que contiene una sustancia química se sumerge en un baño líquido. En la probeta, la temperatura inicial de la sustancia es de 80° F. El baño líquido tiene una temperatura controlada (medida en grados Fahrenheit) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0.1t}$, $t \geq 0$, donde t se mide en minutos.

a) Suponga que $k = -0.1$ en la expresión (2). Antes de resolver el PVI, describa con palabras qué espera que suceda con la temperatura $T(t)$ en el corto y el largo plazos.

b) Resuelva el PVI. Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de $T(t)$ en intervalos de tiempo de diferente duración. ¿Las gráficas coinciden con sus predicciones del inciso *a*)?

19. Se encontró un cadáver dentro de un cuarto cerrado de una casa donde la temperatura era una constante de 70º F. Al momento del descubrimiento, se determinó que la temperatura del cuerpo era de 85º F. Una hora después, una segunda medición mostró que su temperatura era de 80º F. Suponga que la hora de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura en ese momento era de 98.6º F. Determine cuántas horas transcurrieron antes de descubrir el cuerpo.

20. Repita el problema 19 si la evidencia indica que la persona tenía una fiebre de 102º F al momento de su deceso.

Mezclas

21. Un tanque contiene 200 litros de fluido en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera, que contiene un gramo de sal por litro, se bombea hacia el depósito a una velocidad de 4 L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Encuentre el número $A(t)$ de gramos de sal presentes en el tanque en el tiempo t.

22. Resuelva el problema 21 suponiendo que se bombea agua pura al tanque.

23. Un tanque grande se llena a toda su capacidad con 500 galones de agua pura. Hacia el tanque se bombea salmuera, que contiene 2 libras de sal, a velocidad de 5 galones por minuto. Perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Encuentre la cantidad $A(t)$ de libras de sal presentes en el tanque en el tiempo t.

24. En el problema 23, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t? ¿En $t = 5$ minutos? ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque después de un largo tiempo, es decir cuando $t \to \infty$? ¿En qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

25. Resuelva el problema 23 bajo el supuesto de que la solución se bombea hacia fuera a una mayor velocidad de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

26. En el ejemplo 5, determine la cantidad de sal presente en el tanque en el tiempo t si la concentración de sal en el flujo de salida es variable y está dada por $c_{entrada}(t) = 2 + \text{sen}(t/4)$ lb/gal. Sin graficar realmente, conjeture acerca de qué apariencia tendría la curva solución del PVI. Después use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la solución en el intervalo [0, 300]. Repita para el intervalo [0, 600] y compare su gráfica con la de la figura 2.7.4*a*).

27. Un tanque grande se llena parcialmente con 100 galones de fluido en los cuales están disueltas 10 libras de sal. Al tanque se bombea salmuera, con $\frac{1}{2}$ libra de sal por galón, a velocidad de 6 gal/min. La solución, perfectamente mezclada, se saca a la menor velocidad de 4 gal/min. Encuentre la cantidad de libras de sal presentes en el tanque después de 30 minutos.

28. En el ejemplo 5 no se da el tamaño del tanque que contiene la mezcla salina. Suponga, como en el análisis del ejemplo 5, que la velocidad a la cual se introduce la salmuera al tanque es de 3 gal/min, pero que la solución perfectamente mezclada se saca a una tasa de 2 gal/min. Es lógico pensar: como la salmuera se está acumulando en el tanque a velocidad de 1 gal/min, cualquier tanque finito debe saturarse eventualmente. Ahora suponga que el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 400 galones.

a) ¿En qué tiempo se derramará el líquido?

b) ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame?

c) Suponga que aunque el líquido se está derramando, la solución de salmuera continúa entrando a velocidad de 3 galones por minuto y la solución perfectamente mezclada sigue saliendo a una tasa de 2 galones por minuto. Diseñe un método para determinar la cantidad de libras de sal presentes en el tanque en $t = 150$ minutos.

d) Determine cuántas libras de sal hay en el tanque cuando $t \to \infty$. ¿Su respuesta concuerda con lo que usted había intuido?

e) Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica $A(t)$ en el intervalo [0, 500).

Circuitos en serie

29. Una fuerza electromotriz de 30 volts se aplica a un circuito *LR* en serie donde la inductancia es de 0.1 henrys y la resistencia de 50 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine la corriente cuando $t \to \infty$.

30. Resuelva la ecuación (7) bajo el supuesto de que $E(t) = E_0$ sen ωt e $i(0) = i_0$.

31. Una fuerza electromotriz de 100 volts se aplica a un circuito *RC* en serie donde la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia de 10^{-4} farads. Encuentre la carga $q(t)$ sobre el capacitor si $q(0) = 0$. Determine la corriente $i(t)$.

32. Una fuerza electromotriz de 200 volts se aplica a un circuito *RC* en serie con resistencia de 1 000 ohms y capacitancia de 5×10^{-6} farads. Encuentre la carga $q(t)$ sobre el capacitor si $i(0) = 0.4$. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005$ s. Determine la carga conforme $t \to \infty$.

33. Una fuerza electromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

se aplica a un circuito *LR* en serie que tiene inductancia de 20 henrys y resistencia de 2 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$.

34. Suponga que un circuito *RC* en serie tiene un resistor variable. Si en el tiempo t la resistencia está dada por $R = k_1 + k_2 t$, donde k_1 y k_2 se conocen como constantes positivas, entonces (9) se convierte en

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Si $E(t) = E_0$ y $q(0) = q_0$, donde E_0 y q_0 son constantes, demuestre que

$$q(t) = E_0 C + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2}.$$

≡ Diversos modelos matemáticos

35. Resistencia del aire En la expresión (14) de la sección 1.3 vimos que una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa que cae sujeta a la resistencia del aire, que es proporcional a la velocidad instantánea, es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, llamada coeficiente de arrastre. La dirección positiva es hacia abajo.

a) Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

b) Use la solución del inciso *a*) para determinar la velocidad limitante o terminal de la masa. En el problema 39 de los ejercicios 2.1 vimos cómo determinar la velocidad terminal sin resolver la ecuación diferencial.

c) Si la distancia s, medida a partir del punto donde la masa fue liberada por encima del suelo, se relaciona con la velocidad v de $ds/dt = v$, encuentre una expresión explícita para $s(t)$ si $s(0) = 0$.

36. ¿Qué tan alto? Sin resistencia del aire Suponga que una bala de cañón que pesa 16 libras se dispara verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de $v_0 = 300$ ft/s. La respuesta a la pregunta "¿qué tan alto puede llegar la bala?" depende de si se toma en cuenta la resistencia del aire.

a) Suponga que ignoramos la resistencia del aire. Si la dirección positiva es ascendente, entonces el modelo para el estado de la bala de cañón estará dado por $d^2s/dt^2 = -g$ (ecuación (12) de la sección 1.3). Dado que $ds/dt = v(t)$, la última ecuación diferencial es igual a $dv/dt = -g$, de donde tomamos que $g = 32$ ft/s^2. Encuentre la velocidad $v(t)$ de la bala de cañón en el tiempo t.

b) Use el resultado obtenido en el inciso *a*) para determinar la altura $s(t)$ de la bala de cañón medida desde el nivel del suelo. Encuentre la altura máxima que alcanzó esta bala.

37. ¿Qué tan alto? Resistencia lineal del aire Repita el problema 36, pero esta vez suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea. Es lógico pensar que la altura máxima alcanzada por la bala de cañón debe ser menor que la del inciso *b*) del problema 36. Demuestre esto suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 0.0025$ [*Sugerencia:* Modifique un poco la ED del problema 35.]

38. Paracaidismo Una paracaidista pesa 125 libras, y su paracaídas y equipo juntos pesan otras 35 libras. Después de salir del avión a una altitud de 15 000 pies, ella espera 15 segundos y abre su paracaídas. Suponga que en el modelo del problema 35 la constante de proporcionalidad tiene el valor de $k = 0.5$ durante la caída libre y $k = 10$ después de abrirse el paracaídas. ¿Cuál es su velocidad y cuán lejos se ha trasladado la paracaidista 20 segundos después de abandonar el avión? ¿Cómo se compara su velocidad a 20 segundos con su velocidad terminal? ¿En cuánto tiempo llegará al suelo? [*Sugerencia:* Piense en términos de dos problemas de valor inicial distintos.]

39. Gota de lluvia que se evapora A medida que una gota de lluvia cae se evapora, pero mientras eso sucede conserva su forma esférica. Si suponemos adicionalmente que la velocidad de evaporación de la gota de lluvia es proporcional a su área superficial y la resistencia del aire es insignificante, entonces un modelo de la velocidad $v(t)$ de la gota será

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0}v = g.$$

Aquí ρ es la densidad del agua, r_0 es el radio de la gota de lluvia cuando $t = 0$, $k < 0$ es la constante de proporcionalidad y la dirección hacia abajo se toma como positiva.

a) Resuelva para $v(t)$ si la gota cae desde el reposo.

b) Lea de nuevo el problema 36 de los ejercicios 1.3 y entonces demuestre que el radio de la gota en el tiempo t es $r(t) = (k/\rho)t + r_0$.

c) Si $r_0 = 0.01$ ft y $r = 0.007$ ft 10 segundos después que la gota cae de una nube, determine el tiempo en que la gota se evapora por completo.

40. Población fluctuante La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, es un modelo matemático para una población $P(t)$ que experimenta fluctuaciones temporales cada año. Resuelva la ecuación sujeta a $P(0) = P_0$. Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica de la solución para diferentes alternativas de P_0.

41. Modelo poblacional En cierto modelo de la población cambiante $P(t)$ de una comunidad, se supone que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$

donde dB/dt y dD/dt son las tasas de nacimiento y mortandad, respectivamente.

a) Resuelva para $P(t)$ si $dB/dt = k_1 P$ y $dD/dt = k_2 P$.

b) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

42. Memorización Cuando el olvido se toma en cuenta, la tasa de memorización de un sujeto está dada por

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2A,$$

donde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad a ser memorizada en el tiempo t, M es la cantidad total a ser memorizada y $M - A$ es la cantidad restante a ser memorizada. (Véanse los problemas 25 y 26 en los ejercicios 1.3.)

a) Dado que la ED es autónoma, use el concepto de retrato fase de la sección 2.1 para encontrar el valor limitante de $A(t)$ cuando $t \to \infty$. Interprete el resultado.

b) Resuelva para $A(t)$ sujeto a $A(0) = 0$. Trace la gráfica de $A(t)$ y verifique la predicción que hizo usted en el inciso *a*).

43. Difusión de un medicamento Cierto modelo matemático de la tasa a la que un medicamento se difunde en el torrente sanguíneo está dado por $dx/dt = r - kx$, donde r y k son constantes positivas. La función $x(t)$ describe la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo en el tiempo t.

a) Dado que la ED es autónoma, use el concepto de retrato fase de la sección 2.1 para encontrar el valor limitante de $x(t)$ cuando $t \to \infty$.

b) Resuelva la ED sujeta a $x(0) = 0$. Trace la gráfica de $x(t)$ y verifique la predicción que hizo usted en el inciso *a*). ¿En qué tiempo la concentración es la mitad de este valor limitante?

44. Movimiento de cohetes Suponga que un pequeño cohete de masa total $m(t)$ se lanza verticalmente y que consume su combustible a una tasa constante. Si la dirección positiva es hacia arriba y si se considera que la resistencia del aire es lineal, entonces una ecuación diferencial para su velocidad $v(t)$ está dada por

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k - \lambda}{m_0 - \lambda t}v = -g + \frac{R}{m_0 - \lambda t},$$

donde k es el coeficiente de arrastre, λ es la velocidad a la que se consume el combustible, R es el empuje del cohete, m_0 es la masa total del cohete a $t = 0$, y g es la aceleración de la gravedad. (Véase el problema 29 en la *Revisión del capítulo 1*.)

a) Encuentre la velocidad $v(t)$ del cohete si $m_0 = 200$ kg, $R = 2\,000$ N, $\lambda = 1$ kg/s, $g = 9.8$ m/s^2, $k = 3$ kg/s y $v(0) = 0$.

b) Use $ds/dt = v$ y el resultado del inciso *b*) para encontrar la altura $s(t)$ del cohete en el tiempo t.

45. Movimiento de cohetes—Continuación En el problema 44, suponga que la masa inicial del cohete, 50 kg corresponden a la masa del combustible.

a) ¿Cuál es el tiempo de agotamiento t_b, o el tiempo en que se consume el combustible? (Véase el problema 30 en la *Revisión del capítulo 1*.)

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete al agotarse el combustible?

c) ¿Cuál es la altura del cohete al agotarse el combustible?

d) ¿Por qué esperaría que el cohete alcanzara una altura mayor que el número en el inciso *b*)?

e) Después del agotamiento del combustible, ¿cuál es el modelo matemático para la velocidad del cohete?

Problemas de análisis

46. Enfriamiento y calentamiento Una pequeña barra de metal se saca de un horno cuya temperatura es una constante de 300° F dentro de una habitación cuya temperatura es una constante de 70° F. De manera simultánea, una barra de metal idéntica que estaba en la habitación se coloca en el horno. Suponga que el tiempo t se mide en minutos. Analice: ¿por qué existe un valor futuro del tiempo, llámelo $t^* > 0$, al cual la temperatura de cada barra es idéntica?

47. Marcapasos del corazón Un marcapasos del corazón, mostrado en la **FIGURA 2.7.10**, está compuesto de un interruptor, una batería, un capacitor y el corazón como un resistor. Cuando el interruptor S está en P, el capacitor se carga; cuando S está en Q, el capacitor se descarga, enviando un estímulo eléctrico al corazón. En el problema 47 de los ejercicios 2.3, vimos que durante el tiempo en que el estímulo eléctrico se aplica al corazón, el voltaje E que atraviesa el corazón satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E.$$

a) Supongamos que durante el intervalo de tiempo de longitud t_1, $(0, t_1)$, el interruptor S está en la posición P mostrada en la figura 2.7.10 y el capacitor se está cargando. Cuando el interruptor cambia a la posición Q en el tiempo t_1 el capacitor se descarga, enviando un impulso al corazón durante el intervalo de tiempo de longitud t_2: $[t_1, t_1 + t_2]$. Por lo tanto, en el intervalo inicial de carga y descarga $(0, t_1 + t_2)$ el voltaje hacia el corazón en realidad es modelado por la ecuación diferencial definida por tramos

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_1 \\ -\dfrac{1}{RC}E, & t_1 \le t < t_1 + t_2. \end{cases}$$

Al moverse S entre P y Q, la carga y la descarga en los intervalos de tiempo de duración t_1 y t_2 se repiten de manera indefinida. Suponga que $t_1 = 4$ s, $t_2 = 2$ s, $E_0 = 12$ V y $E(0) = 0$, $E(4) = 12$, $E(6) = 0$, $E(10) = 12$, $E(12) = 0$, y así sucesivamente. Resuelva para $E(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 24$.

b) Supongamos para el mismo caso que $R = C = 1$. Utilice una gráfica para dibujar la solución de PVI en el inciso *a*) en el intervalo $0 \le t \le 24$.

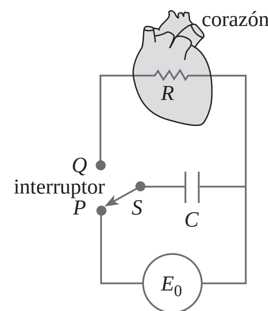


FIGURA 2.7.10 Modelo de un marcapasos para el problema 47

48. Caja deslizante

a) Una caja de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado y forma un ángulo θ con la horizontal como se muestra en la **FIGURA 2.7.11**. Encuentre una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de la caja en el tiempo t en cada uno de los siguientes tres casos:

i) Sin fricción deslizante y sin resistencia del aire.
ii) Con fricción deslizante y sin resistencia del aire.
iii) Con fricción deslizante y resistencia del aire.

En los casos *ii*) y *iii*), use el hecho de que la fuerza de fricción opuesta al movimiento de la caja es μN, donde μ es el coeficiente de fricción deslizante y N es el componente normal del peso de la caja. En el caso *iii*), suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea.

b) En el inciso *a*) suponga que la caja pesa 96 libras, el ángulo de inclinación del plano es $\theta = 30°$, el coeficiente de fricción deslizante es $\mu = \sqrt{3}/4$, y que la fuerza de retardo adicional debida a la resistencia del aire es numéricamente igual a $\frac{1}{4}v$. Resuelva la ecuación diferencial en cada uno de los tres casos, suponiendo que la caja parte del reposo desde el punto más alto de 50 pies por encima del suelo.

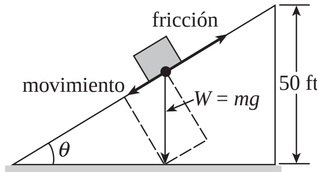


FIGURA 2.7.11 Caja que se desliza hacia abajo por un plano inclinado, problema 48

Tareas para el laboratorio de cómputo

49. Cajas deslizantes—Continuación

a) En el problema 48, $s(t)$ es la distancia del plano inclinado medida desde su punto más alto. Use $ds/dt = v(t)$ y la solución encontrada para cada uno de los tres casos citados en el inciso *b*) del problema 48 para calcular el tiempo que le toma a la caja deslizarse completamente por el plano inclinado. Una aplicación de un CAS para buscar raíces podría serle de utilidad aquí.

b) En el caso de que hubiera fricción ($\mu \neq 0$) pero no resistencia del aire, explique por qué la caja no se deslizaría por el plano partiendo del *reposo* desde el punto más alto por encima del suelo cuando el ángulo de inclinación θ satisface $\tan\theta \leq \mu$.

c) La caja se deslizará hacia abajo sobre el plano cuando $\tan\theta \leq \mu$ si se le imprime una velocidad inicial $v(0) = v_0 > 0$. Suponga que $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23°$. Verifique si $\tan\theta \leq \mu$. ¿Qué tanto se deslizará la caja por el plano si $v_0 = 1$ ft/s?

d) Mediante los valores de $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23°$, aproxime la velocidad inicial más pequeña v_0 que se pueda dar a la caja de manera que, desde el punto más alto de 50 pies por encima del suelo, se deslice completamente hacia abajo por el plano inclinado. Después encuentre el tiempo correspondiente que le toma deslizarse por el plano.

46. Todo lo que sube...

a) Es bien sabido que el modelo donde se ignora la resistencia del aire, inciso *a*) del problema 36, pronostica que el tiempo t_a que le toma a la bala de cañón alcanzar su altura máxima es similar al tiempo t_d que le toma caer desde la altura máxima hasta el suelo. Además, la magnitud de la velocidad del impacto v_i será igual a la velocidad inicial v_0 de la bala. Verifique ambos resultados.

b) Después, mediante el modelo del problema 37 que toma en cuenta la resistencia del aire, compare el valor de t_a con respecto a t_d y el valor de la magnitud de v_i con respecto a v_0. Una aplicación de un CAS para buscar raíces (o una calculadora de gráficas) podría serle de utilidad.

2.8 Modelos no lineales

Introducción Terminamos nuestro análisis de las ecuaciones diferenciales únicas de primer orden con el examen de algunos modelos matemáticos no lineales.

Dinámica poblacional Si $P(t)$ denota el tamaño de una población en el tiempo t, el modelo para calcular el crecimiento exponencial comienza con el supuesto de que $dP/dt = kP$ para cierta $k > 0$. En este modelo, la **tasa de crecimiento relativa** o **específica**, definida por

$$\frac{dP/dt}{P} \tag{1}$$

se supone como una constante k. Casos reales de crecimiento exponencial durante largos periodos son difíciles de encontrar, debido a que los limitados recursos del entorno ejercen en algún momento restricciones sobre el crecimiento de una población. Por lo tanto, se puede esperar que (1) disminuya a medida que P aumenta en tamaño.

El supuesto de que la tasa a la cual una población crece (o disminuye) depende sólo del número presente y no de mecanismos dependientes del tiempo como los fenómenos estacionales (véase el problema 33 en los ejercicios 1.3) se puede expresar como

$$\frac{dP/dt}{P} = f(P) \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = Pf(P). \tag{2}$$

La ecuación diferencial dada en (2), que por lo general se supone en los modelos de poblaciones animales, se denomina **hipótesis de dependencia de la densidad**.

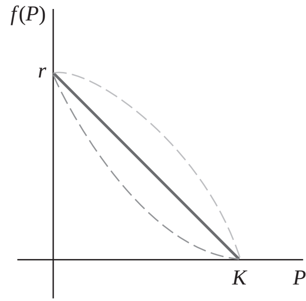


FIGURA 2.8.1 Supuesto más simple de que $f(P)$ es una línea recta

■ **Ecuación logística** Suponga que un entorno es capaz de dar sustento a solamente un número fijo de individuos K presentes en su población. La cantidad K se conoce como **capacidad de soporte** del entorno. Por lo tanto, para la función f dada en (2) tenemos $f(K) = 0$ y simplemente suponemos que $f(0) = r$. La **FIGURA 2.8.1** muestra tres funciones f que satisfacen estas dos condiciones. El supuesto más simple que podemos hacer es que $f(P)$ es lineal —es decir, $f(P) = c_1P + c_2$—. Si usamos las condiciones $f(0) = r$ y $f(K) = 0$, encontraremos a su vez que $c_2 = r$, $c_1 = -r/K$, y entonces f asume la forma de $f(P) = r - (r/K)P$. La ecuación (2) se convierte en

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right). \tag{3}$$

Al volver a designar las constantes, la ecuación no lineal (3) es igual que

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP). \tag{4}$$

Alrededor de 1840, el matemático y biólogo belga P.F. Verhulst se interesó en los modelos matemáticos necesarios para predecir las poblaciones humanas de diferentes países. Una de las ecuaciones de su estudio fue la (4), donde $a > 0$, $b > 0$. La ecuación (4) se llegó a conocer como **ecuación logística** y su solución se denominó **función logística**. La gráfica de una función logística se denomina **curva logística**.

La ecuación diferencial lineal $dP/dt = kP$ no ofrece un modelo muy preciso de la población cuando ésta es muy grande. Las condiciones de sobrepoblación, con sus resultantes efectos perjudiciales para el entorno, como la contaminación y las demandas excesivas y competitivas por el alimento y el combustible, pueden tener un efecto inhibidor sobre el crecimiento poblacional. Como veremos ahora, la solución de (4) que satisface la condición inicial $P(0) = P_0$, donde $0 < P_0 < a/b$, está acotada cuando $t \to \infty$. Si escribimos nuevamente (4) como $dP/dt = aP - bP^2$, el término no lineal $-bP^2$, $b > 0$, puede reinterpretarse como un término de "inhibición" o "competencia". También, en la mayoría de las aplicaciones, la constante positiva a es mucho mayor que la constante b.

Las curvas logísticas han demostrado ser muy precisas para pronosticar los patrones de crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas acuáticas (*Daphnia*) y moscos de la fruta (*Drosophila*) en un espacio limitado.

■ **Solución de la ecuación logística** Un método apropiado para resolver (4) es mediante la separación de variables. Al descomponer el lado izquierdo de $dP/P(a - bP) = dt$ en fracciones parciales e integrar se tiene

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a - bP}\right) dP = dt$$

$$\frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a - bP| = t + c$$

$$\ln\left|\frac{P}{a - bP}\right| = at + ac$$

$$\frac{P}{a - bP} = c_1 e^{at}.$$

De la última ecuación se deriva

$$P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

Si $P(0) = P_0$, $P_0 \neq a/b$, encontramos $c_1 = P_0/(a - bP_0)$ y, por lo tanto, después de sustituir y simplificar, la solución se convierte en

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \tag{5}$$

■ **Gráficas de $P(t)$** La forma básica de la gráfica de la función logística $P(t)$ puede obtenerse sin demasiado esfuerzo. Aunque la variable t por lo general representa el tiempo y rara vez

nos interesamos en aplicaciones donde $t < 0$, es muy importante incluir este intervalo cuando presentamos las diferentes gráficas de P. De (5) se deduce que

$$P(t) \to \frac{aP_0}{bP_0} = \frac{a}{b} \text{ cuando } t \to \infty \quad \text{y} \quad P(t) \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty.$$

La línea discontinua $P = a/2b$ mostrada en la **FIGURA 2.8.2** corresponde a la ordenada de un punto de inflexión de la curva logística. Para mostrar esto, diferenciamos (4) mediante la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= P\left(-b\,\frac{dP}{dt}\right) + (a - bP)\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt}(a - 2bP)\\ &= P(a - bP)(a - 2bP)\\ &= 2b^2P\left(P - \frac{a}{b}\right)\left(P - \frac{a}{2b}\right).\end{aligned}$$

De sus conocimientos de cálculo, recuerde que los puntos donde $d^2P/dt^2 = 0$ son posibles puntos de inflexión, pero evidentemente $P = 0$ y $P = a/b$ se pueden descartar. Dado que $P = a/2b$ es el único valor posible para ordenadas donde la concavidad de la gráfica puede cambiar. Para $0 < P < a/2b$ se deduce que $P'' > 0$ y $a/2b < P < a/b$ implica que $P'' < 0$. Por lo tanto, cuando leemos de izquierda a derecha, la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en el punto que corresponde a $P = a/2b$. Cuando el valor inicial satisface $0 < P_0 < a/2b$, la gráfica de $P(t)$ asume la forma de una S, como vemos en la figura 2.8.2*a*). Para $a/2b < P_0 < a/b$, la gráfica sigue teniendo figura de S, pero el punto de inflexión ocurre en un valor negativo de t, según muestra la figura 2.8.2*b*).

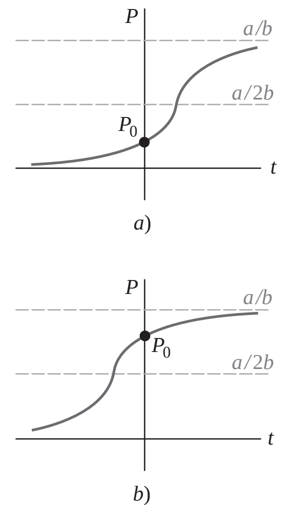


FIGURA 2.8.2 Curvas logísticas para condiciones iniciales diferentes

Ya hemos visto la ecuación (4) antes de la (5) de la sección 1.3 en la forma $dx/dt = kx(n + 1 - x)$, $k > 0$. Esta ecuación diferencial ofrece un modelo razonable para describir la propagación de una epidemia causada inicialmente al introducir un individuo infectado a una población estática. La solución $x(t)$ representa el número de individuos infectados con la enfermedad en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Crecimiento logístico

Suponga que un estudiante portador de un virus regresa a una comunidad universitaria aislada cuya población es de 1 000 individuos. Si se supone que la tasa a la cual el virus se propaga es proporcional no sólo al número x de estudiantes infectados sino también al número de estudiantes no infectados, determine el número de estudiantes infectados después de 6 días si se observa además que pasados 4 días $x(4) = 50$.

Solución Si suponemos que nadie abandona la comunidad durante la enfermedad, debemos resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x), \quad x(0) = 1.$$

Al hacer las identificaciones $a = 1\,000k$ y $b = k$, a partir de (5) se deriva inmediatamente que

$$x(t) = \frac{1\,000k}{k + 999ke^{-1\,000kt}} = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-1\,000kt}}.$$

Ahora, empleando la información $x(4) = 50$, determinamos k a partir de

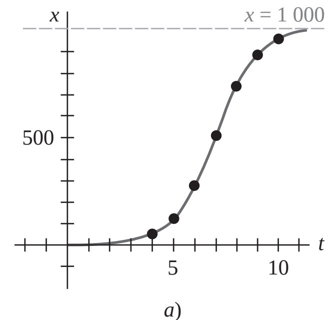
$$50 = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-4\,000k}}.$$

Encontramos $-1\,000k = \frac{1}{4}\ln\frac{19}{999} = -0.9906$. Por lo tanto,

$$x(t) = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Por último, $$x(6) = \frac{1\,000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ estudiantes.}$$

Los valores adicionales calculados de $x(t)$ se proporcionan en la tabla de la **FIGURA 2.8.3*b*)**. ≡



t (días)	*x* (número de infectados)
4	50 (observados)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

b)

FIGURA 2.8.3 El número de estudiantes infectados en el ejemplo 1

Modificaciones de la ecuación logística Existen muchas variaciones de la ecuación logística. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h \qquad \text{y} \qquad \frac{dP}{dt} = P(a - bP) + h \tag{6}$$

podrían servir, a su vez, como modelos para la población existente en un criadero de peces donde el pescado se **coseche** o **reabastezca** a la tasa h. Cuando $h > 0$ es una constante, las ecuaciones diferenciales incluidas en (6) pueden analizarse fácilmente de manera cualitativa o resolverse mediante separación de variables. Las ecuaciones de (6) también pueden servir como modelos de población humana, ya sea incrementados por la inmigración o disminuidos por la emigración. En (6), la tasa h podría ser una función del tiempo t o ser dependiente de la población; por ejemplo, la cosecha podría realizarse de manera periódica en el transcurso del tiempo o efectuarse a una tasa proporcional a la población P en el tiempo t. En este último caso, el modelo sería parecido a $P' = P(a - bP) - cP$, $c > 0$. La población humana de una comunidad puede cambiar a causa de la inmigración, de tal manera que la contribución debida a la inmigración sea grande cuando la población P de la comunidad sea pequeña en sí misma, pero entonces la contribución de la inmigración puede ser pequeña cuando P es grande; entonces, un modelo razonable para la población de la comunidad es $P' = P(a - bP) + ce^{-kP}$, $c > 0$, $k > 0$. Otra ecuación de la forma dada en (2),

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P), \tag{7}$$

es una modificación de la ecuación logística conocida como **ecuación diferencial de Gompertz**. Esta ED se usa algunas veces como un modelo en el estudio del crecimiento o disminución de una población, en el crecimiento de tumores sólidos y en diversos tipos de predicciones actuariales. Véanse los problemas 5 a 8 en los ejercicios 2.8.

Reacciones químicas Suponga que a gramos del químico A se combinan con b gramos del químico B. Si hay M partes de A y N partes de B formadas en el compuesto y $X(t)$ es la cantidad de gramos del químico C formado, entonces la cantidad de gramos de los químicos A y B restantes en cualquier tiempo es, respectivamente,

$$a - \frac{M}{M+N}X \qquad \text{y} \qquad b - \frac{N}{M+N}X.$$

Mediante la ley de acción de la masa, la tasa de la reacción satisface

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(a - \frac{M}{M+N}X\right)\left(b - \frac{N}{M+N}X\right). \tag{8}$$

Si separamos $M/(M + N)$ del primer factor y $N/(M + N)$ del segundo e introducimos una constante de proporcionalidad $k > 0$, (8) tendrá la forma

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{9}$$

donde $\alpha = a(M + N)/M$ y $\beta = b(M + N)/N$. Recuerde que en la expresión (6) de la sección 1.3 una reacción química regida por la ecuación diferencial no lineal (9) es una **reacción de segundo orden**.

EJEMPLO 2 Reacción química de segundo orden

Cuando se combinan dos químicos A y B se forma un compuesto C. La reacción producida entre ambos químicos es tal que para cada gramo de A se utilizan 4 gramos de B. Se observa que en 10 minutos se forman 30 gramos del compuesto C. Determine la cantidad de C en el tiempo t si la velocidad de la reacción es proporcional a las cantidades de A y B restantes y si inicialmente había 50 gramos de A y 32 gramos de B. ¿Cuánto compuesto C está presente a los 15 minutos? Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

Solución Digamos que $X(t)$ denota la cantidad de gramos del compuesto C presente en el tiempo t. Claramente, $X(0) = 0$ g y $X(10) = 30$ g.

Si, por ejemplo, están presentes 2 gramos del compuesto *C*, debimos haber usado, digamos, *a* gramos de *A* y *b* gramos de *B* de manera que $a + b = 2$ y $b = 4a$. Por lo tanto, debemos usar $a = \frac{2}{5} = 2(\frac{1}{5})$ g del químico *A* y $b = \frac{8}{5} = 2(\frac{4}{5})$ g del químico *B*. En general, para *X* gramos de *C* debemos usar

$$\frac{1}{5}X \text{ gramos de } A \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{5}X \text{ gramos de } B.$$

Las cantidades de *A* y *B* restantes en cualquier momento son entonces

$$50 - \frac{1}{5}X \qquad \text{y} \qquad 32 - \frac{4}{5}X,$$

respectivamente.

Ahora sabemos que la velocidad a la cual se forma el compuesto *C* satisface

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(50 - \frac{1}{5}X\right)\left(32 - \frac{4}{5}X\right).$$

Para simplificar la operación algebraica siguiente, dividimos el primer término entre $\frac{1}{5}$ y el segundo entre $\frac{4}{5}$ y después introducimos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X).$$

Mediante separación de variables y fracciones parciales podemos escribir

$$-\frac{\frac{1}{210}}{250 - X}\,dX + \frac{\frac{1}{210}}{40 - X}\,dX = k\,dt.$$

Al integrar se tiene

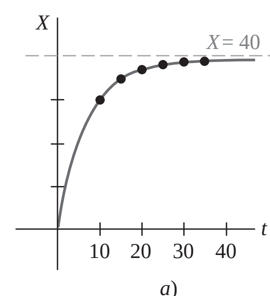
$$\ln\left|\frac{250 - X}{40 - X}\right| = 210kt + c_1 \quad \text{o} \quad \frac{250 - X}{40 - X} = c_2e^{210kt}. \tag{10}$$

Cuando $t = 0$, $X = 0$, entonces en este punto se deduce que $c_2 = \frac{25}{4}$. Aplicando $X = 30$ g en $t = 10$, encontramos $210k = \frac{1}{10}\ln\frac{88}{25} = 0.1258$. Con esta información resolvemos la última ecuación dada en (10) para *X*:

$$X(t) = 1\,000\,\frac{1 - e^{-0.1258t}}{25 - 4e^{-0.1258t}}. \tag{11}$$

El comportamiento de *X* en función del tiempo se muestra en la **FIGURA 2.8.4**. De la tabla acompañante y de (11) resulta claro que $X \to 40$ cuando $t \to \infty$. Esto significa que se forman 40 gramos de compuesto *C* y queda

$$50 - \frac{1}{5}(40) = 42 \text{ g de } A \qquad \text{y} \qquad 32 - \frac{4}{5}(40) = 0 \text{ g de } B. \qquad ≡$$



a)

t (min)	*X* (g)
10	30 (medidos)
15	34.78
20	37.25
25	38.54
30	39.22
35	39.59

b)

FIGURA 2.8.4 Cantidad de componente *C* en el ejemplo 2

Comentarios

La integral indefinida $\int \frac{du}{a^2 - u^2}$ puede evaluarse mediante logaritmos, tangente hiperbólica inversa o cotangente hiperbólica inversa. Por ejemplo, de los dos resultados

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c, \qquad |u| < a \tag{12}$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + c, \quad |u| \neq a \tag{13}$$

(12) podría ser conveniente para los problemas 15 y 24 de los ejercicios 2.8, mientras que sería preferible aplicar (13) al problema 25.

2.8 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

Ecuación logística

1. La cantidad $N(t)$ de supermercados que utilizan un sistema computarizado de cobro en cajas en todo el país se describe mediante el problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - 0.0005N), \quad N(0) = 1.$$

a) Utilice el concepto de retrato fase estudiado en la sección 2.1 para predecir cuántos supermercados se espera que adopten el nuevo procedimiento durante un largo periodo. Trace a mano una curva solución para el problema de valor inicial dado.

b) Resuelva el problema de valor inicial y después utilice una herramienta de graficación para verificar la curva solución trazada en el inciso *a*). ¿Cuántas compañías se espera que adopten la nueva tecnología cuando $t = 10$?

2. En cierta comunidad, la cantidad $N(t)$ de personas expuestas a una publicidad en particular está regida por una ecuación logística. En un inicio $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1\,000$. Resuelva para $N(t)$ si se pronostica que el número limitante de personas que ve el anuncio es de 50 000.

3. Un modelo de la población $P(t)$ que vive en un suburbio de una gran ciudad está dado por el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5\,000,$$

donde t se mide en meses. ¿Cuál es el valor limitante de la población? ¿En qué momento la población será igual a una mitad de este valor limitante?

4. ***a***) En la tabla siguiente se presentan datos de los censos poblacionales practicados en Estados Unidos entre 1790 y 1950. Elabore un modelo logístico de población utilizando los datos de 1790, 1850 y 1910.

Año	Población (en millones)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

b) Elabore una tabla en la que se compare la población del censo real con la pronosticada por el modelo formulado en el inciso *a*). Compare el error y el porcentaje de error para cada entrada par.

Modificaciones de la ecuación logística

5. ***a***) Si en un criadero de peces se cosecha una cantidad constante h por unidad de tiempo, entonces un modelo para la población $P(t)$ del criadero en el tiempo t está dado por

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0,$$

donde a, b, h y P_0 son constantes positivas. Suponga que $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$. Dado que la ED es autónoma, use el concepto de retrato fase de la sección 2.1 para trazar las curvas solución representativas correspondientes a los casos $P_0 > 4$, $1 < P_0 < 4$ y $0 < P_0 < 1$. Determine el comportamiento de largo plazo de la población para cada caso.

b) Resuelva el PVI dado en el inciso *a*). Verifique los resultados de su retrato fase del inciso *a*) mediante una herramienta de graficación para trazar la gráfica de $P(t)$ con una condición inicial tomada de cada uno de los tres intervalos dados.

c) Use la información de los incisos *a*) y *b*) para determinar si la población del criadero se extinguirá en un tiempo finito. De ser así, determine ese tiempo.

6. Examine el modelo de cosecha del problema 5 tanto de forma cualitativa como analítica en el caso de que $a = 5$, $b = 1$ y $h = \frac{25}{4}$. Determine si la población se extingue en un tiempo finito. Si es así, determine ese tiempo.

7. Repita el problema 6 en el caso de que $a = 5$, $b = 1$, $h = 7$.

8. ***a***) Suponga que $a = b = 1$ en la ecuación diferencial de Gompertz (7). Como la ED es autónoma, use el concepto del retrato fase de la sección 2.1 para trazar las curvas solución representativas correspondientes a los casos $P_0 > e$ y $0 < P_0 < e$.

b) Suponga que $a = 1$, $b = -1$ en (7). Use un nuevo retrato fase para trazar las curvas solución representativas que correspondan a los casos $P_0 > e^{-1}$ y $0 < P_0 < e^{-1}$.

c) Encuentre una solución explícita de (7) sujeta a $P(0) = P_0$.

Reacciones químicas

9. Dos productos químicos A y B se combinan para formar un nuevo producto químico C. La tasa, o velocidad, de la reacción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de A y B que no se han convertido en el químico C. En un principio hay 40 gramos de A y 50 gramos de B, y para cada gramo de B se usan 2 gramos de A. Se observa que se forman 10 gramos de C en 5 minutos. ¿Cuánto se forma en 20 minutos?

¿Cuál es la cantidad limitante de C después de un tiempo largo? ¿Qué cantidad de los químicos A y B permanece después de un gran tiempo?

10. Resuelva el problema 9 si en un inicio están presentes 100 gramos del químico A. ¿En qué tiempo el químico C está a medio formar?

Diversos modelos no lineales

11. Tanque cilíndrico con fugas Un tanque cilíndrico al tope de su capacidad está goteando agua por un orificio circular localizado en su parte inferior. Como se vio en (10) de la sección 1.3, cuando se ignoran la fricción y la contracción del agua en el orificio, la altura h de agua en el tanque está descrita por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde A_w y A_h son las áreas representativas del agua y del orificio, respectivamente.

a) Resuelva para $h(t)$ si la altura inicial del agua es H. Trace a mano la gráfica de $h(t)$ y de su intervalo I de definición en términos de los símbolos A_w, A_h y H. Use $g = 32$ ft/s^2.

b) Suponga que el tanque tiene 10 pies de altura, radio de 2 pies, y que el agujero circular tiene radio de $\frac{1}{2}$ pulgada. Si en un inicio el tanque está lleno, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse?

12. Tanque cilíndrico con fugas. Continuación Cuando se toman en cuenta la fricción y la contracción del agua en el orificio, el modelo desarrollado en el problema 11 se convierte en

$$\frac{dh}{dt} = -c\,\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde $0 < c < 1$. ¿Cuánto tardará en vaciarse el tanque del problema 11*b*) si $c = 0.6$? Véase el problema 13 en los ejercicios 1.3.

13. Tanque cónico con fuga Un tanque en forma de cono cilíndrico recto y lleno al tope, con el vértice hacia abajo, está goteando agua por un orificio circular localizado en la parte inferior.

a) Suponga que el tanque tiene 20 pies de altura y radio de 8 pies, y el orificio circular tiene radio de 2 pulgadas. En el problema 14 de los ejercicios 1.3 se le pide demostrar que la ecuación diferencial representativa de la altura h del agua que gotea de un tanque es

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{5}{6h^{3/2}}.$$

En este modelo, la fricción y la contracción del agua en el orificio se tomaron en cuenta con $c = 0.6$ y g es igual a 32 ft/s^2. Véase la figura 1.3.12. Si el tanque está lleno al principio, ¿cuánto tardará en vaciarse?

b) Suponga que el tanque tiene un ángulo de 60° en el vértice, y el orificio circular tiene radio de 2 pulgadas. Determine la ecuación general que representa la altura h del agua. Use $c = 0.6$ y $g = 32$ ft/s^2. Si la altura del agua es inicialmente de 9 pies, ¿cuánto le llevará al tanque vaciarse?

14. Tanque cónico invertido Suponga que el tanque cónico del problema 13*a*) está invertido, como ilustra la **FIGURA 2.8.5**, y el agua gotea por un orificio circular, con radio de 2 pulgadas, localizado en el centro de la base circular. ¿El tiempo que le lleva a este tanque lleno vaciarse será el mismo que para el tanque del problema 13 cuyo vértice está hacia abajo? Suponga que el coeficiente de fricción/contracción es de $c = 0.6$ y $g = 32$ ft/s^2.

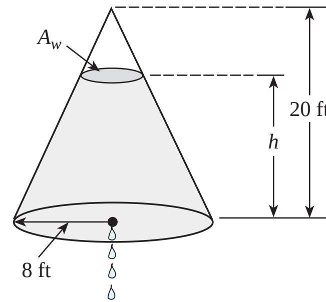


FIGURA 2.8.5 Tanque cónico invertido del problema 14

15. Resistencia del aire Una ecuación diferencial que representa la velocidad v de una masa m que cae y está sujeta a la resistencia del aire, la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. La dirección positiva es hacia abajo.

a) Resuelva esta ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

b) Use la solución del inciso *a*) para determinar la velocidad, limitante o terminal, de la masa. En el problema 39 de los ejercicios 2.1 vimos cómo determinar la velocidad terminal sin resolver la ecuación diferencial.

c) Si la distancia s, medida desde el punto donde la masa fue soltada por encima del suelo, está relacionada con la velocidad v mediante $ds/dt = v(t)$, encuentre una expresión explícita para $s(t)$ si $s(0) = 0$.

16. ¿Qué tan alto? Resistencia no lineal al aire Considere la bala de cañón de 16 libras disparada verticalmente hacia arriba y presentada en los problemas 36 y 37 de los ejercicios 2.7, con velocidad inicial $v_0 = 300$ ft/s. Determine la altura máxima que alcanza esta bala cuando se supone que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Suponga que la dirección positiva es ascendente y que $k = 0.0003$. [*Sugerencia:* En el problema 15, modifique ligeramente la ED.]

17. Esa sensación de hundimiento

a) Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de una masa m que se hunde en el agua, la cual imparte una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y también ejerce una fuerza flotante ascendente cuya magnitud está dada por el principio de Arquímedes. Véase el problema 18 de los ejercicios 1.3. Suponga que la dirección positiva es hacia abajo.

b) Resuelva la ecuación diferencial determinada en el inciso *a*).

c) Determine la velocidad limitante o terminal de la masa que se hunde.

18. Recolector solar La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

describe la forma de una curva plana C que reflejará todos los haces de luz entrantes al mismo punto y podría ser un modelo del espejo de un telescopio reflectante, una antena satélite o un recolector solar. Véase el problema 29 en los ejercicios 1.3. Hay varias formas de resolver esta ecuación diferencial.

a) Verifique si la ecuación diferencial es homogénea (véase la sección 2.5). Demuestre que la sustitución $y = ux$ resulta en

$$\frac{u\,du}{\sqrt{1 + u^2}(1 - \sqrt{1 + u^2})} = \frac{dx}{x}.$$

Use un CAS (u otra sustitución apropiada) para integrar el lado izquierdo de la ecuación. Demuestre que la curva C debe ser una parábola con centro en el origen y simétrica con respecto al eje x.

b) Demuestre que la primera ecuación diferencial puede resolverse mediante la sustitución $u = x^2 + y^2$.

19. Tsunami

a) Un modelo simple de la forma de un tsunami, u ola de la marea, está dada por

$$\frac{dW}{dx} = W\sqrt{4 - 2W},$$

donde $W(x) > 0$ es la altura de la ola expresada en función de su posición relacionada con un punto en alta mar. Mediante el análisis, encuentre todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Resuelva la ecuación diferencial dada en el inciso *a*). Un CAS le podría ser de utilidad para efectuar la integración.

c) Use una herramienta de graficación para obtener las gráficas de todas las soluciones que satisfagan la condición inicial $W(0) = 2$.

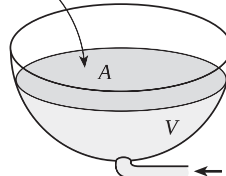
20. Evaporación Un estanque decorativo de exterior con la forma de un tanque hemisférico va a llenarse con agua mediante una entrada de agua colocada en su parte inferior. Suponga que el radio R del tanque es de 10 pies, que el agua es bombeada hacia dentro a una tasa de π ft^3/min y que el tanque está vacío al principio. Véase la **FIGURA 2.8.6**. A medida que el tanque se llena, pierde agua por evaporación. Suponga que la tasa de evaporación es proporcional al área A de la superficie del agua y que la constante de proporcionalidad es $k = 0.01$.

a) La tasa de cambio dV/dt del volumen de agua en el tiempo t es una tasa neta; úsela para determinar una ecuación diferencial de la altura h del agua en el tiempo t. El volumen del agua mostrado en la figura es $V = \pi Rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, donde $R = 10$. Exprese el área de la superficie del agua $A = \pi r^2$ en términos de h.

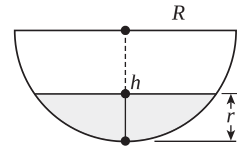
b) Resuelva la ecuación diferencial determinada en el inciso *a*). Grafique la solución.

c) Si no hay evaporación, ¿cuánto tiempo le tomará llenarse al tanque?

d) Con evaporación, ¿cuál es la profundidad del agua en el tiempo encontrado en el inciso *c*)? ¿Alguna vez se llenará el tanque? Demuestre su aseveración.



a) Tanque hemisférico



b) Corte transversal del tanque

FIGURA 2.8.6 Estanque examinado en el problema 20

Tareas para el laboratorio de cómputo

21. Recta de regresión Lea la documentación de su CAS que trata acerca de las *nubes de puntos* (o *diagramas de dispersión*) y *ajuste lineal de los mínimos cuadrados*. La línea recta que se ajusta mejor a un conjunto de puntos de datos se denomina **recta de regresión** o **recta de mínimos cuadrados**. La tarea de usted es construir un modelo logístico para la población de Estados Unidos; en este modelo tiene que definir la $f(P)$ de la expresión (2) como la ecuación de una recta de regresión con base en los datos poblacionales dados en la tabla del problema 4. Una forma de hacer esto es aproximar el lado derecho $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ de la primera ecuación dada en (2) usando el cociente de diferencia hacia delante en lugar de dP/dt:

$$Q(t) = \frac{1}{P(t)}\frac{P(t + h) - P(t)}{h}.$$

a) Elabore una tabla de los valores t, $P(t)$ y $Q(t)$ usando $t = 0, 10, 20, \ldots, 160$ y $h = 10$. Por ejemplo, la primera línea de la tabla debe contener $t = 0$, $P(0)$ y $Q(0)$. Con $P(0) = 3.929$ y $P(10) = 5.308$,

$$Q(0) = \frac{1}{P(0)}\frac{P(10) - P(0)}{10} = 0.035.$$

Observe que $Q(160)$ depende de $P(170)$, que es la población del censo para 1960. Busque este valor.

b) Use un CAS para obtener un diagrama de dispersión de los datos $(P(t), Q(t))$ calculados en el inciso *a*). También use un CAS para encontrar una ecuación de la recta de regresión y sobreponer su gráfica al diagrama de dispersión.

c) Construya un modelo logístico $dP/dt = Pf(P)$, donde $f(P)$ sea la ecuación de la línea de regresión encontrada en el inciso *b*).

d) Resuelva el modelo producido en el inciso *c*) mediante la condición inicial $P(0) = 3.929$.

e) Use un CAS para obtener otro diagrama de dispersión, esta vez de los pares ordenados $(t, P(t))$ de su tabla elaborada en el inciso *a*). Con el CAS, sobreponga la gráfica de la solución *d*) al diagrama de dispersión.

f) Consiga los datos de los censos poblacionales estadounidenses de 1970, 1980 y 1990. ¿Qué población pronosti-

ca para esos años el modelo logístico del inciso *c*)? ¿Qué anticipa el modelo para la población estadounidense $P(t)$ cuando $t \to \infty$?

22. Modelo e inmigración

a) En los ejemplos 3 y 4 de la sección 2.1, vimos que cualquier solución $P(t)$ de (4) posee el comportamiento asintótico $P(t) \to a/b$ cuando $t \to \infty$ para $P_0 > a/b$ y para $0 < P_0 < a/b$; en consecuencia, la solución de equilibrio $P = a/b$ se denomina atrayente. Use una aplicación CAS para buscar raíces (o una calculadora gráfica) y aproximar la solución de equilibrio del modelo de inmigración

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P) + 0.3e^{-P}.$$

b) Use una herramienta de graficación para trazar la función $F(P) = P(1 - P) + 0.3e^{-P}$. Explique la forma en que puede usarse la gráfica obtenida para determinar si el número que se encuentra en el inciso *a*) es un atractor.

c) Use un programa de solución numérica para comparar las curvas solución a los problemas de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P), \quad P(0) = P_0$$

para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$ con las curvas solución de los problemas de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P) + 0.3e^{-P}, \quad P(0) = P_0$$

para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$. Sobreponga todas las curvas sobre los mismos ejes coordenados, pero, si fuera posible, utilice un color diferente para trazar las curvas del segundo problema de valor inicial. Sobre un periodo largo, ¿qué incremento porcentual en la población pronosticará el modelo de inmigración comparado con el modelo logístico?

23. Todo lo que sube... En el problema 16, establezcamos t_a como el tiempo que le lleva a una bala de cañón alcanzar su altura máxima y t_d como el tiempo que le toma caer desde esa máxima altura hasta el suelo. Compare el valor de t_a con el valor de t_d y la magnitud del impacto de la velocidad v_i con la velocidad inicial v_0. Véase el problema 50 en los ejercicios 2.7. Tal vez le sería útil una aplicación CAS para buscar raíces. [*Sugerencia:* Use el modelo del problema 15 para cuando la bala de cañón va cayendo.]

24. Paracaidismo Una paracaidista va equipada con un cronómetro y un altímetro. Ella abre su paracaídas 25 segundos después que sale del avión, planeando a una altitud de 20 000 pies, y observa que su altitud es de 14 800 pies. Suponga que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, la velocidad inicial de la paracaidista a partir de que abandona el avión es de cero y $g = 32$ ft/s^2.

a) Encuentre la distancia $s(t)$, medida desde el avión, que la paracaidista ha recorrido durante la caída libre en el tiempo t. [*Sugerencia:* La constante de proporcionalidad k en el modelo dado en el problema 15 no está especificada. Use la expresión de velocidad terminal v_t obtenida en el inciso *b*) del problema 15 para eliminar k del PVI. Después resuelva para v_t.]

b) ¿Qué tan lejos cae la paracaidista y cuál es su velocidad en $t = 15$ segundos?

25. Tocar fondo Un helicóptero sobrevuela a 500 pies por encima de un gran tanque lleno de líquido (no agua). Un objeto compacto denso que pesa 160 libras se deja caer (desde el reposo) del helicóptero al líquido. Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea v mientras el objeto está en el aire y que el amortiguamiento viscoso es proporcional a v^2 después que el objeto ha entrado al líquido. Para el aire, suponga $k = \frac{1}{4}$ y para el líquido $k = 0.1$. La dirección positiva es hacia abajo. Si el tanque tiene 75 pies de altura, determine el tiempo y la velocidad para el impacto cuando el objeto toca el fondo del tanque. [*Sugerencia:* Piense en términos de dos problemas de valor inicial distintos. Si emplea (13), tenga cuidado en eliminar el signo de valor absoluto. Debe comparar la velocidad del objeto cuando toca el líquido —la velocidad inicial para el segundo problema— con la velocidad terminal v_t del objeto que cae a través del líquido.]

2.9 Modelación con sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Introducción En la presente sección vamos a analizar modelos matemáticos basados en algunos de los temas estudiados en las dos secciones anteriores. Esta sección será similar a la 1.3 en cuanto a que sólo analizaremos los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos, pero no vamos a resolver ninguno de esos modelos. Hay dos buenas razones por las que no resolveremos sistemas en este punto: primero, aún no contamos con las herramientas matemáticas necesarias para resolver sistemas; y segundo, algunos de los sistemas que estudiamos no se pueden resolver de manera analítica. En el capítulo 8 examinaremos métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior en los capítulos 3 y 4.

Sistemas Hasta ahora todos los modelos matemáticos que hemos considerado han sido ecuaciones diferenciales individuales. Una ecuación diferencial individual puede describir

una sola población de un entorno; pero si hay, digamos, dos especies en interacción, y quizá en competencia, viviendo en el mismo entorno (por ejemplo, conejos y zorros), entonces el modelo para sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ *podría* ser un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= g_1(t, x, y)\\ \frac{dy}{dt} &= g_2(t, x, y).\end{aligned} \tag{1}$$

Cuando g_1 y g_2 son lineales en las variables x y y, es decir,

$$g_1(t, x, y) = c_1x + c_2y + f_1(t) \quad \text{y} \quad g_2(t, x, y) = c_3x + c_4y + f_2(t),$$

se dice que (1) es un **sistema lineal**; y un sistema de ecuaciones diferenciales que no es lineal se dice que es **no lineal**.

■ **Serie radiactiva** En el análisis del decaimiento radiactivo de las secciones 1.3 y 2.7, supusimos que la tasa de decaimiento era proporcional al número $A(t)$ de núcleos presentes en la sustancia en el tiempo t. Cuando una sustancia se desintegra por radiactividad, por lo general no se transmuta en una sustancia estable y entonces el proceso concluye; más bien, la primera sustancia se deteriora para convertirse en otra sustancia radiactiva, la cual a su vez se deteriora en otra tercera sustancia radiactiva, y así sucesivamente. Este proceso, denominado **serie para el decaimiento radiactivo**, continúa hasta que se logra formar un elemento estable. Por ejemplo, la serie de decaimiento del uranio es U-238 → Th-234 → · · · → Pb-206, donde Pb-206 es un isótopo estable del plomo. Las vidas medias de los diferentes elementos presentes en una serie radiactiva pueden ir desde miles de millones de años (4.5×10^9 años para el U-238) hasta una fracción de segundo. Suponga una serie radiactiva descrita de manera esquemática por $X \xrightarrow{-\lambda_1} Y \xrightarrow{-\lambda_2} Z$, donde $k_1 = -\lambda_1 < 0$ y $k_2 = -\lambda_2 < 0$ son las constantes de decaimiento de las sustancias X y Y, respectivamente, y Z es un elemento estable. Suponga también que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ denotan las cantidades restantes de las sustancias X, Y y Z, respectivamente, en el tiempo t. El decaimiento del elemento X se describe mediante

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$

mientras que la tasa a la cual decae el segundo elemento, Y, es la tasa neta,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

puesto que Y está *ganando* átomos del decaimiento de X y al mismo tiempo *pierde* átomos debido a su propio decaimiento. Como Z es un elemento estable, simplemente está ganando átomos del decaimiento del elemento Y:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

En otras palabras, un modelo de la serie para el decaimiento radiactivo para tres elementos es el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 x\\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1 x - \lambda_2 y\\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_2 y.\end{aligned} \tag{2}$$

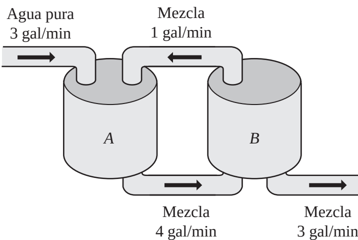


FIGURA 2.9.1 Tanques mezcladores conectados

■ **Mezclas** Considere los dos tanques mostrados en la **FIGURA 2.9.1**. Para fines de este análisis, suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en la cual se han disuelto 25 libras de sal, y que el tanque B contiene 50 galones de agua pura. Un líquido se bombea hacia dentro y fuera de los tanques como indica la figura; se supone que el líquido que se intercambia entre los dos tanques y el líquido bombeado hacia fuera del tanque B está mezclado perfectamente. Deseamos construir un modelo matemático para describir la cantidad de libras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal presente en los tanques A y B, respectivamente, en el tiempo t.

Mediante un análisis similar al de la página 20 en la sección 1.3 y el ejemplo 5 de la sección 2.7, vemos que la tasa neta de cambio de $x_1(t)$ para el tanque A es

$$\frac{dx_1}{dt} = \overbrace{(3 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal}) + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_2}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{velocidad de entrada de la sal}} - \overbrace{(4 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_1}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{velocidad de salida de la sal}}$$
$$= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2.$$

De manera similar, para el tanque B, la tasa neta de cambio de $x_2(t)$ es

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cdot \frac{x_1}{50} - 3 \cdot \frac{x_2}{50} - 1 \cdot \frac{x_2}{50} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.$$

Por lo tanto, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \quad \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que el sistema anterior está acompañado de las condiciones iniciales $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

Un modelo depredador-presa Suponga que dos especies diferentes de animales interactúan dentro del mismo entorno o ecosistema, y suponga además que la primera especie se alimenta sólo de vegetales y que el único alimento de la segunda especie es la primera especie. En otras palabras, una especie es el depredador y la otra la presa. Por ejemplo, los lobos cazan al caribú que se alimenta de pasto, los tiburones devoran a los peces pequeños y el búho nival persigue a un roedor del ártico que es conocido como rata campestre. Para fines de este análisis, imaginemos que los depredadores son zorros y las presas conejos.

Digamos que $x(t)$ y $y(t)$ denotan, respectivamente, las poblaciones de zorros y conejos en el tiempo t. Si no hay conejos, entonces podríamos esperar que los zorros, al carecer de un abasto adecuado de alimentos, disminuyan en número de acuerdo con

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad a > 0. \tag{4}$$

No obstante, cuando hay conejos en el entorno, parece razonable que el número de encuentros o interacciones entre estas dos especies por unidad de tiempo sea conjuntamente proporcional a sus poblaciones x y y, es decir, proporcional al producto xy. Por lo tanto, cuando los conejos están presentes hay provisión de alimentos, y de este modo se suman zorros al sistema a una tasa bxy, $b > 0$. Cuando sumamos esta última tasa a (4) obtenemos un modelo para la población del zorro

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy. \tag{5}$$

Por otro lado, donde no hay zorros, entonces los conejos podrían, en el supuesto de que hubiese un abasto ilimitado de comida, aumentar a una tasa proporcional al número de conejos presentes en el tiempo t:

$$\frac{dy}{dt} = dy, \quad d > 0. \tag{6}$$

Pero cuando los zorros están presentes, el modelo de la población de conejos (6) disminuye de acuerdo con cxy, $c > 0$, es decir, baja en función de la tasa a la cual los conejos son comidos durante sus encuentros con los zorros:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy. \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by) \\ \frac{dy}{dt} &= dy - cxy = y(d - cx), \end{aligned} \tag{8}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Este famoso sistema de ecuaciones se conoce como **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**.

Salvo por dos soluciones constantes $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $x(t) = d/c$, $y(t) = a/b$, el sistema no lineal (8) no puede resolverse en términos de funciones elementales. No obstante, podemos analizar tales sistemas de manera cuantitativa y cualitativa. Véanse capítulos 6 y 9.

EJEMPLO 1 Modelo depredador-presa

Suponga que

$$\frac{dx}{dt} = -0.16x + 0.08xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 4.5y - 0.9xy$$

representa un modelo depredador-presa. Dado que estamos manejando poblaciones, tenemos $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. La **FIGURA 2.9.2**, obtenida con ayuda de un programa de solución numérica, muestra las curvas de población típicas de los depredadores y presas de este modelo sobrepuestas sobre los mismos ejes de coordenadas. Las condiciones iniciales usadas fueron $x(0) = 4$, $y(0) = 4$. La curva en negro representa la población $x(t)$ del depredador (zorros) y la curva en gris la población $y(t)$ de la presa (conejos). Observe que el modelo parece pronosticar que ambas poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas en el tiempo. Esto es lógico, pues a medida que el número de presas disminuye, llega un momento en que la población depredadora también disminuye debido a la menor existencia de alimento; pero relacionado con una disminución en la cantidad de depredadores está un incremento en el número de presas; esto a su vez da origen a un mayor número de depredadores, lo cual finalmente ocasiona otra disminución en el número de presas. ≡

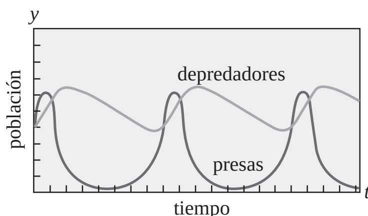


FIGURA 2.9.2 La población de depredadores (negro) y presas (gris) parece ser periódica

Modelos de competencia Ahora suponga que dos especies diferentes de animales ocupan el mismo ecosistema no como depredador y presa, sino como competidores por la obtención de los mismos recursos (como alimentos y espacio para habitar) presentes en el sistema. En ausencia del otro, supongamos que la tasa a la que la población crece está dada por

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = cy, \tag{9}$$

respectivamente.

Dado que las dos especies compiten, otro supuesto podría ser que cada una de estas tasas disminuye simplemente debido a la influencia, o existencia, de la otra. Por lo tanto, un modelo de ambas poblaciones está dado por el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - by\\ \frac{dy}{dt} &= cy - dx,\end{aligned} \tag{10}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

Por otra parte, debemos suponer, como lo hicimos en (5), que cada tasa de crecimiento incluida en (9) disminuirá en función de una tasa que sea proporcional al número de interacciones entre ambas especies:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy\\ \frac{dy}{dt} &= cy - dxy.\end{aligned} \tag{11}$$

La observación indica que este sistema no lineal es similar al modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Por último, sería más realista reemplazar las tasas de (9), las cuales indican que en aislamiento la población de cada especie crece de manera exponencial, con tasas indicadoras de que cada población crece en forma logística (es decir, durante un largo periodo la población está acotada):

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2. \tag{12}$$

Cuando las nuevas tasas disminuyen en función de las tasas que son proporcionales al número de interacciones, obtenemos otro modelo no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y)\\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x),\end{aligned} \tag{13}$$

donde todos los coeficientes son positivos. El sistema lineal (10) y los sistemas no lineales (11) y (13) son, desde luego, **modelos de competencia**.

Redes Una red eléctrica con más de una malla también da origen a ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se muestra en la **FIGURA 2.9.3**, la corriente $i_1(t)$ se divide en las direcciones mostradas en el punto B_1, llamado *punto de ramificación* de la red. Por la primera ley de Kirchhoff podemos escribir

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \tag{14}$$

Además, también podemos aplicar la **segunda ley de Kirchhoff** a cada malla. Para la malla $A_1B_1B_2A_2A_1$, al sumar las caídas de voltaje de cada parte del circuito se tiene

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2. \tag{15}$$

De manera similar, para el lazo $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ encontramos

$$E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}. \tag{16}$$

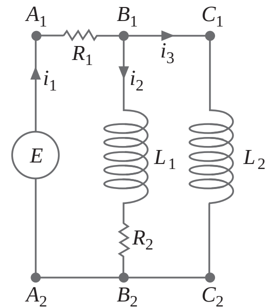


FIGURA 2.9.3 Red cuyo modelo se presenta en las ecuaciones (17)

Si usamos (14) para eliminar i_1 en (15) y (16), se producen dos ecuaciones lineales de primer orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$:

$$\begin{aligned}L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1i_3 &= E(t)\\ L_2\frac{di_3}{dt} + R_1i_2 + R_1i_3 &= E(t).\end{aligned} \tag{17}$$

Dejamos esto como un ejercicio (véase el problema 14 en los ejercicios 2.9) para mostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describen las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red que contiene un resistor, un inductor y un capacitor, y está ilustrada en la **FIGURA 2.9.4**, es

$$\begin{aligned}L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t)\\ RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0.\end{aligned} \tag{18}$$

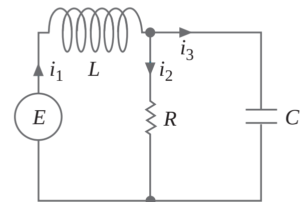


FIGURA 2.9.4 Red cuyo modelo está dado en el sistema (18)

2.9 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

≡ Serie radiactiva

1. No hemos analizado métodos que permitan resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. No obstante, sistemas como (2) se pueden resolver sin saber otra cosa más que la forma de solucionar una sola ecuación lineal de primer orden. Encuentre una solución para (2) sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

2. En el problema 1, suponga que el tiempo se mide en días, que las constantes de desintegración son $k_1 = -0.138629$ y $k_2 = -0.004951$, y que $x_0 = 20$. Use una herramienta de graficación para obtener las gráficas de las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en el mismo conjunto de ejes coordenados. Utilice las gráficas para aproximar las vidas medias de las sustancias X y Y.

3. Use las gráficas obtenidas en el problema 2 para aproximar los tiempos en que las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ son las mismas, los tiempos en que las cantidades $x(t)$ y $z(t)$ son las mismas, y los tiempos en que las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas. ¿Por qué el tiempo determinado cuando las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas parece ser intuitivamente lógico?

4. Construya un modelo matemático para una serie radiactiva de cuatro elementos *W*, *X*, *Y* y *Z*, donde *Z* es un elemento estable.

☰ Mezclas

5. Considere dos tanques, *A* y *B*, a los que se les bombea líquido hacia fuera y hacia dentro a la misma velocidad, tal como lo describe el sistema de ecuaciones (3). ¿Cuál será el sistema de ecuaciones diferenciales si, en lugar de agua pura, se bombea hacia dentro del tanque *A* una solución salina que contiene 2 libras de sal por galón?

6. Use la información dada en la **FIGURA 2.9.5** para construir un modelo matemático para la cantidad de libras de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ presentes en el tiempo *t* en los tanques *A*, *B* y *C*, respectivamente.

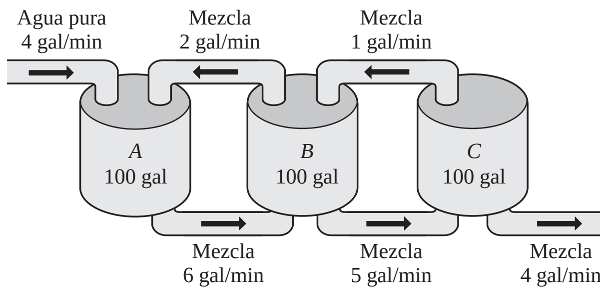


FIGURA 2.9.5 Tanques mezcladores para el problema 6

7. Dos tanques muy grandes, *A* y *B*, se llenan parcialmente con 100 galones de salmuera cada uno. En un inicio, se disuelven 100 libras de sal en la solución del tanque *A* y otras 50 libras de sal en la solución del tanque *B*. El sistema es cerrado y el líquido, perfectamente mezclado, sólo se bombea entre los tanques, como indica la **FIGURA 2.9.6**.

a) Use la información dada en la figura para construir un modelo matemático para la cantidad de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ presente en el tiempo *t* en los tanques *A* y *B*, respectivamente.

b) Encuentre una relación entre las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que se mantenga en el tiempo *t*. Explique por qué esta relación es lógica, y úsela para encontrar la cantidad de sal presente en el tanque *B* en $t = 30$ minutos.

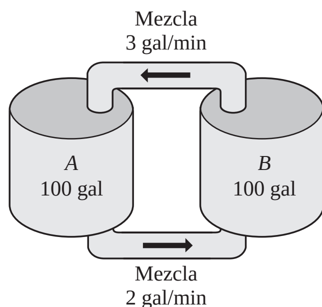


FIGURA 2.9.6 Tanques mezcladores para el problema 7

8. Tres tanques grandes contienen salmuera, como lo muestra la **FIGURA 2.9.7**. Use la información de esa figura para construir un modelo matemático de la cantidad de libras de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ presentes en el tiempo *t* en los tanques *A*, *B* y *C*, respectivamente. Sin resolver el sistema, pronostique los valores limitantes de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ cuando $t \to \infty$.

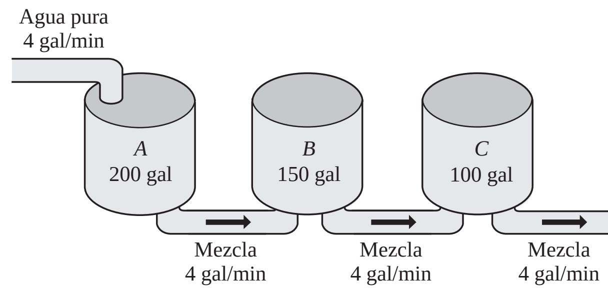


FIGURA 2.9.7 Tanques mezcladores para el problema 8

☰ Modelos depredador-presa

9. Considere el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra definido por

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy,$$

donde las poblaciones $x(t)$ (depredadores) y $y(t)$ (presas) se miden en miles. Suponga que $x(0) = 6$ y $y(0) = 6$. Use un programa de solución numérica para graficar $x(t)$ y $y(t)$. Emplee gráficas para aproximar el tiempo $t > 0$ cuando las dos poblaciones son iguales al principio. Use las gráficas para aproximar el periodo de cada población.

☰ Modelos de competición

10. Considere el modelo de competición definido por

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - 0.4x - 0.3y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.1y - 0.3x),$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ están medidas en miles y *t* en años. Use un programa de solución numérica para analizar las poblaciones durante un periodo largo en cada uno de los siguientes casos:

a) $x(0) = 1.5,\quad y(0) = 3.5$
b) $x(0) = 1,\quad y(0) = 1$
c) $x(0) = 2,\quad y(0) = 7$
d) $x(0) = 4.5,\quad y(0) = 0.5$

11. Considere el modelo de competición definido por

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 0.1x - 0.05y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1.7 - 0.1y - 0.15x),$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ están medidas en miles y *t* en años. Use un programa de solución numérica para analizar las poblaciones durante un periodo largo en cada uno de los siguientes casos:

a) $x(0) = 1,\quad y(0) = 1$
b) $x(0) = 4,\quad y(0) = 10$
c) $x(0) = 9,\quad y(0) = 4$
d) $x(0) = 5.5,\quad y(0) = 3.5$

Redes

12. Demuestre que un sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica de la **FIGURA 2.9.8** es

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$

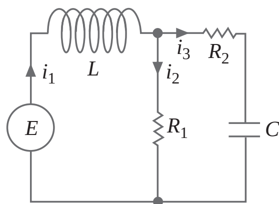


FIGURA 2.9.8 Red eléctrica para el problema 12

13. Determine un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describa las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica de la **FIGURA 2.9.9**.

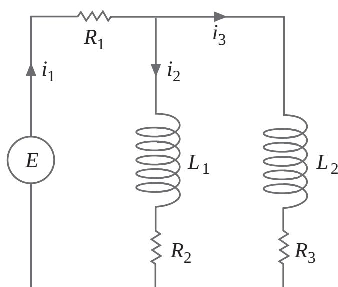


FIGURA 2.9.9 Red eléctrica para el problema 13

14. Demuestre que el sistema lineal dado en (18) describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red de la figura 2.9.4. [*Sugerencia:* $dq/dt = i_3$.]

Diversos modelos matemáticos

15. Modelo SIR Una enfermedad contagiosa se propaga por toda una pequeña comunidad, con población fija de n personas, mediante el contacto entre individuos infectados y personas susceptibles a la enfermedad. Suponga que en un principio nadie es susceptible a la enfermedad y que nadie abandona la comunidad mientras se propaga la epidemia. En el tiempo t, digamos que $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$ denotan, a su vez, la cantidad de personas de la comunidad (medida en cientos) que son *susceptibles* a la enfermedad pero aún no se han infectado, la cantidad de personas *infectadas* con la enfermedad, y la cantidad de personas ya *recuperadas* de la enfermedad. Explique por qué el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$

$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si$$

$$\frac{dr}{dt} = k_2 i,$$

donde k_1 (la *tasa de infección*) y k_2 (la *tasa de recuperación*) son constantes positivas, es un modelo matemático razonable, comúnmente llamado **modelo SIR** (susceptible, infectado, recuperado), para la propagación de la epidemia entre la comunidad. Mencione algunas condiciones iniciales convincentes asociadas con este sistema de ecuaciones.

16. ***a***) En el problema 15, explique por qué es suficiente analizar sólo

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$

$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si.$$

b) Suponga que $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.7$ y $n = 10$. Elija los diferentes valores de $i(0) = i_0$, $0 < i_0 < 10$. Use un programa de solución numérica para determinar qué pronostica el modelo acerca de la epidemia en los dos casos $s_0 > k_2/k_1$ y $s_0 \leq k_2/k_1$. En el caso de una epidemia, estime el número de personas que finalmente resultarán infectadas.

2 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 y 2, llene los espacios en blanco.

1. La ED $y' - ky = A$, donde k y A son constantes, es autónoma. El punto crítico _____ de la ecuación es un _____ (atractor o repulsor) para $k > 0$ y un _____ (atractor o repulsor) para $k < 0$.

2. El problema de valor inicial $x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$, $y(0) = k$ tiene infinidad de soluciones para $k =$ _____ y ninguna solución para $k =$ _____ .

En los problemas 3 y 4, construya una ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = f(y)$ cuyo retrato fase concuerde con la figura dada.

3.

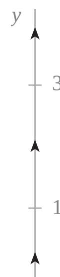


FIGURA 2.R.1 Retrato fase para el problema 3

4.



FIGURA 2.R.2 Retrato fase para el problema 4

5. El número 0 es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $dx/dt = x^n$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n el 0 es asintóticamente estable, semiestable e inestable? Repita el procedimiento para la ecuación $dx/dt = -x^n$.

6. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = f(P), \quad \text{donde} \quad f(P) = -0.5P^3 - 1.7P + 3.4.$$

La función $f(P)$ tiene un cero real, como indica la **FIGURA 2.R.3**. Sin intentar resolver la ecuación diferencial, estime el valor de $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

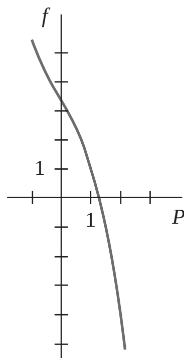


FIGURA 2.R.3 Gráfica para el problema 6

7. La **FIGURA 2.R.4** es una porción del campo de direcciones de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Trace a mano dos curvas solución distintas, una que sea tangente al elemento lineal mostrado en negro y la otra tangente al elemento lineal mostrado en gris.

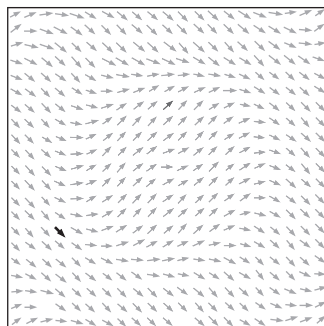


FIGURA 2.R.4 Campo de direcciones para el problema 7

8. Clasifique cada ecuación diferencial en cuanto a si es separable, exacta, lineal, homogénea o de Bernoulli. Quizá algunas ecuaciones sean de más de un tipo. No las resuelva.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x}$ *b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y - x}$

c) $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$ *d)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x(x - y)}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + y}{x^2 + x}$ *f)* $\dfrac{dy}{dx} = 5y + y^2$

g) $y\,dx = (y - xy^2)\,dy$ *h)* $x\dfrac{dy}{dx} = ye^{xy} - x$

i) $xyy' + y^2 = 2x$ *j)* $2xyy' + y^2 = 2x^2$

k) $y\,dx + x\,dy = 0$

l) $\left(x^2 + \dfrac{2y}{x}\right)dx = (3 - \ln x^2)\,dy$

m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1$ *n)* $\dfrac{y}{x^2}\dfrac{dy}{dx} + e^{2x^3 + y^2} = 0$

En los problemas 9 a 16, resuelva las ecuaciones diferenciales dadas.

9. $(y^2 + 1)\,dx = y\sec^2 x\,dy$

10. $y(\ln x - \ln y)\,dx = (x\ln x - x\ln y - y)\,dy$

11. $(6x + 1)y^2\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$

12. $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{4y^2 + 6xy}{3y^2 + 2x}$

13. $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4\ln t$

14. $(2x + y + 1)y' = 1$

15. $(x^2 + 4) = (2x - 8xy)\,dx$

16. $(2r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta)\,d\theta + (4r + \text{sen}\,\theta - 2r\cos^2\theta)\,dr = 0$

En los ejercicios 17 y 18, resuelva el problema de valor inicial y diga cuál es el intervalo I más grande en el que la solución está definida.

17. $\text{sen}\,x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \quad y(7\pi/6) = -2$

18. $\dfrac{dy}{dt} + 2(t + 1)y^2 = 0, \quad y(0) = -\frac{1}{8}$

19. *a*) Sin resolver, explique por qué el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0,$$

no tiene solución para $y_0 < 0$.

b) Resuelva el problema de valor inicial dado en el inciso *a*) para $y_0 > 0$ y encuentre el intervalo I más grande en el cual está definida la solución.

20. *a*) Encuentre una solución implícita del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}, \quad y(1) = -\sqrt{2}.$$

b) Encuentre una solución explícita del problema dado en el inciso *a*) y proporcione el intervalo I más grande en el cual está definida la solución. Tal vez le sea de utilidad una herramienta de graficación.

21. Las gráficas de algunos miembros de una familia de soluciones para una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ se muestran en la **FIGURA 2.R.5**. La gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ que atraviesa los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 3)$ se muestra en negro. Con lápices de color, trace las curvas solución de las soluciones $y = y_1(x)$ y $y = y_2(x)$ definidas por la solución implícita $y_1(1) = -1$ y $y_2(-1) = 3$. Estime el intervalo I en el que está definida cada solución.

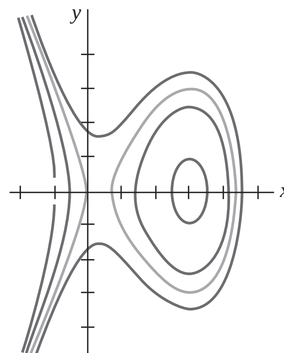


FIGURA 2.R.5 Gráfica para el problema 21

22. Use el método de Euler con el tamaño del paso $h = 0.1$ para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es una solución del problema de valor inicial $y' = 1 + x\sqrt{y}$, $y(1) = 9$.

23. En marzo de 1976, la población mundial alcanzó los 4 000 millones de personas. Una popular revista de noticias anticipó que, con una tasa de crecimiento anual promedio del 1.8%, la población mundial sería de 8 000 millones en 45 años. ¿Cómo se compara este valor con el pronosticado por el modelo según el cual la tasa de incremento es proporcional a la población en cualquier tiempo t?

24. El yodo 131 es un líquido radiactivo empleado en el tratamiento de cáncer de la tiroides. Después de un día en almacenamiento, los análisis indican que la cantidad inicial de yodo 131 en una muestra ha disminuido 8.3%.

a) Encuentre la cantidad de yodo 131 restante en la muestra tras 8 días.

b) ¿Cuál es la importancia de su respuesta en el inciso *a*)?

25. En 1991 unos excursionistas encontraron el cuerpo preservado de un hombre parcialmente congelado en un glaciar de los Alpes austriacos. Por medio de técnicas de datación por carbono se descubrió que el cuerpo de Ötzi —el hombre de hielo, como ha sido llamado— contenía 53% de C-14 que se encuentra en una persona viva.

a) Usando la vida media de Cambridge del C-14, proporcione una conjetura informada sobre la fecha de su muerte (con relación al año de 2011).

b) Luego use la técnica ilustrada en el ejemplo 3 de la sección 2.7 para calcular la fecha aproximada de su muerte. Suponga que el hombre de hielo fue datado con carbono en 1991.



El hombre de hielo del problema 25

26. Al interior de una habitación cuyo volumen es de 8 000 pies cúbicos se bombea aire que contiene 0.06% de dióxido de carbono. Se introduce a la habitación un flujo de aire a una velocidad de 2 000 pies^3/min y se extrae el aire circulante a la misma velocidad. Si hay una concentración inicial de 0.2% de dióxido de carbono, determine la cantidad posterior presente en la habitación en cualquier momento. ¿Cuál es la concentración en 10 minutos? ¿Cuál es la concentración de estado de equilibrio del dióxido de carbono?

27. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}}$$

de la tractriz. Véase el problema 28 en los ejercicios 1.3. Suponga que el punto inicial en el eje y es (0, 10) y la longitud de la cuerda mide $x = 10$ pies.

28. Suponga que una célula está suspendida en una solución que contiene un soluto de concentración constante C_s. Suponga además que la célula tiene un volumen constante V y el área de su membrana permeable es la constante A. Mediante la **ley de Fick**, la tasa de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ es la concentración del soluto en el interior de la célula en cualquier tiempo t. Encuentre $C(t)$ si $m = V \cdot C(t)$ y $C(0) = C_0$. Véase la **FIGURA 2.R.6**.

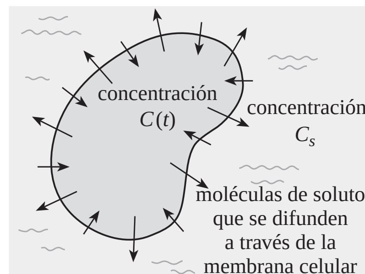


FIGURA 2.R.6 Célula para el problema 28

29. Suponga que a medida que un cuerpo se enfría, la temperatura de su medio circundante aumenta debido a que absorbe completamente el calor perdido por el cuerpo. Sean $T(t)$ y $T_m(t)$ las temperaturas del cuerpo y del medio en el tiempo t, respectivamente. Si las temperaturas iniciales son T_1 para el cuerpo y T_2 para el medio, entonces puede mostrarse que en este caso la ley de Newton para el enfriamiento es $dT/dt = k(T - T_m)$, $k < 0$, donde $T_m = T_2 + B(T_1 - T)$, $B > 0$ es una constante.

a) La ED anterior es autónoma. Use el concepto de retrato fase visto en la sección 2.1 para determinar el valor limitante de la temperatura $T(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Cuál es el valor limitante de $T_m(t)$ cuando $t \to \infty$?

b) Verifique sus respuestas al inciso *a*) resolviendo realmente la ecuación diferencial.

c) Plantee una interpretación física de sus respuestas al inciso *a*).

30. De acuerdo con la **ley de Stefan para la radiación**, la temperatura absoluta T de un cuerpo que se enfría en un medio a temperatura constante T_m está dada por

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_m^4),$$

donde k es una constante. La ley de Stefan puede usarse en un rango de temperatura mayor que el de la ley de Newton para el enfriamiento.

a) Resuelva la ecuación diferencial.

b) Muestre que cuando $T - T_m$ es pequeña en comparación con T_m, la ley de Newton para el enfriamiento se aproxima a la ley de Stefan. [*Sugerencia:* Piense en serie binomial del lado derecho de la ED.]

31. Un circuito *LR* en serie tiene un inductor variable con la inductancia definida por

$$L(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{10}t, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10. \end{cases}$$

Encuentre la corriente $i(t)$ si la resistencia es de 0.2 ohms, el voltaje aplicado es $E(t) = 4$ e $i(0) = 0$. Grafique $i(t)$.

32. Un problema clásico en el cálculo de variaciones es encontrar la forma de una curva $\mathscr{C}$ tal como la de una cuenta, bajo la influencia de la gravedad, que se deslizará desde el punto $A(0, 0)$ hasta el punto $B(x_1, y_1)$ en el tiempo mínimo. Véase la **FIGURA 2.R.7**. Se puede mostrar que una ecuación diferencial no lineal para la forma $y(x)$ de la trayectoria es $y[1 + (y')^2] = k$, donde k es una constante. Primero resuelva para dx en términos de y y dy, y después use la sustitución $y = k \operatorname{sen}^2\theta$ para obtener una forma paramétrica de la solución. La curva $\mathscr{C}$ resulta ser un cicloide.

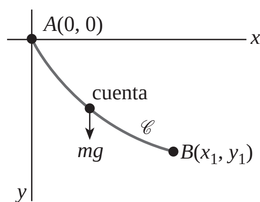


FIGURA 2.R.7 Cuenta que se desliza, problema 32

La **clepsidra**, o reloj de agua, era un dispositivo usado por los antiguos egipcios, griegos, romanos y chinos para medir el paso del tiempo mediante la observación del cambio en la altura de agua que se permitía fluir por un pequeño orificio localizado en la parte inferior de un recipiente o tanque. En los problemas 33 a 36, use la ecuación diferencial (véanse los problemas 11 a 14 de los ejercicios 2.8),

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$$

como un modelo para la altura h del agua contenida en un tanque en el tiempo t. Suponga que en cada uno de esos problemas $h(0) = 2$ pies corresponde al agua de la parte superior del tanque, el orificio del fondo es circular con radio de $\frac{1}{32}$ pulgadas, $g = 32$ ft/s^2 y $c = 0.6$.

33. Suponga que un tanque está hecho de vidrio y tiene la forma de un cilindro de 1 pie de radio. Encuentre la altura $h(t)$ del agua.

34. Para el tanque del problema 33, ¿qué tan arriba de su fondo debe hacerse una marca en uno de sus lados, como se muestra en la **FIGURA 2.R.8**, que corresponda al paso de 1 hora? Continúe y determine dónde colocar las marcas correspondientes al transcurso de 2 horas, 3 horas,…, 12 horas. Explique por qué estas marcas no están espaciadas de manera uniforme.

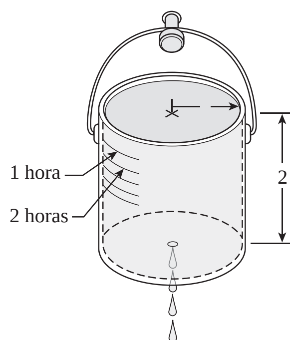


FIGURA 2.R.8 Clepsidra para el problema 34

35. Suponga que el tanque de vidrio tiene la forma de un cono con cortes transversales circulares como lo muestra la **FIGURA 2.R.9**. ¿Puede este reloj de agua medir 12 intervalos de tiempo de duración igual a una hora? Explique mediante los cálculos matemáticos correctos.

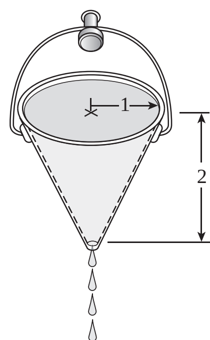


FIGURA 2.R.9 Clepsidra del problema 35

36. Suponga que $r = f(h)$ define la forma de un reloj de agua para el cual las marcas de tiempo están espaciadas de manera uniforme. Use la ecuación diferencial anterior para encontrar $f(h)$ y trace una gráfica típica de h en función de r. Suponga que el área transversal A_h del orificio es constante. (*Sugerencia:* En esta situación, $dh/dt = -a$, donde $a > 0$ es una constante.)

37. Un modelo de las poblaciones de dos especies animales que interaccionan entre sí es

$$\frac{dx}{dt} = k_1x(\alpha - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2xy.$$

Resuelva para x y y en función de t.

38. En un inicio, hay dos tanques grandes, A y B, cada uno con 100 galones de salmuera. El líquido perfectamente mezclado se bombea entre los tanques como ilustra la **FIGURA 2.R.10**. Use la información dada en la figura para construir un modelo matemático de la cantidad de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ contenidas en el tiempo t en los tanques A y B, respectivamente.

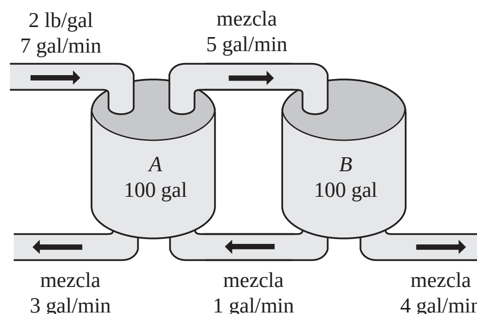


FIGURA 2.R.10 Tanques mezcladores para el problema 38

Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ intersecan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí. Véase la **FIGURA 2.R.11**. Si $dy/dx = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia, entonces la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales de esta familia es $dy/dx = -1/f(x, y)$. En los problemas 39 y 40, encuentre la ecuación diferencial de la familia dada, así como la trayectoria ortogonal de esta familia. Use una herramienta de graficación para trazar ambas familias en el mismo conjunto de ejes coordenados.

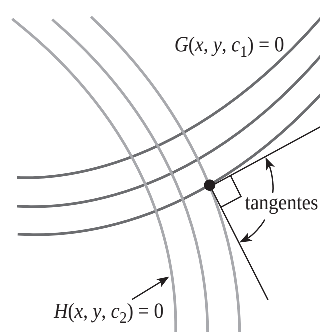


FIGURA 2.R.11 Trayectorias ortogonales

39. $y = -x - 1 + c_1e^x$

40. $y = \dfrac{1}{x + c_1}$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3

Estructura del capítulo

Ahora nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales (ED) de segundo orden y de orden superior. En las primeras seis secciones del presente capítulo examinaremos una parte de la teoría básica de las **ED lineales** y los métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones lineales. Después, en la sección 3.7, estudiaremos las dificultades que rodean a las **ED no lineales** de orden superior y algunos métodos que producen soluciones analíticas para tales ecuaciones. El capítulo finaliza con modelos matemáticos lineales y no lineales de orden superior (secciones 3.8, 3.9 y 3.11) y con el primero de varios métodos que se considerarán en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (sección 3.12).

3.1 Teoría: ecuaciones lineales

Introducción Ahora estudiaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden o de orden superior. En esta sección examinaremos una parte de la teoría en que se basan las ecuaciones diferenciales lineales. Después, en las cinco secciones siguientes, aprenderemos cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

3.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

Problema de valor inicial En la sección 1.2 definimos un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de n-ésimo orden. Para una ecuación diferencial lineal, un **problema de valor inicial de *n*-ésimo orden** es

$$\begin{aligned}&\textit{Resolver}: \quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\\&\textit{Sujeto a}: \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.\end{aligned} \tag{1}$$

Recuerde que para un problema como éste buscamos una función definida en algún intervalo I que contenga una x_0 que satisfaga la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales especificadas en x_0: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Ya hemos visto que en el caso de un problema de valor inicial de segundo orden, una curva solución deberá atravesar el punto (x_0, y_0) y tener una pendiente y_1 en ese punto.

Existencia y unicidad En la sección 1.2 enunciamos un teorema que estableció las condiciones bajo las cuales la existencia y unicidad de una solución a un problema de valor inicial de primer orden estaban garantizadas. El teorema siguiente ofrece las condiciones suficientes para la existencia de una solución única del problema presentado en (1).

Teorema 3.1.1 Existencia de una solución única

Digamos que $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, . . . , $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ son continuas en un intervalo I, y que $a_n(x) \neq 0$ para toda x presente en este intervalo. Si $x = x_0$ está en cualquier punto de este intervalo, entonces en el intervalo existirá una solución $y(x)$ para el problema de valor inicial (PVI) (1) y será única.

EJEMPLO 1 Solución única de un PVI

El problema de valor inicial

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

posee la solución trivial $y = 0$. Dado que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se deduce que todas las condiciones del teorema 3.1.1 se cumplen. Por lo tanto, $y = 0$ será la *única* solución en cualquier intervalo que contenga $x = 1$. ≡

EJEMPLO 2 Solución única de un PVI

Verificar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema de valor inicial $y'' - 4y = 12x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$. Ahora, la ecuación diferencial es lineal, tanto los coeficientes como $g(x) = 12x$ son continuos, y $a_2(x) = 1 \neq 0$ en cualquier intervalo I que contenga a $x = 0$. Con base en el teorema 3.1.1 concluimos que la función dada es la única solución en I. ≡

En el teorema 3.1.1, ambos requerimientos de que $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sea continua y $a_n(x) \neq 0$ para toda x en I son importantes. Específicamente, si $a_n(x) = 0$ para alguna x presente en el intervalo, entonces la solución de un problema de valor inicial lineal quizá no sea única o ni siquiera exista. Por ejemplo, usted deberá verificar que la función $y = cx^2 + x + 3$ sea una solución del problema de valor inicial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para cualquier elección del parámetro c. En otras palabras, no existe una solución única para el problema. Aunque la mayoría de las condiciones del teorema 3.1.1 se satisfacen, las dificultades evidentes son que $a_2(x) = x^2$ es cero en $x = 0$ y que las condiciones iniciales también se imponen en $x = 0$.

Problema de valores en la frontera Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial de segundo orden o mayor en la cual la variable dependiente y, o sus derivadas, esté especificada en *puntos diferentes*. Un problema como

$$\textit{Resolver:} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se denomina **problema de valores en la frontera en dos puntos** o simplemente **problema de valores en la frontera** (**PVF**). Los valores prescritos $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ se conocen como **condiciones de frontera (CF)**. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, el cual contiene a y b, y cuya gráfica atraviesa los puntos (a, y_0) y (b, y_1). Véase la **FIGURA 3.1.1**.

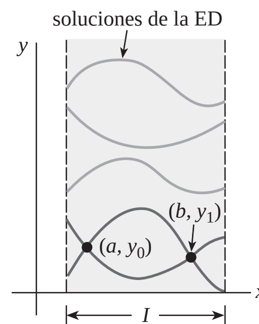


FIGURA 3.1.1 Las curvas en negro son las soluciones de un PVF

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones de frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$
$$y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$
$$y'(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1,$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos tres pares de condiciones son sólo casos especiales de las condiciones de frontera generales

$$A_1y(a) + B_1y'(a) = C_1$$
$$A_2y(b) + B_2y'(b) = C_2.$$

El siguiente ejemplo muestra que incluso cuando se cumplen las condiciones del teorema 3.1.1, un problema de valores en la frontera puede tener varias soluciones (tal como sugiere la figura 3.1.1), una solución única, o ninguna solución en absoluto.

EJEMPLO 3 Un PVF puede tener una, ninguna o varias soluciones

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 vimos que la familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación diferencial $x'' + 16x = 0$ es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \tag{2}$$

a) Suponga que ahora deseamos determinar la solución de la ecuación que satisfaga además las condiciones de frontera $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$. Observe que la primera condición $0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$ implica que $c_1 = 0$, de manera que $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero cuando $t = \pi/2$, $0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi$ se satisface por cualquier elección de c_2 dado que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. Por lo tanto, el problema de valores en la frontera

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 0 \tag{3}$$

tiene un número infinito de soluciones. La **FIGURA 3.1.2** muestra las gráficas de algunos de los miembros de la familia de un parámetro $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ que atraviesan los dos puntos (0, 0) y $(\pi/2, 0)$.

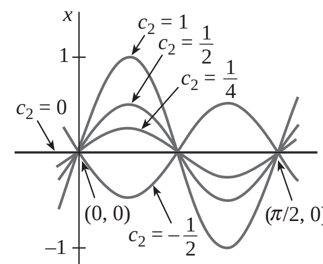


FIGURA 3.1.2 El PVF en (3) del ejemplo 3 tiene muchas soluciones

b) Si el problema de valores en la frontera dado en (3) cambia a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/8) = 0, \tag{4}$$

entonces $x(0) = 0$ aún requiere de $c_1 = 0$ en la solución (2). Pero aplicando $x(\pi/8) = 0$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ requiere que $0 = c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = c_2 \cdot 1$. Por lo tanto, $x = 0$ es una solución para este nuevo problema de valores en la frontera. De hecho, puede demostrarse que $x = 0$ es la *única* solución de (4).

c) Por último, si cambiamos el problema a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \tag{5}$$

encontramos una vez más que $c_1 = 0$ desde $x(0) = 0$, pero aplicar $x(\pi/2) = 1$ a $x = c_2$ sen $4t$ lleva a la contradicción $1 = c_2$ sen $2\pi = c_2 \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, el problema de valores en la frontera (5) no tiene solución. ≡

3.1.2 Ecuaciones homogéneas

Se dice que una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

Observe que $y = 0$ siempre es una solución de una ecuación lineal homogénea.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

es **homogénea**, mientras que una ecuación del tipo

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{7}$$

con $g(x)$ no idéntica a cero, es **no homogénea**. Por ejemplo, $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden, en tanto que $x^2y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal no homogénea de tercer orden. En este contexto, la palabra *homogénea* no se refiere a los coeficientes que son funciones homogéneas como en la sección 2.5; en cambio, sí tiene exactamente el mismo significado que en la sección 2.3.

Veremos que para poder resolver una ecuación lineal no homogénea (7), primero debemos ser capaces de resolver la **ecuación homogénea asociada** (6).

Para evitar repeticiones innecesarias a lo largo del texto, tendremos que recordar, de manera automática, los siguientes supuestos importantes cuando se enuncien definiciones y teoremas acerca de las ecuaciones lineales (6) y (7). En un intervalo común I,

Recuerde estos supuestos cuando encuentre definiciones y teoremas en el presente capítulo.

- los coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son continuos;
- el miembro $g(x)$ del lado derecho es continuo, y
- $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Operadores diferenciales En cálculo, la diferenciación se denota muchas veces mediante la letra mayúscula D, es decir, $dy/dx = Dy$. El símbolo D se denomina **operador diferencial** debido a que transforma una función diferenciable en otra función. Por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4$ sen $4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{y en general} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y,$$

donde y representa una función bastante diferenciable. Las expresiones polinomiales que involucran a D, como $D + 3$, $D^2 + 3D - 4$ y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$, también son operadores diferenciales. En general, definimos un **operador diferencial de *n*-ésimo orden** como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{8}$$

Como una consecuencia de dos propiedades básicas de diferenciación, $D(cf(x)) = c\,Df(x)$, c es una constante, y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L posee una propiedad de linealidad, es decir, cuando L opera sobre una combinación lineal de dos funciones diferenciables es como si la combinación lineal de L operara sobre funciones individuales. En símbolos, esto significa que

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \tag{9}$$

donde α y β son constantes. Debido a (9), decimos que el operador diferencial de n-ésimo orden L es un **operador lineal**.

Ecuaciones diferenciales Toda ecuación diferencial puede expresarse en términos de la notación D. Por ejemplo, es posible escribir la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$

como $D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$ o $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$. Mediante (8), las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden (6) y (7) se pueden escribir de manera compacta como

$$L(y) = 0 \quad \text{y} \quad L(y) = g(x),$$

respectivamente.

Principio de superposición En el teorema siguiente vemos que la suma, o **superposición**, de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

Teorema 3.1.2 Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Digamos que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea (6) de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Probemos el caso en que $k = 2$. Digamos que L es el operador diferencial definido en (8), y $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si definimos $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, por linealidad de L, tenemos entonces

$$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\} = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \qquad \equiv$$

Corolarios para el teorema 3.1.2

a) Un múltiplo constante $y = c_1y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.
b) Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y = 0$.

EJEMPLO 4 Superposición: ecuación diferencial homogénea

Ambas funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo. $\equiv$

La función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Como la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{7x}$ será también una solución. Para los diferentes valores de c vemos que $y = 9e^{7x}$, $y = 0$, $y = -\sqrt{5}e^{7x}$, …, son todas soluciones de la ecuación.

Dependencia lineal e independencia lineal Los siguientes dos conceptos son básicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 3.1.1 Dependencia lineal e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_1, c_2, \ldots, c_n$, diferentes de cero, de modo que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo si las únicas constantes para las que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo son $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Es fácil entender estas definiciones en el caso de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si las funciones son linealmente dependientes en un intervalo, entonces existen constantes c_1 y c_2 distintas de cero de manera que toda x en el intervalo $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$. Por lo tanto, si suponemos que $c_1 \neq 0$, se deduce que $f_1(x) = (-c_2/c_1)f_2(x)$; es decir,

si dos funciones son linealmente dependientes, entonces una función es simplemente un múltiplo constante de la otra.

A la inversa, si $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ para alguna constante c_2, entonces $(-1) \cdot f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para toda x en algún intervalo. Por lo tanto, las funciones son linealmente dependientes, ya que al menos una de las constantes (es decir, $c_1 = -1$) no es cero. En conclusión, en un intervalo,

dos funciones son linealmente independientes cuando ninguna de ellas es un múltiplo constante de la otra.

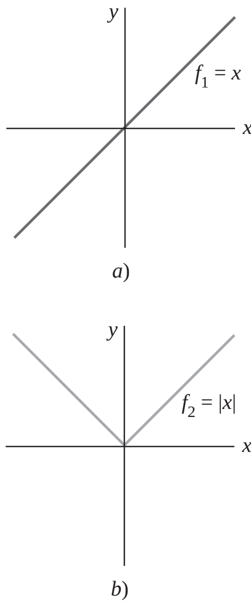


FIGURA 3.1.3 El conjunto compuesto por f_1 y f_2 es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \text{sen } 2x$ y $f_2(x) = \text{sen } x \cos x$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$ debido a que $f_1(x)$ es un múltiplo constante de $f_2(x)$. Recuerde que a partir de la fórmula del ángulo doble para el seno, sen $2x = 2$ sen $x \cos x$. Por otra parte, las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = |x|$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. La observación de la **FIGURA 3.1.3** lo convencerá de que en el intervalo ninguna función es múltiplo constante de la otra.

Del análisis anterior se desprende que la relación $f_2(x)/f_1(x)$ no es una constante en un intervalo donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes. Este pequeño detalle se aplicará en la siguiente sección.

EJEMPLO 5 Funciones linealmente dependientes

Las funciones $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \text{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ dado que

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \text{ sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0,$$

cuando $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Aquí usamos $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ y $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ≡

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo si al menos una función puede expresarse como una combinación lineal de las funciones restantes.

EJEMPLO 6 Funciones linealmente dependientes

Las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$ dado que f_2 puede escribirse como una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Observe que

$$f_2(x) = 1 \cdot f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x)$$

para toda x en el intervalo $(0, \infty)$. ≡

Soluciones de ecuaciones diferenciales Nos interesan sobre todo las funciones linealmente independientes o, de manera más concreta, las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque siempre podríamos apelar en forma directa a la definición 3.1.1, resulta que la cuestión de si las n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) son linealmente independientes puede resolverse de manera un tanto mecánica si usamos un determinante.

Definición 3.1.2 Wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ posee al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se denomina **wronskiano** de las funciones.

Teorema 3.1.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Digamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea (6) de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces el conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si, y sólo si, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Del teorema 3.1.3 se deduce que cuando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de (6) en un intervalo I, el wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es idéntico a cero o nunca es cero en el mismo.

Un conjunto de n soluciones linealmente independiente de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden recibe un nombre especial.

Definición 3.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial lineal homogénea (6) de n-ésimo orden en un intervalo I se dice que es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

La pregunta básica de si existe un conjunto fundamental de soluciones para una ecuación lineal se responde en el teorema siguiente.

Teorema 3.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea (6) de n-ésimo orden en un intervalo I.

Semejante al hecho de que cualquier vector en tres dimensiones puede expresarse como una combinación lineal de los vectores *linealmente independientes* **i**, **j**, **k**, cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I puede expresarse como una combinación de n soluciones linealmente independientes en I. En otras palabras, las n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son los elementos fundamentales constitutivos de la solución general de la ecuación.

Teorema 3.1.5 Solución general: ecuaciones homogéneas

Digamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea (6) de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces, en el intervalo, la **solución general** de la ecuación es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

El teorema 3.1.5 afirma que si $Y(x)$ es alguna solución de (6) en el intervalo, entonces siempre se pueden encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de modo que

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Demostraremos el caso que se presenta cuando $n = 2$.

DEMOSTRACIÓN

Digamos que Y es una solución y y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ en un intervalo I. Suponga que $x = t$ es un punto en I para el cual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Suponga también que $Y(t) = k_1$ y $Y'(t) = k_2$. Si ahora examinamos las ecuaciones

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1$$
$$C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2,$$

se deduce que podemos determinar C_1 y C_2 de manera unívoca, siempre que el determinante de los coeficientes satisfaga

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante sólo es el wronskiano evaluado en $x = t$ y, por suposición, $W \neq 0$. Si definimos $G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, observamos que $G(x)$ satisface la ecuación diferencial, dado que es una superposición de dos soluciones conocidas; $G(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$G(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1 \quad \text{y} \quad G'(t) = C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2;$$

$Y(x)$ satisface la *misma* ecuación lineal y las *mismas* condiciones iniciales. Dado que la solución de este problema de valor inicial es única (teorema 3.1.1), tenemos $Y(x) = G(x)$ o $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. ≡

EJEMPLO 7 Solución general de una ED homogénea

Ambas funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección, las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Este hecho se puede corroborar al observar que el wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Concluimos que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia, $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo. ≡

EJEMPLO 8 Solución obtenida a partir de una solución general

La función $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Verifíquelo.) En vista del teorema 3.1.5, debemos poder obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. Observe que si elegimos $c_1 = 2$ y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ puede volver a escribirse como

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

La última expresión se reconoce como $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}$. ≡

EJEMPLO 9 Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Dado que

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Concluimos que $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo. ≡

3.1.3 Ecuaciones no homogéneas

Toda función y_p libre de parámetros arbitrarios y que satisfaga (7) es una **solución particular** o **integral particular** de la ecuación. Por ejemplo, resulta una tarea sencilla mostrar que la función constante $y_p = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Ahora, si $y_1, y_2, ..., y_k$ son soluciones de (6) en un intervalo I y y_p es cualquier solución particular de (7) en I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x) + y_p \tag{10}$$

es también solución de la ecuación no homogénea (7). Si usted lo piensa, esto tiene sentido, ya que la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$ se transforma en 0 por el operador $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$, mientras que y_p se transforma en $g(x)$. Si usamos $k = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación (6) de n-ésimo orden, entonces la expresión en (10) se transforma en la solución general de (7).

Teorema 3.1.6 Solución general: ecuaciones no homogéneas

Digamos que y_p es alguna solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea (7) de n-ésimo orden en un intervalo I, y establecemos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea (6) asociada en I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p,$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN

Establezcamos L como el operador diferencial definido en (8), y $Y(x)$ y $y_p(x)$ como soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si definimos $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces, por linealidad de L, tenemos

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. En consecuencia, por el teorema 3.1.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

o

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x).$$ ≡

Función complementaria Vemos en el teorema 3.1.6 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, que representa la solución general de (6), se denomina **función complementaria** de la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero resolvemos la ecuación homogénea asociada y después encontramos cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$$y = \textit{función complementaria} + \textit{cualquier solución particular.}$$

EJEMPLO 10 Solución general de una ED no homogénea

Mediante sustitución, se muestra con facilidad que la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x. \tag{11}$$

Con el fin de escribir la solución general de (11), primero debemos poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos que en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la solución general de esta última ecuación fue $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$. Por lo tanto, en el intervalo, la solución general de (11) es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x. \qquad \equiv$$

Otro principio de superposición El último teorema de este análisis nos será de utilidad en la sección 3.4, cuando consideremos un método para encontrar soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas.

Teorema 3.1.7 **Principio de superposición: ecuaciones no homogéneas**

Digamos que $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{pk}$ son k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea (7) de n-ésimo orden en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k distintas funciones $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, suponga que y_{p_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x), \tag{12}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x) \tag{13}$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓN

Comprobemos para el caso de $k = 2$. Digamos que L es el operador diferencial definido en (8), y que $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ son soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas

$L(y) = g_1(x)$ y $L(y) = g_2(x)$, respectivamente. Si definimos $y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, deseamos probar que y_p es una solución particular de $L(y) = g_1(x) + g_2(x)$. El resultado nuevamente se deduce a partir de la linealidad del operador L:

$$L(y_p) = L\{y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)\} = L(y_{p_1}(x)) + L(y_{p_2}(x)) = g_1(x) + g_2(x). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 11 Superposición: ecuación diferencial no homogénea

Verifique que

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= -4x^2 \quad &&\text{es una solución particular de} \quad y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8,\\ y_{p_2} &= e^{2x} &&\text{es una solución particular de} \quad y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x},\\ y_{p_3} &= xe^{x} &&\text{es una solución particular de} \quad y'' - 3y' + 4y = 2xe^{x} - e^{x}. \end{aligned}$$

Del teorema 3.1.7 se deduce que la superposición de y_{p_1}, y_{p_2} y y_{p_3},

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^{x},$$

es una solución de

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^{x} - e^{x}}_{g_3(x)}. \qquad \equiv$$

Si las y_{p_i} son soluciones particulares de (12) para $i = 1, 2, \ldots, k$ entonces la combinación lineal

Esta oración es una generalización del teorema 3.1.7.

$$y_p = c_1 y_{p_1} + c_2 y_{p_2} + \cdots + c_k y_{p_k},$$

donde las c_i son constantes, es también una solución particular de (14) cuando el miembro del lado derecho de la ecuación es la combinación lineal

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_k g_k(x).$$

Antes de comenzar realmente a resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas, necesitamos aprender un poco más de teoría, la cual presentaremos en la siguiente sección.

Comentarios

Este comentario es continuación del breve análisis sobre sistemas dinámicos presentado al final de la sección 1.3.

Se dice que un sistema dinámico cuya regla o modelo matemático sea una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

es un **sistema lineal**. El conjunto de n funciones dependientes del tiempo $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ son las **variables de estado** del sistema. Recuerde, sus valores en cierto tiempo t proporcionan el **estado del sistema**. La función g se llama **función de entrada**, **función forzadora** o **función de excitación**. Se dice que una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial es la **salida** o **respuesta del sistema**. En las condiciones previstas por el teorema 3.1.1, la salida o respuesta $y(t)$ está determinada en forma única por la entrada y el estado del sistema prescritos en el tiempo t_0, es decir, por las condiciones iniciales $y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$.

Con el fin de que un sistema dinámico sea un sistema lineal, es necesario que se mantenga el principio de superposición (teorema 3.1.7) en el sistema; es decir, la respuesta del sistema ante una superposición de entradas es una superposición de salidas. Ya hemos examinado algunos sistemas lineales simples en la sección 2.7 (ecuaciones lineales de primer orden); en la sección 3.8 presentamos sistemas lineales donde los modelos matemáticos son ecuaciones diferenciales de segundo orden.

3.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

3.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

En los problemas 1 a 4, la familia de funciones dada es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Encuentre un miembro de la familia que sea una solución al problema de valor inicial.

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$; $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$; $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

3. $y = c_1x + c_2x \ln x$, $(0, \infty)$; $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$

4. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$; $y''' + y' = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$

5. Dado que $y = c_1 + c_2x^2$ es una familia de soluciones de dos parámetros para $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que no se pueden encontrar las constantes c_1 y c_2 de manera que un miembro de la familia satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique por qué esto no viola el teorema 3.1.1.

6. En el problema 5, encuentre dos miembros de la familia de soluciones que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. Dado que $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$ es la solución general de $x'' + \omega^2x = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que una solución satisfactoria de las condiciones iniciales, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

8. Utilice la solución general de $x'' + \omega^2x = 0$ dada en el problema 7 para demostrar que una solución satisfactoria de las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, es la solución dada en el problema 7 desplazada por una cantidad t_0:

$$x(t) = x_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t - t_0).$$

En los problemas 9 y 10, encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial tenga una solución única.

9. $(x - 2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

10. $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

11. *a*) Use la familia de funciones del problema 1 para encontrar una solución de $y'' - y = 0$ que satisfaga las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

b) La ecuación diferencial del inciso *a*) tiene la solución general alternativa $y = c_3 \cosh x + c_4 \operatorname{senh} x$ en $(-\infty, \infty)$. Utilice esta familia para encontrar una solución que satisfaga las condiciones de frontera del inciso *a*).

c) Demuestre que las soluciones encontradas en los incisos *a*) y *b*) son equivalentes.

12. Use la familia de soluciones del problema 5 para encontrar una solución de $xy'' - y' = 0$ que satisfaga las condiciones de frontera $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$.

En los problemas 13 y 14, la familia de dos parámetros dada es una solución de la ecuación diferencial indicada en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Determine si es posible encontrar un miembro de la familia que satisfaga las condiciones de frontera.

13. $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$; $y'' - 2y' + 2y = 0$

a) $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 0$ *b*) $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$

c) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$ *d*) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

14. $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$; $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$

a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$ *b*) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$ *d*) $y(1) = 3$, $y(2) = 15$

3.1.2 Ecuaciones homogéneas

En los problemas 15 a 22, determine si el conjunto de funciones dado es linealmente dependiente o linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x$, $f_2(x) = 2 + |x|$

21. $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = \operatorname{senh} x$

En los problemas 23 a 30, verifique si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Forme la solución general.

23. $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x}, e^{4x}, $(-\infty, \infty)$

24. $y'' - 4y = 0$; $\cosh 2x$, $\operatorname{senh} 2x$, $(-\infty, \infty)$

25. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x$, $e^x \operatorname{sen} 2x$, $(-\infty, \infty)$

26. $4y'' - 4y' + y = 0$; $e^{x/2}$, $xe^{x/2}$, $(-\infty, \infty)$

27. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3, x^4, $(0, \infty)$

28. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\cos(\ln x)$, $\operatorname{sen}(\ln x)$, $(0, \infty)$

29. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; x, x^{-2}, $x^{-2} \ln x$, $(0, \infty)$

30. $y^{(4)} + y'' = 0$; 1, x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$

3.1.3 Ecuaciones no homogéneas

En los problemas 31 a 34, verifique si la familia de funciones de dos parámetros dada es la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado.

31. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$;

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$

32. $y'' + y = \sec x$;

$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x)$, $(-\pi/2, \pi/2)$

33. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$;

$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$, $(-\infty, \infty)$

34. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$;
$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$

35. ***a***) Verifique si $y_{p_1} = 3e^{2x}$ y $y_{p_2} = x^2 + 3x$ son, respectivamente, las soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

y $$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

b) Use el inciso *a*) para encontrar soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$

y $$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}.$$

36. ***a***) Mediante inspección, encuentre la solución particular de

$$y'' + 2y = 10.$$

b) Por inspección, encuentre una solución particular de

$$y'' + 2y = -4x.$$

c) Encuentre una solución particular de $y'' + 2y = -4x + 10$.

d) Encuentre una solución particular de $y'' + 2y = 8x + 5$.

Problemas de análisis

37. Digamos que $n = 1, 2, 3, \ldots$ Analice cómo las observaciones $D^nx^{n-1} = 0$ y $D^nx^n = n!$ pueden usarse para encontrar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales dadas.

a) $y'' = 0$ ***b***) $y''' = 0$
c) $y^{(4)} = 0$ ***d***) $y'' = 2$
e) $y''' = 6$ ***f***) $y^{(4)} = 24$

38. Suponga que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea. Explique por qué $y_3 = \cosh x$ y $y_4 = \operatorname{senh} x$ son también soluciones de la ecuación.

39. ***a***) Verifique si $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real x. ¿Este resultado viola el teorema 3.1.3? Explique su respuesta.

c) Verifique si $Y_1 = x^3$ y $Y_2 = x^2$ son también soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada en el inciso *a*) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

d) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisfaga $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

e) Por el principio de superposición, el teorema 3.1.2, ambas combinaciones lineales $y = c_1y_1 + c_2y_2$ y $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial. Analice si una, ambas o ninguna de las combinaciones lineales es solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

40. ¿El conjunto de funciones $f_1(x) = e^{x+2}$, $f_2(x) = e^{x-3}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$? Analice la situación.

41. Suponga que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son k soluciones linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes. Del teorema 3.1.2 se deduce que $y_{k+1} = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial. ¿El conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$? Analice la situación.

42. Suponga que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son k soluciones no triviales de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes y $k = n + 1$. ¿El conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$? Analice esta situación.

3.2 Reducción de orden

Introducción En la sección 3.1 vimos que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

era una combinación lineal $y = c_1y_1 + c_2y_2$, donde y_1 y y_2 son soluciones que constituyen un conjunto linealmente independiente en algún intervalo I. A partir de la siguiente sección examinamos un método para determinar estas soluciones cuando los coeficientes de la ED de (1) son constantes. Este método, que es un sencillo ejercicio de álgebra, se descompone en algunos casos y sólo produce una solución única y_1 de la ED. Resulta que podemos construir una segunda solución y_2 de una ecuación homogénea (1) [aunque los coeficientes de (1) sean variables] siempre y cuando conozcamos una solución no trivial de y_1 de la ED. La idea básica descrita en esta sección es que la ecuación lineal de *segundo orden* (1) se puede reducir a una ED de *primer orden* mediante una sustitución que involucre la solución conocida y_1. Una segunda solución, y_2 de (1), aparece después que esta ED de primer orden se resuelve.

Reducción de orden Suponga que $y(x)$ denota una solución conocida de la ecuación (1). Buscamos una segunda solución $y_2(x)$ de (1) de manera que y_1 y y_2 sean linealmente indepen-

dientes en algún intervalo I. Recuerde que si y_1 y y_2 son linealmente independientes, entonces su cociente y_2/y_1 no es constante en I; es decir, $y_2/y_1 = u(x)$ o $y_2(x) = u(x)y_1(x)$. La idea es encontrar $u(x)$ mediante la sustitución de $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada. Este método se denomina **reducción de orden** ya que debemos resolver una ecuación de primer orden para encontrar u.

El primer ejemplo ilustra la técnica básica.

EJEMPLO 1 Búsqueda de una segunda solución

Dado que $y_1 = e^x$ es una solución de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, use la reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2.

Solución Si $y = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$, entonces las primeras dos derivadas de y se obtienen a partir de la regla del producto:

$$y' = ue^x + e^x u', \qquad y'' = ue^x + 2e^x u' + e^x u''.$$

Por sustitución de y y y'' en la ED original, ésta se simplifica a

$$y'' - y = e^x(u'' + 2u') = 0.$$

Dado que $e^x \neq 0$, la última ecuación requiere de $u'' + 2u' = 0$. Si efectuamos la sustitución $w = u'$, esta ecuación lineal de segundo orden en u se convierte en $w' + 2w = 0$, la cual es una ecuación lineal de primer orden en w. Si usamos el factor de integración e^{2x}, podemos escribir $d/dx\,[e^{2x}w] = 0$. Después de integrar obtenemos $w = c_1e^{-2x}$ o $u' = c_1e^{-2x}$. Si de nuevo integramos se produce $u = -\frac{1}{2}c_1e^{-2x} + c_2$. Así

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x. \tag{2}$$

Si tomamos $c_2 = 0$ y $c_1 = -2$ obtenemos la segunda solución deseada, $y_2 = e^{-x}$. Debido a que $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para toda x, las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. ≡

Como hemos demostrado que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden, la expresión de (2) es en realidad la solución general de $y'' - y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

Caso general Suponga que dividimos entre $a_2(x)$ con el fin de escribir la ecuación (1) en la **formulación estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Supongamos además que $y_1(x)$ es una solución conocida de (3) en I, y $y_1(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si definimos $y = u(x)y_1(x)$, se deduce que

$$y' = uy_1' + y_1u', \qquad y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u[\underbrace{y''_1 + Py'_1 + Qy_1}_{\text{cero}}] + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Esto implica que debemos tener

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0 \quad \text{o} \quad y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{4}$$

donde tenemos que establecer $w = u''$. Observe que la última ecuación de (4) es tanto lineal como separable. Si separamos las variables e integramos, obtenemos

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c \quad \text{o} \quad wy_1^2 = c_1e^{-\int P dx}.$$

Resolvemos la última ecuación para w, usamos $w = u'$, e integramos de nuevo:

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2.$$

Si elegimos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, a partir de $y = u(x)y_1(x)$ encontramos que una segunda solución de la ecuación (3) es

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx. \tag{5}$$

Es un buen repaso de diferenciación verificar si la función $y_2(x)$ definida en (5) satisface la ecuación (3), y si y_1 y y_2 son linealmente independientes en cualquier intervalo donde $y_1(x)$ no es cero.

EJEMPLO 2 Una segunda solución mediante la fórmula (5)

La función $y_1 = x_2$ es solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Encuentre la solución general en el intervalo $(0, \infty)$.

Solución A partir de la forma estándar de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

con base en (5) encontramos que $y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4} dx \quad \leftarrow e^{3\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$$= x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x.$$

En el intervalo $(0, \infty)$, la solución general está dada por $y = c_1y_1 + c_2y_2$; es decir, $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$. ≡

Comentarios

Hemos derivado e ilustrado cómo usar (5) debido a que esta fórmula aparece nuevamente en la siguiente sección y en la sección 5.2. Usamos (5) sólo para ahorrar tiempo al obtener un resultado deseado. Su profesor le dirá si debe memorizar (5) o conocer primero los principios fundamentales de la reducción de orden.

3.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 16 la función indicada como $y_1(x)$ es una solución de la ecuación dada. Use la reducción de orden o la fórmula (5), tal como se presentó, para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $\quad y_1 = e^{2x}$
2. $y'' + 2y' + y = 0$; $\quad y_1 = xe^{-x}$
3. $y'' + 16y = 0$; $\quad y_1 = \cos 4x$
4. $y'' + 9y = 0$; $\quad y_1 = \text{sen } 3x$
5. $y'' - y = 0$; $\quad y_1 = \cosh x$
6. $y'' - 25y = 0$; $\quad y_1 = e^{5x}$
7. $9y'' - 12y' + 4y = 0$; $\quad y_1 = e^{2x/3}$
8. $6y'' + y' - y = 0$; $\quad y_1 = e^{x/3}$
9. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$; $\quad y_1 = x^4$
10. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $\quad y_1 = x^2$
11. $xy'' + y' = 0$; $\quad y_1 = \ln x$
12. $4x^2y'' + y = 0$; $\quad y_1 = x^{1/2} \ln x$
13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $\quad y_1 = x \text{ sen}(\ln x)$
14. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$; $\quad y_1 = x^2 \cos(\ln x)$
15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $\quad y_1 = x + 1$
16. $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0$; $\quad y_1 = 1$

En los problemas 17 a 20, la función indicada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Use el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

17. $y'' - 4y = 2; \quad y_1 = e^{-2x}$
18. $y'' + y' = 1; \quad y_1 = 1$
19. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}; \quad y_1 = e^{x}$
20. $y'' - 4y' + 3y = x; \quad y_1 = e^{x}$

≡ Problemas de análisis

21. ***a***) Proporcione una demostración convincente de que la ecuación de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$, con a, b y c constantes, siempre posee al menos una solución de la forma $y_1 = e^{m_1 x}$, m_1 es una constante.

b) Explique por qué la ecuación diferencial dada en el inciso *a*) debe tener entonces una segunda solución, ya sea de la forma $y_2 = e^{m_2 x}$ o como $y_2 = xe^{m_1 x}$, m_1 y m_2 son constantes.

c) Examine de nuevo los problemas 1 a 8. ¿Puede explicar por qué en los incisos *a*) y *b*) anteriores las expresiones no se contradicen con las respuestas a los problemas 3 a 5?

22. Verifique si $y_1(x) = x$ es una solución de $xy'' - xy' + y = 0$. Use la reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ en la forma de una serie infinita. Calcule un intervalo de definición para $y_2(x)$.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

23. ***a***) Verifique si $y_1(x) = e^x$ es una solución de

$$xy'' - (x + 10)y' + 10y = 0.$$

b) Use (5) para encontrar una segunda solución $y_2(x)$. Con ayuda de un sistema asistido por computadora (CAS, por sus siglas en inglés) realice la integración requerida.

c) Explique, mediante el corolario (***a***) del teorema 3.1.2, por qué la segunda solución puede escribirse de manera compacta como

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} x^n.$$

3.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

■ Introducción Hemos visto que la ED lineal de primer orden $y' + ay = 0$, donde a es una constante, posee la solución exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, es natural preguntarse si existen soluciones exponenciales para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$. Lo sorprendente es que *todas* las soluciones de estas ecuaciones de orden superior son funciones exponenciales o están construidas a partir de funciones exponenciales.

■ Ecuación auxiliar Comencemos por considerar el caso especial de una ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Si intentamos encontrar una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces, después de sustituir $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2 e^{mx}$, la ecuación (2) se convierte en

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca es cero para valores reales de x, evidentemente la única forma que tiene esta función exponencial de satisfacer la ecuación diferencial (2) es elegir m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$

Esta última ecuación se denomina **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial (2). Dado que las dos raíces de (3) son $m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ y $m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ habrá tres formas de la solución general de (1) correspondientes a los tres casos:

- m_1 y m_2 son reales y distintas $(b^2 - 4ac > 0)$,
- m_1 y m_2 son reales e iguales $(b^2 - 4ac = 0)$, y
- m_1 y m_2 son números complejos conjugados $(b^2 - 4ac < 0)$.

Analizaremos a continuación cada uno de estos casos.

Caso I*: *Raíces reales distintas Bajo el supuesto de que la ecuación auxiliar (3) tiene dos raíces reales distintas m_1 y m_2, encontramos dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Vemos que estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y, por lo tanto, forman un conjunto fundamental. Se deduce que en este intervalo la solución general de (2) es

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}. \tag{4}$$

Caso II*: *Raíces reales repetidas Cuando $m_1 = m_2$, necesariamente obtenemos sólo una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1x}$. De la ecuación cuadrática encontramos que $m_1 = -b/2a$ pues la única forma de obtener $m_1 = m_2$ es con $b^2 - 4ac = 0$. Del análisis efectuado en la sección 3.2 deducimos que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}\,dx = e^{m_1x}\int dx = xe^{m_1x}. \tag{5}$$

En (5) hemos aplicado el hecho de que $-b/a = 2m_1$. Entonces la solución general es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_2x}. \tag{6}$$

Caso III*: *Raíces conjugadas complejas Si m_1 y m_2 son complejas, entonces podemos escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α *y* $\beta > 0$ son reales e $i^2 = -1$. Formalmente, no hay diferencia entre este caso y el I, por lo que

$$y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

No obstante, en la práctica preferimos trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejos. Para este fin usamos la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

donde θ es cualquier número real.* De esta fórmula se deduce que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x, \tag{7}$$

donde hemos usado $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\text{sen}(-\beta x) = -\text{sen}\,\beta x$. Observe que al sumar primero y restar después las dos ecuaciones incluidas en (7) obtenemos, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\,\text{sen}\,\beta x.$$

Dado que $y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ es una solución de (2) para cualquier elección de las constantes C_1 y C_2, las elecciones $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ dan, a su vez, dos soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Pero $\quad y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$

y $\quad y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x.$

* Una deducción formal de la fórmula de Euler se puede obtener a partir de la serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ al sustituir $x = i\theta$, usar $i^2 = -1$, $i^3 = -i, \ldots$, y después separar las series en sus partes real e imaginaria. Una vez establecida así la viabilidad, podemos adoptar $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ como la *definición* de $e^{i\theta}$.

Por lo tanto, con base en el corolario (***a***) del teorema 3.1.2, los últimos dos resultados muestran que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones *reales* de (2). Además, estas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x). \tag{8}$$

EJEMPLO 1 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ ***b***) $y'' - 10y' + 25y = 0$ ***c***) $y'' + 4y' + 7y = 0$

Solución Proporcionamos las ecuaciones auxiliares, las raíces y las soluciones generales correspondientes.

a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3)$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3$. De (4),

$$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}.$$

b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2$, $m_1 = m_2 = 5$. De (6),

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

c) $m^2 + 4m + 7 = 0$, $m_1 = -2 + \sqrt{3}i$, $m_2 = -2 - \sqrt{3}i$. De (8) con $\alpha = -2$, $\beta = \sqrt{3}$,

$$y = e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x).$$ ≡

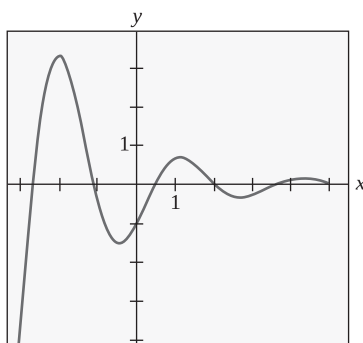


FIGURA 3.3.1 Gráfica de la solución del problema de valor inicial en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $4y'' + 4y' + 17y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

Solución Por la fórmula cuadrática encontramos que las raíces de la ecuación auxiliar $4m^2 + 4m + 17 = 0$ son $m_1 = -\frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$. Por lo tanto, a partir de (8) tenemos $y = e^{-x/2}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x)$. Al aplicar la condición $y(0) = -1$, vemos de $e^0(c_1\cos 0 + c_2\operatorname{sen} 0) = -1$ que $c_1 = -1$. Si diferenciamos $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x)$ y después usamos $y'(0) = 2$, obtenemos $2c_2 + \frac{1}{2} = 2$ o $c_2 = \frac{3}{4}$. Entonces la solución del PVI es $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x)$. En la **FIGURA 3.3.1** vemos que la solución es oscilatoria pero $y \to 0$ cuando $x \to \infty$. ≡

Dos ecuaciones importantes Las dos ecuaciones diferenciales

$$y'' + k^2 y = 0 \quad \text{y} \quad y'' - k^2 y = 0,$$

como k es un número real, son importantes en matemáticas aplicadas. Para $y'' + k^2y = 0$, la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tiene raíces imaginarias $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. Con $\alpha = 0$ y $\beta = k$ de (8), la solución general de la ED es

$$y = c_1\cos kx + c_2\operatorname{sen} kx. \tag{9}$$

Por otra parte, la ecuación auxiliar $m^2 - k^2 = 0$ para $y'' - k^2y = 0$ tiene raíces reales distintas $m_1 = k$ y $m_2 = -k$ y, por lo tanto, en virtud de (4) la solución general de la ED es

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}. \tag{10}$$

Observe que si elegimos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ en (10), obtenemos las soluciones particulares $y = \frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx}) = \cosh kx$ y $y = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) = \operatorname{senh} kx$. Dado que $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ son linealmente independientes en cualquier intervalo del eje x, una forma alternativa para la solución general de $y'' - k^2y = 0$ es

$$y = c_1\cosh kx + c_2\operatorname{senh} kx. \tag{11}$$

Véanse los problemas 41, 42 y 53 en los ejercicios 3.3.

Ecuaciones de orden superior En general, para resolver una ecuación diferencial de orden superior

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{12}$$

donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, debemos resolver una ecuación polinomial de n-ésimo grado

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{13}$$

Si todas las raíces de (13) son reales y distintas, entonces la solución general de (12) es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

Elaborar un resumen para los análogos de los casos II y III resulta un tanto difícil debido a que las raíces de una ecuación auxiliar de un grado mayor al segundo se pueden presentar en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado puede tener cinco raíces reales diferentes, o tres raíces reales distintas y dos raíces complejas, o una raíz real y cuatro raíces complejas, o cinco raíces reales pero iguales, o cinco raíces reales pero con dos de ellas iguales, y así sucesivamente. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de n-ésimo grado (es decir, k raíces son iguales a m_1), es posible demostrar que las soluciones independientemente lineales son

$$e^{m_1 x}, \;\; xe^{m_1 x}, \;\; x^2 e^{m_1 x}, \ldots, \;\; x^{k-1} e^{m_1 x}$$

y la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

Por último, se debe recordar que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de la ecuación auxiliar siempre aparecen en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener a lo sumo dos raíces complejas.

EJEMPLO 3 Ecuación diferencial de tercer orden

Resuelva $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

Solución Por inspección de $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$, debe resultar evidente que una raíz es $m_1 = 1$ y, por lo tanto, $m - 1$ es un factor de $m^3 + 3m^2 - 4$. Al dividir encontramos

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

así que las demás raíces son $m_2 = m_3 = -2$. En consecuencia, la solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Ecuación diferencial de cuarto orden

Resuelva $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$ tiene raíces $m_1 = m_3 = i$ y $m_2 = m_4 = -i$. Por lo tanto, con base en el caso II, la solución es

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 x e^{ix} + C_4 x e^{-ix}.$$

En virtud de la fórmula de Euler, la agrupación $C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ se puede volver a escribir como $c_1 \cos x + c_2$ sen x después de reasignar las constantes. De manera similar, $x(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix})$ puede expresarse como $x(c_3 \cos x + c_4$ sen $x)$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x. \qquad \equiv$$

El ejemplo 4 ilustra un caso especial donde la ecuación auxiliar tiene raíces complejas repetidas. En general, si $m_1 = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$, es una raíz compleja de multiplicidad k de una ecuación auxiliar con coeficientes reales, entonces su conjugado $m_2 = \alpha - i\beta$ es también una raíz de multiplicidad k. A partir de las soluciones $2k$ complejas determinadas

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^2e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, \quad x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha-i\beta)x}, \quad x^2e^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots, \quad x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

concluimos, con ayuda de la fórmula de Euler, que la solución general de la ecuación diferencial correspondiente debe contener entonces una combinación lineal de las soluciones reales linealmente independientes $2k$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

En el ejemplo 4, identificamos $k = 2$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Raíces racionales Por supuesto, al resolver ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, el aspecto más difícil es encontrar raíces de las ecuaciones auxiliares de grado mayor al segundo. Por ejemplo, para resolver $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$ debemos resolver $3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$. Algo que podemos intentar es comprobar la ecuación auxiliar en cuanto a raíces racionales. Recuerde, si $m_1 = p/q$ es una raíz racional (expresada en los menores términos) de una ecuación auxiliar $a_nm^n + \cdots + a_1m + a_0 = 0$ con coeficientes enteros, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n. Para nuestra ecuación auxiliar cúbica específica, todos los factores de $a_0 = -4$ y $a_n = 3$ son p: $\pm1, \pm2, \pm4$ y q: $\pm1, \pm3$, así que las posibles raíces racionales son p/q: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Por lo tanto, cada uno de estos números se puede comprobar, digamos, mediante división sintética. De esta forma descubrimos tanto la raíz $m_1 = \frac{1}{3}$ como la factorización

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = (m = \tfrac{1}{3})(3m^2 + 6m + 12).$$

La fórmula cuadrática produce entonces las raíces restantes $m_2 = -1 + \sqrt{3}i$ y $m_3 = -1 - \sqrt{3}i$. En consecuencia, la solución general de $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$ es $y = c_1e^{x/3} + e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x + c_3\operatorname{sen}\sqrt{3}x)$.

Uso de la computadora Encontrar raíces o aproximaciones de raíces de ecuaciones polinomiales es un problema rutinario cuando se trabaja con una calculadora o un programa de cómputo adecuados. Los sistemas algebraicos computacionales *Mathematica* y *Maple* pueden resolver ecuaciones polinomiales (en una variable) de grado menor que el quinto en términos de fórmulas algebraicas. Para la ecuación auxiliar examinada en el párrafo anterior, los comandos

Solve[3 m∧3 + 5 m∧2 + 10 m – 4 = = 0, m] (en *Mathematica*)

solve(3*m∧3 + 5*m∧2 + 10*m – 4, m); (en *Maple*)

producen de manera inmediata sus representaciones de las raíces $\frac{1}{3}$, $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$. Para ecuaciones auxiliares de grado mayor podrá ser necesario recurrir a comandos numéricos como **NSolve** y **FindRoot** en *Mathematica*. Debido a su capacidad para resolver ecuaciones polinomiales, no sorprende que algunos sistemas algebraicos de cómputo puedan también dar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. Por ejemplo, las entradas

DSolve [y″[x] + 2 y′[x] + 2 y[x] = = 0, y[x], x] (en *Mathematica*)

dsolve(diff(y(x),x$2) + 2*diff(y(x),x) + 2*y(x) = 0, y(x)); (en *Maple*)

producen, respectivamente,

$$\mathbf{y[x] \;->\; \frac{C[2]\;Cos\,[x] \;-\; C[1]\;Sin\,[x]}{E^x}} \tag{14}$$

y **y(x) = _C1 exp(–x) sin(x) – _C2 exp(–x) cos(x)**

Traducido, esto significa que $y = c_2e^{-x}\cos x + c_1e^{-x}\operatorname{sen} x$ es una solución de $y'' + 2y' + 2y = 0$.

En el texto clásico *Ecuaciones diferenciales* de Ralph Palmer Agnew* (usado por el autor cuando era estudiante) se encuentra el siguiente enunciado:

No es razonable esperar que los estudiantes inscritos en este curso tengan la habilidad computacional ni el equipo necesario para resolver de manera eficiente ecuaciones como

$$4.317\frac{d^4y}{dx^4} + 2.179\frac{d^3y}{dx^3} + 1.416\frac{d^2y}{dx^2} + 1.295\frac{dy}{dx} + 3.169y = 0. \tag{15}$$

Aunque es debatible si las habilidades computacionales han mejorado en los años transcurridos, donde no hay duda es en que la tecnología sí ha progresado. Si tenemos acceso a un sistema algebraico de cómputo, la ecuación (15) podría considerarse razonable. Después de la simplificación y de algunas reasignaciones del resultado, *Mathematica* produce la solución general (aproximada)

$$y = c_1e^{-0.728852x}\cos(0.618605x) + c_2e^{-0.728852x}\operatorname{sen}(0.618605x)$$
$$+ c_3e^{-0.476478x}\cos(0.759081x) + c_4e^{-0.476478x}\operatorname{sen}(0.759081x).$$

En la transición, advertimos que en *Mathematica* y *Maple* los comandos **DSolve** y **dsolve**, al igual que muchos aspectos de cualquier sistema asistido por computadora (CAS, por sus siglas en inglés), tienen sus limitaciones.

Por último, si estamos frente a un problema de valor inicial que consista en, digamos, una ecuación diferencial de cuarto orden, entonces, para ajustar la solución general de la ED a las cuatro condiciones iniciales debemos resolver un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas (c_1, c_2, c_3 y c_4 en la solución general). Podemos ahorrar mucho tiempo al resolver el sistema con ayuda de un CAS. Véanse los problemas 35, 36, 61 y 62 en los ejercicios 3.3.

---

* McGraw-Hill, Nueva York, 1960.

Comentarios

En caso de que se lo esté preguntando, el método de esta sección también funciona para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de *primer orden* $ay' + by = 0$ con coeficientes constantes. Por ejemplo, para resolver, digamos, $2y' + 7y = 0$, sustituimos $y = e^{mx}$ en la ED para obtener la ecuación auxiliar $2m + 7 = 0$. Usando $m = \frac{7}{2}$, la solución general de la ED es entonces $y = c_1e^{-7x/2}$.

3.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 14, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.

1. $4y'' + y' = 0$
2. $y'' - 36y = 0$
3. $y'' - y' - 6y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + 8y' + 16y = 0$
6. $y'' - 10y' + 25y = 0$
7. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
8. $y'' + 4y' - y = 0$
9. $y'' + 9y = 0$
10. $3y'' + y = 0$
11. $y'' - 4y' + 5y = 0$
12. $2y'' + 2y' + y = 0$
13. $3y'' + 2y' + y = 0$
14. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

En los problemas 15 a 28, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de orden superior dada.

15. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
16. $y''' - y = 0$
17. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
18. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
19. $\dfrac{d^3u}{dt^3} + \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$
20. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$
21. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
22. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
23. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$
24. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

25. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

26. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$

27. $\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0$

28. $2\dfrac{d^5x}{ds^5} - 7\dfrac{d^4x}{ds^4} + 12\dfrac{d^3x}{ds^3} + 8\dfrac{d^2x}{ds^2} = 0$

En los problemas 29 a 36, resuelva el problema de valor inicial dado.

29. $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -2$

30. $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,\ y(\pi/3) = 0, y'(\pi/3) = 2$

31. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0,\ y(1) = 0, y'(1) = 2$

32. $4y'' - 4y' - 3y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 5$

33. $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$

34. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 10$

35. $y''' + 12y'' + 36y' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$

36. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

En los problemas 37 a 40, resuelva el problema de valores en la frontera dado.

37. $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1, y(1) = 0$

38. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

39. $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 0$

40. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1, y(\pi) = 1$

En los problemas 41 y 42, resuelva el problema dado usando primero la forma de la solución general dada en (10); luego hágalo mediante la forma dada en (11).

41. $y'' - 3y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 5$

42. $y'' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(1) = 0$

En los problemas 43 a 48, cada figura representa la gráfica de una solución particular para una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 3y' - 4y = 0$ ***b***) $y'' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + y = 0$ ***d***) $y'' + y = 0$

e) $y'' + 2y' + 2y = 0$ ***f***) $y'' - 3y' + 2y = 0$

Haga coincidir una curva solución con una de las ecuaciones diferenciales. Explique su razonamiento.

43.

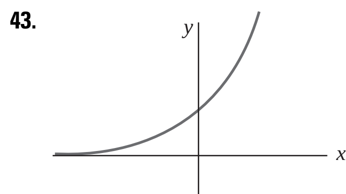


FIGURA 3.3.2 Gráfica para el problema 43

44.

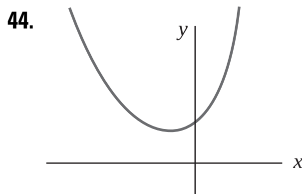


FIGURA 3.3.3 Gráfica para el problema 44

45.

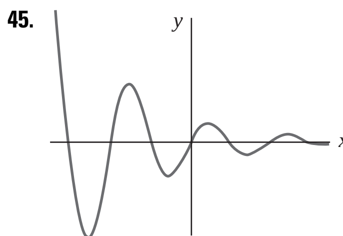


FIGURA 3.3.4 Gráfica para el problema 45

46.

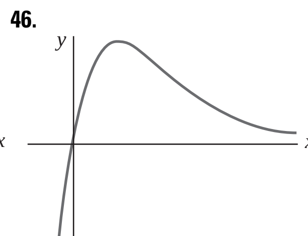


FIGURA 3.3.5 Gráfica para el problema 46

47.

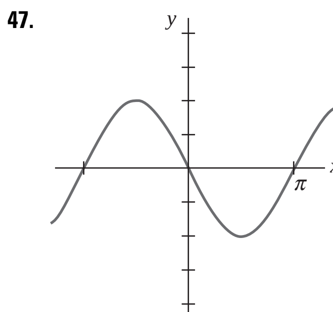


FIGURA 3.3.6 Gráfica para el problema 47

48.

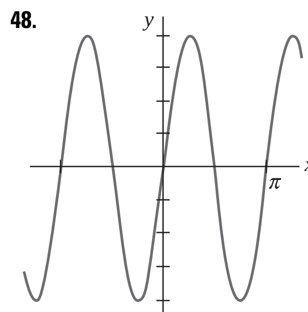


FIGURA 3.3.7 Gráfica para el problema 48

≡ Problemas de análisis

49. Las raíces de una ecuación auxiliar cúbica son $m_1 = 4$ y $m_2 = m_3 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente? Analice: ¿su respuesta es única?

50. Dos raíces de una ecuación auxiliar cúbica con coeficientes reales son $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 3 + i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente?

51. Encuentre la solución general de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$ sabiendo que $y_1 = e^{-4x}\cos x$ es una solución.

52. Para resolver $y^{(4)} + y = 0$ debemos encontrar las raíces de $m^4 + 1 = 0$. Éste es un problema trivial cuando se usa un CAS, pero puede hacerse a mano si se trabaja con números complejos. Observe que $m^4 + 1 = (m^2 + 1)^2 - 2m^2$. ¿En qué ayuda esto? Resuelva la ecuación diferencial.

53. Verifique si $y = \text{senh}\, x - 2\cos(x + \pi/6)$ es una solución particular de $y^{(4)} - y = 0$. Haga coincidir esta solución particular con la solución general de la ecuación diferencial.

54. Considere el problema de valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Analice: ¿es posible determinar los valores de λ de manera que el problema posea *a*) soluciones triviales?, *b*) ¿soluciones no triviales?

55. En cálculo, en el estudio de las técnicas de integración podían encontrarse ciertas integrales indefinidas, de la forma $\int e^{ax} f(x)\, dx$, al aplicar la integración por partes dos veces, recuperar la integral original del lado derecho, resolver para la integral original, y obtener un múltiplo constante $k\int e^{ax} f(x)\, dx$ del lado izquierdo. Entonces, el valor de la integral se encuentra al dividir entre k. Analice: ¿para qué clase de funciones f trabaja el procedimiento descrito? Su solución debe llevar a una ecuación diferencial. Examine cuidadosamente esta ecuación y resuelva para f.

Modelo matemático

56. Cadena deslizante Vuelva a leer el análisis de la cadena deslizante presentado en la sección 1.3 e ilustrado en la figura 1.3.6 de la página 22.

a) Use la forma de la solución dada en la expresión (11) de esta sección para encontrar la solución general de la ecuación (16) presentada en la sección 1.3,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{64}{L}x = 0.$$

b) Encuentre una solución particular que satisfaga las condiciones iniciales expresadas en el análisis de las páginas 22 y 23.

c) Suponga que la longitud total de la cadena es $L = 20$ pies y $x_0 = 1$. Encuentre a qué velocidad la cadena deslizante abandona la polea que la detiene.

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 57 a 60 use una computadora, ya sea como ayuda para resolver la ecuación auxiliar o como un medio de obtener directamente la solución general de la ecuación diferencial dada. Si usa un CAS para obtener la solución general, simplifique el resultado y, si fuera necesario, escriba la solución en términos de funciones reales.

57. $y''' - 6y'' + 2y' + y = 0$

58. $6.11y''' + 8.59y'' + 7.93y' + 0.778y = 0$

59. $3.15y^{(4)} - 5.34y'' + 6.33y' - 2.03y = 0$

60. $y^{(4)} + 2y'' - y' + 2y = 0$

En los problemas 61 y 62, use un CAS para resolver la ecuación auxiliar. Forme la solución general de la ecuación diferencial. Después use un CAS para resolver el sistema de ecuaciones para los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ que resultan cuando las condiciones iniciales se aplican a la solución general.

61. $2y^{(4)} + 3y''' - 16y'' + 15y' - 4y = 0,$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 3,\ y'''(0) = \frac{1}{2}$

62. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0,$
$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

3.4 Coeficientes indeterminados

Introducción Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x) \tag{1}$$

debemos hacer dos cosas: *i*) encontrar la función complementaria y_c; *ii*) encontrar *cualquier* solución particular y_p de la ecuación no homogénea. Después, como se analizó en la sección 3.1, la solución general de (1) en un intervalo I es $y = y_c + y_p$.

La función complementaria y_c es la solución general de la ED homogénea asociada de (1), es decir,

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

En la sección previa vimos cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes. Por lo tanto, nuestro objetivo en esta sección es examinar un método para obtener soluciones particulares.

Método de coeficientes indeterminados La primera de las dos formas que debemos considerar para obtener una solución particular y_p tiene el nombre de **método de coeficientes indeterminados**. En este método, la idea básica es una conjetura (en realidad un supuesto razonable) acerca de la forma de y_p; esta conjetura es motivada por los tipos de funciones que componen la función de entrada $g(x)$. El método general está limitado a ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas como (1), donde

- los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes, y
- donde $g(x)$ es una constante, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, las funciones trigonométricas sen βx o cos βx, o sumas y productos finitos de estas funciones.

En términos estrictos, $g(x) = k$ (una constante) es una función polinomial. Dado que una función constante probablemente no sea lo primero que se nos viene a la mente cuando pensamos en funciones polinomiales, con el fin de enfatizar, continuaremos usando la redundancia "funciones constantes, funciones polinomiales…"

Una constante k es una función polinomial.

Las siguientes funciones son algunos ejemplos de los tipos de entradas $g(x)$ apropiados para este análisis:

$$g(x) = 10, \quad g(x) = x^2 - 5x, \quad g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x}$$
$$g(x) = \text{sen } 3x - 5x \cos 2x, \quad g(x) = xe^x \text{ sen } x + (3x^2 - 1)e^{-4x}.$$

Es decir, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad P(x)e^{\alpha x}, \quad P(x)e^{\alpha x} \text{ sen } \beta x \quad \text{y} \quad P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma (1) cuando

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \text{sen}^{-1} x,$$

y así sucesivamente. Las ecuaciones diferenciales donde la entrada $g(x)$ es una función de este último tipo se considerarán en la sección 3.5.

El conjunto de funciones constituido por constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la extraordinaria propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son de nuevo sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Dado que la combinación lineal de las derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a $g(x)$, parece razonable suponer que y_p *tiene la misma forma que* $g(x)$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método básico.

EJEMPLO 1 Solución general mediante coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$ (2)

Solución **Paso 1.** Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. De la fórmula cuadrática encontramos que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 4m - 2 = 0$ son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Por lo tanto, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Paso 2. Ahora, como la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, supongamos una solución particular que también esté en la forma de un polinomio cuadrático:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Buscamos determinar coeficientes *específicos* A, B y C para los cuales y_p sea una solución de (2). Al sustituir y_p y las derivadas $y_p' = 2Ax + B$ y $y_p'' = 2A$ en la ecuación diferencial (2) obtenemos

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C$$
$$= 2x^2 - 3x + 6.$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de potencias iguales de x deben ser iguales:

igual

$$\boxed{-2A}\, x^2 + \boxed{8A - 2B}\, x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6.$$

Es decir,

$$-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6.$$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones obtenemos los valores $A = -1$, $B = -\frac{5}{2}$ y $C = -9$. Por lo tanto, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 2 Solución particular mediante coeficientes indeterminados

Encuentre una solución particular de $y'' - y' + y = 2 \text{ sen } 3x$.

Solución Un primer supuesto natural para encontrar una solución particular sería A sen $3x$. Pero como las sucesivas diferenciaciones de sen $3x$ producen sen $3x$ *junto con* cos $3x$, en lugar de ello nos vemos impulsados a suponer una solución particular que incluya ambos términos:

$$y_p = A \cos 3x + B \text{ sen } 3x.$$

Al diferenciar y_p y sustituir los resultados en la ecuación diferencial se tiene, después de reagrupar,

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B) \cos 3x + (3A - 8B) \text{ sen } 3x = 2 \text{ sen } 3x$$

o

igual

$$\boxed{-8A - 3B} \cos 3x + \boxed{3A - 8B} \text{ sen } 3x = 0 \cos 3x + 2 \text{ sen } 3x.$$

Del resultante sistema de ecuaciones,

$$-8A - 3B = 0, \qquad 3A - 8B = 2,$$

obtenemos $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = \frac{6}{73} \cos 3x - \frac{16}{73} \text{ sen } 3x. \qquad \equiv$$

Como ya mencionamos, la forma que supusimos para la solución particular y_p es una suposición razonable; no es al azar. Esta suposición debe considerar no sólo el tipo de funciones constitutivas de $g(x)$ sino también, como veremos en el ejemplo 4, las funciones que componen la función complementaria y_c.

EJEMPLO 3 Formación de y_p por superposición

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. (3)

Solución **Paso 1.** Primero, la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$ se encuentra que es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. Después, la presencia de $4x - 5$ en $g(x)$ sugiere que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, dado que la derivada del producto xe^{2x} genera $2xe^{2x}$ y e^{2x}, también suponemos que la solución particular incluye tanto xe^{2x} como e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos tipos básicos de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textit{polinomio} + \textit{exponenciales}.$$

Cómo usar el teorema 3.1.7 en la solución del ejemplo 3.

Asimismo, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 3.1.7) sugiere que buscamos una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Al sustituir

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación (3) dada y reagrupar términos parecidos se tiene

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \quad (4)$$

A partir de esta identidad obtenemos las cuatro ecuaciones

$$-3A = 4, \quad -2A - 3B = -5, \quad -3C = 6, \quad 2C - 3E = 0.$$

La última ecuación incluida en este sistema resulta de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el miembro izquierdo de (4) es cero. Al resolver, encontramos $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$, $C = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. En consecuencia,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}. \qquad \equiv$$

Con base en el principio de superposición (teorema 3.1.7), también podemos abordar el ejemplo 3 desde el punto de vista de resolver dos problemas más simples. Usted deberá verificar que sustituir

$$y_{p_1} = Ax + B \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

y

$$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

produce, a su vez, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -(2x + \frac{4}{3})e^{2x}$. Una solución particular de (3) es entonces $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

El siguiente ejemplo muestra que algunas veces el supuesto “evidente” para la forma de y_p no es el correcto.

EJEMPLO 4 Una falla en el método

Encuentre una solución particular de $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Solución La diferenciación de e^x no produce nuevas funciones. De este modo, si procedemos como lo hicimos en los ejemplos anteriores, podemos suponer de manera razonable una solución particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero sustituir esta expresión en la ecuación diferencial produce la expresión contradictoria $0 = 8e^x$, y por lo tanto resulta evidente que formulamos los supuestos equivocados para y_p.

Aquí la dificultad salta a la vista cuando examinamos la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que nuestro supuesto Ae^x ya está presente en y_c. Esto significa que e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, y cuando en la ecuación diferencial se sustituye un múltiplo constante Ae^x necesariamente produce cero.

Entonces, ¿cuál sería la forma de y_p? Inspirados en el caso II de la sección 3.3, veamos si podemos encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Al sustituir $y_p' = Axe^x + Ae^x$ y $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial y simplificar se tiene

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

A partir de esta última igualdad vemos que el valor de A está determinado ahora por $A = -\frac{8}{3}$. En consecuencia, una solución particular de la ecuación dada es $y_p = \frac{8}{3}xe^x$. ≡

La diferencia entre los procedimientos usados en los ejemplos 1 a 3 y en el ejemplo 4 sugiere que consideremos dos casos. El primer caso refleja la situación de los ejemplos 1 a 3.

***Caso I*:** En la solución particular supuesta, ninguna función es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En la tabla 3.4.1 ilustramos algunos ejemplos específicos de $g(x)$ en (1) junto con la forma correspondiente de la solución particular. Por supuesto, estamos dando por hecho que en la solución particular supuesta y_p ninguna función es duplicada por una función en la función complementaria y_c.

TABLA 3.4.1 Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. sen $4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. cos $4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. e^{3x} sen $4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2$ sen $4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. xe^{3x} cos $4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

EJEMPLO 5 Formas de soluciones particulares: caso I

Determine la forma de una solución particular de

a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ ***b***) $y'' + 4y = x \cos x$.

Solución ***a***) Podemos escribir $g(x) = (5x^3 - 7)e^{-x}$. Si usamos la entrada 9 de la tabla 3.4.1 como un modelo, supusimos una solución particular de la forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{-x}.$$

Observe que no existe duplicidad entre los términos incluidos en y_p y los términos de la función complementaria $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

b) La función $g(x) = x \cos x$ es similar a la entrada 11 de la tabla 3.4.1, salvo, por supuesto, que utilizamos un polinomio lineal en lugar de uno cuadrático y cos x y sen x en lugar de cos $4x$ y sen $4x$ en la forma de y_p:

$$y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + E) \operatorname{sen} x.$$

Observe que otra vez no hay duplicidad de términos entre y_p y $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$. ≡

Si $g(x)$ consiste en una suma de, digamos, m términos del tipo presentado en la tabla, entonces (como en el ejemplo 3) el supuesto de una solución particular y_p consta de la suma de las formas experimentales $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_m}$ correspondiente a estos términos:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

La expresión anterior se puede escribir de otra forma.

Regla de la forma para el caso I: *La forma de y_p es una combinación lineal de todas las funciones independientes que se generan por diferenciaciones repetidas de $g(x)$.*

EJEMPLO 6 Formación de y_p por superposición: caso I

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \text{ sen } 2x + 7xe^{6x}.$$

Solución

En lo relativo a $3x^2$ suponemos $\quad y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$

En lo relativo a -5 sen $2x$ suponemos $\quad y_{p_2} = E \cos 2x + F \text{ sen } 2x.$

En lo relativo a $7xe^{6x}$ suponemos $\quad y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}.$

El supuesto para la solución particular es entonces

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E \cos 2x + F \text{ sen } 2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

En este supuesto, ningún término duplica un término de $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. ≡

***Caso II*:** Una función presente en la solución particular supuesta también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

El siguiente ejemplo es similar al ejemplo 4.

EJEMPLO 7 Solución particular: caso II

Encuentre una solución particular de $y'' - 2y' + y = e^x$.

Solución La función complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Como en el ejemplo 4, el supuesto $y_p = Ae^x$ fallará dado que a partir de y_c resulta evidente que e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Además, no podremos encontrar una solución particular de la forma $y_p = Axe^x$ pues el término xe^x también está duplicado en y_c. Después intentamos con

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Al sustituir en las ecuaciones diferenciales dadas se tiene $2Ae^x = e^x$ y así $A = \frac{1}{2}$. Por esto, una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. ≡

Suponga de nuevo que $g(x)$ consta de m términos del tipo dado en la tabla 3.4.1, y suponga también que el supuesto acostumbrado para una solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m},$$

donde y_{p_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ son las formas de solución particular de prueba que corresponden a esos términos. Bajo las circunstancias descritas en el caso II podemos redactar la siguiente regla general.

Regla de multiplicación para el caso II: *Si cualquier y_{p_i} contiene términos que duplican términos en y_c, entonces dicha y_{p_i} debe multiplicarse por x^n, donde n es el entero positivo más pequeño posible que elimina tal duplicidad.*

EJEMPLO 8 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $y'' + y = 4x + 10 \text{ sen } x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

Solución La solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$. Dado que $g(x) = 4x + 10 \text{ sen } x$ es la suma de un polinomio lineal y una función seno, nuestro supuesto normal para y_p, a partir de los renglones 2 y 5 de la tabla 3.4.1, sería la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C \cos x + E \text{ sen } x$:

$$y_p = Ax + B + C \cos x + E \text{ sen } x. \tag{5}$$

Pero existe una evidente duplicidad de los términos cos x y sen x en esta forma supuesta y dos términos en la función complementaria. Esta duplicidad puede eliminarse al multiplicar simplemente y_{p_2} por x. En lugar de (5), ahora usamos

$$y_p = Ax + B + Cx \cos x + Ex \text{ sen } x.$$

Si diferenciamos esta expresión y sustituimos los resultados en la ecuación diferencial se tiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B - 2C \text{ sen } x + 2E \cos x = 4x + 10 \text{ sen } x, \tag{6}$$

y, por lo tanto, $A = 4$, $B = 0$, $-2C = 10$, $2E = 0$. Las soluciones del sistema son inmediatas: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$ y $E = 0$. En consecuencia, a partir de (6) obtenemos $y_p = 4x - 5x \cos x$. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x + 4x - 5x \cos x.$$

Ahora aplicamos a la solución general de la ecuación las condiciones iniciales establecidas. Primero, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \text{ sen } \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ produce $c_1 = 9\pi$ dado que $\cos \pi = -1$ y $\text{sen } \pi = 0$. Luego, de la derivada

$$y' = -9\pi \text{ sen } x + c_2 \cos x + 4 + 5x \text{ sen } x - 5 \cos x$$

y $$y'(\pi) = -9\pi \text{ sen } \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \text{ sen } \pi - 5 \cos \pi = 2$$

encontramos que $c_2 = 7$. La solución al problema de valor inicial es entonces

$$y = 9\pi \cos x + 7 \text{ sen } x + 4x - 5x \cos x.$$ ≡

EJEMPLO 9 Uso de la regla de multiplicación

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

Solución La función complementaria es $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Y por lo tanto, con base en los renglones 3 y 7 de la tabla 3.4.1, el supuesto acostumbrado para encontrar una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

La inspección de estas funciones muestra que el término de y_{p_2} está duplicado en y_c. Si multiplicamos y_{p_2} por x, observamos que el término xe^{3x} sigue siendo parte de y_c. Pero al multiplicar y_{p_2} por x^2 eliminamos todas las duplicidades. Por lo tanto, la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2 e^{3x}.$$

Diferenciamos esta última forma, sustituimos en la ecuación diferencial y agrupamos términos semejantes para obtener

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

De esta identidad se deduce que $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$. Por lo tanto, la solución general $y = y_c + y_p$ es

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 10 Ecuación diferencial de tercer orden: caso I

Resuelva $y''' + y'' = e^x \cos x$.

Solución A partir de la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ encontramos $m_1 = m_2 = 0$ y $m_3 = -1$. Por lo tanto, la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Con $g(x) = e^x\cos x$, vemos de la entrada 10 de la tabla 3.4.1 que debemos suponer

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Como no hay funciones en y_p que dupliquen funciones en la solución complementaria, procedemos de la forma acostumbrada. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

obtenemos $-2A + 4B = 1$, $-4A - 2B = 0$. Este sistema da $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, de manera que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10} e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \operatorname{sen} x. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 11 Ecuación diferencial de cuarto orden: caso II

Determine la forma de una solución particular para $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$.

Solución Al comparar $y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$ con nuestro supuesto normal para una solución particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

vemos que las duplicidades entre y_c y y_p se eliminan cuando y_{p_1} se multiplica por x^3 y y_{p_2} se multiplica por x. Por lo tanto, el supuesto correcto para una solución particular es

$$y_p = Ax^3 + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-x} + Exe^{-x}. \qquad \equiv$$

Comentarios

i) En los problemas 27 a 36 de los ejercicios 3.4 se le pide resolver problemas de valor inicial y en los problemas 37 a 40 problemas de valor en la frontera. Tal como se indica en el ejemplo 8, asegúrese de aplicar las condiciones iniciales o las condiciones de frontera a la solución general $y = y_c + y_p$. Los estudiantes cometen muchas veces el error de aplicar estas condiciones sólo a la función complementaria y_c dado que es la parte de la solución que contiene las constantes.

ii) Con base en la regla de la forma para el caso I de la página 124 de esta sección, usted puede ver por qué el método de coeficientes indeterminados no es adecuado para las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas cuando la función de entrada $g(x)$ es un poco diferente de los cuatro tipos básicos presentados en tonalidades en la página 120. Si $P(x)$ es un polinomio, la continua diferenciación de $P(x)e^{\alpha x}$ sen βx generará un conjunto independiente que contiene sólo un número *finito* de funciones todas del mismo tipo, es decir, polinomios multiplicados por $e^{\alpha x}$ sen βx o $e^{\alpha x}$ cos βx. Por otro lado, las diferenciaciones repetidas de funciones de entrada como $g(x) = \ln x$ o $g(x) = \tan^{-1}x$ generan un conjunto independiente que contiene un número *infinito* de funciones:

$$\textit{derivadas de } \ln x: \quad \frac{1}{x}, \frac{-1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \ldots,$$

$$\textit{derivadas de } \tan^{-1}x: \quad \frac{1}{1+x^2}, \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}, \ldots.$$

3.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 26, resuelva la ecuación diferencial dada mediante coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$
2. $4y'' + 9y = 15$
3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
4. $y'' + y' - 6y = 2x$
5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
9. $y'' - y' = -3$
10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$
13. $y'' + 4y = 3 \text{ sen } 2x$
14. $y'' - 4y = (x^2 - 3) \text{ sen } 2x$
15. $y'' + y = 2x \text{ sen } x$
16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$
17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$
18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \text{ sen } x)$
19. $y'' + 2y' + y = \text{sen } x + 3 \cos 2x$
20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$
21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$
22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$
24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$
25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$
26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

En los problemas 27 a 36, resuelva el problema de valor inicial dado.

27. $y'' + 4y = -2,\ y(\pi/8) = \frac{1}{2},\ y'(\pi/8) = 2$
28. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11,$
$y(0) = 0, y'(0) = 0$
29. $5y'' + y' = -6x, y(0) = 0,\ y'(0) = -10$
30. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x},\ y(0) = 2, y'(0) = 5$
31. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x},\ y(0) = -3, y'(0) = 1$
32. $y'' - y = \cosh x,\ \ y(0) = 2, y'(0) = 12$
33. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \text{ sen } \omega t,\ x(0) = 0, x'(0) = 0$
34. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t,\ x(0) = 0, x'(0) = 0$
35. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x},\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{5}{2},$
$y''(0) = -\frac{9}{2}$
36. $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x},\ y(0) = -5, y'(0) = 3,$
$y''(0) = -4$

En los ejercicios 37 a 40, resuelva el problema de valores en la frontera dado.

37. $y'' + y = x^2 + 1,\ y(0) = 5, y(1) = 0$
38. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2,\ y(0) = 0, y(\pi) = \pi$
39. $y'' + 3y = 6x,\ y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$
40. $y'' + 3y = 6x,\ y(0) + y'(0) = 0, y(1) = 0$

En los ejercicios 41 y 42, resuelva el problema de valor inicial dado en el que la función de entrada $g(x)$ es discontinua. [*Sugerencia:* Resuelva cada problema en dos intervalos y después encuentre una solución de manera que y y y' sean continuas en $x = \pi/2$ (problema 41) y en $x = \pi$ (problema 42).]

41. $y'' + 4y = g(x), y(0) = 1, y'(0) = 2$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

42. $y'' - 2y' + 10y = g(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, donde

$$g(x) = \begin{cases} 20, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Problemas de análisis

43. Considere la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = e^{kx}$, donde a, b, c y k son constantes. La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea asociada es

$$am^2 + bm + c = 0.$$

a) Si k no es una raíz de la ecuación auxiliar, demuestre que podemos encontrar una solución particular de la forma $y_p = Ae^{kx}$, donde $A = 1/(ak^2 + bk + c)$.

b) Si k es una raíz de la ecuación auxiliar de multiplicidad uno, demuestre que podemos encontrar una solución particular de la forma $y_p = Axe^{kx}$, donde $A = 1/(2ak + b)$. Explique cómo sabemos que $k \neq -b/(2a)$.

c) Si k es una raíz de la ecuación auxiliar de multiplicidad dos, demuestre que podemos encontrar una solución particular de la forma $y = Ax^2e^{kx}$, donde $A = 1/(2a)$.

44. Analice cómo se puede usar el método de esta sección para encontrar una solución particular de $y'' + y = \text{sen } x \cos 2x$. Ponga en práctica su idea.

45. Sin resolver, determine la correspondencia entre cada curva solución de $y'' + y = f(x)$ que se muestre en las figuras con una de las siguientes funciones:

i) $f(x) = 1$, *ii*) $f(x) = e^{-x}$,
iii) $f(x) = e^x$, *iv*) $f(x) = \text{sen } 2x$,
v) $f(x) = e^x \text{ sen } x$, *vi*) $f(x) = \text{sen } x$.

Exponga brevemente su razonamiento.

a)

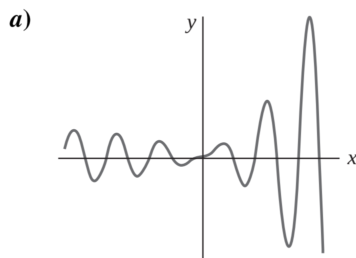


FIGURA 3.4.1 Curva solución

b)

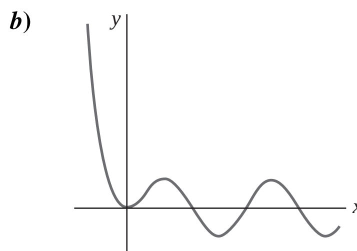


FIGURA 3.4.2 Curva solución

c)

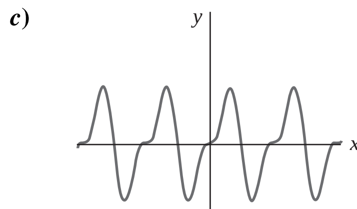


FIGURA 3.4.3 Curva solución

d)

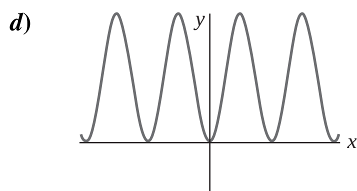


FIGURA 3.4.4 Curva solución

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 46 y 47, encuentre una solución particular de la ecuación diferencial dada. Use un CAS como ayuda para llevar a cabo las diferenciaciones, simplificaciones y el álgebra.

46. $y'' - 4y' + 8y = (2x^2 - 3x)e^{2x} \cos 2x + (10x^2 - x - 1)e^{2x} \text{ sen } 2x$

47. $y^{(4)} + 2y'' + y = 2 \cos x - 3x \text{ sen } x$

3.5 Variación de parámetros

Introducción El **método de variación de parámetros**, usado en la sección 2.3 para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden, es aplicable también a ecuaciones de orden superior. La variación de parámetros tiene una ventaja clara sobre el método de la sección previa en cuanto a que *siempre* produce una solución particular de y_p a condición de que la ecuación homogénea asociada se pueda resolver. Además, el método presentado en esta sección, a diferencia de los coeficientes indeterminados, *no* está limitado a casos donde la función de entrada es una combinación de los cuatro tipos de funciones enunciados en la página 120, ni se circunscribe a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Algunos supuestos Para adaptar el método de variación de parámetros a una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{1}$$

empezamos como lo hicimos en la sección 3.2: escribimos (1) en la **forma estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2}$$

al dividir entre el coeficiente $a_2(x)$. La ecuación (2) es el análogo de segundo orden de la ecuación lineal de primer orden $dy/dx + P(x)y = f(x)$. En (2), supondremos que $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son continuos en algún intervalo común I. Como ya vimos en la sección 3.3, no hay dificultad en obtener la función complementaria y_c de (2) cuando los coeficientes son constantes.

Método de variación de parámetros Con base en la sustitución $y_p = u_1(x)y_1(x)$ que usamos en la sección 2.3 para encontrar una solución particular y_p de $dy/dx + P(x)y = f(x)$, para la ED lineal de segundo orden (2) buscamos una solución de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{3}$$

donde y_1 y y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea asociada a partir de (1). Al utilizar la regla del producto para derivar y_p dos veces, obtenemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$
$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'.$$

Si sustituimos (3) y las derivadas anteriores en (2) y agrupamos los términos se produce

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= u_1[\overbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}^{\text{cero}}] + u_2[\overbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}^{\text{cero}}] \\ &\quad + y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Como buscamos determinar dos funciones desconocidas u_1 y u_2, la razón dicta que necesitamos dos ecuaciones. Obtenemos estas ecuaciones al formular el supuesto adicional de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen a $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$. Este supuesto no aparece así como así: se debe a los primeros dos términos de (4) dado que, si demandamos que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, entonces (4) se reduce a $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$. Ahora tenemos nuestras dos ecuaciones deseadas, aunque sean dos ecuaciones para determinar las derivadas u_1' y u_2'. Por la regla de Cramer, la solución del sistema

Si usted no está familiarizado con la regla de Cramer, véase la sección 7.7.

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

puede expresarse en términos de los determinantes:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W} \tag{5}$$

donde
$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentran integrando los resultados en (5). El determinante W se reconoce como el wronskiano de y_1 y y_2. Por independencia lineal de y_1 y y_2 en I, sabemos que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Resumen del método Por lo general, no es buena idea memorizar las fórmulas sino entender el procedimiento. No obstante, el procedimiento anterior es demasiado largo y complicado de usar cada vez que deseamos resolver una ecuación diferencial. En este caso, resulta más eficiente aplicar simplemente las fórmulas de (5). Por lo tanto, para resolver a_2y''

$+ a_1y' + a_0y = g(x)$, primero encontramos la función complementaria $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ y después calculamos el wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Cuando dividimos entre a_2, ponemos la ecuación en la forma estándar $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Encontramos u_1 y u_2 mediante la integración de $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$, donde W_1 y W_2 están definidos como en (6). Una solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. La solución general de la ecuación es entonces $y = y_c + y_p$.

EJEMPLO 1 Solución general por variación de parámetros

Resuelva $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

Solución De la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$ tenemos $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Con las igualdades $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$, calculamos el wronskiano:

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Dado que la ecuación diferencial dada ya está en la forma (2) (es decir, el coeficiente de y'' es 1), identificamos $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. De (6) obtenemos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x + 1)xe^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x + 1)e^{4x},$$

y, por lo tanto, de (5)

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \quad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

Se deduce que $u_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ y $u_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$. En consecuencia,

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

y

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 2 Solución general por variación de parámetros

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

Solución Primero escribimos la ecuación en su forma estándar (2) dividiéndola entre 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x.$$

Dado que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es $y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Mediante $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \operatorname{sen} 3x$ y $f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$, obtenemos

$$W(\cos 3x, \operatorname{sen} 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Al integrar

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

se obtiene $u_1 = -\frac{1}{12}x$ y $u_2 = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|$. Por lo tanto, una solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} (\operatorname{sen} 3x) \ln |\operatorname{sen} 3x|. \quad (7)$$ ≡

La ecuación (7) representa la solución general de la ecuación diferencial en, digamos, el intervalo $(0, \pi/6)$.

Constantes de integración Cuando se calculan las integrales indefinidas de u_1' y u_2', no necesitamos introducir ninguna constante. Esto es debido a que

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + (u_1 + a_1) y_1 + (u_2 + b_1) y_2 \\ &= (c_1 + a_1) y_1 + (c_2 + b_1) y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Solución general por variación de parámetros

Resuelva $y'' - y = 1/x$.

Solución La ecuación auxiliar $m^2 - 1 = 0$ produce $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$. Por lo tanto, $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Ahora $W(e^x, e^{-x}) = -2$ y

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \quad & u_1 &= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \\ u_2' &= \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \quad & u_2 &= -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\, dt. \end{aligned}$$

Dado que las integrales anteriores no son elementales, nos vemos obligados a escribir

$$y_p = \frac{1}{2} e^x \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\, dt,$$

y, por lo tanto,

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\, dt.$$ ≡

En el ejemplo 3 podemos integrar en cualquier intervalo $x_0 \le t \le x$ que no contenga al origen. Véanse también los ejemplos 2 y 3 de la sección 3.10.

Ecuaciones de orden superior El método que acabamos de examinar para las ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden es posible generalizarlo para las ecuaciones lineales de n-ésimo orden escritas en la forma estándar

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x) y' + P_0(x) y = f(x). \quad (8)$$

Si $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ es la función complementaria para (8), entonces una solución particular es

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) + \cdots + u_n(x) y_n(x),$$

donde u_k', $k = 1, 2, \ldots, n$, están determinadas por las n ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + \quad y_2 u_2' + \cdots + \quad y_n u_n' &= 0 \\ y_1' u_1' + \quad y_2' u_2' + \cdots + \quad y_n' u_n' &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)} u_n' &= f(x). \end{aligned} \quad (9)$$

En este sistema las primeras $n - 1$ ecuaciones, como $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ en (4), son supuestos hechos para simplificar la ecuación resultante después de que $y_p = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)$ $y_n(x)$ se sustituye en (8). En este caso, la regla de Cramer da

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

donde W es el wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y W_k es el determinante obtenido al reemplazar la k-ésima columna del wronskiano por la columna constituida por el lado derecho de (9), es decir, la columna $(0, 0, \ldots, f(x))$. Cuando $n = 2$ obtenemos (5). Cuando $n = 3$, la solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$, donde y_1, y_2 y y_3 constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ED homogénea asociada, y u_1, u_2, u_3 se determinan a partir de

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \quad u_3' = \frac{W_3}{W}, \tag{10}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Véanse los problemas 25 y 26 en los ejercicios 3.5.

Comentarios

En los siguientes problemas no dude en simplificar la forma de y_p. Según la forma en que se encuentren las antiderivadas u_1' y u_2', quizá no obtenga la misma y_p que la dada en la sección de respuestas. Por ejemplo, en el problema 3 de los ejercicios 3.5, tanto $y_p = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$ y $y_p = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$ son respuestas válidas. En cualquier caso, la solución general $y = y_c + y_p$ se simplifica en $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$. ¿Por qué?

3.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 18, resuelva cada ecuación diferencial por variación de parámetros.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan x$
3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + y = \sec \theta \tan \theta$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
10. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$
11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^t \arctan t$
15. $y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$
16. $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$
17. $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$
18. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los problemas 19 a 22, resuelva cada ecuación diferencial por variación de parámetros sujetos a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

19. $4y'' - y = xe^{x/2}$
20. $2y'' + y' - y = x + 1$
21. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$
22. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

En los problemas 23 y 24, las funciones indicadas son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada en $(0, \infty)$. Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea dada.

23. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{3/2}$; $\quad y_1 = x^{-1/2} \cos x$, $y_2 = x^{-1/2} \operatorname{sen} x$
24. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$; $\quad y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$

En los problemas 25 y 26, resuelva la ecuación diferencial de tercer orden por variación de parámetros.

25. $y''' + y' = \tan x$ **26.** $y''' + 4y' = \sec 2x$

Problemas de análisis

En los problemas 27 y 28, analice cómo se pueden combinar los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial dada. Plantee sus ideas.

27. $3y'' - 6y' + 30y = 15 \operatorname{sen} x + e^x \tan 3x$

28. $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x$

29. En los problemas 1, 7, 9 y 18, ¿cuáles son los intervalos de definición de las soluciones generales? Analice por qué el intervalo de definición de la solución general dado en el problema 24 *no* es $(0, \infty)$.

30. Encuentre la solución general de $x^4y'' + x^3y' - 4x^2y = 1$ dado que $y_1 = x^2$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 31 y 32, las integrales indefinidas de las ecuaciones en (5) no son elementales. Utilice un CAS para encontrar los primeros cuatro términos distintos a cero de una serie de Maclaurin de cada integrando y luego integre el resultado. Encuentre una solución particular de las ecuaciones diferenciales dadas.

31. $y'' + y = \sqrt{1 + x^2}$

32. $4y'' - y = e^{x^2}$

3.6 Ecuación de Cauchy-Euler

Introducción La relativa facilidad con que fuimos capaces de encontrar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con *coeficientes constantes* en las secciones anteriores, en general no se puede aplicar a ecuaciones diferenciales lineales con *coeficientes variables*. En el capítulo 5 veremos que cuando una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes variables, generalmente lo mejor que podemos esperar es encontrar una solución en forma de serie infinita. No obstante, el tipo de ecuación diferencial considerada en esta sección es una excepción a esta regla; es una ecuación con coeficientes variables cuya solución general puede expresarse siempre en términos de las potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas y exponenciales. Además, su método de solución es muy similar al que se usa en las ecuaciones con coeficientes constantes.

Ecuación de Cauchy-Euler Cualquier ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_nx^n \frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1x \frac{dy}{dx} + a_0y = g(x),$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, se conoce como **ecuación de Cauchy-Euler**, **ecuación de Euler-Cauchy**, **ecuación de Euler** o **ecuación equidimensional**. La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n - 1, \ldots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de diferenciación d^ky/dx^k:

$$\overset{\text{mismo}}{\underset{\downarrow\ \downarrow}{}} \qquad \overset{\text{mismo}}{\underset{\downarrow\ \downarrow}{}}$$
$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots.$$

Como en la sección 4.3, iniciamos nuestro análisis con un examen detallado de las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

La solución de ecuaciones de orden superior se realiza de manera análoga. También, podemos resolver la ecuación no homogénea $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$ por variación de parámetros, una vez determinada la función complementaria $y_c(x)$.

El coeficiente de d^2y/dx^2 es cero en $x = 0$. Por lo tanto, con el fin de garantizar que los resultados fundamentales del teorema 3.1.1 sean aplicables a la ecuación de Cauchy-Euler, limitamos nuestra atención a encontrar la solución general en el intervalo $(0, \infty)$. Las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ se pueden obtener por sustitución de $t = -x$ en la ecuación diferencial. Véanse los problemas 37 y 38 en los ejercicios 3.6.

El hecho de que el coeficiente principal sea cero en $x = 0$ podría ocasionar un problema.

■ **Método de solución** Intentamos una solución de la forma $y = x^m$, donde se va a determinar m. Parecido a lo que sucedió cuando sustituimos e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, después de sustituir x^m cada término de una ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en m multiplicado por x^m dado que

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^{m-k}$$
$$= a_k m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^m.$$

Por ejemplo, al sustituir $y = x^m$ la ecuación de segundo orden se convierte en

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = (am(m-1) + bm + c)x^m.$$

Por lo tanto, $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la **ecuación auxiliar**

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0. \tag{1}$$

Existen tres diferentes casos a considerarse, dependiendo de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales, o complejas. En el último caso, las raíces aparecen como un par conjugado.

Caso I*: *Raíces reales distintas Digamos que m_1 y m_2 denotan las raíces reales de (1) en forma tal que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Raíces distintas

Resuelva $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

Solución En lugar de sólo memorizar la ecuación (1), algunas veces se prefiere suponer como solución a $y = x^m$ con el fin de entender el origen y la diferencia entre esta nueva forma de ecuación auxiliar y la obtenida en la sección 3.3. Al diferenciar dos veces,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

y sustituir de nuevo en la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - 2x \cdot mx^{m-1} - 4x^m$$
$$= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0$$

si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Ahora $(m+1)(m-4) = 0$ implica $m_1 = -1$, $m_2 = 4$ de manera que (2) proporciona la solución general $y = c_1x^{-1} + c_2x^4$. ≡

Caso II*: *Raíces reales repetidas Si las raíces de (1) están repetidas (es decir, $m_1 = m_2$), entonces obtenemos sólo una solución, a saber, $y = x^{m_1}$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes es necesariamente cero. De la fórmula cuadrática se deriva que la raíz debe ser $m_1 = -(b-a)/2a$.

Ahora podemos construir una segunda solución y_2 mediante (5) de la sección 3.2. Primero escribimos la ecuación de Cauchy-Euler en la forma estándar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

e igualamos $P(x) = b/ax$ y $\int(b/ax)\,dx = (b/a)\ln x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}\,dx \\ &= x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{-2m_1}\,dx \qquad \leftarrow e^{-(b/a)\ln x} = e^{\ln x^{-(b/a)}} = x^{-b/a} \\ &= x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{(b-a)/a}\,dx \quad \leftarrow -2m_1 = (b-a)/a \\ &= x^{m_1}\int \frac{dx}{x} = x^{m_1}\ln x. \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1}\ln x. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Raíces repetidas

Resuelva $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

Solución La sustitución $y = x^m$ nos da

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

cuando $4m^2 + 4m + 1 = 0$ o $(2m + 1)^2 = 0$. Dado que $m_1 = -\frac{1}{2}$ es una raíz repetida, (3) da la solución general $y = c_1x^{-1/2} + c_2\,x^{-1/2}\ln x$. ≡

Para ecuaciones de orden superior, si m_1 es una raíz de multiplicidad k, entonces puede demostrarse que

$$x^{m_1}, \quad x^{m_1}\ln x, \quad x^{m_1}(\ln x)^2, \quad \ldots, \quad x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

son k soluciones linealmente independientes. Asimismo, la solución general de la ecuación diferencial debe contener entonces una combinación lineal de estas k soluciones.

Caso III*: *Raíces complejas conjugadas Si las raíces de (1) son el par conjugado $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución es $y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$. Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, deseamos escribir una solución sólo en términos de funciones reales. Observemos la identidad

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta\ln x},$$

la cual, por la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta} = \cos(\beta\ln x) + i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x).$$

De manera similar, $$x^{-i\beta} = \cos(\beta\ln x) - i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x).$$

Al sumar y restar los dos últimos resultados se tiene

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\,\mathrm{sen}(\beta\ln x),$$

respectivamente. Del hecho de que $y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$ es una solución para cualquier valor de las constantes vemos, a su vez, para $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ que

$$y_1 = x^{\alpha}(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

o $\qquad y_1 = 2x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x)$

son también soluciones. Dado que $W(x^{\alpha}\cos(\beta \ln x), x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, $\beta > 0$, en el intervalo $(0, \infty)$, concluimos que

$$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Por lo tanto, la solución general es

$$y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta \ln x) + c_2\operatorname{sen}(\beta \ln x)]. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial $4x^2y'' + 17y = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

Solución En la ecuación de Cauchy-Euler dada, falta el término y'; sin embargo, la sustitución $y = x^m$ produce

$$4x^2y'' + 17y = x^m(4m(m-1) + 17) = x^m(4m^2 - 4m + 17) = 0$$

cuando $4m^2 - 4m + 17 = 0$. De la fórmula cuadrática encontramos que las raíces son $m_1 = \frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = \frac{1}{2} - 2i$. Con las identificaciones $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$, vemos a partir de (4) que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = x^{1/2}[c_1\cos(2 \ln x) + c_2\operatorname{sen}(2 \ln x)].$$

Si se aplican las condiciones iniciales $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$ a la solución anterior y se usa $\ln 1 = 0$ entonces encontramos, a su vez, que $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es $y = -x^{1/2}\cos(2 \ln x)$. La gráfica de esta función, obtenida con ayuda de un programa de cómputo, está dada en la **FIGURA 3.6.1**. La solución particular es oscilatoria y no acotada cuando $x \to \infty$. ≡

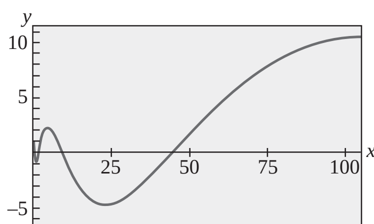


FIGURA 3.6.1 Gráfica de solución del PVI tratado en el ejemplo 3

El siguiente ejemplo ilustra la solución de una ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden.

EJEMPLO 4 Ecuación de tercer orden

Resuelva $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0.$

Solución Las primeras tres derivadas de $y = x^m$ son

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

de manera que la ecuación diferencial dada se convierte en

$$\begin{aligned} x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y &= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5x^2m(m-1)x^{m-2} + 7xmx^{m-1} + 8x^m \\ &= x^m\big(m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8\big) \\ &= x^m(m^3 + 2m^2 + 4m + 8) = x^m(m+2)(m^2+4) = 0. \end{aligned}$$

En este caso vemos que $y = x^m$ será una solución de la ecuación diferencial para $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1x^{-2} + c_2\cos(2 \ln x) + c_3\operatorname{sen}(2 \ln x). \quad ≡$$

El método de coeficientes indeterminados como el descrito en la sección 3.4 no es aplicable, *en general*, a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. En consecuencia, en el siguiente ejemplo se emplea el método de variación de parámetros.

EJEMPLO 5 Variación de parámetros

Resuelva $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$.

Solución Dado que la ecuación es no homogénea, primero resolvemos la ecuación homogénea asociada. A partir de la ecuación auxiliar $(m - 1)(m - 3) = 0$ encontramos $y_c = c_1x + c_2x^3$. Ahora, antes de usar la variación de parámetros para encontrar una solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, recuerde que las fórmulas $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$, donde W_1, W_2 y W son los determinantes definidos en la página 129, fueron derivadas bajo el supuesto de que la ecuación diferencial había sido escrita en la forma estándar $y'' + P(x)$ $y' + Q(x)y = f(x)$. Por lo tanto, dividimos la ecuación dada entre x^2, y a partir de

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

identificamos $f(x) = 2x^2e^x$. Ahora, con $y_1 = x$, $y_2 = x^3$ y

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

encontramos $\quad u_1' = -\dfrac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \quad$ y $\quad u_2' = \dfrac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x.$

La integral de la última función es inmediata, pero en el caso de u_1' integramos por partes dos veces. Los resultados son $u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$ y $u_2 = e^x$. Por lo tanto,

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^xx^3 = 2x^2e^x - 2xe^x.$$

Por último, tenemos $y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$. ≡

Comentarios

La similitud que se presenta entre las formas de las soluciones de ecuaciones de Cauchy-Euler y de ecuaciones lineales con coeficientes constantes no es sólo una coincidencia. Por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares para $ay'' + by' + cy = 0$ y $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ son distintas y reales, las soluciones generales respectivas son

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \quad \text{y} \quad y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}, \quad x > 0. \tag{5}$$

En vista de la identidad $e^{\ln x} = x$, $x > 0$, la segunda solución dada en (5) puede expresarse de igual forma que la primera solución:

$$y = c_1e^{m_1 \ln x} + c_2e^{m_2 \ln x} = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t},$$

donde $t = \ln x$. Este último resultado ilustra otro hecho de la vida matemática: toda ecuación de Cauchy-Euler *siempre* puede volver a escribirse como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes mediante la sustitución $x = e^t$. La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t, usando los métodos de las secciones anteriores, y una vez obtenida la solución general se vuelve a sustituir $t = \ln x$. Dado que este procedimiento ofrece un buen ejercicio de repaso de la regla de la cadena de diferenciación, se exhorta al estudiante a resolver los problemas 31 a 36 en los ejercicios 3.6.

3.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 18, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $x^2y'' - 2y = 0$

2. $4x^2y'' + y = 0$

3. $xy'' + y' = 0$

4. $xy'' - 3y' = 0$

5. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

6. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$

7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

8. $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$

9. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

10. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

12. $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$

13. $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$

14. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$

15. $x^3y''' - 6y = 0$

16. $x^3y''' + xy' - y = 0$

17. $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

18. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

En los problemas 19 a 24, resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros.

19. $xy'' - 4y' = x^4$

20. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

21. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

22. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$

23. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$

24. $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x + 1}$

En los problemas 25 a 30, resuelva el problema de valor inicial dado. Use una herramienta graficadora para trazar la curva solución.

25. $x^2y'' + 3xy' = 0,\ \ y(1) = 0, y'(1) = 4$

26. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0,\ \ y(2) = 32, y'(2) = 0$

27. $x^2y'' + xy' + y = 0,\ \ y(1) = 1, y'(1) = 2$

28. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ \ y(1) = 5, y'(1) = 3$

29. $xy'' + y' = x,\ \ y(1) = 1, y'(1) = -\frac{1}{2}$

30. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 8x^6,\ \ y(\frac{1}{2}) = 0, y'(\frac{1}{2}) = 0$

En los problemas 31 a 36, use la sustitución $x = e^t$ para transformar la ecuación de Cauchy-Euler dada en una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Resuelva la ecuación original solucionando la ecuación nueva mediante el procedimiento de las secciones 3.3 a 3.5.

31. $x^2y'' + 9xy' - 20y = 0$

32. $x^2y'' - 9xy' + 25y = 0$

33. $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$

34. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

35. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$

36. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3$

En los problemas 37 y 38, resuelva el problema de valor inicial dado en el intervalo $(-\infty, 0)$.

37. $4x^2y'' + y = 0,\ \ y(-1) = 2, y'(-1) = 4$

38. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,\ \ y(-2) = 8, y'(-2) = 0$

Problemas de análisis

39. ¿Cómo usaría usted el método de esta sección para resolver

$$(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' + y = 0?$$

Desarrolle sus ideas. Establezca un intervalo donde esté definida la solución.

40. ¿Puede encontrarse una ecuación diferencial de Cauchy-Euler del orden más bajo con coeficientes reales sabiendo que 2 y $1 - i$ son dos raíces de su ecuación auxiliar? Desarrolle sus ideas.

41. Las condiciones iniciales $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$, son aplicables a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$x^2y'' = 0,$$
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$$
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

¿Para qué valores de y_0 y y_1 cada problema de valor inicial tiene una solución?

42. ¿Cuáles son las intersecciones x de la curva solución mostrada en la figura 3.6.1? ¿Cuántas intersecciones de x hay en el intervalo $0 < x < \frac{1}{2}$?

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 43 a 46, resuelva mediante un CAS la ecuación diferencial dada para encontrar las raíces aproximadas de la ecuación auxiliar.

43. $2x^3y''' - 10.98x^2y'' + 8.5xy' + 1.3y = 0$

44. $x^3y''' + 4x^2y'' + 5xy' - 9y = 0$

45. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

46. $x^4y^{(4)} - 6x^3y''' + 33x^2y'' - 105xy' + 169y = 0$

47. Resuelva $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x^2$ por variación de parámetros. Use un CAS para ayudarse en el cálculo de raíces de la ecuación auxiliar y los determinantes dados en la expresión (10) de la sección 3.5.

3.7 Ecuaciones no lineales

Introducción A continuación se analizan las dificultades que rodean a las ecuaciones diferenciales *no lineales* de orden superior y algunos métodos que producen soluciones analíticas.

Algunas diferencias Hay varias diferencias significativas entre las ecuaciones diferenciales lineales y las no lineales. En la sección 3.1 vimos que las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden o de orden superior tienen la propiedad de que una combinación lineal de soluciones también es una solución (teorema 3.1.2). Las ecuaciones no lineales no poseen esta

capacidad de superposición. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$ y $y_4 = \operatorname{sen} x$ son cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $(y'')^2 - y^2 = 0$. Pero combinaciones lineales como $y = c_1e^x + c_3 \cos x$, $y = c_2e^{-x} + c_4 \operatorname{sen} x$, $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ no son soluciones de la ecuación para constantes arbitrarias c_i diferentes de cero. Véase el problema 1 en los ejercicios 3.7.

En el capítulo 2 encontramos que es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden al reconocerlas como ecuaciones separables, exactas, homogéneas, o quizá ecuaciones de Bernoulli. Aunque las soluciones de estas ecuaciones asumían la forma de una familia uniparamétrica, esta familia, como regla, no representa la solución general de la ecuación diferencial. Por otra parte, al prestar atención a ciertas condiciones de continuidad, obteníamos soluciones generales de las ecuaciones lineales de primer orden. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden pueden poseer soluciones singulares mientras que las ecuaciones lineales no. Pero la principal diferencia entre las ecuaciones lineales y no lineales de segundo orden o de orden superior yace en el ámbito de su solubilidad. Dada una ecuación lineal, existe la posibilidad de encontrar alguna forma de solución observable, una solución explícita, o quizá una solución en forma de serie infinita. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior virtualmente desafían la solución. Esto no significa que una ecuación diferencial no lineal de orden superior no tenga solución, sino que no hay métodos analíticos por medio de los cuales se puede encontrar una solución explícita o implícita.

Aunque esto suena desalentador, siguen habiendo otros recursos; siempre podemos analizar una ED no lineal de manera cualitativa y numérica.

Dejemos claro desde el comienzo que las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior son importantes; ¿nos atreveríamos a decir que incluso más importantes que las ecuaciones lineales?, pues conforme perfeccionamos el modelo matemático de, digamos, un sistema físico, también incrementamos la probabilidad de que este modelo de resolución superior no sea lineal.

Empecemos por ilustrar un método analítico que en ocasiones nos permite encontrar soluciones explícitas o implícitas de tipos especiales de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden.

Reducción de orden Las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$, donde falta la variable dependiente y, y $F(y, y', y'') = 0$, donde falta la variable independiente x, algunas veces pueden resolverse empleando métodos de primer orden. Cada ecuación se puede reducir a una ecuación de primer orden mediante la sustitución $u = y'$.

El siguiente ejemplo ilustra la técnica de sustitución para una ecuación de la forma $F(x, y', y'') = 0$. Si $u = y'$, entonces la ecuación diferencial se convierte en $F(x, u, u') = 0$. Si podemos resolver esta última ecuación para u, podemos encontrar y por integración. Como estamos resolviendo una ecuación de segundo orden, advierta que su solución contendrá dos constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Cuando falta la variable dependiente y

Resuelva $y'' = 2x(y')^2$.

Solución Si establecemos $u = y'$ entonces $du/dx = y''$. Después de sustituir, la ecuación de segundo orden se reduce a una ecuación de primer orden con variables separables; la variable independiente es x y la variable dependiente es u:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \quad \text{o} \quad \frac{du}{u^2} = 2x\,dx$$

$$\int u^{-2}du = \int 2x\,dx$$

$$-u^{-1} = x^2 + c_1^2.$$

La constante de integración se escribe por comodidad como c_1^2. La razón será evidente en los siguientes pasos. Como $u^{-1} = 1/y'$, se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2}$$

y, por lo tanto, $$y = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c_1} + c_2.$$ ≡

Ahora mostramos cómo resolver una ecuación de la forma $F(y, y', y'') = 0$. Una vez más, establezcamos $u = y'$, pero dado que falta la variable independiente x, usemos esta sustitución para transformar la ecuación diferencial en una donde la variable independiente sea y y la variable dependiente sea u. Con este fin, usemos la regla de la cadena para calcular la segunda derivada de y:

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

En este caso, la ecuación de primer orden que debemos resolver es $F(y, u, u\, du/dy) = 0$.

EJEMPLO 2 Cuando falta la variable independiente x

Resuelva $yy'' = (y')^2$.

Solución Con ayuda de $u = y'$, de la regla de la cadena mostrada antes y de la separación de variables, la ecuación diferencial dada se convierte en

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}.$$

Si integramos la última ecuación entonces se produce $\ln|u| = \ln|y| + c_1$, lo cual, a su vez, da $u = c_2 y$, donde la constante $\pm e^{c_1}$ se ha identificado nuevamente como c_2. Ahora volvemos a sustituir $u = dy/dx$, separamos otra vez las variables, integramos e identificamos de nuevo las constantes por segunda ocasión:

$$\int\frac{dy}{y} = c_2\int dx \qquad \text{o} \qquad \ln|y| = c_2x + c_3 \qquad \text{o} \qquad y = c_4e^{c_2x}. \qquad ≡$$

■ **Uso de la serie de Taylor** En algunos casos, una solución de un problema de valor inicial no lineal, donde las condiciones iniciales estén especificadas en x_0, se puede aproximar mediante una serie de Taylor centrada en x_0.

EJEMPLO 3 Serie de Taylor para la solución de un PVI

Supongamos que existe una solución del problema de valor inicial

$$y'' = x + y - y^2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

Si además suponemos que la solución $y(x)$ del problema es analítica en 0, entonces $y(x)$ posee un desarrollo de la serie de Taylor centrada en 0:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots. \tag{2}$$

Observe que en la serie (2) se conocen los valores de los términos primero y segundo puesto que son las condiciones iniciales especificadas $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Además, la ecuación diferencial define por sí misma el valor de la segunda derivada en 0: $y''(0) = 0 + y(0) - y(0)^2 = 0 + (-1) - (-1)^2 = -2$. Podemos encontrar entonces expresiones para las derivadas de grado superior y''', $y^{(4)}$, …, por cálculo de las derivadas sucesivas de la ecuación diferencial:

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}(x + y - y^2) = 1 + y' - 2yy' \tag{3}$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(1 + y' - 2yy') = y'' - 2yy'' - 2(y')^2 \tag{4}$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}(y'' - 2yy'' - 2(y')^2) = y''' - 2yy''' - 6y'y'' \tag{5}$$

y así sucesivamente. Ahora usamos $y(0) = -1$ y $y'(0) = 1$ para encontrar, con base en (3), que $y'''(0) = 4$. Con base en los valores de $y(0) = -1$ $y'(0) = 1$ y $y''(0) = -2$, encontramos que $y^{(4)}(0) = -8$ de (4). Con la información adicional de que $y'''(0) = 4$, vemos a partir de (5) que $y^{(5)}(0) = 24$. Por lo tanto, a partir de (2), los primeros seis términos de una serie solución del problema de valor inicial (1) son

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots. \qquad \equiv$$

■ Uso de un programa de solución numérica Los métodos numéricos, como el método de Euler o el de Runge-Kutta, se desarrollaron únicamente para ecuaciones diferenciales de primer orden y luego se extendieron a sistemas de ecuaciones de primer orden. Con el fin de analizar un problema de valor inicial de n-ésimo orden en forma numérica, expresamos la ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como un sistema de n ecuaciones de primer orden. En pocas palabras, aquí mostramos qué hacer para solucionar un problema de valor inicial de segundo orden. Primero, resuelva para y'', es decir, escriba la ED en la forma normal $y'' = f(x, y, y')$ y después suponga que $y' = u$. Por ejemplo, si sustituimos $y' = u$ en

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = u_0, \tag{6}$$

entonces $y'' = u'$ y $y'(x_0) = u(x_0)$, de manera que el problema de valor inicial (6) se convierte en

$$\textit{Resolver:} \quad \begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad u(x_0) = u_0.$$

No obstante, debemos advertirle que un programa de solución numérica comercial *quizá no* requiera* que usted provea el sistema.

EJEMPLO 4 Análisis gráfico del ejemplo 3

Después del procedimiento anterior, el problema de valor inicial de segundo orden del ejemplo 3 es equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = x + y - y^2$$

y tiene condiciones iniciales $y(0) = -1$, $u(0) = 1$. Con ayuda de un programa de solución numérica obtenemos la curva solución mostrada en negro en la **FIGURA 3.7.1**. Para fines comparativos, la curva en gris es la gráfica del polinomio de Taylor de quinto grado $T_5(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5$. Aunque no sabemos el intervalo de convergencia de la serie de Taylor obtenida en el ejemplo 3, la cercanía de las dos curvas en una vecindad del origen sugiere que la serie de potencias puede converger en el intervalo $(-1, 1)$. ≡

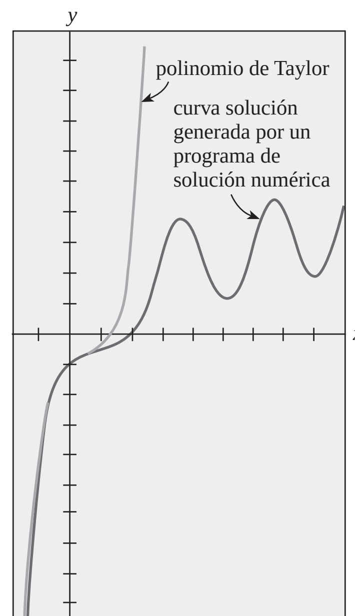


FIGURA 3.7.1 Comparación de dos soluciones aproximadas

■ Preguntas cualitativas La gráfica en negro en la figura 3.7.1 plantea algunas preguntas de naturaleza cualitativa: ¿la solución del problema de valor inicial original es oscilatoria cuando $x \to \infty$? La gráfica generada por un programa de solución numérica en el intervalo más largo mostrado en la **FIGURA 3.7.2** parecería *sugerir* que la respuesta es sí. Pero este único ejemplo, o incluso una variedad de ejemplos, no responde la pregunta básica de si *todas* las soluciones de la ecuación diferencial $y'' = x + y - y^2$ son de naturaleza oscilatoria. Además, ¿qué les pasa a

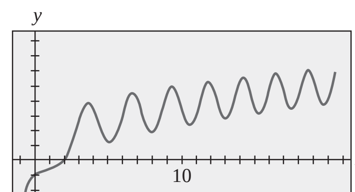


FIGURA 3.7.2 Curva de la solución numérica del PVI (1) del ejemplo 3

* Algunos programas de solución numérica sólo requieren que una ecuación diferencial de segundo orden se exprese en la forma normal $y'' = f(x, y, y')$. La transformación de la ecuación única en un sistema de dos ecuaciones se incorpora en el programa de cómputo, dado que la primera ecuación del sistema siempre es $y' = u$ y la segunda ecuación es $u' = f(x, y, u)$.

las curvas solución de la figura 3.7.2 cuando x se acerca a -1? ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial cuando $x \to -\infty$? ¿Las soluciones están acotadas cuando $x \to \infty$? Preguntas como éstas, en general, no se pueden contestar fácilmente para ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. Pero ciertos tipos de ecuaciones de segundo orden se prestan para efectuar un análisis cualitativo sistemático y éstas, al igual que sus parientes de primer orden encontradas en la sección 2.1, son del tipo que no tiene una dependencia explícita en la variable independiente. Las EDO de segundo orden de la forma

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, y'),$$

es decir, ecuaciones sin la variable independiente x, se denominan **autónomas**. La ecuación diferencial del ejemplo 2 es autónoma y, debido a la presencia del término x en su lado derecho, la ecuación del ejemplo 3 es no autónoma. Para un estudio minucioso del tema de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden y de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, se recomienda al lector remitirse al capítulo 9.

3.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 y 2, verifique si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada pero que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ no es, en general, una solución.

1. $(y'')^2 = y^2$; $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$

2. $yy'' = \frac{1}{2}(y')^2$; $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$

En los problemas 3 a 8, resuelva la ecuación diferencial dada usando la sustitución $u = y'$.

3. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

4. $y'' = 1 + (y')^2$

5. $x^2y'' + (y')^2 = 0$

6. $(y + 1)y'' = (y')^2$

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0$

8. $y^2y'' = y'$

9. Considere el problema de valor inicial

$$y'' + yy' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

a) Use la ED y un programa de solución numérica para graficar la curva solución.

b) Encuentre una solución explícita del PVI. Use una herramienta graficadora para trazar esta solución.

c) Encuentre un intervalo de definición para la solución determinada en el inciso *b*).

10. Encuentre dos soluciones del problema de valor inicial

$$(y'')^2 + (y')^2 = 1, \quad y(\pi/2) = \tfrac{1}{2}, \quad y'(\pi/2) = \sqrt{3}/2.$$

Use un programa de solución numérica para graficar las curvas solución.

En los problemas 11 y 12, muestre que la sustitución $u = y'$ lleva a una ecuación de Bernoulli. Resuelva esta ecuación (véase la sección 2.5).

11. $xy'' = y' + (y')^3$

12. $xy'' = y' + x(y')^2$

En los problemas 13 a 16, proceda como en el ejemplo 3 y obtenga los primeros seis términos diferentes de cero de una solución de la serie de Taylor, centrada en 0, para el problema de valor inicial dado. Use un programa de solución numérica y una herramienta graficadora para comparar la curva solución con la gráfica del polinomio de Taylor.

13. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

14. $y'' + y^2 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

15. $y'' = x^2 + y^2 - 2y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

16. $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

17. En cálculo, la curvatura de una curva definida por una función $y = f(x)$ se expresa como

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Encuentre $y = f(x)$ para la cual $\kappa = 1$. [*Sugerencia:* Por simplicidad, ignore las constantes de integración.]

Problemas de análisis

18. En el problema 1 vimos que $\cos x$ y e^x eran soluciones de la ecuación no lineal $(y'')^2 - y^2 = 0$. Compruebe que sen x y e^{-x} son también soluciones. Sin intentar resolver la ecuación diferencial, analice cómo se pueden encontrar estas soluciones explícitas con base en el conocimiento de las ecuaciones lineales. Sin intentar verificar analice por qué las combinaciones lineales $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ y $y = c_2e^{-x} + c_4 \operatorname{sen} x$ no son, en general, soluciones, pero las dos combinaciones lineales especiales $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ y $y = c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ *deben* satisfacer la ecuación diferencial.

19. Analice la forma en que el método de reducción de orden considerado en esta sección puede aplicarse a la ecuación diferencial de tercer orden $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$. Desarrolle sus ideas y resuelva la ecuación.

20. Analice cómo encontrar una familia biparamétrica de soluciones que sea alternativa para la ecuación diferencial no lineal $y'' = 2x(y')^2$ del ejemplo 1. [*Sugerencia:* Suponga que se usa $-c_1^2$ como la constante de integración en lugar de $+c_1^2$.]

Modelos matemáticos

21. Movimiento en un campo de fuerza Un modelo matemático para la posición $x(t)$ de un cuerpo que se desplaza de manera rectilínea sobre el eje x dentro de un campo de fuerza de cuadrado inverso está dado por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2}{x^2}.$$

Suponga que en $t = 0$ el cuerpo parte desde el reposo de la posición $x = x_0$, $x_0 > 0$. Muestre que la velocidad del cuerpo en el tiempo t está dada por $v^2 = 2k^2(1/x - 1/x_0)$. Use la última expresión y un CAS para desarrollar la integración y expresar el tiempo t en función de x.

22. Un modelo matemático para la posición $x(t)$ de un objeto en movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} x = 0.$$

Use un programa de solución numérica para investigar de modo gráfico las soluciones de la ecuación sujeta a $x(0) = 0$, $x'(0) = x_1$, $x_1 \geq 0$. Analice el movimiento del objeto para $t \geq 0$ y para varias elecciones de x_1. Estudie la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} x = 0$$

de igual manera. Formule una interpretación física posible del término dx/dt.

3.8 Modelos lineales: problemas de valor inicial

Introducción En esta sección consideraremos diversos sistemas lineales dinámicos en los cuales cada modelo matemático es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes junto con condiciones iniciales especificadas en el tiempo t_0:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1.$$

Recuerde que g es la **función de entrada**, **impulsora** o **forzadora**, del sistema. La **salida** o **respuesta** del sistema es una función $y(t)$ definida en un intervalo I que contiene t_0 y satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales en el intervalo I.

3.8.1 Sistemas resorte-masa: movimiento libre no amortiguado

Ley de Hooke Suponga que un resorte flexible está suspendido verticalmente de un soporte rígido y después una masa m se sujeta a su extremo libre. La cantidad de estiramiento o elongación del resorte dependerá, por supuesto, de la masa; las masas con diferentes pesos estiran el resorte en diferentes cantidades. De acuerdo con la ley de Hooke, el propio resorte ejerce una fuerza de recuperación F que es contraria a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación s. Expresado de manera sencilla, $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante del resorte**. El resorte está caracterizado esencialmente por el número k. Por ejemplo, si una masa que pesa 10 libras estira un resorte $\frac{1}{2}$ pie, entonces $10 = k(\frac{1}{2})$ implica $k = 20$ libras/pie. Entonces, necesariamente, una masa que pesa, digamos, 8 libras, estira el mismo resorte sólo $\frac{1}{2}$ pie.

Segunda ley de Newton Después de que una masa m se anexa a un resorte, estira el resorte por una cantidad s y alcanza una posición de equilibrio en la cual su peso W se balancea por la fuerza de recuperación ks. Recuerde que el peso está definido por $W = mg$, donde la masa se mide en slugs, kilogramos o gramos y $g = 32$ pies/s^2, 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2, respectivamente. Como indica la **FIGURA 3.8.1*b***), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza por una cantidad x desde su posición de equilibrio, la fuerza de recuperación del resorte es entonces $k(x + s)$. Si se supone que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y que la masa vibra libre de otras fuerzas externas —**movimiento libre**— podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza restauradora y el peso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \qquad (1)$$

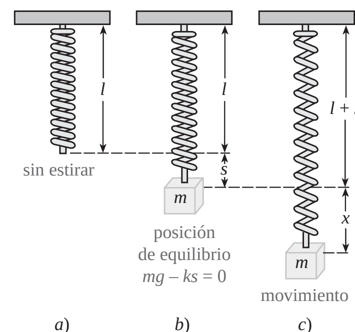


FIGURA 3.8.1 Sistema resorte-masa

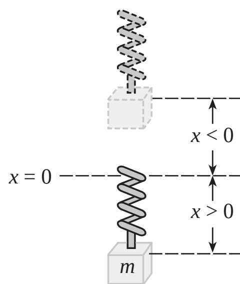


FIGURA 3.8.2 La dirección positiva está por debajo de la posición de equilibrio

En (1), el signo negativo indica que la fuerza restauradora del resorte actúa en dirección opuesta al movimiento. Además, podemos adoptar la convención de que los desplazamientos medidos *por debajo* de la posición de equilibrio son positivos. Véase la **FIGURA 3.8.2**.

Ecuación diferencial de movimiento libre no amortiguado Al dividir (1) entre la masa m obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple** o **movimiento libre no amortiguado**. Dos condiciones iniciales evidentes asociadas con (2) son $x(0) = x_0$, la cantidad de desplazamiento inicial, y $x'(0) = x_1$, la velocidad inicial de la masa. Por ejemplo, si $x_0 > 0$, $x_1 < 0$, la masa comienza desde un punto situado *por debajo* de la posición de equilibrio con una velocidad impartida en forma *ascendente*. Cuando $x_1 = 0$ se afirma que la masa se libera del *reposo*. Por ejemplo, si $x_0 < 0$, $x_1 = 0$, la masa es liberada del reposo desde un punto $|x_0|$ unidades localizado *por encima* de la posición de equilibrio.

Solución y ecuación de movimiento Para resolver la ecuación (2), observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = \omega i$, $m_2 = -\omega i$. Por lo tanto, a partir de la expresión (8) de la sección 3.3 encontramos que la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

El **periodo** de vibraciones libres descrito por (3) es $T = 2\pi/\omega$, y la **frecuencia** es $f = 1/T = \omega/2\pi$. Por ejemplo, para $x(t) = 2 \cos 3t - 4 \operatorname{sen} 3t$ el periodo es $2\pi/3$ y la frecuencia es $3/2\pi$. El número anterior significa que la gráfica de $x(t)$ se repite cada $2\pi/3$ unidades; este último número significa que hay 3 ciclos de la gráfica cada 2π unidades o, de manera equivalente, que la masa experimenta $3/2\pi$ vibraciones completas por unidad de tiempo. Además, se puede mostrar que el periodo $2\pi/\omega$ es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. Tenga en mente que un máximo de $x(t)$ representa un desplazamiento positivo que corresponde al logro de la masa desde una distancia máxima calculada *por debajo* de la posición de equilibrio, mientras un mínimo de $x(t)$ es un desplazamiento negativo que corresponde al logro de la masa desde una altura máxima situada *por encima* de la posición de equilibrio. Nos referimos a cualquiera de estos casos como un **desplazamiento extremo** de la masa. Por último, cuando las condiciones iniciales se usan para determinar las constantes c_1 y c_2 en (3), decimos que la solución particular resultante o respuesta es la **ecuación de movimiento**.

EJEMPLO 1 Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa 2 libras estira un resorte 6 pulgadas. En $t = 0$ la masa se libera de un punto situado 8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pies/s. Determine la ecuación de movimiento libre.

Solución Debido a que estamos usando el sistema de unidades para ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir a pies: 6 pulg $= \frac{1}{2}$ pie; 8 pulg $= \frac{2}{3}$ pie. Además, debemos convertir las unidades de peso dadas en libras en unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, con base en la ley de Hooke, $2 = k(\frac{1}{2})$ implica que la constante del resorte es $k = 4$ libras/pie. Por lo tanto, (1) da

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo presente en la última condición es consecuencia de que la masa está dada con velocidad inicial en dirección negativa, o ascendente.

Ahora, $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, de manera que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t. \tag{4}$$

Al aplicar las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se tiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. De esta forma, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \qquad (5) \equiv$$

■ **Forma alternativa de $x(t)$** Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la **amplitud** real A de las vibraciones libres no es evidente por simple inspección de la ecuación (3). Por ejemplo, aunque la masa del ejemplo 1 en un principio se desplazó $\frac{2}{3}$ de pie más allá de la posición de equilibrio, la amplitud de las vibraciones es un número mayor a $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, muchas veces es conveniente convertir una solución de la forma (3) a la más simple

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi), \qquad (6)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (7)$$

Para verificar esto ampliamos (6) mediante la fórmula de adición para la función seno:

$$A\operatorname{sen}\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\operatorname{sen}\phi = (A\operatorname{sen}\phi)\cos\omega t + (A\cos\phi)\operatorname{sen}\omega t. \qquad (8)$$

De la **FIGURA 3.8.3** se deduce que si ϕ está definida por

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

entonces (8) se convierte en

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t + A\frac{c_2}{A}\operatorname{sen}\omega t = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t = x(t).$$

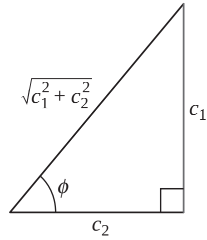


FIGURA 3.8.3 Relación entre $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ y el ángulo de fase ϕ

EJEMPLO 2 Forma alternativa de solución (5)

En vista del análisis anterior, podemos escribir la solución (5), $x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t$, en la forma alternativa $x(t) = A\operatorname{sen}(8t + \phi)$. El cálculo de la amplitud es sencillo, $A = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{-1}{6})^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \approx 0.69$ pie, pero se debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ definido por (7). Con $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$ encontramos $\tan\phi = -4$, y con una calculadora obtenemos $\tan^{-1}(-4) = -1.326$ rad. Éste *no* es el ángulo de fase: $\tan^{-1}(-4)$ está ubicado en el *cuarto cuadrante* y, por lo tanto, contradice el hecho de que $\operatorname{sen}\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$ porque $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$. En consecuencia, debemos suponer que ϕ es el ángulo del *segundo cuadrante* $\phi = \pi + (-1.326) = 1.816$ rad. Entonces tenemos

◀ Calcule de manera cuidadosa el ángulo de fase ϕ.

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816). \qquad (9)$$

El periodo de esta función es $T = 2\pi/8 = \pi/4$. ≡

La **FIGURA 3.8.4*a*)** ilustra la masa del ejemplo 2 que cumple aproximadamente dos ciclos completos de movimiento. De izquierda a derecha, las primeras cinco posiciones marcadas con puntos negros corresponden a: la posición inicial de la masa por debajo de la posición de equilibrio ($x = \frac{2}{3}$), la masa que cruza el punto de equilibrio por primera vez dirigiéndose hacia arriba ($x = 0$), masa en su desplazamiento extremo por encima del punto de equilibrio ($x = -\sqrt{17}/6$) la masa en la posición de equilibrio en la segunda vez que se dirige hacia abajo ($x = 0$), y la masa en su desplazamiento extremo por debajo de la posición de equilibrio ($x = \sqrt{17}/6$). Los puntos señalados en la gráfica de (9) dada en la figura 3.8.4*b*) también concuerdan con las cinco posiciones que se acaban de señalar. No obstante, observe que en la figura 3.8.4*b*) la dirección positiva en el plano *tx* es la dirección acostumbrada hacia arriba y, por lo tanto, es opuesta a la

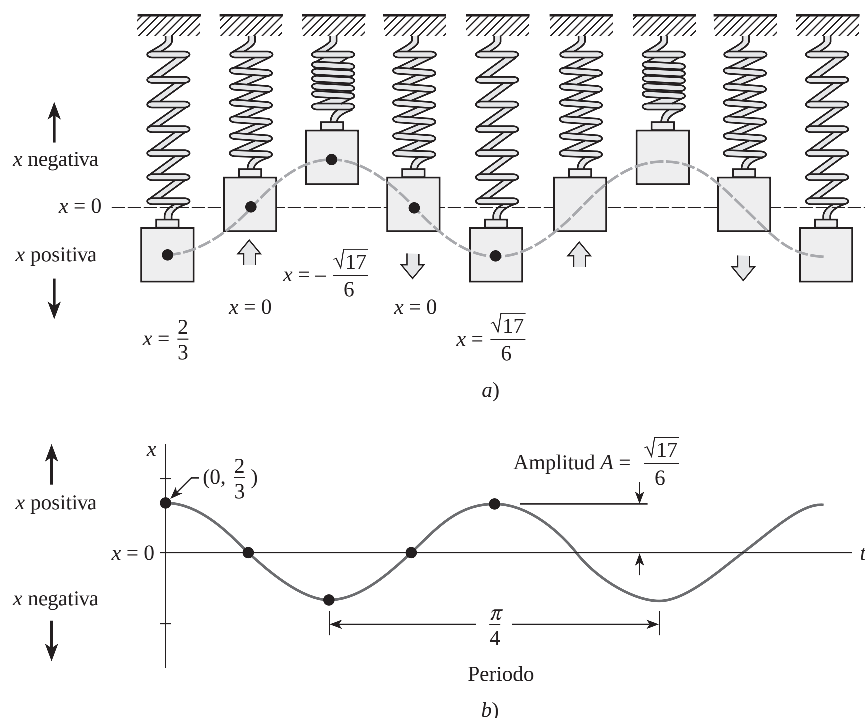


FIGURA 3.8.4 Movimiento armónico simple

dirección positiva indicada en la figura 3.8.4*a*). De este modo, la gráfica sólida que representa el movimiento de la masa en la figura 3.8.4*b*) es el reflejo especular a través del eje t de la curva mostrada en línea gris discontinua en la figura 3.8.4*a*).

La forma (6) resulta muy útil, dado que es fácil encontrar valores de tiempo para los cuales la gráfica de $x(t)$ atraviese el eje t positivo (la línea $x = 0$). Observe que sen$(\omega t + \phi) = 0$ cuando $\omega t + \phi = n\pi$, donde n es un entero positivo.

■ **Sistemas con constantes de resorte variables** En el modelo que se analizó con anterioridad supusimos un caso ideal, una situación donde las características físicas del resorte no cambian con el tiempo. No obstante, en el mundo real parece razonable esperar que si un sistema resorte-masa está en movimiento por un largo periodo, el resorte se debilite; en otras palabras, la "constante del resorte" variaría o, de manera más específica, disminuiría con el paso del tiempo. En un modelo para la **degradación de rigidez**, la constante del resorte k presentada en (1) se reemplaza por la función menguante $K(t) = ke^{-\alpha t}$, $k > 0$, $\alpha > 0$. La ecuación diferencial lineal $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ no puede resolverse mediante los métodos considerados en este capítulo. Sin embargo, podemos obtener dos soluciones linealmente independientes al aplicar los métodos del capítulo 5. Véase el problema 15 en los ejercicios 3.8, el ejemplo 4 en la sección 5.3, y los problemas 33 y 39 de los ejercicios 5.3.

Cuando un sistema resorte-masa está sujeto a un entorno donde la temperatura disminuye rápidamente, tendría sentido reemplazar la constante k con $K(t) = kt$, $k > 0$, una función que aumenta con el tiempo. El modelo resultante, $mx'' + ktx = 0$, es una forma de la **ecuación diferencial de Airy**. Al igual que la ecuación para la degradación de rigidez, la ecuación de Airy puede resolverse con los métodos del capítulo 5. Véase el problema 16 en los ejercicios 3.8, el ejemplo 2 en la sección 5.1, y los problemas 34, 35 y 40 de los ejercicios 5.3.

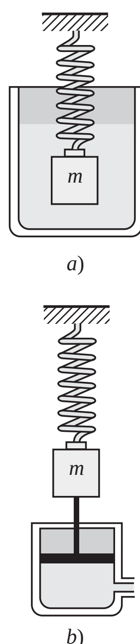


FIGURA 3.8.5 Dispositivos amortiguadores

3.8.2 Sistemas resorte-masa: movimiento libre amortiguado

El concepto de movimiento armónico libre es un tanto irreal, dado que el movimiento descrito por la ecuación (1) supone que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre la masa puesta en movimiento. A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto habrá al menos una fuerza resistente debida al medio circundante. Como lo muestra la **FIGURA 3.8.5**, la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o estar conectada a un dispositivo amortiguador de aceleración.

Ecuación diferencial de movimiento libre amortiguado En el estudio de la mecánica, las fuerzas amortiguadoras que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a la potencia de la velocidad instantánea. En particular, a lo largo del siguiente análisis supondremos que esta fuerza está determinada por un múltiplo constante de dx/dt. Cuando no se aplican otras fuerzas externas al sistema, de la segunda ley de Newton se deduce que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es consecuencia de que la fuerza de amortiguamiento actúa en dirección opuesta al movimiento.

Si se divide (10) entre la masa m, encontramos que la ecuación diferencial del **movimiento libre amortiguado** es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{11}$$

donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{12}$$

El símbolo 2λ se usa únicamente por conveniencia algebraica, dado que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y por lo tanto las raíces correspondientes son

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Ahora podemos distinguir tres casos posibles que dependen del signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$. Dado que cada solución contiene el *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, los desplazamientos de la masa se vuelven insignificantes para un largo periodo.

***Caso I*:** $\boldsymbol{\lambda^2 - \omega^2 > 0}$ En esta situación se dice que el sistema está **sobreamortiguado** debido a que el coeficiente de amortiguación β es mayor cuando se compara con la constante del resorte k. La correspondiente solución de (11) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right). \tag{13}$$

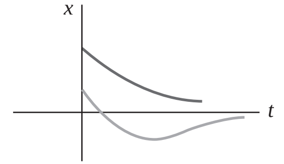


FIGURA 3.8.6 Movimiento de un sistema sobreamortiguado

Esta ecuación representa un movimiento suave y no oscilatorio. La **FIGURA 3.8.6** muestra dos gráficas posibles de $x(t)$.

***Caso II*:** $\boldsymbol{\lambda^2 - \omega^2 = 0}$ Se dice que el sistema está **críticamente amortiguado** debido a que cualquier disminución ligera en la fuerza de amortiguamiento resultaría en un movimiento oscilatorio. La solución general de (11) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2te^{m_1t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2t). \tag{14}$$

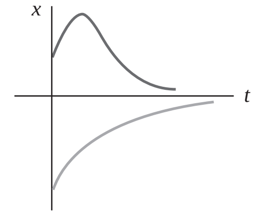


FIGURA 3.8.7 Movimiento de un sistema críticamente amortiguado

En la **FIGURA 3.8.7** se presentan algunas gráficas de movimiento típicas. Observe que el movimiento es muy similar al de un sistema sobreamortiguado. En (14) también es posible advertir que la masa puede atravesar la posición de equilibrio cuando mucho una vez.

***Caso III*:** $\boldsymbol{\lambda^2 - \omega^2 < 0}$ En este caso se dice que el sistema está **subamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 ahora son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (11) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1\cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right). \tag{15}$$

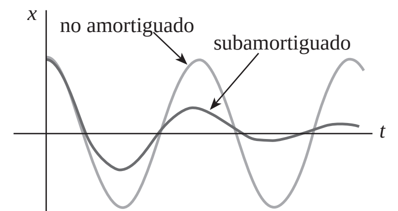


FIGURA 3.8.8 Movimiento de un sistema subamortiguado

Tal como indica la **FIGURA 3.8.8**, el movimiento descrito por (15) es oscilatorio, pero debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

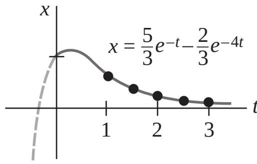
EJEMPLO 3 Movimiento sobreamortiguado

Es fácil verificar que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$$

es

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}. \tag{16}$$



a)

t	$x(t)$
1	0.601
1.5	0.370
2	0.225
2.5	0.137
3	0.083

b)

FIGURA 3.8.9 Sistema sobreamortiguado en el ejemplo 3

El problema se puede interpretar como la representación del movimiento sobreamortiguado de una masa en un resorte. La masa parte de una posición localizada una unidad *por debajo* de la posición de equilibrio con una velocidad *descendente* de 1 pie/s.

Para graficar $x(t)$ encontramos el valor de t para el cual la función tiene un punto extremo, es decir, el valor del tiempo al cual la primera derivada (velocidad) es cero. Al diferenciar (16) se tiene $x'(t) = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$ de manera que $x'(t) = 0$ implica $e^{3t} = \frac{8}{5}$ o $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = 0.157$. Del examen de la primera derivada, así como de nuestra intuición física, se deduce que $x(0.157) = 1.069$ pies es en realidad un máximo. En otras palabras, la masa logra un desplazamiento extremo de 1.069 pies por debajo de la posición de equilibrio.

También debemos verificar si la gráfica cruza el eje t, es decir, si la masa atraviesa la posición de equilibrio. Ello no puede suceder en este caso dado que la ecuación $x(t) = 0$, o $e^{3t} = \frac{2}{5}$ tiene la solución físicamente irrelevante $t = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} = -0.305$.

La gráfica de $x(t)$, junto con otros datos pertinentes, está dada en la **FIGURA 3.8.9**. ≡

EJEMPLO 4 Movimiento críticamente amortiguado

Un peso de 8 libras estira un resorte 2 pies. Suponiendo que una fuerza amortiguadora numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si el peso se libera desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 3 pies/s.

Solución De la ley de Hooke, vemos que $8 = k(2)$ da $k = 4$ libras/pie y $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug. Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \tag{17}$$

La ecuación auxiliar para (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$ de manera que $m_1 = m_2 = -4$. Entonces el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}. \tag{18}$$

Si se aplican las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, encontramos, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}. \tag{19}$$

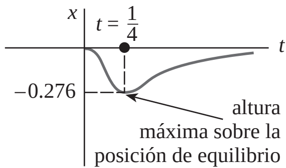


FIGURA 3.8.10 Sistema críticamente amortiguado en el ejemplo 4

Para graficar $x(t)$ procedemos como en el ejemplo 3. De $x'(t) = -3e^{-4t}(1 - 4t)$ vemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x(\frac{1}{4}) = -3(\frac{1}{4})e^{-1} = -0.276$ pies. Como indica la **FIGURA 3.8.10**, interpretamos este valor para dar a entender que el peso alcanza una altura máxima de 0.276 pies por encima de la posición de equilibrio. ≡

EJEMPLO 5 Movimiento subamortiguado

Un peso de 16 libras se adhiere a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio, el resorte mide 8.2 pies. Si el peso se impulsa y se libera del reposo en un punto situado a 2 pies sobre la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ sabiendo además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

Solución La elongación del resorte después de agregarle el peso es de $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que por la ley de Hooke deducimos que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$ libras/pie. Además $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, en consecuencia la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \tag{20}$$

Al proceder, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo cual implica un sistema subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$ entonces la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right). \tag{22}$$ ≡

■ **Forma alternativa de $x(t)$** De manera idéntica al procedimiento empleado en la página 145, podemos escribir cualquier solución

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t)$$

en la forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi), \tag{23}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase ϕ se determina con base en las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}, \quad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

El coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ se denomina algunas veces **amplitud amortiguada** de las vibraciones. Debido a que (23) no es una función periódica, el número $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ se conoce como **cuasiperiodo** y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la **cuasifrecuencia**. El cuasiperiodo es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. El lector deberá verificar, para la ecuación de movimiento del ejemplo 5, que $A = 2\sqrt{10}/3$ y $\phi = 4.391$. Por lo tanto, una forma equivalente de (22) es

$$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-t}\operatorname{sen}(3t + 4.391).$$

3.8.3 Sistemas resorte-masa: movimiento forzado

■ **Ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguamiento** Suponga ahora que tomamos en consideración una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibratoria en un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza conducida que ocasiona movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. Véase la **FIGURA 3.8.11**. La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial del **movimiento forzado**:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \tag{24}$$

Al dividir (24) entre m se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{25}$$

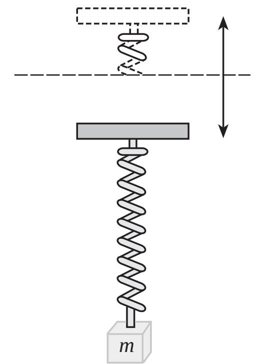


FIGURA 3.8.11 Movimiento vertical oscilatorio del soporte

donde $F(t) = f(t)/m$ y, como en la sección anterior, $2\lambda = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación no homogénea podemos usar ya sea el método de coeficientes indeterminados o la variación de parámetros.

EJEMPLO 6 Interpretación de un problema de valor inicial

Interprete y resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0. \tag{26}$$

Solución Podemos interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consista en una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kilogramo) unida a un resorte ($k = 2$ libras/pie o N/m). La masa se libera del reposo a $\frac{1}{2}$ unidad (pies o metros) por debajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está siendo conducido por una fuerza periódica externa ($T = \pi/2$ s) que comienza en $t = 0$. De manera intuitiva, esperaríamos que incluso con el amortiguamiento, el sistema permaneciera en movimiento hasta el momento en que la función forzadora fuera "desactivada", en cuyo caso las amplitudes disminuirían. No obstante, según el problema dado, $f(t) = 5\cos 4t$ seguirá "activa" por siempre.

Primero multiplicamos la ecuación diferencial dada en (26) por 5 y resolvemos

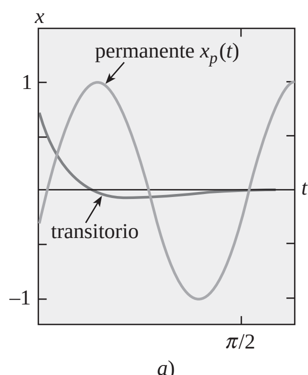
$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

aplicando los métodos acostumbrados. Como $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, se deduce que

$$x_c(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

Mediante el método de los coeficientes indeterminados, supusimos una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$. Si diferenciamos $x_p(t)$ y sustituimos en la ED obtenemos

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t.$$



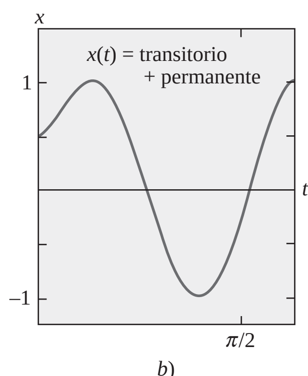


FIGURA 3.8.12 Gráfica de la solución dada en (28) en el ejemplo 6

El sistema de ecuaciones resultante

$$-6A + 24B = 25, \qquad -24A - 6B = 0$$

produce $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. De esto se deduce que

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \tag{27}$$

Cuando establecemos $t = 0$ en la ecuación anterior obtenemos $c_1 = \frac{38}{51}$. Al diferenciar la expresión y establecer después $t = 0$, también encontramos que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \tag{28}$$ ≡

■ **Términos transitorio y permanente** Cuando F es una función periódica, tal como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$ o $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, la solución general de (25) para $\lambda > 0$ es la suma de una función no periódica $x_c(t)$ y una función periódica $x_p(t)$. Además, $x_c(t)$ se extingue a medida que el tiempo aumenta, es decir, $\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$. Por lo tanto, para un periodo largo, los desplazamientos de la masa están muy aproximados por la solución particular $x_p(t)$. Se dice que la función complementaria $x_c(t)$ es un **término transitorio** o una **solución transitoria**, y la función $x_p(t)$, la parte de la solución que permanece después de un intervalo de tiempo, se denomina **término permanente** o **solución permanente**. En consecuencia, observe que el efecto de las condiciones iniciales sobre un sistema resorte-masa conducido por F es transitorio. En la solución particular (28), $e^{-3t}(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t)$ resulta un término transitorio y $x_p(t) = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t$ es un término permanente. Las gráficas de estos dos términos y la solución (28) están dadas en la **FIGURA 3.8.12*a*)** y ***b*)**, respectivamente.

EJEMPLO 7 Soluciones transitorias y permanentes

La solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x_1,$$

donde x_1 es constante, está dada por

$$x(t) = \underbrace{(x_1 - 2)e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{permanente}}.$$

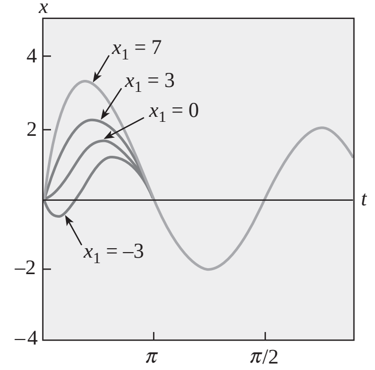


FIGURA 3.8.13 Gráfica de la solución del ejemplo 7 para diferentes valores de x_1

Las curvas de solución para los valores seleccionados de la velocidad inicial x_1 se muestran en la **FIGURA 3.8.13**. Las gráficas permiten advertir que la influencia del término transitorio es insignificante cuando $t > 3\pi/2$. ≡

Ecuación diferencial de movimiento forzado no amortiguado Con una fuerza periódica impresa y ninguna fuerza amortiguadora, no hay término transitorio en la solución de un problema. También veremos que una fuerza periódica impresa con una frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las vibraciones libres no amortiguadas puede ocasionar un problema severo en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

EJEMPLO 8 Movimiento forzado no amortiguado

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0, \tag{29}$$

donde F_0 es una constante y $\gamma \neq \omega$.

Solución La función complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$. Para obtener una solución particular supusimos que $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$, entonces

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\operatorname{sen} \gamma t = F_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Al igualar los coeficientes obtenemos inmediatamente $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$. Por lo tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen} \gamma t.$$

Cuando se aplican las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\operatorname{sen} \gamma t$$

se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega\,(\omega^2 - \gamma^2)$. Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t), \qquad \gamma \neq \omega. \tag{30}$$ ≡

Resonancia pura Aunque la ecuación (30) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite cuando $\gamma \to \omega$ puede obtenerse al aplicar la regla de L'Hôpital. Este proceso limitante es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de vibraciones libres ($\omega/2\pi$). De manera intuitiva, esperamos que en cierto

tiempo seamos capaces de incrementar sustancialmente las amplitudes de vibración. Para $\gamma = \omega$ definimos la solución como

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{\gamma\to\omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen}\omega t + \omega \operatorname{sen}\gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{\dfrac{d}{d\gamma}(-\gamma \operatorname{sen}\omega t + \omega \operatorname{sen}\gamma t)}{\dfrac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega\gamma^2)} \\
&= F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{-\operatorname{sen}\omega t + \omega t \cos\gamma t}{-2\omega\gamma} \\
&= F_0 \frac{-\operatorname{sen}\omega t + \omega t\cos\omega t}{-2\omega^2} \\
&= \frac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{F_0}{2\omega} t\cos\omega t. \qquad (31)
\end{aligned}$$

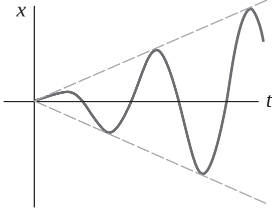


FIGURA 3.8.14 Gráfica de la solución dada en (31) que ilustra la resonancia pura

Como era de esperarse, cuando $t \to \infty$ los desplazamientos se vuelven largos; de hecho, $|x(t_n)| \to \infty$ cuando $t_n = n\pi/\omega$, $n = 1, 2, \ldots$ El fenómeno que acabamos de describir se conoce como **resonancia pura**. La gráfica dada en la **FIGURA 3.8.14** muestra el movimiento típico para este caso.

En conclusión, se debe observar que no hay necesidad real de usar un proceso de límite en (30) para obtener la solución de $\gamma = \omega$. Por otra parte, la ecuación (31) se deduce mediante la resolución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}\omega t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0$$

directamente por métodos convencionales.

Si los desplazamientos de un sistema resorte-masa fuesen descritos en la realidad por una función como (31), el sistema fallaría necesariamente. Las largas oscilaciones de la masa al final forzarían el resorte más allá de su límite elástico. Podríamos argumentar también que el modelo resonante presentado en la figura 3.8.14 es completamente irreal, debido a que ignora los efectos de retardo de las siempre presentes fuerzas amortiguadoras. Aunque es verdad que la resonancia pura no puede ocurrir cuando se considera la cantidad más pequeña de amortiguamiento, pueden presentarse amplitudes de vibración largas e igualmente destructivas (aunque limitadas cuando $t \to \infty$). Véase el problema 43 en los ejercicios 3.8.

3.8.4 Analogía con los circuitos en serie

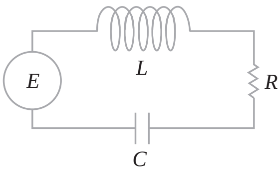


FIGURA 3.8.15 Circuito *LRC* en serie

■ Circuito *LRC* en serie Tal como se mencionó en la introducción a este capítulo, se pueden describir muchos sistemas físicos diferentes mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden que sea similar a la ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguamiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \qquad (32)$$

Si $i(t)$ denota la corriente en el **circuito eléctrico *LRC* en serie** mostrado en la **FIGURA 3.8.15**, entonces las caídas de voltaje a través del inductor, del resistor y del capacitor son como ilustra la figura 1.3.3. Por la segunda ley de Kirchhoff, la suma de esos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ aplicado al circuito; es decir,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \qquad (33)$$

Pero la carga $q(t)$ presente en el capacitor está relacionada con la corriente $i(t)$ por $i = dq/dt$, y, por lo tanto, (33) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \qquad (34)$$

La nomenclatura usada en el análisis de circuitos es similar a la que se emplea para describir sistemas resorte-masa.

Si $E(t) = 0$, se dice que las **vibraciones eléctricas** del circuito son **libres**. Dado que la ecuación auxiliar para (34) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de solución con $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Decimos que el circuito está

	sobreamortiguado si	$R^2 - 4L/C > 0$,
	críticamente amortiguado si	$R^2 - 4L/C = 0$,
y	**subamortiguado** si	$R^2 - 4L/C < 0$.

En cada uno de estos tres casos la solución general de (34) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$ y, por lo tanto, $q(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En el caso subamortiguado, cuando $q(0) = q_0$, la carga del capacitor oscila a medida que disminuye; en otras palabras, el capacitor está cargando y descargando a medida que $t \to \infty$. Cuando $E(t) = 0$ y $R = 0$, se dice que el circuito no está amortiguado y las vibraciones eléctricas no llegan a cero cuando t aumenta sin límite; la respuesta del circuito es **armónica simple**.

EJEMPLO 9 Circuito en serie subamortiguado

Encuentre la carga $q(t)$ presente en el capacitor de un circuito LRC en serie cuando $L =$ 0.25 henry (H), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$ volts (V), $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$ amperes (A).

Solución Dado que $1/C = 1\,000$, la ecuación 34 se convierte en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1\,000q = 0 \qquad \text{o} \qquad q'' + 40q' + 4\,000q = 0.$$

Si resolvemos esta ecuación homogénea en la forma acostumbrada, encontramos que el circuito está subamortiguado y $q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t)$. Al aplicar las condiciones iniciales, obtenemos $c_1 = q_0$ y $c_2 = q_0/3$. Por lo tanto, $q(t) = q_0 e^{-20t}(\cos 60t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 60t)$. Mediante (23) podemos escribir la solución anterior como

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3}e^{-20t}\operatorname{sen}(60t + 1.249). \qquad \equiv$$

Cuando se aplica un voltaje $E(t)$ al circuito se dice que las vibraciones eléctricas son **forzadas**. Para el caso en que $R \neq 0$, la función complementaria $q_c(t)$ de (34) se denomina **solución transitoria**. Si $E(t)$ es periódico o una constante, entonces la solución particular $q_p(t)$ de (34) es una **solución permanente**.

EJEMPLO 10 Corriente permanente

Encuentre la solución permanente $q_p(t)$ y la **corriente permanente** en un circuito LRC en serie cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \gamma t$.

Solución La solución permanente $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t.$$

Mediante el método de coeficientes indeterminados, suponemos una solución particular de la forma $q_p(t) = A \operatorname{sen}\gamma t + B\cos\gamma t$. Al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial y simplificar e igualar los coeficientes, se tiene

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \quad B = \frac{E_0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Es conveniente expresar A y B en términos de algunos nuevos símbolos.

$$\text{Si } X = L\gamma - \frac{1}{C\gamma}, \qquad \text{entonces} \quad X^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2}.$$

$$\text{Si } Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \qquad \text{entonces} \quad Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$$

Por lo tanto, $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, de manera que la carga permanente es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

Ahora la corriente permanente está dada por $i_p(t) = q_p'(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{X}{Z}\cos\gamma t\right). \tag{35} \equiv$$

Las cantidades $X = L\gamma - 1/(C\gamma)$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ definidas en el ejemplo 10 se llaman, respectivamente, **reactancia** e **impedancia** del circuito. Tanto la reactancia como la impedancia se miden en ohms.

3.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

3.8.1 Sistemas resorte-masa: movimiento libre no amortiguado

1. Una masa que pesa 4 libras se sujeta a un resorte cuya constante del resorte es de 16 libras/pie. ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple?

2. Una masa de 20 kilogramos se sujeta a un resorte. Si la frecuencia del movimiento armónico simple es de $2/\pi$ ciclos/s, ¿cuál es la constante del resorte k? ¿Cuál es la frecuencia del movimiento armónico simple si la masa original se reemplaza por otra de 80 kilogramos?

3. Una masa que pesa 24 libras se sujeta al extremo de un resorte y lo estira 4 pulgadas. En un inicio, la masa se libera del reposo desde un punto situado 3 pulgadas por encima de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación de movimiento.

4. Determine la ecuación de movimiento si la masa del problema 3 se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial descendente de 2 pies/s.

5. Una masa que pesa 20 libras estira un resorte 6 pulgadas. La masa se libera inicialmente del reposo desde un punto situado 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio.

a) Encuentre la posición de la masa en los momentos $t = \pi/12, \pi/8, \pi/6, \pi/4$ y $9\pi/32$ s.

b) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando $t = 3\pi/16$ s? ¿Hacia qué dirección va la masa en ese instante?

c) ¿En qué momentos la masa pasa por la posición de equilibrio?

6. Una fuerza de 400 newtons estira un resorte 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se sujeta al extremo del resorte e inicialmente se libera desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento.

7. Otro resorte cuya constante es de 20 N/m está suspendido del mismo soporte rígido pero paralelo al sistema resorte-masa del problema 6. Una masa de 20 kilogramos se sujeta al segundo resorte, y ambas masas se liberan inicialmente desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 10 m/s.

a) ¿Cuál masa exhibe la mayor amplitud de movimiento?

b) ¿Cuál masa está moviéndose más rápido en $t = \pi/4$ s?, ¿en $\pi/2$ s?

c) ¿En qué momentos las dos masas alcanzan la misma posición? ¿Dónde se ubican las masas en esos momentos? ¿En qué direcciones se están moviendo?

8. Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 2 pies. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa inicialmente es liberada desde un punto situado 1 pie por encima de la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 2 pies/s. ¿Cuántos ciclos completos habrá cubierto la masa al final de 4π segundos?

9. Una masa que pesa 8 libras se sujeta a un resorte. Cuando se pone en movimiento, el sistema resorte-masa exhibe un movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la constante del resorte es de 1 libra/pie y la masa se libera inicialmente desde un punto que está 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con velocidad descendente de $\frac{3}{2}$ pies/s. Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6).

10. Una masa que pesa 10 libras estira un resorte $\frac{1}{4}$ pie. Esta masa se quita y es reemplazada por otra de 1.6 slugs, que inicialmente se libera desde un punto situado a $\frac{1}{3}$ pie por encima de la posición de equilibrio con velocidad descendente de $\frac{5}{4}$ pie/s. Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6). ¿En qué momentos la masa alcanza un desplazamiento, por debajo de la posición de equilibrio, numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de amplitud?

11. Una masa que pesa 64 libras estira un resorte 0.32 pie. La masa inicialmente se libera desde un punto que está 8 pulgadas por encima de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 5 pies/s.

a) Encuentre la ecuación de movimiento.
b) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo de movimiento?
c) ¿Cuántos ciclos completos habrá cubierto la masa al final de 3π segundos?
d) ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio cuando se dirige hacia abajo por segunda vez?
e) ¿En qué momento la masa alcanza su desplazamiento extremo en cualquier lado de la posición de equilibrio?
f) ¿Cuál es la posición de la masa en $t = 3$ s?
g) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 3$ s?
h) ¿Cuál es la aceleración en $t = 3$ s?
i) ¿Cuál es la velocidad instantánea en los momentos en que la masa pasa por la posición de equilibrio?
j) ¿En qué momentos la masa está 5 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio?
k) ¿En qué momentos la masa está 5 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba?

12. Una masa de 1 slug está suspendida de un resorte cuya constante del resorte es de 9 libras/pie. La masa inicialmente se libera desde un punto ubicado 1 pie por encima de la posición de equilibrio con velocidad ascendente de $\sqrt{3}$ pies/s. Encuentre los momentos en que la masa se dirige hacia abajo a velocidad de 3 pies/s.

13. Bajo algunas circunstancias, cuando dos resortes paralelos con constantes k_1 y k_2 soportan una sola masa, la **constante efectiva del resorte** del sistema está dada por $k = 4k_1k_2/(k_1 + k_2)$. Una masa que pesa 20 libras estira un resorte 6 pulgadas y otro resorte 2 pulgadas. Los resortes van unidos primero a un soporte común rígido y después a una placa metálica. Como ilustra la **FIGURA 3.8.16**, la masa está unida al centro de la placa en la distribución de doble resorte. Determine la constante del resorte efectiva para este sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con velocidad descendente de 2 pies/s.

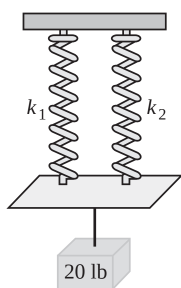


FIGURA 3.8.16 Sistema de doble resorte tratado en el problema 13

14. Cierta masa estira un resorte $\frac{1}{3}$ pie y otro resorte $\frac{1}{2}$ pie. Los dos resortes están unidos a un soporte rígido común de la manera indicada en el problema 13 y en la figura 3.8.16. La primera masa se aparta, otra masa de 8 libras se sujeta a la distribución de doble resorte, y el sistema entra en movimiento. Si el periodo de movimiento es $\pi/15$ segundos, determine cuánto pesa la primera masa.

15. Un modelo de un sistema resorte-masa es $4x'' + e^{-0.1t}x = 0$. Sólo por inspección de la ecuación diferencial, analice el comportamiento del sistema durante un periodo largo.

16. Un modelo de un sistema resorte-masa es $4x'' + tx = 0$. Sólo mediante la inspección de la ecuación diferencial, analice el comportamiento del sistema durante un periodo largo.

3.8.2 Sistemas resorte-masa: movimiento libre amortiguado

En los problemas 17 a 20, la figura dada representa la gráfica de una ecuación de movimiento para un sistema resorte-masa amortiguado. Use la gráfica para determinar

a) si el desplazamiento inicial está por encima o por debajo de la posición de equilibrio, y
b) cuando la masa se libera inicialmente del reposo, si se dirige hacia abajo o hacia arriba.

17.

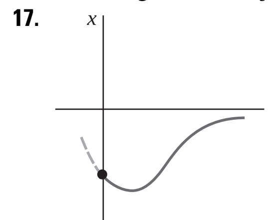


FIGURA 3.8.17 Gráfica para el problema 17

18.

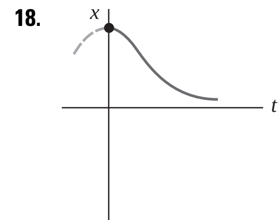


FIGURA 3.8.18 Gráfica para el problema 18

19.

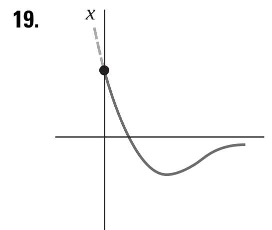


FIGURA 3.8.19 Gráfica para el problema 19

20.

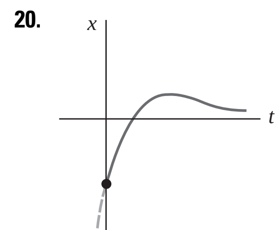


FIGURA 3.8.20 Gráfica para el problema 20

21. Una masa que pesa 4 libras está unida a un resorte cuya constante es 2 libras/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa inicialmente se libera desde un punto localizado 1 pie por encima de la posición de equilibrio a velocidad descendente de 8 pies/s. Determine el tiempo al cual la masa cruza la posición de equilibrio. Encuentre el momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

22. Un resorte de 4 pies mide 8 pies de largo después de unirlo a una masa con peso de 8 libras. El medio a través del cual se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con velocidad descendente de 5 pies/s. Encuentre el momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

23. Una masa de 1 kilogramo se sujeta a un resorte cuya constante es de 16 N/m, y todo el sistema se sumerge entonces en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine las ecuaciones de movimiento si

a) la masa se libera inicialmente del reposo desde un punto que está 1 metro por debajo de la posición de equilibrio, y después

b) la masa se libera inicialmente desde un punto que está 1 metro por debajo de la posición de equilibrio a velocidad ascendente de 12 m/s.

24. En los incisos *a*) y *b*) del problema 23, determine si la masa pasa por el punto de equilibrio. En cada caso, encuentre el momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

25. Una fuerza de 2 libras estira un resorte 1 pie. Una masa con peso de 3.2 libras se sujeta al resorte, y el sistema se sumerge entonces en un medio que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 0.4 vez la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente del reposo desde un punto que está 1 pie por encima de la posición de equilibrio.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (23).

c) Determine la primera vez que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección ascendente.

26. Después de sujetar una masa de 10 libras de peso a un resorte de 5 pies, el resorte mide 7 pies. Esta masa se separa y reemplaza por otra que pesa 8 libras. Todo el sistema se coloca en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde un punto que está $\frac{1}{2}$ pie por debajo de la posición de equilibrio a velocidad descendente de 1 pie/s.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (23).

c) ¿En qué momentos la masa cruza por la posición de equilibrio con dirección descendente?

d) Grafique la ecuación de movimiento.

27. Una masa con peso de 10 libras estira un resorte 2 pies. La masa se sujeta a un dispositivo de amortiguamiento de velocidad que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguamiento β de manera que el movimiento posterior sea *a*) sobreamortiguado, *b*) críticamente amortiguado y *c*) subamortiguado.

28. Una masa pesa 24 libras y estira un resorte 4 pies. El movimiento siguiente se desarrolla en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 2 pies/s, demuestre que cuando $\beta > 3\sqrt{2}$ la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-2\beta t/3} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\,t.$$

3.8.3 Sistemas resorte-masa: movimiento forzado

29. Una masa de 16 libras estira un resorte $\frac{8}{3}$ pie. La masa inicialmente es liberada del reposo desde un punto ubicado 2 pies por debajo de la posición de equilibrio, y el movimiento siguiente se desarrolla en un medio que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa es conducida por una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$.

30. Una masa de 1 slug se sujeta a un resorte cuya constante es de 5 libras/pie. En un inicio, la masa se libera desde 1 pie por debajo de la posición de equilibrio a velocidad descendente de 5 pies/s, y el movimiento subsiguiente se desarrolla en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si la masa es conducida por una fuerza externa igual a $f(t) = 12 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$.

b) Grafique las soluciones transitoria y permanente en los mismos ejes coordenados.

(c) Grafique la ecuación de movimiento.

31. Cuando una masa de 1 slug se sujeta a un resorte, lo estira 2 pies y después descansa en su posición de equilibrio. Comenzando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

32. En el problema 31 determine la ecuación de movimiento si la fuerza externa es $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$. Analice los desplazamientos para $t \to \infty$.

33. Cuando una masa de 2 kilogramos se sujeta a un resorte cuya constante es de 32 N/m, el resorte descansa en su posición de equilibro. Comenzando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento en ausencia de amortiguamiento.

34. En el problema 33, escriba la ecuación de movimiento en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + Be^{-2t} \operatorname{sen}(4t + \theta)$. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones después de un tiempo muy largo?

35. Una masa m se sujeta al extremo de un resorte cuya constante es k. Después que la masa alcanza el equilibrio, su soporte comienza a oscilar verticalmente en torno a una línea horizontal L de acuerdo con una fórmula $h(t)$. El valor de h representa la distancia en pies medida desde L. Véase la **FIGURA 3.8.21**.

a) Determine la ecuación diferencial de movimiento si todo el sistema se mueve por un medio que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a $\beta(dx/dt)$.

b) Resuelva la ecuación diferencial calculada en el inciso *a*) si el resorte se estira 4 pies debido a un peso de 16 libras y $\beta = 2$, $h(t) = 5 \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

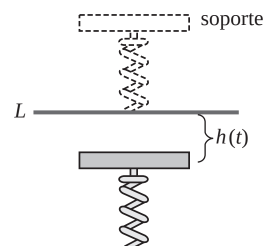


FIGURA 3.8.21 Soporte oscilante tratado en el problema 35

36. Una masa de 100 g se sujeta a un resorte cuya constante es de 1 600 dinas/cm. Después que la masa alcanza el equilibrio, su soporte oscila de acuerdo con la fórmula $h(t) = \operatorname{sen} 8t$, donde h representa el desplazamiento a partir de la posición original. Véanse el problema 35 y la figura 3.8.21.

a) En ausencia de amortiguamiento, determine la ecuación de movimiento si la masa parte desde el reposo de la posición de equilibrio.

b) ¿En qué momentos la masa pasa por la posición de equilibrio?

c) ¿En qué momentos la masa alcanza sus desplazamientos extremos?

d) ¿Cuáles son los desplazamientos máximos y mínimos?

e) Grafique la ecuación de movimiento.

En los problemas 37 y 38, resuelva el problema de valor inicial dado.

37. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = -5 \operatorname{sen} 2t + 3 \cos 2t,\ x(0) = -1,\ x'(0) = 1$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \operatorname{sen} 3t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0$

39. ***a***) Demuestre que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

es $\quad x(t) = \dfrac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t).$

b) Encuentre $\lim\limits_{\gamma \to \omega} \dfrac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t)$.

40. Compare el resultado obtenido en el inciso *b*) del problema 39 con la solución obtenida mediante variación de parámetros cuando la fuerza externa $F_0 \cos \omega t$.

41. ***a***) Muestre que el término $x(t)$ del inciso *a*) del problema 39 se puede escribir en la forma

$$x(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \omega)t.$$

b) Si definimos $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$, demuestre que cuando ε es pequeña, una solución aproximada es

$$x(t) = \frac{F_0}{2\varepsilon\gamma} \operatorname{sen} \varepsilon t \operatorname{sen} \gamma t.$$

Cuando ε es pequeña, la frecuencia $\gamma/2\pi$ de la fuerza impresa es cercana a la frecuencia $\omega/2\pi$ de vibraciones libres. Al ocurrir esto, el movimiento es como el indicado en la **FIGURA 3.8.22**. Las oscilaciones de este tipo se denominan **pulsaciones** o **pulsos** y se deben a que la frecuencia de sen εt es muy pequeña en comparación con la frecuencia de sen γt. Las curvas en línea discontinua, o envolvente de la gráfica de $x(t)$, se obtienen a partir de las gráficas de $\pm(F_0/2\,\varepsilon\gamma)$ sen εt. Use una herramienta de graficación con diversos valores de F_0, ε y γ para verificar la gráfica de la figura 3.8.22.

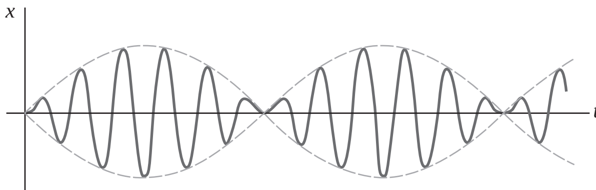


FIGURA 3.8.22 Fenómeno de latidos tratado en el problema 41

Tareas para el laboratorio de cómputo

42. ¿Puede haber latidos cuando se agrega una fuerza amortiguadora al modelo presentado en el inciso *a*) del problema 39? Defienda su posición con gráficas obtenidas a partir de la solución explícita del problema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

o de las curvas solución trazadas mediante un programa de solución numérica.

43. ***a***) Muestre que la solución general de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

es

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta),$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y los ángulos de fase ϕ y θ están definidos, respectivamente, por sen $\phi = c_1/A$, cos $\phi = c_2/A$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

b) La solución del inciso *a*) tiene la forma $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. La inspección muestra que $x_c(t)$ es transitorio y, por lo tanto, para grandes valores de tiempo, la solución es aproximada por $x_p(t) = g(\gamma)\operatorname{sen}(\gamma t + \theta)$, donde

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

Aunque la amplitud $g(\gamma)$ de $x_p(t)$ está limitada cuando $t \to \infty$, demuestre que las oscilaciones máximas ocurrirán en el valor $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. ¿Cuál es el valor máximo de g? Se dice que el número $\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}/2\pi$ es la **frecuencia de resonancia** del sistema.

c) Cuando $F_0 = 2$, $m = 1$ y $k = 4$, g se convierte en

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}}.$$

Elabore una tabla de valores de γ_1 y $g(\gamma_1)$ que corresponda a los coeficientes de amortiguamiento $\beta = 2$, $\beta = 1$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Use una herramienta de graficación para obtener las gráficas de g que correspondan a estos coeficientes de amortiguamiento. Utilice los mismos ejes coordenados. Esta familia de gráficas se denomina **curva de resonancia** o **curva de respuesta en frecuencia** del sistema. ¿A qué se está acercando γ_1 cuando $\beta \to 0$? ¿Qué le pasa a la curva de resonancia cuando $\beta \to 0$?

44. Considere un sistema resorte-masa no amortiguado forzado descrito por el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}^n \gamma t, \;\; x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

a) Para $n = 2$, analice por qué hay una sola frecuencia $\gamma_1/2\pi$ a la cual el sistema está en resonancia pura.

b) Para $n = 3$, analice por qué hay dos frecuencias $\gamma_1/2\pi$ y $\gamma_2/2\pi$ a las cuales el sistema está en resonancia pura.

c) Suponga $\omega = 1$ y $F_0 = 1$. Use un programa de solución numérica para obtener la gráfica de la solución del problema de valor inicial para $n = 2$ y $\gamma = \gamma_1$ en el inciso *a*). Obtenga la gráfica de la solución del problema de valor inicial para $n = 3$ que corresponda a su vez a $\gamma = \gamma_1$ y $\gamma = \gamma_2$ en el inciso *b*).

3.8.4 Analogía con los circuitos en serie

45. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito *LRC* en serie en $t = 0.01$ s cuando $L = 0.05$ H, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 5$ C e $i(0) = 0$ A. Determine la primera vez que la carga en el capacitor es igual a cero.

46. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{4}$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = \frac{1}{300}$ F, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 4$ C e $i(0) = 0$ A. En el capacitor, ¿la carga alguna vez ha sido igual a cero?

En los problemas 47 y 48, encuentre la carga en el capacitor y la corriente en el circuito *LRC* en serie dado. Determine la carga máxima en el capacitor.

47. $L = \frac{5}{3}$ H, $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{30}$ F, $E(t) = 300$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 0$ A.

48. $L = 1$ H, $R = 100\ \Omega$, $C = 0.0004$ F, $E(t) = 30$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 2$ A.

49. Encuentre la carga permanente y la corriente permanente en un circuito *LRC* en serie cuando $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.25$ F y $E(t) = 50 \cos t$ V.

50. Demuestre que la amplitud de la corriente permanente en el circuito *LRC* en serie del ejemplo 10 está dada por E_0/Z, donde Z es la impedancia del circuito.

51. Use el problema 50 para demostrar que la corriente permanente en un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{2}$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ F y $E(t) = 100 \operatorname{sen} 60t$ V, está dada por $i_p(t) = (4.160) \operatorname{sen}(60t - 0.588)$.

52. Encuentre la corriente permanente en un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{2}$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ F y $E(t) = 100 \operatorname{sen} 60t + 200 \cos 40t$ V.

53. Encuentre la carga en el capacitor en un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{2}$ H, $R = 10\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $E(t) = 150$ V, $q(0) = 1$ C e $i(0) = 0$ A. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo tiempo?

54. Muestre que si L, R, C y E_0 son constantes, entonces la amplitud de la corriente permanente del ejemplo 10 es un máximo cuando $\gamma = 1/\sqrt{LC}$. ¿Cuál es la amplitud máxima?

55. Muestre que si L, R, E_0 y γ son constantes, entonces la amplitud de la corriente permanente del ejemplo 10 es un máximo cuando la capacitancia es $C = 1/L\gamma^2$.

56. Encuentre la carga en el capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando $L = 0.1$ H, $C = 0.1$ F, $E(t) = 100 \operatorname{sen} \gamma t$ V, $q(0) = 0$ C e $i(0) = 0$ A.

57. Encuentre la carga en el capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando $E(t) = E_0 \cos \gamma t$ V, $q(0) = q_0$ C e $i(0) = i_0$ A.

58. En el problema 57, encuentre la corriente cuando el circuito está en resonancia.

3.9 Modelos lineales: problemas de valores en la frontera

■ Introducción La sección anterior estuvo dedicada a sistemas en los cuales un modelo matemático de segundo orden está acompañado por las *condiciones iniciales* prescritas (es decir, las condiciones laterales especificadas en la función desconocida y su primera derivada en un solo punto). Pero con frecuencia la descripción matemática de un sistema físico demanda que resolvamos una ecuación diferencial lineal homogénea sujeta a *condiciones de frontera*; esto es, condiciones especificadas en la función desconocida, o en una de sus derivadas, o incluso en una combinación lineal de la función desconocida y una de sus derivadas, en dos (o más) puntos diferentes. Por lo general, el número de condiciones en la frontera especificadas coincide con el orden de las ED lineales. Comenzamos esta sección con una aplicación de una ecuación diferencial lineal de cuarto orden relativamente simple asociada con cuatro condiciones en la frontera.

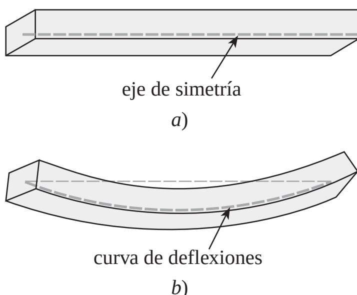


FIGURA 3.9.1 Deflexión de una viga homogénea

■ Deflexión de una viga Muchas estructuras se construyen mediante vigas, o travesaños, y éstas se pandean o distorsionan bajo su propio peso o por influencia de alguna fuerza externa. Como veremos ahora, esta deflexión $y(x)$ se rige por una ecuación diferencial lineal de cuarto orden relativamente simple.

Para comenzar, supongamos que una viga de longitud L es homogénea y tiene cortes transversales uniformes a lo largo. En ausencia de cualquier carga en la viga (incluido su peso), una curva que une los centroides de todos sus cortes transversales es una línea recta llamada **eje de simetría**. Véase la **FIGURA 3.9.1*a*)**. Si una carga se aplica a la viga en un plano

vertical que contenga el eje de simetría, la viga, como ilustra la figura 3.9.1*b*), experimenta una distorsión, y la curva que conecta los centroides de todos los cortes transversales se denomina **curva de deflexiones** o **curva elástica**. La curva de deflexiones se aproxima a la forma de la viga. Ahora suponga que el eje x coincide con el eje de simetría y que la deflexión $y(x)$, medida desde su eje, es positiva si es descendente. En la teoría de la elasticidad se mostró que el momento de flexión $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga está relacionado con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{1}$$

Además, el momento de flexión $M(x)$ es proporcional a la curvatura κ de la curva elástica

$$M(x) = EI\kappa, \tag{2}$$

donde E e I son constantes; E es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga, e I es el momento de inercia de un corte transversal de la viga (con respecto a un eje conocido como eje neutral). El producto EI se denomina **rigidez flexionante** de la viga.

Ahora, con base en el cálculo, la curvatura está dada por $\kappa = y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$. Cuando la deflexión $y(x)$ es pequeña, la pendiente $y' \approx 0$ y, por lo tanto, $[1 + (y')^2]^{3/2} < 1$. Si $\kappa \approx y''$, la ecuación (2) se convierte en $M = EI\, y''$. La segunda derivada de esta última expresión es

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\,\frac{d^2}{dx^2}\,y'' = EI\,\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{3}$$

Mediante el resultado que se proporciona en (1), reemplace d^2M/dx^2 en (3); así vemos que la deflexión $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{4}$$

Las condiciones de frontera asociadas con la ecuación (4) dependen de cómo están soportados los extremos de la viga. Una viga en voladizo está **embebida** o **empotrada** en un extremo y **libre** en el otro. Un trampolín, un brazo extendido, el ala de un avión y un balcón son ejemplos comunes de tales vigas, pero también los árboles, las astas bandera, los rascacielos y el monumento a George Washington pueden actuar como vigas en voladizo; ello se debe a que están empotrado en un extremo y expuestos a la fuerza flexionante del viento en el otro extremo. Para una viga en voladizo, la deflexión $y(x)$ debe satisfacer las siguientes dos condiciones en el extremo empotrado $x = 0$:

- $y(0) = 0$ dado que no hay deflexión, y
- $y'(0) = 0$ dado que la curva de deflexiones es tangente al eje x (en otras palabras, la pendiente de la curva de deflexiones es cero en este punto).

En $x = L$ las condiciones de extremo libre son

- $y''(L) = 0$ dado que el momento de flexión es cero, y
- $y'''(L) = 0$ dado que la fuerza cortante es cero.

La función $F(x) = dM/dx = EI\, d^3y/dx^3$ se denomina fuerza cortante. Si un extremo de una viga está **simplemente apoyado** o **articulado** (también se le llama **extremo apoyado**), entonces debemos tener $y = 0$ y $y'' = 0$ en ese extremo. La tabla siguiente resume las condiciones de frontera asociadas con (4). Véase la **FIGURA 3.9.2**.

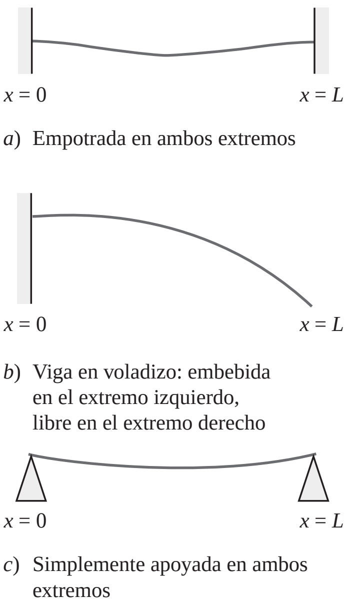


FIGURA 3.9.2 Vigas con extremos en diversas condiciones

Extremos de la viga	Condiciones de frontera
Empotrados	$y = 0,\ y' = 0$
Libres	$y'' = 0,\ y''' = 0$
Simplemente apoyados o articulados	$y = 0,\ y'' = 0$

EJEMPLO 1 Una viga empotrada

Una viga de longitud L está empotrada en ambos extremos. Encuentre la deflexión de la viga si la carga constante w_0 se distribuye de manera uniforme a todo lo largo, es decir, $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

Solución De (4), vemos que la deflexión $y(x)$ satisface

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0.$$

Como la viga está empotrada tanto en su extremo izquierdo ($x = 0$) como en el derecho ($x = L$), no hay deflexión vertical y la línea de deflexión es horizontal en estos puntos. Por lo tanto, las condiciones de frontera son

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y'(L) = 0.$$

Podemos resolver la ecuación diferencial no homogénea en la forma acostumbrada (encontrar y_c mediante la observación de que $m = 0$ es una raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación auxiliar $m^4 = 0$, y determinar entonces una solución particular y_p mediante coeficientes indeterminados), o simplemente integrar la ecuación $d^4y/dx^4 = w_0/EI$ cuatro veces de modo sucesivo. De cualquier forma encontramos que la solución general de la ecuación $y = y_c + y_p$ es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Ahora las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, mientras que las condiciones restantes $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ aplicadas a $y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$ producen las ecuaciones simultáneas

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$3c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

Cuando se resuelve este sistema resulta $c_3 = w_0L^2/24EI$ y $c_4 = -w_0L/12EI$. Por lo tanto, la deflexión es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$$

o $y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2$. Al elegir $w_0 = 24EI$ y $L = 1$, obtenemos la gráfica de la curva de deflexiones mostrada en la **FIGURA 3.9.3**. ≡

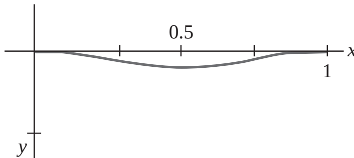


FIGURA 3.9.3 Curva de deflexiones para el ejemplo 1

En la discusión de la viga no resistente, un sistema físico que se describe por un problema de valores en la frontera de dos puntos usualmente involucra una ecuación diferencial de segundo orden. Por lo tanto, para el resto de la discusión en esta sección nos interesan los problemas de valores en la frontera del tipo

$$\textit{Resolver:} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad a < x < b \tag{5}$$

$$\textit{Sujeta a:} \quad \begin{aligned} A_1y(a) + B_1y'(a) &= C_1 \\ A_2y(b) + B_2y'(b) &= C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

En (5) supusimos que los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ y $g(x)$ son continuos en el intervalo $[a, b]$ y que $a_2(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo. En (6) supusimos que ni A_1 ni B_1 son cero, como tampoco lo son A_2 y B_2. Cuando $g(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$ y C_1 y C_2 son 0, decimos que el problema de valores en la frontera es **homogéneo**. De otro modo, afirmamos que el problema de valores en la frontera es **no homogéneo**. Por ejemplo, el PVF $y'' + y = 0$, $y(0)$

$= 0$, $y(\pi) = 0$ es homogéneo, mientras que el PVF $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$ es no homogéneo.

■ **Valores propios y funciones propias** En aplicaciones que involucran problemas de valores en la frontera homogéneos, uno o más de los coeficientes en la ecuación diferencial (5) pueden depender de un parámetro constante λ. Como consecuencia las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ED homogénea (5) también dependen de λ. A menudo deseamos determinar los valores del parámetro para los cuales el problema de valores en la frontera tiene soluciones no triviales. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

EJEMPLO 2 Soluciones no triviales de un PVF

Resuelva el problema de valores en la frontera homogéneo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Solución Consideremos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

***Caso I*:** Para $\lambda = 0$, la solución de la ED $y'' = 0$ es $y = c_1x + c_2$. Al aplicar las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$ a esta solución se producen, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Por lo tanto, para $\lambda = 0$, la única solución del problema de valores en la frontera es la solución trivial $y = 0$.

***Caso II*:** Para $\lambda < 0$, es conveniente escribir $\lambda = -\alpha^2$, donde $\alpha > 0$. Con esta nueva notación, la ecuación auxiliar es $m^2 - \alpha^2 = 0$ y tiene raíces $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Debido a que el intervalo donde estamos trabajando es finito, elegimos escribir la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$ en la forma hiperbólica $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. De $y(0) = 0$ vemos que

$$y(0) = c_1 \cosh 0 + c_2 \operatorname{senh} 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$

implica que $c_1 = 0$. Por lo tanto, $y = c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. La segunda condición de frontera $y(L) = 0$ requiere entonces que $c_2 \operatorname{senh} \alpha L = 0$. Cuando $\alpha \neq 0$, $\operatorname{senh} \alpha L \neq 0$, y por ende estamos obligados a elegir $c_2 = 0$. Una vez más la única solución del PVF es la solución trivial $y = 0$.

***Caso III*:** Para $\lambda > 0$ escribimos $\lambda = \alpha^2$, donde $\alpha > 0$. La ecuación auxiliar $m^2 + \alpha^2 = 0$ ahora tiene raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$, y por lo tanto la solución general de la ED $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Como antes, $y(0) = 0$ produce $c_1 = 0$ y así $y = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Entonces $y(L) = 0$ implica

$$c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0.$$

Si $c_2 = 0$, entonces necesariamente $y = 0$. Pero esta vez podemos requerir que $c_2 \neq 0$ pues $\operatorname{sen} \alpha L = 0$ se satisface siempre que αL sea un múltiplo entero de π:

$$\alpha L = n\pi \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Por lo tanto, cualquier número real diferente de cero, c_2, $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n. Como la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución es también una solución. Entonces podemos tomar simplemente $c_2 = 1$. En otras palabras, para cada número de la secuencia

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}, \ldots,$$

la función *correspondiente* en la secuencia

$$y_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}, \quad y_2 = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}, \quad y_3 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}, \ldots,$$

es una solución no trivial del problema original. ≡

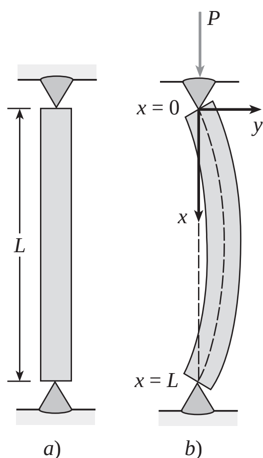


FIGURA 3.9.4 Columna elástica que se pandea bajo una fuerza compresiva

Los números $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ para los cuales el problema de valores en la frontera del ejemplo 2 no tiene una solución trivial se conocen como **valores característicos** o, más comúnmente, **valores propios**. Las soluciones que dependen de estos valores de λ_n, $y_n = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, se denominan **funciones características** o **funciones propias**.

■ **Pandeo de una columna delgada vertical** En el siglo XVIII, Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema de valores en la frontera cuando analizó cómo una delgada columna elástica se pandeaba bajo una fuerza axial compresiva.

Considere una columna vertical larga y delgada de corte transversal uniforme y longitud L. Digamos que $y(x)$ denota la deflexión de la columna cuando una fuerza, o carga, vertical compresiva P se aplica a su parte superior, como indica la **FIGURA 3.9.4**. Al comparar los momentos de flexión en cualquier punto a lo largo de la columna obtenemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \qquad \text{o} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \tag{7}$$

donde E es el módulo de Young de la elasticidad e I es el momento de inercia de un corte transversal en relación con la línea vertical a través de su centroide.

EJEMPLO 3 La carga de Euler

Encuentre la deflexión de una delgada columna homogénea vertical de longitud L sujeta a una carga axial constante P si la columna está articulada en ambos extremos.

Solución El problema de valores en la frontera a ser resuelto es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Primero observe que $y = 0$ es una solución perfectamente buena de este problema. Esta solución tiene una interpretación intuitiva simple: si la carga P no es lo suficientemente grande, no hay deflexión. Entonces la pregunta es: ¿para qué valores de P se flexionará la columna? En términos matemáticos, ¿para qué valores de P el problema dado de valores en la frontera posee soluciones no triviales?

Si se escribe $\lambda = P/EI$ vemos que

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(L) = 0$$

es igual al problema del ejemplo 2. Con base en el caso III de este análisis vemos que las curvas de deflexión son $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, que corresponden a los valores propios $\lambda_n = P_n/EI = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Físicamente, esto significa que la columna se pandeará o flexionará sólo cuando la fuerza compresiva sea uno de los valores $P_n = n^2\pi^2EI/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estas fuerzas diferentes se denominan **cargas críticas**. La curva de deflexión que corresponde a la carga crítica más pequeña $P_1 = \pi^2EI/L^2$, denominada **carga de Euler**, es $y_1(x) = c_2 \operatorname{sen}(\pi x/L)$ y se conoce como el **primer modo de pandeo**. ≡

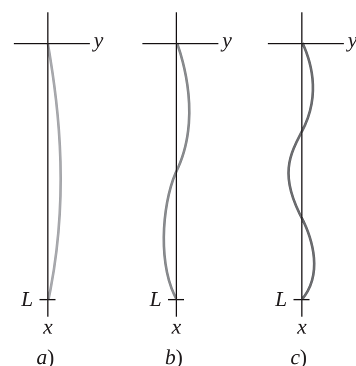


FIGURA 3.9.5 Curvas de deflexión para las fuerzas compresivas P_1, P_2, P_3

Las curvas de deflexión del ejemplo 3 que corresponden a $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ se muestran en la **FIGURA 3.9.5**. Observe que si la columna original tiene alguna clase de restricción física encima en $x = L/2$, entonces la carga crítica más pequeña será $P_2 = 4\pi^2EI/L^2$ y la curva de deflexión será como indica la figura 3.9.5*b*). Si se ponen restricciones sobre la columna en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$, entonces la columna no se pandeará sino hasta que se aplique la carga crítica $P_3 = 9\pi^2EI/L^2$ y la curva de deflexión sea como ilustra la figura 3.9.5*c*). Véase el problema 25 en los ejercicios 3.9.

■ **Cuerda rotatoria** La ecuación diferencial lineal simple de segundo orden

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{8}$$

ocurre una y otra vez como un modelo matemático. En la sección 3.8 vimos la expresión (8) en las formas $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ y $d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$ como modelos del movimiento armónico simple de un sistema resorte-masa y de la respuesta armónica simple de un circuito en serie, respectivamente. Cuando en (7) el modelo para la deflexión de una columna delgada

se escribe como $d^2y/dx^2 + (P/EI)y = 0$ resulta evidente que es el mismo que (8). Una vez más encontramos la ecuación básica (8) en esta sección: como un modelo que define la curva de deflexión o la forma $y(x)$ asumida por una cuerda rotatoria. La situación física es semejante a cuando dos personas sostienen una cuerda para saltar y la giran de manera sincronizada. Véase la **FIGURA 3.9.6** en los incisos *a*) y *b*).

Suponga que una cuerda de longitud L y densidad lineal constante ρ (masa por unidad de longitud) se estira a lo largo del eje x y se fija en $x = 0$ y $x = L$. Suponga que la cuerda gira entonces en relación con ese eje a velocidad angular constante ω. Considere un tramo de la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, donde Δx es pequeño. Si la magnitud T de la tensión $\mathbf{T}$, la cual actúa de manera tangencial a la cuerda, es constante a lo largo de la cuerda, entonces la ecuación diferencial deseada se puede obtener al igualar las dos diferentes formulaciones de la fuerza neta que actúa sobre la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Primero, a partir de la figura 3.9.6*c*) vemos que la fuerza vertical neta es

$$F = T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1. \tag{9}$$

Cuando los ángulos θ_1 y θ_2 (medidos en radianes) son pequeños, tenemos $\operatorname{sen} \theta_2 \approx \tan \theta_2$ y $\operatorname{sen} \theta_1 \approx \tan \theta_1$. Además, como $\tan \theta_2$ y $\tan \theta_1$ son, a su vez, pendientes de las líneas que contienen los vectores $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$, también podemos escribir

$$\tan \theta_2 = y'(x + \Delta x) \quad \text{y} \quad \tan \theta_1 = y'(x).$$

Por lo tanto, (9) se convierte en

$$F \approx T\,[\,y'(x + \Delta x) - y'(x)]. \tag{10}$$

Segundo, podemos obtener una forma diferente de esta misma fuerza neta mediante la segunda ley de Newton, $F = ma$. Aquí la masa de la cuerda en el intervalo es $m = \rho\Delta x$; la aceleración centrípeta de un cuerpo que gira con velocidad angular ω en un círculo de radio r es $a = r\omega^2$. Con Δx pequeña tomamos $r = y$. Por lo tanto, la fuerza neta vertical también es aproximada por

$$F \approx -(\rho\Delta x)y\omega^2, \tag{11}$$

donde el signo menos proviene de que la aceleración apunta en dirección opuesta a la dirección positiva y. Ahora, al igualar (10) y (11) tenemos

cociente de diferencia
↓

$$T[y'(x + \Delta x) - y'(x)] = -(\rho\Delta x)y\omega^2 \qquad \text{o} \qquad T\,\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{12}$$

Para Δx cercano a cero, el cociente de diferencias en (12) es aproximadamente la segunda derivada d^2y/dx^2. Finalmente llegamos al modelo

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{13}$$

Dado que la cuerda está anclada en sus extremos $x = 0$ y $x = L$, esperamos que la solución $y(x)$ de la ecuación (13) también satisfaga las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$.

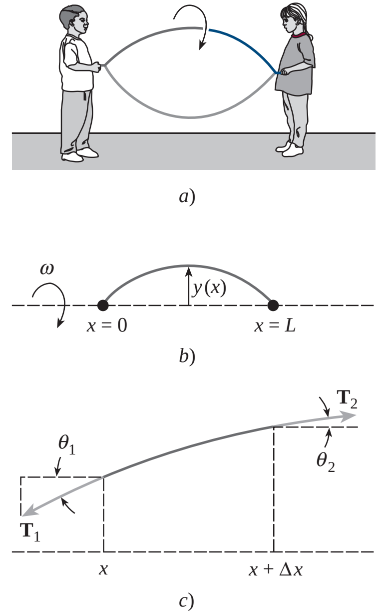


FIGURA 3.9.6 Cuerda rotatoria y fuerzas que actúan sobre esta cuerda

Comentarios

i) En la sección 10.5 abordaremos con mayor detalle el tema de valores propios y funciones propias para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.
ii) Los valores propios no siempre son tan fáciles de encontrar como en el ejemplo 2; es probable que tenga que aproximar raíces de ecuaciones tales como $\tan x = -x$ o $\cos x \cosh x = 1$. Véanse los problemas 34 a 38 en los ejercicios 3.9.
iii) Las condiciones de frontera pueden llevarnos a un sistema algebraico homogéneo de ecuaciones lineales donde las incógnitas sean los coeficientes c_i en la solución general de la ED. Tal sistema siempre es consistente, pero con el fin de obtener una solución no trivial (en el caso de que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas) debemos tener el determinante de los coeficientes igual a cero. Véanse los problemas 19 y 20 en los ejercicios 3.9.

3.9 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

Deflexión de una viga

En los problemas 1 a 5 resuelva la ecuación (4) sujeta a las condiciones de frontera apropiadas. La viga tiene longitud L y w_0 es una constante.

1. ***a***) La viga está embebida en su extremo izquierdo y libre en su lado derecho, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use una herramienta de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.

2. ***a***) La viga está simplemente apoyada en ambos extremos, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use una herramienta de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.

3. ***a***) La viga está embebida en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en su extremo derecho, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use una herramienta de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 48EI$ y $L = 1$.

4. ***a***) La viga está embebida a su izquierda y apoyada simplemente en su extremo derecho, y $w(x) = w_0$ sen $(\pi x/L)$, $0 < x < L$.

b) Use una herramienta de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 2\pi^3 EI$ y $L = 1$.

c) Use la aplicación para encontrar raíces de un CAS (o calculadora gráfica) para aproximar el punto en la gráfica del inciso *b*) donde ocurre la deflexión máxima. ¿Cuál es la deflexión máxima?

5. ***a***) La viga está simplemente apoyada en ambos extremos, y $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$.

b) Use una herramienta graficadora para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 36EI$ y $L = 1$.

c) Use la aplicación para encontrar raíces de un CAS (o calculadora gráfica) para aproximar el punto en la gráfica del inciso *b*) donde ocurre la deflexión máxima. ¿Cuál es la deflexión máxima?

6. ***a***) Encuentre la deflexión máxima para la viga en voladizo del problema 1.

b) ¿Cómo se compara la deflexión máxima de una viga de la mitad de largo con el valor calculado en el inciso *a*)?

c) Encuentre la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada del problema 2.

d) ¿Cómo se compara la deflexión máxima de la viga apoyada simplemente, y calculada en el inciso *c*), con el valor de la deflexión máxima de la viga embebida del ejemplo 1?

7. Una viga en voladizo de longitud L está embebida en su extremo derecho, y en su extremo libre se aplica una fuerza tensora de P libras. Cuando el origen es tomado en su extremo libre, como indica la **FIGURA 3.9.7**, se puede mostrar que la deflexión $y(x)$ de la viga satisface la ecuación diferencial

$$EIy'' = Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Encuentre la deflexión de la viga en voladizo si $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$, y $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$.

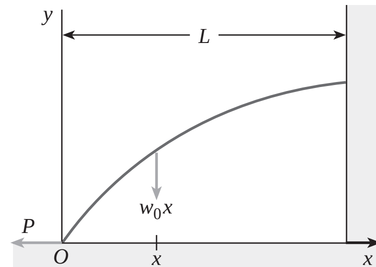


FIGURA 3.9.7 Deflexión de una viga en voladizo, problema 7

8. Cuando una fuerza compresiva y no una tensora se aplica al extremo libre de la viga del problema 7, la ecuación diferencial de la deflexión es

$$EIy'' = -Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Resuelva esta ecuación si $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$ y $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$.

Valores propios y funciones propias

En los problemas 9 a 18 encuentre los valores propios y las funciones propias para el problema de valores en la frontera dado.

9. $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

10. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi/4) = 0$

11. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(L) = 0$

12. $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 0$

13. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

14. $y'' + \lambda y = 0,\ y(-\pi) = 0,\ y(\pi) = 0$

15. $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0,\ y(0) = 0,\ y(5) = 0$

16. $y'' + (\lambda + 1)y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 0$

17. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = 0,\ y(e^{\pi}) = 0$

18. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y'(e^{-1}) = 0,\ y(1) = 0$

En los problemas 19 y 20 encuentre los valores propios y las funciones propias para el problema de valores en la frontera dado. Considere sólo el caso $\lambda = \alpha^4$, $\alpha > 0$.

19. $y^{(4)} - \lambda y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y''(0) = 0,\quad y(1) = 0,$ $y''(1) = 0$

20. $y^{(4)} - \lambda y = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y'''(0) = 0,\quad y(\pi) = 0,$ $y''(\pi) = 0$

Pandeo de una columna delgada

21. Considere la figura 3.9.5. ¿Dónde se deben colocar las restricciones físicas sobre la columna si deseamos que la carga crítica sea P_4? Trace la curva de deflexión que corresponda a esta carga.

22. Las cargas críticas de las columnas delgadas dependen de las condiciones de los extremos de las columnas. En el ejemplo 3, el valor P_1 de la carga de Euler se derivó bajo el supuesto de una columna articulada en ambos extremos. Suponga que una columna delgada homogénea vertical está empotrada en su base ($x = 0$) y libre en su parte superior ($x = L$), y que una carga axial constante P se aplica sobre su extremo libre. Esta carga o bien ocasiona una pequeña deflexión δ como ilustra la **FIGURA 3.9.8**, o no la causa. En cualquier caso, la ecuación diferencial para la deflexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = P\delta.$$

a) ¿Cuál es la deflexión pronosticada cuando $\delta = 0$?

b) Cuando $\delta \neq 0$, demuestre que la carga de Euler para esta columna es un cuarto de la carga de Euler para la columna articulada del ejemplo 3.

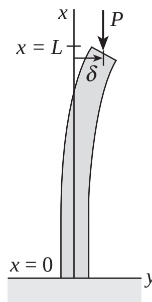


FIGURA 3.9.8 Deflexión de una columna vertical, problema 22

23. Tal como se mencionó en el problema 22, la ecuación diferencial (7) que rige la deflexión $y(x)$ de una columna elástica sujeta a una fuerza axial compresiva constante P es válida sólo cuando los extremos de la columna están articulados. En general, la ecuación diferencial que rige la deflexión de la columna está dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Suponga que la columna es uniforme (EI es una constante) y tiene los extremos articulados. Demuestre que la solución de esta ecuación diferencial de cuarto orden sujeta a las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y''(L) = 0$ es equivalente al análisis del ejemplo 3.

24. Suponga que una columna elástica delgada uniforme está articulada en el extremo $x = 0$ y empotrada en el extremo $x = L$.

a) Use la ecuación diferencial de cuarto orden dada en el problema 23 para encontrar los valores propios λ_n, las cargas críticas P_n, la carga de Euler P_1 y las deflexiones $y_n(x)$.

b) Use una herramienta de graficación para trazar el primer modo de pandeo.

Cuerda rotatoria

25. Considere el problema de valores en la frontera introducido en la construcción del modelo matemático para representar la forma de una cuerda rotatoria:

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Para las constantes T y ρ defina las **velocidades críticas** de rotación angular ω_n como los valores de ω para los cuales el problema de valores en la frontera tenga soluciones no triviales. Encuentre las velocidades críticas ω_n y las deflexiones correspondientes $y_n(x)$.

26. Cuando la magnitud de la tensión T no es constante, entonces el modelo para la curva de deflexión o forma $y(x)$ que asume una cuerda rotatoria está dado por

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y = 0.$$

Suponga que $1 < x < e$ y $T(x) = x^2$.

a) Si $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ y $\rho\omega^2 > 0.25$ demuestre que las velocidades críticas de la rotación angular son

$$\omega_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4n^2\pi^2 + 1)/\rho}$$

y las deflexiones correspondientes son

$$y_n(x) = c_2 x^{-1/2}\operatorname{sen}(n\pi\ln x),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Use una herramienta de graficación para trazar las curvas de deflexión en el intervalo $[1, e]$ para $n = 1, 2, 3$. Elija $c_2 = 1$.

Problemas diversos de valores en la frontera

27. Temperatura en una esfera Considere dos esferas de radios concéntricos $r = a$ y $r = b$, $a < b$. Véase la **FIGURA 3.3.9**. En la región localizada entre las esferas, la temperatura $u(r)$ se determina a partir del problema de valores en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Resuelva para $u(r)$.

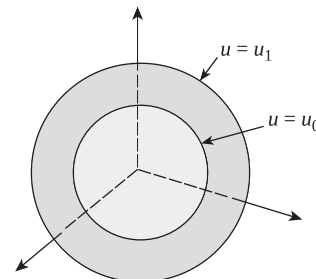


FIGURA 3.9.9 Esferas concéntricas para el problema 27

28. Temperatura en un anillo La temperatura $u(r)$ en el anillo circular mostrado en la **FIGURA 3.9.10** se determina a partir del problema de valores en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Muestre que

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

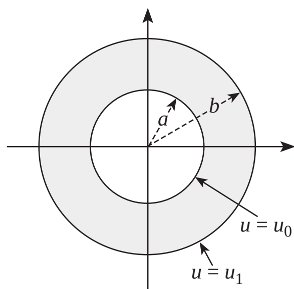


FIGURA 3.9.10 Anillo circular para el problema 28

Problemas de análisis

29. Movimiento armónico simple El modelo $mx'' + kx = 0$ para el movimiento armónico simple, analizado en la sección 3.8, puede relacionarse con el ejemplo 2 de esta sección.

Considere un sistema resorte-masa libre no amortiguado para el cual la constante del resorte es, digamos, $k = 10$ libras/pie. Determine las masas m_n que puedan sujetarse al resorte de manera que cuando cada masa se libere en la posición de equilibrio en $t = 0$ con velocidad diferente de cero v_0, pase por la posición de equilibrio en $t = 1$ segundo. ¿Cuántas veces atravesará cada masa m_n la posición de equilibrio en el intervalo de tiempo $0 < t < 1$?

30. Movimiento amortiguado Suponga que el modelo para el sistema resorte-masa presentado en el problema 29 se reemplaza por $mx'' + 2x' + kx = 0$. En otras palabras, el sistema es libre pero está sujeto a un amortiguamiento numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea. Con las mismas condiciones iniciales y la constante del resorte del problema 29, investigue si puede encontrarse una masa m que pase por el punto de equilibrio en $t = 1$ segundo.

En los problemas 31 y 32 determine si es posible encontrar los valores y_0 y y_1 (problema 31) y valores de $L > 0$ (problema 32) de manera que el problema de valores en la frontera dado tenga ***a***) precisamente una solución no trivial, ***b***) más de una solución, ***c***) ninguna solución, ***d***) la solución trivial.

31. $y'' + 16y = 0,\ y(0) = y_0,\ y(\pi/2) = y_1$

32. $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 1,\ y(L) = 1$

33. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(-\pi) = y(\pi),\ y'(-\pi) = y'(\pi).$$

a) El tipo de condiciones de frontera especificadas se denomina **condiciones periódicas de frontera**. Proporcione una interpretación geométrica de estas condiciones.

b) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema.

c) Use una herramienta de graficación para trazar algunas de las funciones propias. Verifique su interpretación geométrica de las condiciones de frontera dadas en el inciso *a*).

34. Demuestre que los valores y funciones propios de un problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

son $\lambda_n = \alpha_n^2$ y $y_n = \operatorname{sen} \alpha_n x$, respectivamente, donde α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las raíces positivas consecutivas de la ecuación $\tan \alpha = -\alpha$.

Tareas para el laboratorio de cómputo

35. Use un CAS para trazar las gráficas y demostrar que la ecuación $\tan \alpha = -\alpha$ del problema 34 tiene un número infinito de raíces. Explique por qué se pueden ignorar las raíces negativas de la ecuación. También, ¿por qué $\lambda = 0$ no es un valor propio aunque $\alpha = 0$ sea una solución evidente de la ecuación $\tan \alpha = -\alpha$?

36. Use la aplicación apropiada de un CAS para encontrar raíces y aproximar los primeros cuatro valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 para el PVF del problema 34.

En los problemas 37 y 38 encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valores en la frontera dado. Utilice un CAS para aproximar los primeros cuatro valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4.

37. $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) - \frac{1}{2}y'(1) = 0$

38. $y^{(4)} - \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$
[*Sugerencia:* Considere sólo $\lambda = \alpha^4$, $\alpha > 0$.]

3.10 Funciones de Green

Introducción En la sección 3.8 vimos que la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

desempeña un papel importante en las aplicaciones. En el análisis matemático de sistemas físicos a menudo es conveniente expresar la respuesta o salida $y(x)$ de (1) sujeta a cualquiera de las condiciones iniciales o condiciones en la frontera directamente en términos de la función forzada o entrada $g(x)$. De esta manera la respuesta del sistema puede ser analizada rápidamente para distintas funciones forzadas.

Con el fin de observar cómo se realiza esto comenzamos por examinar soluciones de los problemas de valor inicial en los cuales la ED (1) se ha puesto en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2}$$

al dividir la ecuación por el coeficiente principal $a_2(x)$. También supondremos a lo largo de esta sección que las funciones de coeficiente $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algunos intervalos comunes I.

3.10.1 Problemas de valor inicial

Tres problemas de valor inicial Observaremos conforme se despliega la discusión que la solución del problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{3}$$

puede expresarse como la superposición de dos soluciones: la solución y_h de la ED homogénea asociada con condiciones iniciales no homogéneas

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \tag{4}$$

Aquí se supone que por lo menos uno de los números y_0 o y_1 es distinto de cero. Si tanto y_0 como y_1 son 0, entonces la solución del PVI es $y = 0$.

y la solución y_p de la ED no homogénea con condiciones iniciales homogéneas (esto es, cero)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0. \tag{5}$$

Como hemos observado en las secciones anteriores de este capítulo, en el caso donde P y Q son constantes la solución del PVI (4) no presenta dificultades: empleamos los métodos de las secciones 3.3 para encontrar la solución general de la ED homogénea y luego usamos las condiciones iniciales dadas para determinar las dos constantes en esa solución. Por ello nos enfocaremos en la solución del PVI (5). Debido a las condiciones iniciales cero, la solución de (5) podría describir un sistema físico que esté inicialmente en reposo y por ello a veces se conoce como **solución en reposo**.

Función de Green Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo I de la forma homogénea asociada de (2), entonces una solución particular de la ecuación no homogénea (2) en el intervalo I puede encontrarse a través de la variación de parámetros. Recuerde de (3) de la sección 3.5, que la forma de esta solución es

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{6}$$

Los coeficientes variables $u_1(x)$ y $u_2(x)$ en (6) se definen a partir de (5) de la sección 3.5:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W}. \tag{7}$$

La independencia lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en el intervalo I garantiza que el wronskiano $W = W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para todo x en I. Si x y x_0 son números en I, entonces al integrar las derivadas en (7) sobre el intervalo $[x_0, x]$ y sustituir los resultados en (6) se obtiene

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)}dt + y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt \\ &= \int_{x_0}^{x}\frac{-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)}f(t)\,dt, \end{aligned} \tag{8}$$

Puesto que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son constantes con respecto a la integración sobre t, podemos mover estas funciones dentro de las integrales definidas.

donde $$W(t) = W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

De las propiedades de la integral definida, las dos integrales en la segunda línea de (8) pueden reescribirse como una sola integral

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x, t) f(t) dt. \tag{9}$$

La función $G(x,t)$ en (9),

$$G(x, t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)}, \tag{10}$$

se denomina **función de Green** de la ecuación diferencial (2).

Importante. Lea este párrafo una segunda vez.

Observe que una función de Green (10) depende únicamente de las soluciones fundamentales, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada para (2) y *no* de la función forzada $f(x)$. Por lo tanto todas las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (2) con el mismo lado izquierdo pero diferentes funciones forzadas tienen la misma función de Green. Por ello, un nombre alternativo para (10) es **función de Green para el operador diferencial de segundo orden** $L = D^2 + P(x)D + Q(x)$.

EJEMPLO 1 Solución particular

Use (9) y (10) para encontrar una solución particular de $y'' - y = f(x)$.

Solución Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y'' - y = 0$ son $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ y $W(y_1(t),y_2(t)) = -2$. Se deduce de (10) que la función de Green es

$$G(x, t) = \frac{e^t e^{-x} - e^x e^{-t}}{-2} = \frac{e^{x-t} - e^{-(x-t)}}{2} = \text{senh}(x - t). \tag{11}$$

Así de (9), una solución particular de la ED es

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \text{senh}(x - t) f(t) dt. \tag{12}$$ ≡

EJEMPLO 2 Soluciones generales

Encuentre las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas.

a) $y'' - y = 1/x$ ***b***) $y'' - y = e^{2x}$

Solución Del ejemplo 1, ambas ED poseen la misma función complementaria $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^x$. Por otra parte, como se señala en el párrafo anterior al ejemplo 1, la función de Green para ambas ecuaciones diferenciales es (11).

a) Con las identificaciones $f(x) = 1/x$ y $f(t) = 1/t$ observamos de (12) que una solución particular de $y'' - y = 1/x$ es $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\text{senh}(x - t)}{t} dt$. De esta manera la solución general $y = y_c + y_p$ de la ED dada en cualquier intervalo $[x_0, x]$ que no contenga el origen es

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \int_{x_0}^{x} \frac{\text{senh}(x - t)}{t} dt. \tag{13}$$

Debe comparar esta solución con la encontrada en el ejemplo 3 de la sección 3.5.

b) Con $f(x) = e^{2x}$ en (12), una solución particular de $y'' - y = e^{2x}$ es $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \text{senh}(x - t) e^{2t} dt$. La solución general $y = y_c + y_p$ es por lo tanto

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \int_{x_0}^{x} \text{senh}(x - t) e^{2t} dt. \tag{14}$$ ≡

Ahora considere el problema de valor inicial especial (5) con condiciones iniciales homogéneas. Una forma de resolver el problema cuando $f(x) \neq 0$ ya ha sido ilustrada en las secciones 3.4 y 3.5; esto es, aplicar las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ a la solución general de la ED no homogénea. Pero no hay necesidad real de hacerlo porque ya tenemos solución del PVI a la mano; es la función definida en (9).

Teorema 3.10.1 Solución del PVI en (5)

La función $y_p(x)$ definida en (9) es la solución del problema de valor inicial (5).

DEMOSTRACIÓN

Por construcción sabemos que $y_p(x)$ en (9) satisface la ED no homogénea. Luego, debido a que una integral definida tiene la propiedad $\int_a^a = 0$ tenemos

$$y_p(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} G(x_0, t) f(t)\, dt = 0.$$

Finalmente, para mostrar que $y_p'(x_0)$ utilizamos la fórmula de Leibniz* para la derivada de una integral:

$$y_p'(x) = \overbrace{G(x, x)}^{0 \text{ por } (10)} f(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)}{W(t)} f(t)\, dt.$$

Por lo tanto, $$y_p'(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{y_1(t)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(t)}{W(t)} f(t)\, dt = 0.$$ ≡

EJEMPLO 3 Repaso del ejemplo 2

Resuelva los problemas de valor inicial

a) $y'' - y = 1/x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ ***b)*** $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución ***a)*** Con $x_0 = 1$ y $f(t) = 1/t$, se deduce de (13) del ejemplo 2 y el teorema 3.10.1 que la solución del problema de valor inicial es

$$y_p(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{senh}(x - t)}{t} dt,$$

donde $[1, x]$, $x > 0$.

b) Al identificar $x_0 = 0$ y $f(t) = e^{2t}$, observamos de (14) que la solución del PVI es

$$y_p(x) = \int_0^x \operatorname{senh}(x - t) e^{2t} dt. \tag{15}$$ ≡

En el inciso *b*) del ejemplo 3, podemos llevar a cabo la integración en (15), pero hay que tener en cuenta que x se mantiene constante a lo largo de la integración con respecto a t:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x \operatorname{senh}(x - t) e^{2t} dt = \int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{-(x-t)}}{2} e^{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^x \int_0^x e^t dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^x e^{3t} dt \\ &= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{6} e^{-x}. \end{aligned}$$

* Esta fórmula, generalmente discutida en cálculo avanzado, está dada por

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, t)\, dt = F(x, v(x))v'(x) - F(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\, dt.$$

EJEMPLO 4 Otro PVI

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 4y = x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solución Comenzamos construyendo la función de Green para la ecuación diferencial dada.

Las dos soluciones linealmente independientes de $y'' + 4y = 0$ son $y_1(x) = \cos 2x$ y $y_2(x) = \text{sen } 2x$. De (10), con $W(\cos 2t, \text{sen } 2t) = 2$, encontramos

$$G(x, t) = \frac{\cos 2t \text{ sen } 2x - \cos 2x \text{ sen } 2t}{2} = \frac{1}{2}\text{sen } 2(x - t).$$

Con la identificación $x_0 = 0$, una solución del problema de valor inicial dado es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t \text{ sen } 2(x - t)dt.$$

Si deseamos encontrar la integral, primero escribimos

Aquí hemos utilizado la identidad trigonométrica $\text{sen}(2x - 2t) = \text{sen } 2x \cos 2t - \cos 2x \text{ sen } 2t$.

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x\int_0^x t \cos 2t \, dt - \frac{1}{2}\cos 2x\int_0^x t \text{ sen } 2t \, dt$$

y luego usamos integración por partes:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x\left[\frac{1}{2}t \text{ sen } 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x - \frac{1}{2}\cos 2x\left[-\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\text{sen } 2t\right]_0^x$$

o

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\text{sen } 2x. \qquad ≡$$

■ **Problemas de valor inicial (continuación)** Ahora podemos usar el teorema 3.10.1 para encontrar la solución del problema de valor inicial que se plantea en (3).

Teorema 3.10.2 Solución del PVI (3)

Si y_h es la solución del problema de valor inicial (4) y y_p es la solución (9) del problema de valor inicial (5) en el intervalo I, entonces

$$y = y_h + y_p \tag{16}$$

es la solución del problema de valor inicial (3).

DEMOSTRACIÓN

Puesto que y_h es la combinación lineal de las soluciones fundamentales, se deduce de (10) de la sección 3.1 que $y = y_h + y_p$ es una solución de la ED no homogénea. Además, dado que y_h satisface las condiciones iniciales en (4) y y_p satisface las condiciones iniciales en (5), tenemos

$$y(x_0) = y_h(x_0) + y_p(x_0) = y_0 + 0 = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_h(x_0) + y'_p(x_0) = y_1 + 0 = y_1. \qquad ≡$$

Con la ausencia de una función forzada en (4) y la presencia de tal término en (5), observamos de (16) que la respuesta $y(x)$ de un sistema físico que se describe por medio del problema de valor inicial (3) puede separarse en dos respuestas diferentes:

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\substack{\text{respuesta del sistema debido} \\ \text{a las condiciones iniciales} \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1}} + \underbrace{y_p(x)}_{\substack{\text{respuesta del} \\ \text{sistema debido a} \\ \text{la función forzada } f}} \tag{17}$$

En símbolos distintos, el siguiente problema de valor inicial representa la situación de resonancia pura de un sistema de masa/resorte vibrante. Véase la página 152.

EJEMPLO 5 Empleo del teorema 3.10.2

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 4y = \text{sen } 2x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

Solución Resolvemos dos problemas de valor inicial.

Primero, resolvemos $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$. Mediante la aplicación de las condiciones iniciales a la solución general $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$ de la ED homogénea, encontramos que $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$. Por lo tanto, $y_h(x) = \cos 2x - \text{sen } 2x$.

Luego resolvemos $y'' + 4y = \text{sen } 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Dado que el lado izquierdo de la ecuación diferencial es el mismo que el de la ED en el ejemplo 4, la función de Green es la misma; a saber, $G(x, t) = \frac{1}{2} \text{ sen } 2(x - t)$. Con $f(t) = \text{sen } 2t$ observamos de (9) que la solución de este segundo problema es $y_p(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^x \text{sen } 2(x - t) \text{ sen } 2t\, dt$.

Finalmente, en vista de (16) en el teorema 3.10.2, la solución del PVI original es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \cos 2x - \text{sen } 2x + \frac{1}{2}\int_0^x \text{sen } 2(x - t) \text{ sen } 2t\, dt. \qquad (18) \equiv$$

Si se desea, se puede integrar la integral definida en (18) utilizando la identidad trigonométrica

$$\text{sen } A \text{ sen } B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

con $A = 2(x - t)$ y $B = 2t$:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \text{sen } 2(x - t)\text{sen } 2t\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^x [\cos(2x - 4t) - \cos 2x]dt \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}\text{ sen }(2x - 4t) - t\cos 2x\right]_0^x \\ &= \frac{1}{8}\text{ sen } 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x. \end{aligned} \qquad (19)$$

En consecuencia, la solución (18) puede reescribirse como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \cos 2x - \text{sen } 2x + \left(\frac{1}{8}\text{ sen } 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x\right),$$

o

$$y(x) = \cos 2x - \frac{7}{8}\text{ sen } 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x. \qquad (20)$$

Note que el significado físico indicado en (17) se pierde en (20) después de combinar los términos similares en dos partes de la solución $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

La belleza de la solución dada en (18) es que podemos escribir inmediatamente la respuesta de un sistema si las condiciones iniciales siguen siendo las mismas pero se cambia la función forzada. Por ejemplo, si el problema en el ejemplo 5 se cambia a

$$y'' + 4y = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2,$$

reemplazamos simplemente sen $2t$ en la integral en (18) por t y la solución es entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= \cos 2x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int_0^x t \operatorname{sen} 2(x - t)dt \quad \leftarrow \textit{véase} \text{ ejemplo 4} \\ &= \frac{1}{4}x + \cos 2x - \frac{9}{8}\operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Como la función forzada de f está aislada en la solución particular $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x, t) f(t)\, dt$, la solución (16) es útil cuando f está definida por secciones. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

EJEMPLO 6 Un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 4y = f(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = -2,$$

Cuando la función forzada f está definida por secciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \operatorname{sen} 2x, & 0 \le x \le 2\pi \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Solución De (18), con sen $2t$ sustituido por $f(t)$, se puede escribir

$$y(x) = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen} 2(x - t) f(t)dt.$$

Debido a que f está definida en tres partes, consideramos tres casos en el cálculo de la integral definida. Para $x < 0$,

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen} 2(x - t)0\, dt = 0,$$

para $0 \le x \le 2\pi$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen} 2(x - t)\operatorname{sen} 2t\, dt \quad \leftarrow \text{utilizando la integración en (19)} \\ &= \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x, \end{aligned}$$

y finalmente para $x > 2\pi$, podemos seguir la integración del ejemplo 5:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2(x - t)\operatorname{sen} 2t\, dt + \frac{1}{2}\int_{2\pi}^x \operatorname{sen} 2(x - t)\, 0\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2(x - t)\operatorname{sen} 2t\, dt \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x - 4t) - t\cos 2x\right]_0^{2\pi} \quad \leftarrow \text{utilizando la integración en (19)} \\ &= -\frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x - 8\pi) - \frac{1}{2}\pi\cos 2x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x \\ &= -\frac{1}{2}\pi\cos 2x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_p(x)$ es

$$y_p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}\text{sen } 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x, & 0 \le x \le 2\pi \\ -\frac{1}{2}\pi\cos 2x, & x > 2\pi \end{cases}$$

y así

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \cos 2x - \text{sen } 2x + y_p(x).$$

Juntando todas las partes se obtiene

$$y(x) = \begin{cases} \cos 2x - \text{sen } 2x, & x < 0 \\ (1 - \frac{1}{4}x)\cos 2x - \frac{7}{8}\text{sen } 2x, & 0 \le x \le 2\pi \\ (1 - \frac{1}{2}\pi)\cos 2x - \text{sen } 2x, & x > 2\pi. \end{cases}$$

La grafica $y(x)$ se muestra en la **FIGURA 3.10.1**. ≡

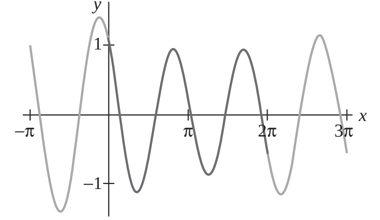


FIGURA 3.10.1 Gráfica de $y(x)$ del ejemplo 6

Ahora examinemos cómo un problema de valores en la frontera (PVF) puede resolverse utilizando un tipo diferente de función de Green.

3.10.2 Problemas de valores en la frontera

En contraste con un PVI en el cual $y(x)$ y $y'(x)$ se especifican en el mismo punto, un PVF para una ED de segundo orden implica condiciones sobre $y(x)$ y $y'(x)$ que se especifican en dos puntos distintos $x = a$ y $x = b$. Condiciones tales como

$$y(a) = 0, y(b) = 0; \quad y(a) = 0, y'(b) = 0; \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$$

son sólo casos especiales de las más generales condiciones de frontera homogéneas

$$A_1y(a) + B_1y'(a) = 0 \tag{21}$$

y

$$A_2y(b) + B_2y'(b) = 0, \tag{22}$$

donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son constantes. Específicamente, nuestra meta es encontrar una solución integral $y_p(x)$ que sea análoga a (9) para problemas de valores en la frontera no homogéneos de la forma

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= f(x), \\ A_1y(a) + B_1y'(a) &= 0 \\ A_2y(b) + B_2y'(b) &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Además de las suposiciones usuales de que $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas sobre $[a, b]$, suponemos que el problema homogéneo

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= 0, \\ A_1y(a) + B_1y'(a) &= 0 \\ A_2y(b) + B_2y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

posee sólo la solución trivial $y = 0$. Esta última suposición es suficiente para garantizar que existe una solución única de (23) y que está dada por una integral $y_p(x) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt$, donde $G(x, t)$ es una función de Green.

El punto de partida en la construcción de $G(x, t)$ es de nuevo el par de fórmulas (6) y (7) sobre variación de parámetros.

Otra función de Green Suponga que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes en $[a, b]$ de la forma homogénea asociada de la ED en (23) y que x es un número en el intervalo $[a, b]$. A diferencia de la construcción de (8) donde empezamos a integrar las derivadas en (7) sobre el mismo intervalo, ahora debemos integrar la primera ecuación en (7) sobre $[b, x]$ y la segunda ecuación en (7) sobre $[a, x]$:

$$u_1(x) = -\int_b^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt \quad \text{y} \quad u_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt. \tag{24}$$

La razón para integrar $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ sobre intervalos distintos será clara en breve. De (24), una solución particular $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ de la ED es

$$y_p(x) = y_1(x)\overbrace{\int_x^b \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt}^{\text{aquí usamos el signo menos en (24) para invertir los límites de integración}} + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt$$

o

$$y_p(x) = \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t)}{W(t)}f(t)\,dt + \int_x^b \frac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,dt. \tag{25}$$

El lado derecho de (25) puede escribirse de manera compacta como una sola integral

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)\,dt, \tag{26}$$

donde la función $G(x, t)$ es

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)}, & a \le t \le x \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)}, & x \le t \le b. \end{cases} \tag{27}$$

La función definida por secciones (27) se denomina una **función de Green** para el problema de valores en la frontera (23). Puede probarse que $G(x, t)$ es una función continua de x sobre el intervalo $[a, b]$.

Ahora si las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ usadas en la construcción de (27) se escogen de tal manera que en $x = a$, $y_1(x)$ satisfaga $A_1y_1(a) + B_1y_1'(a) = 0$, y en $x = b$, $y_2(x)$ satisfaga $A_2y_2(b) + B_2y_2'(b) = 0$, entonces, asombrosamente, $y_p(x)$ definida en (26) satisface ambas condiciones de frontera homogéneas en (23).

Para ver esto necesitaremos

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{28}$$

La última línea en (29) resulta del hecho de que $y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0$. Véase la discusión en la sección 3.5 luego de (4).



y

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= u_1(x)y_1'(x) + y_1(x)u_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + y_2(x)u_2'(x) \\ &= u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \end{aligned} \tag{29}$$

Antes de proceder, observe en (24) que $u_1(b) = 0$ y $u_2(a) = 0$. En vista de la segunda de estas dos propiedades podemos demostrar que $y_p(x)$ satisface (21) siempre que $y_1(x)$ satisfaga a la misma condición de frontera. De (28) y (29) tenemos

$$\begin{aligned} A_1y_p(a) + B_1y_p'(a) &= A_1[u_1(a)y_1(a) + \overbrace{u_2(a)}^{0}y_2(a)] + B_1[u_1(a)y_1'(a) + \overbrace{u_2(a)}^{0}y_2'(a)] \\ &= u_1(a)\underbrace{[A_1y_1(a) + B_1y_1'(a)]}_{0 \text{ de } (21)} = 0. \end{aligned}$$

De igual modo, $u_1(b) = 0$ implica que siempre que $y_2(x)$ satisface (22) así lo hace $y_p(x)$:

$$A_2 y_p(b) + B_2 y_p'(b) = A_2[\overbrace{u_1(b)}^{0} y_1(b) + u_2(b) y_2(b)] + B_2[\overbrace{u_1(b)}^{0} y_1'(b) + u_2(b) y_2'(b)]$$
$$= u_2(b)\underbrace{[A_2 y_2(b) + B_2 y_2'(b)]}_{0 \text{ de } (22)} = 0.$$

El siguiente teorema resume estos resultados.

Teorema 3.10.3 Solución de un PVF

Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

sobre $[a, b]$, y suponga que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ satisfacen (21) y (22), respectivamente. Entonces la función $y_p(x)$ definida en (26) es una solución del problema de valores en la frontera (23).

EJEMPLO 7 Uso del teorema 3.10.3

Resuelva el problema de valores en la frontera

$$y'' + 4y = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

La condición en la frontera $y'(0) = 0$ es un caso especial de (21) con $a = 0$, $A_1 = 0$ y $B_1 = 1$. La condición en la frontera $y(\pi/2)$ es un caso especial de (22) con $b = \pi/2$, $A_2 = 1$ y $B_2 = 0$.

Solución Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y = 0$ son $y_1(x) = \cos 2x$ y $y_2(x) = \text{sen } 2x$ y $y_1(x)$ satisface $y'(0) = 0$, en tanto que $y_2(x)$ satisface $y(\pi/2) = 0$. El wronskiano es $W(y_1, y_2) = 2$, y podemos ver entonces de (27) que la función de Green del problema de valores en la frontera es

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos 2t \text{ sen } 2x, & 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}\cos 2x \text{ sen } 2t, & x \le t \le \pi/2. \end{cases}$$

Sigue del teorema 3.10.3 que una solución del PVF es (26) con las identificaciones $a = 0$, $b = \pi/2$ y $f(t) = 3$:

$$y_p(x) = 3\int_0^{\pi/2} G(x, t)\,dt$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{2}\text{sen } 2x\int_0^x \cos 2t\,dt + 3 \cdot \frac{1}{2}\cos 2x\int_x^{\pi/2} \text{sen } 2t\,dt,$$

o después de encontrar las integrales definidas, $y_p(x) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x$. ≡

No infiera del ejemplo dado que la demanda de que $y_1(x)$ satisfaga (21) y $y_2(x)$ satisfaga (22) determina de modo único estas funciones. Como veremos en el último ejemplo, existe cierta arbitrariedad en la selección de estas funciones.

EJEMPLO 8 Un problema de valores en la frontera

Resuelva el problema de valores en la frontera

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 24x^5, \quad y(1) = 0, \; y(2) = 0.$$

Solución La ecuación diferencial se reconoce como una ED de Cauchy-Euler.

De la ecuación auxiliar $m(m-1) - 3m + 3 = (m-1)(m-3) = 0$ la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y = c_1x + c_2x^3$. Al aplicar $y(1) = 0$ a esta solución implica que $c_1 + c_2 = 0$ o $c_1 = -c_2$. Al escoger $c_2 = -1$ se obtiene $c_1 = 1$ y $y_1 = x - x^3$. Por otro lado, $y(2) = 0$ aplicada a la solución general demuestra que $2c_1 + 8c_2 = 0$ o $c_1 = -4c_2$. La elección $c_2 = -1$ ahora nos da $c_1 = 4$ y entonces $y_2(x) = 4x - x^3$. El wronskiano de estas dos funciones es

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x - x^3 & 4x - x^3 \\ 1 - 3x^2 & 4 - 3x^2 \end{vmatrix} = 6x^3.$$

Por lo tanto la función de Green del problema de valores en la frontera es

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(t - t^3)(4x - x^3)}{6t^3}, & 0 \le t \le x \\ \dfrac{(x - x^3)(4t - t^3)}{6t^3}, & x \le t \le 2. \end{cases}$$

Con el fin de encontrar la función forzada f correcta debe escribirse la ED en forma estándar:

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 24x^3.$$

De esta ecuación podemos observar que $f(t) = 24t^3$ y entonces (26) se vuelve

$$\begin{aligned} y_p(x) &= 24\int_1^2 G(x, t)t^3 dt \\ &= 4(4x - x^3)\int_1^x (t - t^3)dt + 4(x - x^3)\int_x^2 (4t - t^3)dt. \end{aligned}$$

La integración definida directa y la simplificación algebraica producen la solución $y_p(x) = 12x - 15x^3 + 3x^5$. ≡

3.10 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

3.10.1 Problemas de valor inicial

En los problemas 1 al 6, proceda como en el ejemplo 1 para encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación diferencial en la forma integral (9).

1. $y'' - 16y = f(x)$

2. $y'' + 3y' - 10y = f(x)$

3. $y'' + 2y' + y = f(x)$

4. $4y'' - 4y' + y = f(x)$

5. $y'' + 9y = f(x)$

6. $y'' - 2y' + 2y = f(x)$

En los problemas 7 al 12, proceda como en el ejemplo 2 para encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada. Use los resultados obtenidos en los problemas 1 a 6. No calcule la integral que define a $y_p(x)$.

7. $y'' - 16y = xe^{-2x}$

8. $y'' + 3y' - 10y = x^2$

9. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

10. $4y'' - 4y' + y = \arctan x$

11. $y'' + 9y = x + \operatorname{sen} x$

12. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2 x$

En los problemas 13 a 18, proceda como en el ejemplo 3 para encontrar una solución del problema de valor inicial dado. Encuentre la integral que define a $y_p(x)$.

13. $y'' - 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

14. $y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

15. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

16. $y'' + 6y' + 9y = x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

17. $y'' + y = \csc x \cot x, \quad y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 0$

18. $y'' + y = \sec^2 x, \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0$

En los problemas 19 a 30, proceda como en el ejemplo 5 para encontrar una solución del problema de valor inicial dado.

19. $y'' - 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = -4$

20. $y'' - y' = 1, \quad y(0) = 10, y'(0) = 1$

21. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$

22. $y'' + 6y' + 9y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -3$

23. $y'' + y = \csc x \cot x, \quad y(\pi/2) = -\pi/2, y'(\pi/2) = -1$

24. $y'' + y = \sec^2 x, \quad y(\pi) = \frac{1}{2}, y'(\pi) = -1$

25. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$

26. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

27. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x, \quad y(1) = 2, y'(1) = -1$

28. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$

29. $x^2y'' - 6y = \ln x, \quad y(1) = 1, y'(1) = 3$

30. $x^2y'' - xy' + y = x^2, \quad y(1) = 4, y'(1) = 3$

En los problemas 31 a 34, proceda como en el ejemplo 6 para encontrar una solución del problema de valor inicial con la función forzada definida por secciones dada.

31. $y'' - y = f(x), \quad y(0) = 8, y'(0) = 2,$

$$\text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

32. $y'' - y = f(x), \quad y(0) = 3, y'(0) = 2,$

$$\text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

33. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = -1,$

$$\text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10, & 0 \leq x \leq 3\pi \\ 0, & x > 3\pi \end{cases}$$

34. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$

$$\text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq 4\pi \\ 0, & x > 4\pi \end{cases}$$

3.10.2 Problemas de valores en la frontera

En los problemas 35 y 36, *a*) use (25) y (26) para encontrar una solución del problema de valores en la frontera. *b*) Verifique que la función $y_p(x)$ satisfaga las ecuaciones diferenciales y ambas condiciones en la frontera.

35. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

36. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$

37. Encuentre en el problema 35 una solución del PVF cuando $f(x) = 1$.

38. Encuentre en el problema 36 una solución del PVF cuando $f(x) = x$.

En los problemas 39 a 44, proceda como en los ejemplos 7 y 8 para encontrar una solución del problema de valores en la frontera dado.

39. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

40. $y'' + 9y = 1, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

41. $y'' - 2y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$

42. $y'' - y' = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$

43. $x^2y'' + xy' = 1, \quad y(e^{-1}) = 0, y(1) = 0$

44. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4, \quad y(1) - y'(1) = 0, y(3) = 0$

Problemas de análisis

45. Suponga que la solución del problema de valores en la frontera

$$y'' + Py' + Qy = f(x), \quad y(a) = 0, y(b) = 0,$$

$a < b$, está dada por $y_p(x) = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada, elegida en la construcción de $G(x, t)$ de modo que $y_1(a) = 0$ y $y_2(b) = 0$. Demuestre que la solución al problema de valores en la frontera con ED no homogénea y condiciones en la frontera,

$$y'' + Py' + Qy = f(x), \quad y(a) = A, y(b) = B$$

está dada por

$$y(x) = y_p(x) + \frac{B}{y_1(b)} y_1(x) + \frac{A}{y_2(a)} y_2(x).$$

[*Sugerencia:* En su demostración, tendrá que probar que $y_1(b) \neq 0$ y $y_2(a) \neq 0$. Relea las suposiciones que siguen a (22).]

46. Use el resultado del problema 45 para resolver

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 5, y(1) = -10.$$

3.11 Modelos no lineales

Introducción En esta sección examinamos varios modelos matemáticos no lineales de orden superior. Podemos resolver algunos de estos modelos empleando el método de sustitución presentado en la página 139. En ciertos casos, cuando el modelo no se puede resolver, mostramos cómo una ecuación diferencial no lineal puede reemplazarse por una ecuación diferencial lineal mediante un proceso llamado *linealización*.

Resortes no lineales El modelo matemático ilustrado en la expresión (1) de la sección 3.8 tiene la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \tag{1}$$

donde $F(x) = kx$. Dado que x denota el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio, $F(x) = kx$ es la ley de Hooke, es decir, la fuerza ejercida por el resorte que tiende a restaurar la masa a su posición de equilibrio. Un resorte que actúa bajo una fuerza de recuperación $F(x) = kx$ se denomina, de modo natural, **resorte lineal**. Pero los resortes rara vez son perfectamente lineales. Dependiendo de cómo estén construidos y del material usado, un resorte puede variar de "blando" o suave hasta "rígido" o duro, de manera que su fuerza de recuperación puede variar desde algo baja hasta cierta magnitud situada por encima de lo que establece la ley lineal. En el caso del movimiento libre, si suponemos que un resorte no sujeto a degradación posee algunas características lineales, entonces podría ser razonable suponer que la fuerza de recuperación $F(x)$ de un resorte es proporcional, digamos, al cubo del desplazamiento x de la masa más allá de su posición de equilibrio, o que $F(x)$ es una combinación lineal de potencias del desplazamiento como las dadas por la función no lineal $F(x) = kx + k_1x^3$. Un resorte cuyo modelo matemático incorpora una fuerza de recuperación, tal como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx^3 = 0 \quad \text{o} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + k_1x^3 = 0, \tag{2}$$

se denomina **resorte no lineal**. Además, examinamos modelos matemáticos en los cuales el amortiguamiento impartido al movimiento era proporcional a la velocidad instantánea dx/dt, y la fuerza de recuperación de un resorte estaba dada por la función lineal $F(x) = kx$. Pero éstos eran simplemente supuestos; en situaciones más realistas, el amortiguamiento podría ser proporcional a alguna potencia de la velocidad instantánea dx/dt. La ecuación diferencial no lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3}$$

es un modelo de un sistema resorte-masa libre con amortiguamiento proporcional al cuadrado de la velocidad. Podemos visualizar entonces otro tipo de modelos: amortiguamiento lineal y fuerza de recuperación no lineal, amortiguamiento no lineal y fuerza de recuperación no lineal, y así sucesivamente. El punto es, las características no lineales de un sistema físico llevan a un modelo matemático no lineal.

Observe en (2) que tanto $F(x) = kx^3$ como $F(x) = kx + k_1x^3$ son funciones impares de x. Para saber por qué una función polinomial que contiene sólo potencias impares de x ofrece un modelo razonable para la fuerza de recuperación, expresemos F como una serie de potencias centrada en la posición de equilibrio $x = 0$:

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

Cuando los desplazamientos de x son pequeños, los valores de x^n son insignificantes para una n lo bastante grande. Si truncamos la serie de potencias en, digamos, el término cuarto, entonces

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Con el objetivo de que las fuerzas localizadas en $x > 0$ ($F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$) y en $-x < 0$ ($F(-x) = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3$) tengan igual magnitud pero direcciones opuestas, debemos tener $F(-x) = -F(x)$. Como esto significa que F es una función impar, debemos tener $c_0 = 0$ y $c_2 = 0$, y por lo tanto $F(x) = c_1x + c_3x^3$. Hemos usado solamente los primeros dos términos de la serie, el mismo argumento produce la función lineal $F(x) = c_1x$. Para fines de análisis escribiremos $c_1 = k$ y $c_2 = k_1$. Se dice que una fuerza de recuperación con potencias mixtas como $F(x) = kx + k_1x^2$, y las vibraciones correspondientes, es asimétrica.

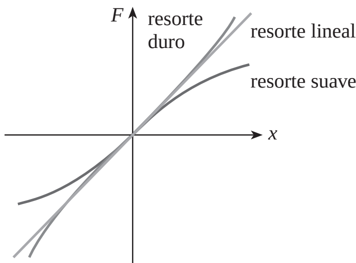


FIGURA 3.11.1 Resortes suaves y duros

■ **Resortes suaves y duros** Veamos con detenimiento la ecuación (1) para el caso en que la fuerza de recuperación está dada por $F(x) = kx + k_1x^3$, $k > 0$. Se dice que el resorte es **duro** si $k_1 > 0$ y **suave** si $k_1 < 0$. Las gráficas de tres tipos de fuerzas de recuperación aparecen en la **FIGURA 3.11.1**. El siguiente ejemplo ilustra estos dos casos especiales de la ecuación diferencial $m\, d^2x/dt^2 + kx + k_1x^3 = 0$, $m > 0$, $k > 0$.

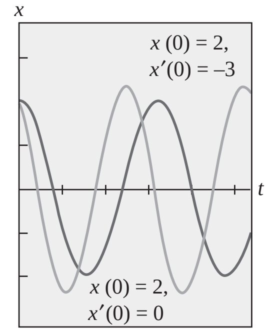
EJEMPLO 1 Comparación de resortes duros y suaves

Las ecuaciones diferenciales

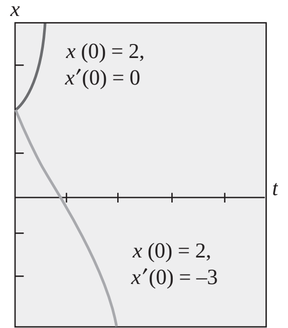
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0 \tag{4}$$

y
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - x^3 = 0 \tag{5}$$

son casos especiales de las expresiones (2) y modelos de resorte duro y resorte suave, respectivamente. La **FIGURA 3.11.2*a*)** muestra dos soluciones de (4) y la figura 3.11.2*b*) dos soluciones de (5) obtenidas con ayuda de un programa de solución numérica. Las curvas mostradas en gris son soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$; las dos curvas en negro son soluciones que satisfacen $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Estas curvas de solución, sin lugar a dudas, sugieren que en el resorte duro el movimiento de una masa es oscilatorio, mientras el movimiento de una masa en el resorte suave no lo es. Pero debemos ser cuidadosos cuando formulemos conclusiones basadas en un par de curvas de solución. En el capítulo 9 obtendremos un panorama más completo sobre la naturaleza de las soluciones de estas dos ecuaciones. ≡



a) Resorte duro



b) Resorte suave

FIGURA 3.11.2 Curvas de solución numérica

Péndulo no lineal Cualquier objeto que se balancee hacia delante y atrás se denomina **péndulo físico**. El **péndulo simple** es un caso especial del péndulo físico y consiste en una barra de longitud l a la cual se le une una masa m en un extremo. Cuando se describe el movimiento de un péndulo simple en un plano vertical, hacemos supuestos simplificadores acerca de que la masa de la barra es insignificante y de que no están actuando sobre el sistema fuerzas forzadoras ni amortiguadoras. En la **FIGURA 3.11.3** se muestra el desplazamiento del ángulo θ del péndulo medido desde la vertical, y se considera positivo cuando se mide hacia la derecha de OP y negativo al medirlo a la izquierda de OP. Ahora recuerde que el arco s de un círculo de radio l está relacionado con el ángulo central θ mediante la fórmula $s = l\theta$. Por lo tanto, la aceleración angular es

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De la segunda ley de Newton tenemos

$$F = ma = ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

En la figura 3.11.3 vemos que la magnitud del componente tangencial de la fuerza debida al peso W es mg sen θ. En dirección, esta fuerza es $-mg$ sen θ, dado que apunta hacia la izquierda para $\theta > 0$ y hacia la derecha para $\theta < 0$. Igualamos las dos versiones diferentes de la fuerza tangencial para obtener $ml\, d^2\theta/dt^2 = -mg$ sen θ o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{6}$$

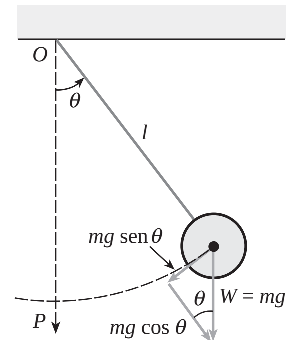


FIGURA 3.11.3 Péndulo simple

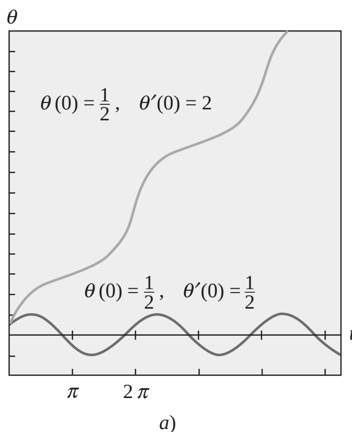
Linealización Debido a la presencia de sen θ, el modelo presentado en (6) es no lineal. En un intento por entender el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, a veces pretendemos simplificar el problema al reemplazar los términos no lineales por ciertas aproximaciones. Por ejemplo, las series de Maclaurin para sen θ están dadas por

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,$$

y, por lo tanto, si usamos la aproximación sen $\theta \approx \theta - \theta^3/6$ la ecuación (6) se convierte en $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta + (g/6l)\theta^3 = 0$. Observe que esta última ecuación es la misma que la segunda ecuación lineal dada en (2) con $m = 1$, $k = g/l$ y $k_1 = -g/6l$. No obstante, si suponemos que los desplazamientos θ son lo bastante pequeños como para justificar utilizando el reemplazo sen $\theta \approx \theta$, entonces (6) se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{7}$$

Véase el problema 24 en los ejercicios 3.11. Si establecemos $\omega^2 = g/l$ reconocemos a (7) como la ecuación diferencial (2) de la sección 3.8 que es el modelo para vibraciones libres no amortiguadas de un sistema resorte-masa lineal. En otras palabras, (7) es nuevamente la ecuación lineal básica $y'' + \lambda = 0$ analizada en la página 161 de la sección 3.9. En consecuencia, decimos que la ecuación (7) es una **linealización** de la ecuación (6). Dado que la solución general de (7) es $\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2$ sen ωt, esta linealización sugiere que para condiciones iniciales receptivas a oscilaciones pequeñas, el movimiento del péndulo descrito en (6) será periódico.



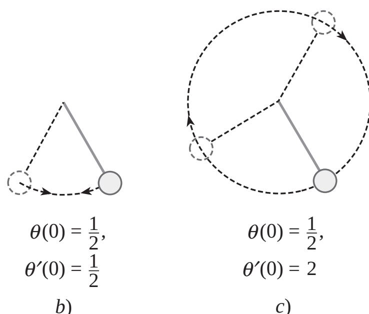


FIGURA 3.11.4 Curvas solución numéricas en *a*); péndulo oscilante en *b*); péndulo giratorio en *c*) del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Dos problemas de valor inicial

Las gráficas de la **FIGURA 3.11.4*a*)** se obtuvieron con ayuda de un programa de solución numérica y representan curvas de solución de la ecuación (6) cuando $\omega^2 = 1$. La curva a color representa la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = \frac{1}{2}$ y la curva negra es la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = 2$. La curva a color representa una solución periódica: el péndulo oscila hacia atrás y hacia delante como ilustra la figura 3.11.4*b*) con amplitud aparente $A \leq 1$. La curva negra muestra que θ se incrementa sin límite conforme el tiempo aumenta: el péndulo, a partir del mismo desplazamiento inicial, tiene velocidad inicial de magnitud lo suficientemente grande como para llegar a la parte superior; en otras palabras, el péndulo está oscilando alrededor de su pivote según muestra la figura 3.11.4*c*). En ausencia de amortiguamiento, en cada caso el movimiento continúa de manera indefinida. ≡

Cables de teléfono La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}$$

es la ecuación (17) de la sección 1.3. Esta ecuación diferencial, establecida con ayuda de la figura 1.3.8, página 23, sirve como un modelo matemático para la forma de un cable flexible cuando sostiene una carga vertical y está suspendido entre dos soportes verticales. En los ejercicios 2.2, quizá usted haya resuelto esta ED simple bajo el supuesto de que la carga vertical sostenida por los cables de un puente suspendido era el peso de una superficie horizontal de carretera distribuida uniformemente a lo largo del eje x. Con $W = \rho w$, ρ el peso por unidad de longitud de la carretera, la forma de cada cable sostenido entre los soportes verticales se vuelve parabólica. Ahora estamos en posición de determinar la forma de un cable flexible uniforme que cuelga por efecto de su propio peso, tal como un cable tendido entre dos postes telefónicos. La carga vertical es ahora el propio cable y, por lo tanto, si ρ es la densidad lineal del cable (medida, digamos, en libras/pie) y s es la longitud del segmento P_1P_2 ilustrado en la figura 1.3.8, entonces $W = \rho s$. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho s}{T_1}. \tag{8}$$

Dado que la longitud de arco entre los puntos P_1 y P_2 está dada por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{9}$$

del teorema fundamental del cálculo se deduce que la derivada de (9) es

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{10}$$

Al diferenciar (8) con respecto a x y aplicar (10) obtenemos la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\frac{ds}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

En el ejemplo siguiente, resolvemos (11) y mostramos que la curva asumida por el cable suspendido es una **catenaria**. Antes de seguir observe que la ecuación diferencial de segundo orden (11) es una de esas ecuaciones con la forma $F(x, y', y'') = 0$ analizada en la sección 3.7. Recuerde que tenemos oportunidad de resolver una ecuación de este tipo si reducimos el orden de la ecuación mediante la sustitución $u = y'$.

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

En la figura 1.3.8, a partir de la posición del eje y puede advertirse que las condiciones iniciales asociadas con la ecuación diferencial de segundo orden dada en (11) son $y(0) = a$ y $y'(0) = 0$. Si sustituimos $u = y'$, la última ecuación de (11) se convierte en $\frac{du}{dx} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + u^2}$. Al separar las variables,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\rho}{T_1}\int dx \qquad \text{resulta en} \qquad \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{\rho}{T_1}x + c_1.$$

Ahora, $y'(0) = 0$ es equivalente a $u(0) = 0$. Dado que $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, encontramos $c_1 = 0$ y, por lo tanto, $u = \operatorname{senh}(\rho x/T_1)$. Por último, al integrar ambos lados de

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{\rho}{T_1}x \qquad \text{obtenemos} \qquad y = \frac{T_1}{\rho}\cosh \frac{\rho}{T_1}x + c_2.$$

Mediante $y(0) = a$, $\cosh 0 = 1$, la última ecuación implica $c_2 = a - T_1/\rho$. Por lo tanto, vemos que la forma del cable colgante está dada por $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1) + a - T_1/\rho$. ≡

En el ejemplo 3, si fuimos lo bastante cuidadosos al elegir $a = T_1/\rho$, entonces la solución del problema habrá sido simplemente el coseno hiperbólico $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1)$.

Movimiento de un cohete En la sección 1.3 vimos que la ecuación diferencial de un cuerpo en caída libre, y de masa m, cerca de la superficie de la Tierra está dada por

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o simplemente} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g,$$

donde s representa la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el objeto, y la dirección positiva se considera ascendente. En otras palabras, aquí el supuesto básico es que la distancia s hasta el objeto es pequeña cuando se le compara con el radio R de la Tierra; dicho de otra forma, la distancia y desde el centro de la Tierra hasta el objeto es casi la misma que R. Si, por otro lado, la distancia y hasta un objeto, como un cohete o una sonda espacial, es grande en comparación con R, entonces combinamos la segunda ley de Newton para el movimiento y su ley de la gravitación universal para derivar una ecuación diferencial en la variable y.

Suponga que se lanza un cohete verticalmente hacia arriba desde el suelo, como ilustra la **FIGURA 3.11.5**. Si la dirección positiva es ascendente y se ignora la resistencia del aire, entonces la ecuación diferencial de movimiento después de la quema de combustible es

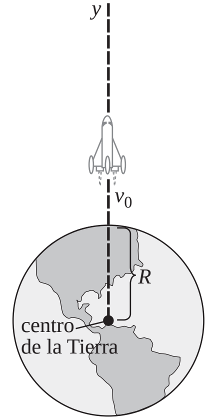


FIGURA 3.11.5 La distancia hasta el cohete es grande en comparación con R

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{y^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{M}{y^2}, \tag{12}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, y es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el cohete, M es la masa de la Tierra y m la masa del cohete. Para determinar la constante k, aplicamos el hecho de que cuando $y = R$, $kMm/R^2 = mg$ o $k = gR^2/M$. Por lo tanto, la última ecuación dada en (12) se convierte en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}. \tag{13}$$

Véase el problema 14 en los ejercicios 3.11.

Masa variable En el análisis anterior, advierta que describimos el movimiento del cohete después de que ha quemado todo su combustible, cuando presumiblemente su masa m es constante. Por supuesto, durante su ascenso con combustible, la masa total del cohete varía a medida que el combustible se consume. La segunda ley del movimiento, desarrollada originalmente por Newton, establece que cuando un cuerpo de masa m atraviesa un campo de fuerza a velocidad v, la tasa de cambio de la cantidad de movimiento del cuerpo mv es igual a la fuerza F neta o aplicada que actúa sobre el cuerpo:

$$F = \frac{d}{dt}(mv). \tag{14}$$

Si m es constante, entonces (14) produce la más familiar forma $F = m\,dv/dt = ma$, donde a es la aceleración. Usamos la forma de la segunda ley de Newton dada en (14) en el siguiente ejemplo, en el cual la masa m del cuerpo es variable.

EJEMPLO 4 Cadena jalada hacia arriba por una fuerza constante

Una cadena uniforme de 10 pies de longitud está enrollada holgadamente en el suelo. Un extremo de la cadena es jalado de manera vertical hacia arriba mediante una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 libra por pie. Determine la altura del extremo situado por encima del suelo en el tiempo t. Véanse la figura 1.3.18 y el problema 21 en los ejercicios 1.3.

Solución Supongamos que $x = x(t)$ denota la altura del extremo de la cadena en el aire en el tiempo t, $v = dx/dt$, y que la dirección positiva es ascendente. Para ese tramo de la cadena en el aire en el tiempo t, contamos con las siguientes cantidades variables:

peso: $W = (x \text{ pies}) \cdot (1 \text{ libra/pie}) = x$,
masa: $m = W/g = x/32$,
fuerza neta: $F = 5 - W = 5 - x$.

Por lo tanto, a partir de (14) tenemos,

Regla del producto



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{32}v\right) = 5 - x \qquad \text{o} \qquad x\frac{dv}{dt} + v\frac{dx}{dt} = 160 - 32x. \tag{15}$$

Puesto que $v = dx/dt$, la última ecuación se convierte en

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160. \tag{16}$$

La ecuación diferencial no lineal de segundo orden (16) tiene la forma $F(x, x', x'') = 0$, la cual es la segunda de las dos formas consideradas en la sección 3.7 que posiblemente se pueden solucionar mediante reducción de orden. Con el fin de resolver (16), regresamos a (15) y usamos $v = x'$ junto con la regla de la cadena. Con base en $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ la segunda ecuación en (15) puede escribirse de nuevo como

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 160 - 32x. \tag{17}$$

A simple vista (17) podría parecer difícil, dado que no puede caracterizarse como ninguna de las ecuaciones de primer orden resueltas en el capítulo 2. No obstante, si (17) se escribe de nuevo en la forma diferencial $M(x, v)dx + N(x, v)dv = 0$, observamos que la ecuación inexacta

$$(v^2 + 32x - 160)\,dx + xv\,dv = 0 \tag{18}$$

se puede transformar en una ecuación exacta al multiplicarla por un *factor de integración*.* Cuando (18) se multiplica por $\mu(x) = x$, la ecuación resultante es exacta (verifíquelo). Si identificamos $\partial f/\partial x = xv^2 + 32x^2 - 160x$, $\partial f/\partial v = x^2v$, y después procedemos como en la sección 2.4, llegamos a

$$\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = c_1. \tag{19}$$

De la condición inicial $x(0) = 0$ se deduce que $c_1 = 0$. Ahora, al resolver $\frac{1}{2}x^2v^2 - \frac{32}{3}x^3$ $80x^2 = 0$ para $v = dx/dt > 0$ obtenemos otra ecuación diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{160 - \frac{64}{3}x},$$

que se puede resolver por separación de variables. Usted deberá verificar que

$$-\frac{3}{32}\left(160 - \frac{64}{3}x\right)^{1/2} = t + c_2. \tag{20}$$

Esta vez la condición inicial $x(0) = 0$ implica $c_2 = -3\sqrt{10}/8$. Por último, si elevamos al cuadrado ambos lados de (20) y resolvemos para x llegamos al resultado que buscábamos,

$$x(t) = \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\left(1 - \frac{4\sqrt{10}}{15}t\right)^2. \tag{21}$$ ≡

Véase el problema 15 en los ejercicios 3.11.

---

* Consulte la página 59 en la sección 2.4.

3.11 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

Al maestro

Además de los problemas 24 y 25, todos o parte de los problemas 1 a 6, 8 a 13, 15, 17 y 23 pueden servir como *tarea para el laboratorio de cómputo*.

Resortes no lineales

En los problemas 1 a 4, la ecuación diferencial dada es modelo de un sistema resorte-masa no amortiguado en el cual la fuerza de recuperación $F(x)$ en (1) es no lineal. En cada ecuación, use un programa de solución numérica para graficar las curvas solución que satisfagan las condiciones iniciales dadas. Si las soluciones parecen ser periódicas, emplee la curva solución para estimar el periodo T de las oscilaciones.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0,$

$x(0) = 1,\ x'(0) = 1;\ x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = -1$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x - 16x^3 = 0,$

$x(0) = 1,\ x'(0) = 1;\ x(0) = -2,\ x'(0) = 2$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2x - x^2 = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1;\ x(0) = \frac{3}{2},\ x'(0) = -1$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + xe^{0.01x} = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1;\ x(0) = 3,\ x'(0) = -1$

5. En el problema 3, suponga que la masa se libera desde su posición inicial $x(0) = 1$ con velocidad inicial $x'(0) = x_1$. Use un programa de solución numérica para estimar el valor más pequeño de $|x_1|$ en el cual el movimiento de la masa sea no periódico.

6. En el problema 3, suponga que la masa se libera desde una posición inicial $x(0) = x_0$ con velocidad inicial $x'(0) = 1$. Use un programa de solución numérica para estimar un intervalo $a \le x_0 \le b$ donde el movimiento sea oscilatorio.

7. Encuentre una linealización de la ecuación diferencial dada en el problema 4.

8. Considere el modelo de un sistema resorte-masa no lineal y no amortiguado dado por $x'' + 8x - 6x^3 + x^5 = 0$. Use un programa de solución numérica para analizar la naturaleza de las oscilaciones del sistema que corresponda a las condiciones iniciales:

$x(0) = 1, x'(0) = 1;$ $\quad x(0) = -2, x'(0) = \frac{1}{2};$
$x(0) = \sqrt{2}, x'(0) = 1;$ $\quad x(0) = 2, x'(0) = \frac{1}{2};$
$x(0) = 2, x'(0) = 0;$ $\quad x(0) = -\sqrt{2}, x'(0) = -1.$

En los problemas 9 y 10, la ecuación diferencial dada es modelo de un sistema resorte-masa amortiguado no lineal. Pronostique el comportamiento de cada sistema cuando $t \to \infty$. En cada ecuación, use un programa de solución numérica para obtener las curvas solución que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

9. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + x^3 = 0,$

$x(0) = -3,\quad x'(0) = 4;\quad x(0) = 0,\quad x'(0) = -8$

10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x - x^3 = 0,$

$x(0) = 0,\quad x'(0) = \frac{3}{2};\quad x(0) = -1,\quad x'(0) = 1$

11. El modelo $mx'' + kx + k_1x^3 = F_0 \cos \omega t$ de un sistema resorte-masa forzado de manera periódica y no amortiguado se denomina **ecuación diferencial de Duffing**. Considere el problema de valor inicial $x'' + x + k_1x^3 = 5 \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Use un programa de solución numérica para estudiar el comportamiento del sistema para valores de $k_1 > 0$ que van de $k_1 = 0.01$ a $k_1 = 100$. Exprese sus conclusiones.

12. ***a)*** Encuentre valores de $k_1 < 0$ para los cuales el sistema del problema 11 sea oscilatorio.

b) Considere el problema de valor inicial

$$x'' + x + k_1x^3 = \cos \tfrac{3}{2}t,\ x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Encuentre valores para $k_1 < 0$ para los cuales el sistema sea oscilatorio.

Péndulo no lineal

13. Considere el modelo del péndulo libre no lineal amortiguado dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Use un programa de solución numérica para investigar si en los casos $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ y $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ el movimiento corresponde, respectivamente, a las condiciones de sobreamortiguamiento y subamortiguamiento analizadas en la sección 3.8 para sistemas resorte-masa. Elija las condiciones y valores iniciales apropiados de λ y ω.

Movimiento de cohete

14. ***a)*** Use la sustitución $v = dy/dt$ para resolver (13) para v en función de y. Suponga que mientras quema su combustible, la velocidad del cohete es $v = v_0$ y que $y \approx R$ en ese instante, muestre que el valor aproximado de la constante de integración c es $c = -gR + \frac{1}{2}v_0^2$.

b) Use la solución de v determinada en el inciso *a*) para mostrar que la velocidad de escape del cohete está dada por $v_0 = \sqrt{2gR}$. [*Sugerencia:* Tome $y \to \infty$ y suponga $v > 0$ para todo tiempo t.]

c) El resultado del inciso *b*) es aplicable a todo cuerpo existente en el Sistema Solar. Use los valores $g = 32$ pies/s^2 y $R = 4000$ millas para mostrar que la velocidad de escape desde la Tierra es (aproximadamente) $v_0 = 25000$ mi/h.

d) Encuentre la velocidad de escape desde la Luna si la aceleración de la gravedad es de $0.165g$ y $R = 1080$ millas.

Masa variable

15. ***a)*** En el ejemplo 4, ¿qué cantidad de cadena intuiría usted que podría levantar la fuerza constante de 5 libras?

b) ¿Cuál es la velocidad inicial de la cadena?

c) ¿Por qué el intervalo que corresponde a $x(t) \geq 0$ no es el intervalo I de definición de la solución (21)? Determine el intervalo I. ¿Qué cantidad de cadena se levanta en realidad? Explique cualquier diferencia entre esta respuesta y su pronóstico del inciso *a*).

d) ¿Por qué esperaría que $x(t)$ es un solución periódica?

16. Una cadena uniforme de longitud L, medida en pies, se sostiene verticalmente de manera que el extremo inferior apenas toca el piso. La cadena pesa 2 libras/pie. El extremo superior que está sostenido se libera del reposo en $t = 0$ y la cadena cae directamente hacia abajo. Véase la figura 1.3.19. Tal como vimos en el problema 22 de los ejercicios 1.3, si $x(t)$ denota la longitud de la cadena en el piso en el tiempo t, se ignora la resistencia del aire, y la dirección positiva se toma como descendente, entonces

$$(L - x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Lg.$$

a) Resuelva para v en términos de x, y para x en términos de t. Exprese v en términos de t.

b) Determine cuánto tiempo le tomará a la cadena caer por completo al piso.

c) ¿Qué velocidad pronostica el modelo encontrado en el inciso *a*) para el extremo superior de la cadena cuando éste toca el piso?

17. Un tramo de una cadena uniforme de 8 pies de longitud está enrollado holgadamente alrededor de una clavija colocada a orillas de una plataforma horizontal alta, y el tramo restante de la cadena cuelga en reposo sobre la orilla de la plataforma. Suponga que la longitud de la parte colgante es de 3 pies y que la cadena pesa 2 libras/pie. Partiendo de $t = 0$, el peso del tramo saliente ocasiona que la cadena de la plataforma se desenrolle lentamente y caiga al piso.

a) Ignore cualquier fuerza resistiva y suponga que la dirección positiva es descendente. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena colgante de la plataforma en el tiempo $t > 0$ y $v = dx/dt$, encuentre una ecuación diferencial que relacione a v con x.

b) Proceda como en el ejemplo 4 y resuelva para v en términos de x al encontrar un factor de integración adecuado.

c) Exprese el tiempo t en términos de x. Use un CAS para ayudarse a determinar el tiempo que le toma a un segmento de 7 pies de cadena desenrollarse por completo, es decir, caer de la plataforma.

18. Un tramo de una cadena uniforme de 8 pies de longitud yace extendido sobre una plataforma horizontal alta, y el tramo restante cuelga por la orilla de la plataforma como indica la **FIGURA 3.11.6**. Suponga que la longitud de la parte saliente es de 3 pies, y la cadena pesa 2 libras/pie. El extremo de la cadena sobre la plataforma se sostiene hasta ser liberado desde el reposo en $t = 0$, y la cadena comienza a deslizarse por la plataforma debido al peso de la parte colgante.

a) Ignore cualquier fuerza resistiva y suponga que la dirección positiva es descendente. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena saliente de la plataforma en el tiempo $t > 0$ y $v = dx/dt$, demuestre que v está relacionado con x por la ecuación diferencial $v\dfrac{dv}{dx} = 4x$.

b) Resuelva para v en términos de x, y para x en términos de t. Exprese v en términos de t.

c) Aproxime los tiempos que le toma a la cadena deslizarse completamente de la plataforma partiendo del reposo. Encuentre la velocidad a la cual el extremo de la cadena abandona la orilla de la plataforma.

d) Suponga que la cadena tiene L pies de longitud y pesa un total de W libras. Si en $t = 0$ la parte saliente es x_0 pies, demuestre que la velocidad a la cual el extremo de la cadena abandona la orilla de la plataforma es $v(L) = \sqrt{\dfrac{g}{L}(L^2 - x_0^2)}$.

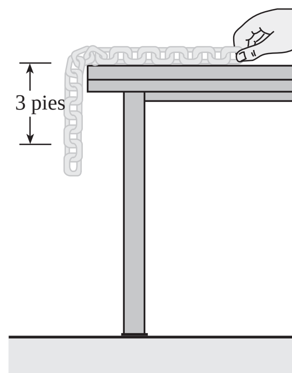


FIGURA 3.11.6 Cadena que se desliza, problema 18

≡ Modelos matemáticos diversos

19. Curva de persecución En un ejercicio naval, una embarcación S_1 es perseguida por un submarino S_2, como indica la **FIGURA 3.11.7**. El barco S_1 sale del punto (0, 0) en $t = 0$ y sigue un curso en línea recta (el eje y) a velocidad constante v_1. El submarino S_2 mantiene contacto visual con el barco S_1, indicado por la línea recta discontinua L en la figura, mientras navega a velocidad constante v_2 a lo largo de una curva C. Suponga que S_2 parte del punto $(a, 0)$, $a > 0$, en $t = 0$ y que L es tangente a C. Determine un modelo matemático que describa la curva C. Encuentre una solución explícita de la ecuación diferencial. Por comodidad, defina $r = v_1/v_2$. Determine si las trayectorias de S_1 y S_2 se intersecarán alguna vez considerando los casos $r > 1$, $r < 1$ y $r = 1$.

[*Sugerencia:* $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{ds}{dx}$ donde s es la longitud del arco medido a lo largo de C.]

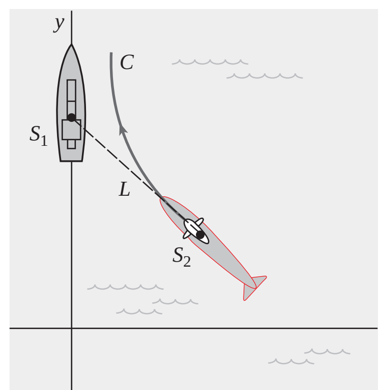


FIGURA 3.11.7 Curva de persecución, problema 19

20. Curva de persecución En otro ejercicio naval, un destructor S_1 persigue a un submarino sumergido S_2. Suponga que en (9, 0) del eje x S_1 detecta a S_2 en (0, 0), y que S_2 detecta de manera simultánea a S_1. El capitán del destructor supone que el submarino tomará una acción evasiva inmediata y concluye que

su nuevo curso probable es la línea recta indicada en la **FIGURA 3.11.8**. Cuando S_1 está en (3, 0), cambia su curso de línea recta al origen por una curva de persecución C. Suponga que la velocidad del destructor es, en todo momento, una constante de 30 mi/h y que la velocidad del submarino es una constante de 15 mi/h.

a) Explique por qué el capitán espera que S_1 alcance (3, 0) antes de ordenar un cambio de curso hacia C.

b) Mediante coordenadas polares, encuentre una ecuación $r = f(\theta)$ para la curva C.

c) Si T denota el tiempo, medido desde la detección inicial, al cual el destructor intercepta al submarino, encuentre el límite superior para T.

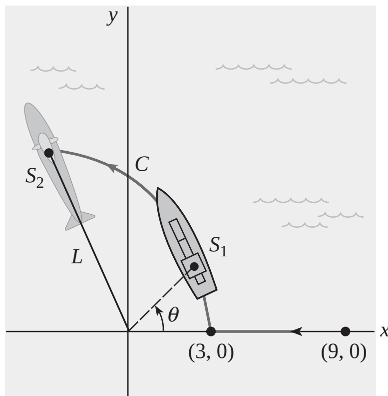


FIGURA 3.11.8 Curva de persecución, problema 20

≡ Problemas de análisis

21. Analice por qué en la ecuación (3) el término de amortiguamiento se escribe como

$$\beta\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt} \quad \text{en lugar de} \quad \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

22. ***a***) Experimente con una calculadora para encontrar un intervalo $0 \leq \theta < \theta_1$, donde θ se mida en radianes, para el cual usted piensa que sen $\theta \approx \theta$ es una estimación muy buena. Después, use una herramienta de graficación para trazar las gráficas de $y = x$ y $y =$ sen x en los mismos ejes coordenados que para $0 \leq x \leq \pi/2$. ¿Las gráficas confirman sus observaciones con la calculadora?

b) Use un programa de solución numérica para trazar las curvas solución de los problemas de valor inicial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$$

y

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$$

para diversos valores de θ_0 en el intervalo $0 \leq \theta < \theta_1$ encontrados en el inciso *a*). A continuación, trace las curvas de solución de los problemas con valor inicial para distintos valores θ_0 para los cuales $\theta_0 > \theta_1$.

23. ***a***) Considere un péndulo no lineal cuyas oscilaciones están definidas por (6). Use un programa de solución numérica para determinar si un péndulo de longitud l oscilará más rápido en la Tierra o en la Luna. Aplique las mismas condiciones iniciales, pero seleccionadas de manera que el péndulo oscile de atrás para adelante.

b) ¿En qué lugar del inciso *a*) tendrá el péndulo mayor amplitud?

c) En *a*) y *b*), ¿las conclusiones son las mismas cuando se usa el modelo lineal (7)?

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

24. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{12}, \quad \theta'(0) = -\frac{1}{3}$$

para el péndulo no lineal. Dado que no podemos resolver la ecuación diferencial, no encontramos soluciones explícitas para este problema. Pero suponga que deseamos determinar el primer tiempo $t_1 > 0$ en cual el péndulo de la figura 3.11.3 comienza desde una posición inicial a la derecha y alcanza la posición OP, es decir, encuentra la primera raíz positiva de $\theta(t) = 0$. En este problema y en el siguiente examinamos diversas formas de proceder.

a) Calcule t_1 por medio de la resolución del problema lineal $d^2\theta/dt^2 + \theta = 0, \theta(0) = \pi/12, \theta'(0) = -\frac{1}{3}$.

b) Use el método ilustrado en el ejemplo 3 de la sección 3.7 y encuentre los primeros cuatro términos diferentes de cero para una solución de la serie de Taylor $\theta(t)$ centrada en 0 para el problema de valor inicial no lineal. Proporcione los valores exactos de todos los coeficientes.

c) Use los dos primeros términos de la serie de Taylor determinada en el inciso *b*) para aproximar t_1.

d) Use los tres primeros términos de la serie de Taylor empleada en el inciso *b*) para aproximar t_1.

e) Use la aplicación apropiada de un CAS (o una calculadora gráfica) para buscar raíces y los primeros cuatro términos de la serie de Taylor empleada en el inciso *b*) para aproximar t_1.

f) En esta parte del problema, recurra a los comandos de *Mathematica* que le permiten aproximar la raíz t_1. El procedimiento se puede modificar con facilidad de manera que pueda aproximarse cualquier raíz de $\theta(t) = 0$. (*Si usted no cuenta con* Mathematica, *adapte el procedimiento dado encontrando la sintaxis correspondiente para el CAS que tenga a la mano.*) Reproduzca de modo preciso y después, a su vez, ejecute cada línea en la secuencia de comandos dada.

```
sol = NDSolve[{y″[t] + Sin[y[t]} = = 0,
    y[0] = = Pi/12, y′[0] == −1/3} ,
    y, { t, 0, 5} ]//Flatten
solution = y[t]/.sol
Clear[y]
y[t_]: = Evaluate[solution]
y[t]
gr1 = Plot[y[t], { t, 0, 5} ]
root = FindRoot[y[t] = = 0, { t, 1} ]
```

g) Modifique adecuadamente la sintaxis del inciso *f*) y encuentre las dos siguientes raíces positivas de $\theta(t) = 0$.

25. Considere un péndulo que se libera del reposo desde un desplazamiento inicial de θ_0 radianes. Cuando resuelva el modelo lineal (7) sujeto a las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$ obtendrá $\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{g/l}\,t$. El periodo de oscilaciones pronosticado por este modelo se expresa mediante la conocida fórmula $T = 2\pi/\sqrt{g/l} = 2\pi\sqrt{l/g}$. En esta fórmula, lo inte-

resante para T es que no depende de la magnitud del desplazamiento inicial θ_0. En otras palabras, el modelo lineal pronostica que el tiempo que le tomaría al péndulo oscilar desde su desplazamiento inicial de, digamos, $\theta_0 = \pi/2$ (= 90°) hasta $-\pi/2$ y regresar de nuevo sería exactamente el mismo que tardaría en desplazarse desde, digamos, $\theta_0 = \pi/360$ (= 0.5°) hasta $-\pi/360$. Esto no es lógico desde el punto de vista intuitivo; el periodo real debe depender de θ_0.

Si suponemos que $g = 32$ pies/s^2 y $l = 32$ pies, entonces el periodo de oscilación del modelo lineal es $T = 2\pi$ s. Comparemos este último número con el periodo pronosticado por el modelo no lineal cuando $\theta_0 = \pi/4$. Mediante un programa de solución numérica capaz de generar datos concretos, aproxime la solución de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta'(0) = 0$$

en el intervalo $0 \le t \le 2$. Tal como en el problema 24, si t_1 denota la primera vez que el péndulo llega a la posición OP en la figura 3.11.3, entonces el periodo del péndulo no lineal es $4t_1$. Aquí presentamos otra forma de resolver la ecuación $\theta(t) = 0$. Experimente con pasos pequeños y anticipe el tiempo comenzando en $t = 0$ y terminando en $t = 2$. Con base en datos concretos, observe el tiempo t_1 en que $\theta(t)$ cambia, para la primera vez, de positivo a negativo. Use el valor t_1 para determinar el verdadero valor del periodo del péndulo no lineal. Calcule el porcentaje relativo de error en el periodo estimado mediante $T = 2\pi$.

3.12 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Introducción Concluimos este capítulo como lo hicimos en el capítulo 2, con sistemas de ecuaciones diferenciales. Pero a diferencia de la sección 2.9, en el análisis presentado a continuación realmente resolveremos sistemas.

Sistemas acoplados y ecuaciones diferenciales acopladas En la sección 2.9 examinamos brevemente algunos modelos matemáticos que fueron sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales y no lineales. En la sección 3.8 vimos que los modelos matemáticos que describen el desplazamiento de una masa en un solo resorte, corrientes en circuitos en serie y la carga de un capacitor en un circuito en serie, estaban compuestos por una *sola* ecuación diferencial. Cuando los sistemas físicos están acoplados —por ejemplo, si dos o más tanques mezcladores están conectados, si dos o más sistemas resorte-masa están unidos o si los circuitos se ensamblan para formar una red— sus modelos matemáticos generalmente están compuestos por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, en otras palabras, por un sistema de ecuaciones diferenciales.

No intentamos resolver ninguno de los sistemas considerados en la sección 2.9. Los mismos comentarios que se hicieron en las secciones 3.7 y 3.11 se aplican también a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, es decir, resulta casi imposible resolver esos sistemas de manera analítica. Sin embargo, sistemas *lineales* con coeficientes constantes sí pueden ser resueltos. El método que examinaremos en esta sección para resolver sistemas lineales con coeficientes constantes simplemente desacopla el sistema en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales distintas en cada variable independiente. Por lo tanto, esta sección ofrece la oportunidad de practicar lo aprendido antes en el capítulo.

Antes de proceder, continuemos de la misma forma en que lo hicimos en la sección 3.8 al considerar un sistema resorte-masa, pero esta vez derivemos un modelo matemático que describa los desplazamientos verticales de dos masas en un sistema resorte-masa acoplado.

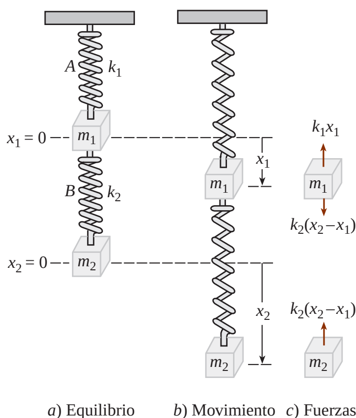


FIGURA 3.12.1 Sistemas resorte-masa acoplados

Sistema resorte-masa acoplado Suponga que dos masas m_1 y m_2 están unidas a dos resortes A y B de masa insignificante cuyas constantes del resorte son k_1 y k_2, respectivamente. Como ilustra la **FIGURA 3.12.1*a***), el resorte A está sujeto a un soporte rígido y el resorte B a la parte inferior de la masa m_1. Digamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ denotan los desplazamientos verticales de las masas a partir de sus posiciones de equilibrio. Cuando el sistema está en movimiento, figura 3.12.1*b*), el resorte B queda sujeto a una elongación y a una compresión; por lo tanto, la elongación neta resulta ser $x_2 - x_1$. En consecuencia, de la ley de Hooke se deduce que los resortes A y B ejercen fuerzas $-k_1x_1$ y $k_2(x_2 - x_1)$, respectivamente, en m_1. Si no hay amortiguamiento ni se aplican fuerzas externas al sistema, entonces la fuerza neta sobre m_1 es $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$. Con base en la segunda ley de Newton podemos escribir

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1).$$

Asimismo, la fuerza neta ejercida sobre la masa m_2 se debe únicamente a la elongación neta del resorte B; es decir, $-k_2(x_2 - x_1)$. Entonces tenemos

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1).$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado está representado por el sistema de ecuaciones lineales de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Una vez ilustrada la idea principal a tratar en esta sección, regresaremos al sistema (1).

Eliminación sistemática El método de **eliminación sistemática** para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes está basado en el principio algebraico de eliminación de variables. El análogo de *multiplicar* una ecuación algebraica por una constante es *operar* en una EDO con alguna combinación de derivadas. El proceso de eliminación se acelera al escribir nuevamente cada ecuación de un sistema empleando una notación de operador diferencial. De la sección 3.1 recuerde que una sola ecuación lineal

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(t),$$

donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes, la podemos escribir como

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y = g(t).$$

Si un operador diferencial de n-ésimo orden $a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$ se factoriza en distintos operadores diferenciales de orden inferior, entonces los factores se conmutan. Ahora, por ejemplo, para escribir nuevamente el sistema

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + y'' &= x + 3y + \operatorname{sen} t \\ x' + y' &= -4x + 2y + e^{-t} \end{aligned}$$

en términos del operador D, primero llevamos todos los términos que involucran las variables dependientes a un lado y agrupamos las variables semejantes:

$$\begin{aligned} x'' + 2x' - x + y'' - 3y &= \operatorname{sen} t \\ x' - 4x + y' - 2y &= e^{-t} \end{aligned} \quad \text{de manera que} \quad \begin{aligned} (D^2 + 2D - 1)x + (D^2 - 3)y &= \operatorname{sen} t \\ (D - 4)x + (D - 2)y &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Solución de un sistema Una **solución** de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones lo suficientemente diferenciables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$, y así sucesivamente, que satisface cada ecuación presente en el sistema en un intervalo común I.

Método de solución Considere el sistema simple de ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \end{aligned} \quad \text{o, de manera equivalente} \quad \begin{aligned} Dx - 3y &= 0 \\ 2x - Dy &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Si se opera en la primera ecuación de (2) mediante D mientras la segunda se multiplica por -3 y después con la suma se elimina y del sistema se obtiene $D^2x - 6x = 0$. Dado que las raíces de la ecuación auxiliar de la última ED son $m_1 = \sqrt{6}$ y $m_2 = -\sqrt{6}$, obtenemos

$$x(t) = c_1e^{-\sqrt{6}t} + c_2e^{\sqrt{6}t}. \tag{3}$$

Si se multiplica la primera ecuación de (2) por 2 mientras se opera en la segunda mediante D y después se resta, se obtiene la ecuación diferencial para y, $D^2y - 6y = 0$. De inmediato se deduce que

$$y(t) = c_3e^{-\sqrt{6}t} + c_4e^{\sqrt{6}t}. \tag{4}$$

Esto es importante.

Ahora, (3) y (4) no satisfacen el sistema (2) para cada opción de c_1, c_2, c_3 y c_4 debido a que el propio sistema impone una restricción sobre la cantidad de parámetros que puede elegirse de manera arbitraria en una solución. Para ver esto, observe que después de sustituir $x(t)$ y $y(t)$ en la primera ecuación del sistema original, (2) da, luego de la simplificación,

$$(-\sqrt{6}c_1 - 3c_3)e^{-\sqrt{6}t} + (\sqrt{6}c_2 - 3c_4)e^{\sqrt{6}t} = 0.$$

Dado que la última expresión ha de ser cero para todos los valores de t, debemos tener $-\sqrt{6}c_1 - 3c_3 = 0$ y $\sqrt{6}c_2 - 3c_4 = 0$. Por lo tanto, escribimos c_3 como un múltiplo de c_1 y c_4 como múltiplo de c_2:

$$c_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1 \quad \text{y} \quad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}c_2. \tag{5}$$

En consecuencia, concluimos que una solución del sistema debe ser

$$x(t) = c_1e^{-\sqrt{6}t} + c_2e^{\sqrt{6}t}, \quad y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1e^{-\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_2e^{\sqrt{6}t}.$$

Se le exhorta a sustituir (3) y (4) en la segunda ecuación de (2) y verificar que la misma relación (5) se mantenga entre las constantes.

EJEMPLO 1 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} Dx + (D + 2)y &= 0 \\ (D - 3)x - 2y &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Solución Se opera en la primera ecuación mediante $D - 3$ y en la segunda mediante D y después se elimina x del sistema por sustracción. Se deduce que la ecuación diferencial para y es

$$[(D - 3)(D + 2) + 2D]y = 0 \quad \text{o} \quad (D^2 + D - 6)y = 0.$$

Dado que la ecuación característica de esta última ecuación diferencial es $m^2 + m - 6 = (m - 2)(m + 3) = 0$, obtenemos la solución

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}. \tag{7}$$

Al eliminar y de una forma similar se obtiene $(D^2 + D - 6)x = 0$, de donde encontramos

$$x(t) = c_3e^{2t} + c_4e^{-3t}. \tag{8}$$

Tal como se advirtió en el análisis anterior, una solución de (6) no contiene cuatro constantes independientes. Si se sustituyen (7) y (8) en la primera ecuación de (6) resulta

$$(4c_1 + 2c_3)e^{2t} + (-c_2 - 3c_4)e^{-3t} = 0.$$

De $4c_1 + 2c_3 = 0$ y $-c_2 - 3c_4 = 0$ obtenemos $c_3 = -2c_1$ y $c_4 = -\frac{1}{3}c_2$. De acuerdo con esto, una solución del sistema es

$$x(t) = -2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t}, \quad y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}.$$

≡

Dado que fácilmente podríamos resolver sólo para c_3 y c_4 en términos de c_1 y c_2, la solución del ejemplo 1 se puede escribir en la forma alternativa

$$x(t) = c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}c_3 e^{2t} - 3c_4 e^{-3t}.$$

Algunas veces conviene estar atento cuando se resuelven sistemas. Hemos resuelto primero para x, después se podría encontrar y, junto con la relación entre las constantes, mediante la última ecuación dada en (6). Deberá verificarse que sustituir $x(t)$ en $y = \frac{1}{2}(Dx - 3x)$ produce $y = -\frac{1}{2}c_3 e^{2t} - 3c_4 e^{-3t}$.

Busque un camino más corto.

EJEMPLO 2 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} x' - 4x + y'' &= t^2 \\ x' + x + y' &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Solución Primero escribimos el sistema en la notación de operador diferencial:

$$\begin{aligned} (D - 4)x + D^2 y &= t^2 \\ (D + 1)x + Dy &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Después, al eliminar x, obtenemos

$$[(D + 1)D^2 - (D - 4)D]y = (D + 1)t^2 - (D - 4)0$$

o

$$(D^3 + 4D)y = t^2 + 2t.$$

Debido a que las raíces de la ecuación auxiliar $m(m^2 + 4) = 0$ son $m_1 = 0$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$, la función complementaria es

$$y_c = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t.$$

Para determinar la solución particular y_p usamos coeficientes indeterminados al suponer $y_p = At^3 + Bt^2 + Ct$. Por lo tanto,

$$\begin{gathered} y_p' = 3At^2 + 2Bt + C, \quad y_p'' = 6At + 2B, \quad y_p''' = 6A, \\ y_p''' + 4y_p' = 12At^2 + 8Bt + 6A + 4C = t^2 + 2t. \end{gathered}$$

La última ecuación implica $12A = 1$, $8B = 2$, $6A + 4C = 0$, y en consecuencia $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{8}$. Así que

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t. \tag{11}$$

Al eliminar y del sistema (9) se tiene

$$[(D - 4) - D(D + 1)]x = t^2 \quad \text{o} \quad (D^2 + 4)x = -t^2.$$

Debe ser evidente que

$$x_c = c_4 \cos 2t + c_5 \operatorname{sen} 2t$$

y que los coeficientes indeterminados pueden aplicarse a una solución particular de la forma $x_p = At^2 + Bt + C$. En este caso, las derivaciones y operaciones algebraicas acostumbradas producen $x_p = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$, y así

$$x = x_c + x_p = c_4 \cos 2t + c_5 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}. \tag{12}$$

Ahora, c_4 y c_5 pueden expresarse en términos de c_2 y c_3 al sustituir (11) y (12) en cualquier ecuación de (9). Al utilizar la segunda ecuación encontramos, después de combinar términos,

$$(c_5 - 2c_4 - 2c_2) \text{ sen } 2t + (2c_5 + c_4 + 2c_3) \cos 2t = 0$$

de manera que $c_5 - 2c_4 - 2c_2 = 0$ y $2c_5 + c_4 + 2c_3 = 0$. Al resolver para c_4 y c_5 en términos de c_2 y c_3 se tiene $c_4 = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)$ y $c_5 = \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)$. Por último, una solución de (9) sería

$$x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3) \cos 2t + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3) \text{ sen } 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8},$$

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \text{ sen } 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 3 Nuevo enfoque para un modelo matemático

En la expresión (3) de la sección 2.9 vimos que un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden describió la cantidad de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de una mezcla de salmuera que fluye entre dos tanques. En esa ocasión no pudimos resolver el sistema. Pero ahora, en términos de operadores diferenciales, el sistema es

$$\left(D + \frac{2}{25}\right)x_1 - \frac{1}{50}x_2 = 0$$

$$-\frac{2}{25}x_1 + \left(D + \frac{2}{25}\right)x_2 = 0.$$

Si se opera en la primera ecuación mediante $D + \frac{2}{25}$, se multiplica la segunda ecuación por $\frac{1}{50}$, se suma y después se simplifica, resulta

$$(625D^2 + 100D + 3)x_1 = 0.$$

A partir de la ecuación auxiliar $625m^2 + 100m + 3 = (25m + 1)(25m + 3) = 0$ de inmediato advertimos que

$$x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}.$$

De manera similar encontramos $(625D^2 + 100D + 3)x_2 = 0$ y, por lo tanto,

$$x_2(t) = c_3e^{-t/25} + c_4e^{-3t/25}.$$

Al sustituir $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en, digamos, la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$(2c_1 - c_3)e^{-t/25} + (-2c_2 - c_4)e^{-3t/25} = 0.$$

A partir de la última ecuación encontramos $c_3 = 2c_1$ y $c_4 = -2c_2$. Por lo tanto, una solución del sistema es

$$x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}, \qquad x_2(t) = 2c_1e^{-t/25} - 2c_2e^{-3t/25}.$$

En el análisis original supusimos estas condiciones iniciales: $x_1(0) = 25$ y $x_2(0) = 0$. Cuando se aplican estas condiciones a la solución tenemos $c_1 + c_2 = 25$ y $2c_1 - 2c_2 = 0$. Al resolver de manera simultánea estas ecuaciones resulta $c_1 = c_2 = \frac{25}{2}$. Por último, una solución del problema de valor inicial es

$$x_1(t) = \frac{25}{2}e^{-t/25} + \frac{25}{2}e^{-3t/25}, \qquad x_2(t) = 25e^{-t/25} - 25e^{-3t/25}. \qquad \equiv$$

En nuestro siguiente ejemplo resolveremos (1) bajo el supuesto de que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$.

EJEMPLO 4 Un caso especial del sistema (1)

Resuelva

$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 \quad\quad -4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

sujeto a $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$.

Solución Si usamos la eliminación en la forma equivalente del sistema

$$\begin{aligned} (D^2 + 10)x_1 \quad\quad - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + (D^2 + 4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

encontramos que x_1 y x_2 satisfacen, respectivamente,

$$(D^2 + 2)(D^2 + 12)x_1 = 0 \quad \text{y} \quad (D^2 + 2)(D^2 + 12)x_2 = 0.$$

Por lo tanto, encontramos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}t + c_3 \cos 2\sqrt{3}t + c_4 \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= c_5 \cos \sqrt{2}t + c_6 \operatorname{sen} \sqrt{2}t + c_7 \cos 2\sqrt{3}t + c_8 \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

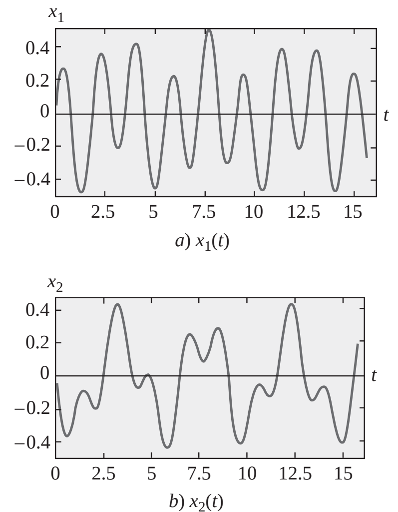
Al sustituir ambas expresiones en la primera ecuación de (13) y simplificar, finalmente se tiene $c_5 = 2c_1$, $c_6 = 2c_2$, $c_7 = -\frac{1}{2}c_3$, $c_8 = -\frac{1}{2}c_4$. Por lo tanto, una solución de (13) es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}t + c_3 \cos 2\sqrt{3}t + c_4 \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= 2c_1 \cos \sqrt{2}t + 2c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}t - \tfrac{1}{2}c_3 \cos 2\sqrt{3}t - \tfrac{1}{2}c_4 \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Entonces las condiciones estipuladas inicialmente implican $c_1 = 0$, $c_2 = -\sqrt{2}/10$, $c_3 = 0$, $c_4 = \sqrt{3}/5$. Y entonces la solución del problema de valor inicial es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \operatorname{sen} \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \operatorname{sen} \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10} \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned} \tag{14}$$

En la **FIGURA 3.12.2**, las gráficas de x_1 y x_2 revelan el complicado movimiento oscilatorio de cada masa. ≡



FIGURQ 3.12.2 Desplazamientos de las dos masas en el ejemplo 4

Volveremos a analizar el ejemplo 4 de la sección 4.6, entonces resolveremos (13) mediante la transformada de Laplace.

3.12 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 20, resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales dado mediante eliminación sistemática.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y$
$\dfrac{dy}{dt} = x$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 7y$
$\dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -y + t$
$\dfrac{dy}{dt} = x - t$

4. $\dfrac{dx}{dt} - 4y = 1$
$\dfrac{dy}{dt} + x = 2$

5. $(D^2 + 5)x - \quad 2y = 0$
$-2x + (D^2 + 2)y = 0$

6. $(D + 1)x + (D - 1)y = 2$
$3x + (D + 2)y = -1$

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$
$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = -5x$
$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y$

9. $Dx + D^2y = e^{3t}$
$(D + 1)x + (D - 1)y = 4e^{3t}$

10. $D^2x - Dy = t$
$(D + 3)x + (D + 3)y = 2$

11. $(D^2 - 1)x - y = 0$
$(D - 1)x + Dy = 0$

12. $(2D^2 - D - 1)x - (2D + 1)y = 1$
$(D - 1)x + Dy = -1$

13. $2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} = e^t$
$\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} = 5e^t$

14. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^t$
$-\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + y = 0$

15. $(D - 1)x + (D^2 + 1)y = 1$
$(D^2 - 1)x + (D + 1)y = 2$

16. $D^2x - 2(D^2 + D)y = \operatorname{sen} t$
$x + Dy = 0$

17. $Dx = y$
$Dy = z$
$Dz = x$

18. $Dx + z = e^t$
$(D - 1)x + Dy + Dz = 0$
$x + 2y + Dz = e^t$

19. $\dfrac{dx}{dt} = 6y$
$\dfrac{dy}{dt} = x + z$
$\dfrac{dz}{dt} = x + y$

20. $\dfrac{dx}{dt} = -x + z$
$\dfrac{dy}{dt} = -y + z$
$\dfrac{dz}{dt} = -x + y$

En los problemas 21 y 22 resuelva el problema de valor inicial dado.

21. $\dfrac{dx}{dt} = -5x - y$
$\dfrac{dy}{dt} = 4x - y$
$x(1) = 0,\ y(1) = 1$

22. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1$
$\dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y$
$x(0) = 0,\ y(0) = 0$

≡ Modelos matemáticos

23. Movimiento de un proyectil Un proyectil disparado desde un arma tiene un peso de $w = mg$ y velocidad $\mathbf{v}$ tangente a su trayectoria de movimiento. Ignore la resistencia del aire y todas las demás fuerzas que actúan sobre el proyectil, salvo su peso, y determine un sistema de ecuaciones diferenciales que describan la trayectoria del movimiento. Véase la **FIGURA 3.12.3**. Resuelva el sistema. [*Sugerencia:* Aplique la segunda ley de Newton del movimiento en las direcciones x y y.]

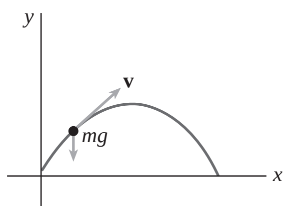


FIGURA 3.12.3 Trayectoria del proyectil del problema 23

24. Movimiento de un proyectil con resistencia del aire Determine un sistema de ecuaciones diferenciales que describa la trayectoria del movimiento planteado en el problema 23 si la resistencia del aire es la fuerza retardante $\mathbf{k}$ (de magnitud k) que actúa tangente a la trayectoria del proyectil pero opuesta a su movimiento. Véase la **FIGURA 3.12.4**. Resuelva el sistema. [*Sugerencia:* $\mathbf{k}$ es un múltiplo de la velocidad, digamos, $c\mathbf{v}$.]

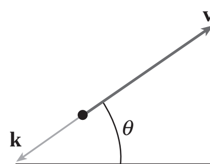


FIGURA 3.12.4 Fuerzas descritas en el problema 24

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

25. Considere la solución $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del problema de valor inicial dado al final del ejemplo 3. Use un CAS para graficar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el mismo plano coordenado en el intervalo [0, 100]. En el ejemplo 3, $x_1(t)$ denota la cantidad de libras de sal presentes en el tanque A en el momento t, y $x_2(t)$ representa las libras de sal disueltas en el tanque B en el tiempo t. Véase la figura 2.9.1. Use una aplicación apropiada para buscar raíces y determinar cuando el tanque B contiene más sal que el tanque A.

26. ***a***) Relea el problema 8 de los ejercicios 2.9. En ese problema se le pidió demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{50}x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{50}x_1 - \frac{2}{75}x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{2}{75}x_2 - \frac{1}{25}x_3$$

era un modelo empleado para ilustrar las cantidades de sal presentes en los tanques mezcladores conectados A, B y C mostrados en la figura 2.9.7. Resuelva el sistema sujeto a $x_1(0) = 15$, $x_2(t) = 10$, $x_3(t) = 5$.

b) Use un CAS para graficar $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en el mismo plano coordenado en el intervalo [0, 200].

c) Dado que sólo se bombea agua pura hacia el tanque A, es lógico pensar que la sal finalmente será enjuagada de los tres tanques. Use un buscador de raíces de un CAS para determinar el tiempo en que la cantidad de sal presente en cada tanque es menor que o igual a 0.5 libra. ¿Cuándo serán las cantidades de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ simultáneamente menores que o iguales a 0.5 libra?

27. ***a***) Use la eliminación sistemática para resolver el sistema (1) del arreglo resorte-masa acoplado cuando $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, y las condiciones iniciales son $x_1(0) = 2$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_2'(0) = 1$.

b) Use un CAS para trazar las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el plano tx. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre los movimientos de las masas m_1 y m_2 examinadas en este problema y los movimientos de las masas ilustrados en la figura 3.12.2?

c) Como ecuaciones paramétricas, trace $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el plano x_1x_2. La curva definida por estas ecuaciones paramétricas se denomina **curva de Lissajous**.

3 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

Resuelva los ejercicios 1 a 8 sin remitirse al texto. Llene el espacio en blanco o responda verdadero o falso.

1. La única solución del problema de valor inicial $y'' + x^2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0)$, $= 0$ es ______.
2. Para el método de coeficientes indeterminados, la forma supuesta de la solución particular y_p para $y'' - y = 1 + e^x$ es ______.
3. Un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial lineal también es una solución.
4. Si f_1 y f_2 son funciones linealmente independientes en un intervalo I, entonces su wronskiano $W(f_1, f_2) \neq 0$ para toda x en I.
5. Si un peso de 10 libras estira un resorte 2.5 pies, un peso de 32 libras lo estirará _____ pies.
6. El periodo del movimiento armónico simple de un peso de 8 libras sujeto a un resorte cuya constante es de 6.25 libras/pie es ______ segundos.
7. La ecuación diferencial que describe el movimiento de una masa sujeta a un resorte es $x'' + 16x = 0$. Si la masa se libera en $t = 0$ desde 1 metro por encima de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 3 m/s, la amplitud de las vibraciones es de _____ metros.
8. Si un movimiento armónico simple se describe mediante $x(t) = (\sqrt{2}/2)\,\text{sen}\,(2t + \phi)$, el ángulo de fase ϕ es ______ cuando $x(0) = -\frac{1}{2}$ y $x'(0) = 1$.
9. Proporcione un intervalo en el cual $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x\,|x|$ sean linealmente independientes. Después proporcione un intervalo en el cual f_1 y f_2 sean linealmente dependientes.
10. Sin ayuda del wronskiano, determine si el conjunto de funciones dado es linealmente independiente o linealmente dependiente en el intervalo indicado.
    a) $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln x^2$, $(0, \infty)$
    b) $f_1(x) = x^n$, $f_2(x) = x^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, (-\infty, \infty)$
    c) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x + 1$, $(-\infty, \infty)$
    d) $f_1(x) = \cos(x + \pi/2)$, $f_2(x) = \text{sen}\,x$, $(-\infty, \infty)$
    e) $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $(-5, 5)$
    f) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = 2x$, $(-\infty, \infty)$
    g) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 - x^2$, $f_3(x) = 2 + x^2$, $(-\infty, \infty)$
    h) $f_1(x) = xe^{x+1}$, $f_2(x) = (4x - 5)e^x$, $f_3(x) = xe^x$, $(-\infty, \infty)$
11. Suponga que $m_1 = 3$, $m_2 = -5$ y $m_3 = 1$ son raíces de multiplicidad uno, dos y tres, respectivamente, de una ecuación auxiliar. Escriba la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente si ésta es
    a) una ecuación con coeficientes constantes,
    b) una ecuación de Cauchy-Euler.
12. Encuentre una ecuación diferencial de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, donde a, b y c sean constantes reales, sabiendo que:
    a) $m_1 = 3$ y $m_2 = -1$ son raíces de su ecuación auxiliar,
    b) $m_1 = i$ es una raíz compleja de su ecuación auxiliar.

En los problemas 13 a 28, use los procedimientos desarrollados en este capítulo para encontrar la solución general de cada ecuación diferencial.

13. $y'' - 2y' - 2y = 0$
14. $2y'' + 2y' + 3y = 0$
15. $y''' + 10y'' + 25y' = 0$
16. $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0$
17. $3y''' + 10y'' + 15y' + 4y = 0$
18. $2y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + 6y' - 4y = 0$
19. $y'' - 3y' + 5y = 4x^3 - 2x$
20. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$
21. $y''' - 5y'' + 6y' = 8 + 2\,\text{sen}\,x$
22. $y''' - y'' = 6$
23. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$
24. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$
25. $6x^2y'' + 5xy' - y = 0$
26. $2x^3y''' + 19x^2y'' + 39xy' + 9y = 0$
27. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 + x^2$
28. $x^2y'' - xy' + y = x^3$
29. Escriba la forma de la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada en los dos casos $\omega \neq \alpha$ y $\omega = \alpha$. No determine los coeficientes en y_p.
    a) $y'' + \omega^2y = \text{sen}\,\alpha x$
    b) $y'' - \omega^2y = e^{\alpha x}$
30. ***a***) Dado que $y = \text{sen}\,x$ es una solución de $y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0$, encuentre la solución general de la ED *sin ayuda de una calculadora o una computadora.*
    b) Encuentre la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes para los cuales $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-x}$ sean soluciones de la ecuación homogénea asociada y $y_p = x^2 - \frac{1}{2}x$ sea una solución particular de la ecuación no homogénea.
31. ***a***) Escriba la solución general de la ED de cuarto orden $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ totalmente en términos de funciones hiperbólicas.
    b) Escriba la forma de una solución particular de $y^{(4)} - 2y'' + y = \text{senh}\,x$.
32. Considere la ecuación diferencial $x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = x^3$. Verifique que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Después, demuestre que el método de reducción de orden analizado en la sección 3.2 lleva tanto a una segunda solución y_2 de la ecuación homogénea como a una solución particular y_p de la ecuación no homogénea. Constituya la solución general de la ED en el intervalo $(0, \infty)$.

En los problemas 33 a 38, resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones indicadas.

33. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y(\pi) = -1$
34. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(-1) = 0$, $y'(0) = 0$
35. $y'' - y = x + \text{sen}\,x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$
36. $y'' + y = \sec^3 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$
37. $y'y'' = 4x$, $y(1) = 5$, $y'(1) = 2$
38. $2y'' = 3y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
39. ***a***) Use un CAS para ayudarse a encontrar las raíces de la ecuación auxiliar para $12y^{(4)} + 64y''' + 59y'' - 23y' - 12y = 0$. Escriba la solución general de la ecuación.

b) Resuelva la ED del inciso *a*) sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = -1, y'(0) = 2, y'''(0) = 5, y''(0) = 0$. Use un CAS para resolver los sistemas resultantes de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas.

40. Encuentre un miembro de la familia de soluciones de

$$xy'' + y' + \sqrt{x} = 0$$

cuya gráfica sea tangente al eje x en $x = 1$. Use una herramienta graficadora para obtener la curva solución.

En los problemas 41 a 44, aplique la eliminación sistemática para resolver el sistema dado.

41. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1$

$\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = y + 3$

42. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + t - 2$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y - 4t$

43. $(D - 2)x \qquad -y = -e^t$

$-3x + (D - 4)y = -7e^t$

44. $(D + 2)x + (D + 1)y = \text{sen } 2t$

$5x + (D + 3)y = \cos 2t$

45. Un sistema resorte-masa libre no amortiguado oscila con un periodo de 3 s. Cuando se eliminan 8 libras del resorte, el sistema tiene entonces un periodo de 2 s. ¿Qué peso tenía originalmente la masa en el resorte?

46. Un peso de 12 libras estira un resorte 2 pies. El peso se libera desde un punto que está 1 pie por debajo de la posición de equilibrio a velocidad ascendente de 4 pies/s.

a) Encuentre la ecuación que describe el movimiento armónico simple resultante.

b) ¿Cuáles son la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?

c) ¿En qué momentos el peso regresa al punto que está a 1 pie por debajo de la posición de equilibrio?

d) ¿En qué momentos cruza el peso la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba?, ¿y al moverse hacia abajo?

e) ¿Cuál es la velocidad del peso en $t = 3\pi/16$ s?

f) ¿En qué momentos la velocidad es cero?

47. Un resorte tiene constante $k = 2$ y está suspendido en un líquido que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a cuatro veces la velocidad instantánea. Si una masa m está suspendida del resorte, determine los valores de m para los cuales el movimiento libre subsiguiente es no oscilatorio.

48. Un peso de 32 libras estira un resorte 6 pulgadas. El peso se mueve a través de un medio que ofrece una fuerza amortiguadora igual a β veces la velocidad instantánea. Determine los valores de β para los cuales el sistema exhibirá movimiento oscilatorio.

49. Un circuito en serie contiene una inductancia de $L = 1$ H, una capacitancia de $C = 10^{-4}$ F, y una fuerza electromotriz de $E(t) = 100 \text{ sen } 50t$ V. En un inicio, la carga q y la corriente i son cero.

a) Encuentre la ecuación para la carga en el momento t.

b) Encuentre la ecuación para la corriente en el momento t.

c) Encuentre los momentos para los cuales la carga en el capacitor es de cero.

50. Demuestre que la corriente $i(t)$ en un circuito *LRC* en serie satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E'(t),$$

donde $E'(t)$ denota la derivada de $E(t)$.

51. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Demuestre que salvo para el caso de $\lambda = 0$, existen dos funciones propias independientes que corresponden a cada valor propio.

52. Una cuenta está restringida a deslizarse sin fricción por una barra de longitud L. La barra gira en un plano vertical a velocidad angular constante ω en torno a un eje P fijo localizado en el punto medio de la barra, pero el diseño del eje le permite a la cuenta moverse a lo largo de toda la barra. Digamos que $r(t)$ denota la posición de la cuenta en relación con su sistema coordenado giratorio, como ilustra la **FIGURA 3.R.1**. Con el fin de aplicar la segunda ley de Newton del movimiento a este marco de referencia giratorio, es necesario usar el hecho de que la fuerza neta que actúa sobre la cuenta es la suma de las fuerzas reales (en este caso, la fuerza debida a la gravedad) y las fuerzas inerciales (coriolis, transversa y centrífuga). Las operaciones matemáticas son un tanto complicadas, así que sólo damos la ecuación diferencial resultante para r,

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r - mg \text{ sen}(\omega t).$$

a) Resuelva la ED anterior sujeta a las condiciones iniciales $r(0) = r_0, r'(0) = v_0$.

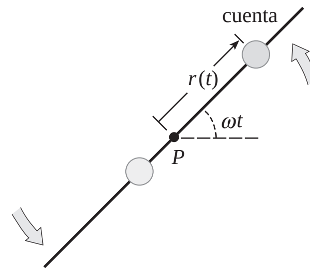


FIGURA 3.R.1 Barra giratoria para el problema 52

b) Determine las condiciones iniciales en que la cuenta exhibe el movimiento armónico simple. ¿Cuál es la longitud L mínima de la barra en la cual se puede presentar el movimiento armónico simple de la cuenta?

c) Para condiciones iniciales diferentes a las obtenidas en el inciso *b*), la cuenta debe salir finalmente de la barra. Explique esto mediante la solución $r(t)$ del inciso *a*).

d) Suponga que $\omega = 1$ rad/s. Use una herramienta graficadora para trazar la gráfica de la solución $r(t)$ bajo las condiciones iniciales $r(0) = 0, r'(0) = v_0$, donde v_0 es 0, 10, 15, 16, 16.1 y 17.

e) Suponga que la longitud de la barra es $L = 40$ pies. Para cada par de condiciones iniciales dado en el inciso *d*), utilice un buscador de raíces para encontrar el tiempo total que la cuenta permanece en la barra.

53. Suponga que una masa m yace sobre una superficie plana, seca, sin fricción, y está sujeta al extremo libre de un resorte cuya constante es k. En la **FIGURA 3.R.2*a***), la masa se muestra en la posición de equilibrio $x = 0$, es decir, el resorte no se estira ni comprime. Según la figura 3.R.2*b*), el desplazamiento $x(t)$ de la masa hacia la derecha de la posición de equilibrio es positivo y negativo hacia la izquierda. Derive una ecuación diferencial para el movimiento horizontal libre (deslizante) de la masa. Examine la diferencia entre derivar esta ED y el análisis que lleva a (1) en la sección 3.8.

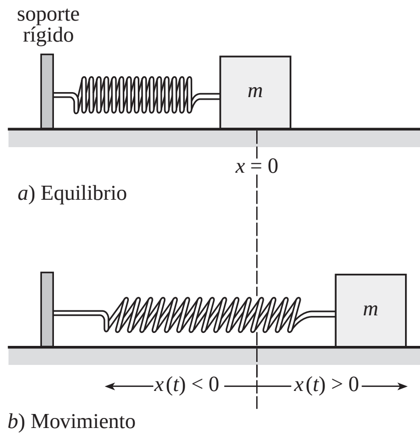


FIGURA 3.R.2 Sistema deslizante resorte-masa para el problema 53

54. En el problema 53, ¿cuál es la ecuación diferencial de movimiento si la fricción cinética (pero ninguna otra fuerza amortiguadora) actúa sobre la masa deslizante? [*Sugerencia:* Suponga que la magnitud de la fuerza de fricción cinética es $f_k = \mu mg$, donde mg representa el peso de la masa y la constante $\mu > 0$ el coeficiente de fricción cinética. Entonces considere dos casos $x' > 0$ y $x' < 0$. Interprete estos casos físicamente.]

En los problemas 55 y 56, utilice la función de Green para resolver el problema de valor inicial indicado.

55. $y'' + y = \tan x, \quad y(0) = 2, y'(0) = -5$

56. $x^2y'' - 3xy + 4y = \ln x, \quad y(1) = 0, y'(1) = 0$

57. Históricamente, para mantener el control de calidad sobre las municiones (balas) producidas en una línea de ensamble, el fabricante usaría un péndulo balístico para determinar la velocidad del orificio de un fusil, o sea, la velocidad de la bala al dejar el cañón. El **péndulo balístico** (inventado en 1742) es simplemente un péndulo en un plano consistente en una barra de masa despreciable al cual se une una masa m_w. El sistema se pone en movimiento con el impacto de la bala que se está moviendo horizontalmente a una velocidad de cañón desconocida v_b; en el momento del impacto $t = 0$, la masa combinada es $m_w + m_b$, donde m_b es la masa de la bala incrustada en la madera. Como se vio en (7) de la sección 3.10 en el caso de pequeñas oscilaciones el desplazamiento angular $\theta(t)$ de un péndulo plano mostrado en la figura 3.11.3 está dado por la ED lineal $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, donde $\theta > 0$ corresponde al movimiento a la derecha de la vertical. La velocidad v_b se encuentra al medir la altura h de la masa $m_w + m_b$ en el ángulo de desplazamiento máximo $\theta_{\text{máx}}$ que se muestra en la **FIGURA 3.R.3**.

Intuitivamente, la velocidad horizontal V de la masa combinada $m_w + m_b$ después del impacto es sólo una fracción de la velocidad v_b de la bala, esto es, $V = \left(\dfrac{m_b}{m_w + m_b}\right)v_b$. Hay que recordar ahora que una distancia s recorrida por una partícula que se mueve en una trayectoria circular se relaciona con el radio l y el ángulo central θ mediante la fórmula $s = l\theta$. Al diferenciar la última fórmula con respecto al tiempo t, se deduce que la velocidad angular ω de la masa y su velocidad lineal v se relacionan por medio de $v = l\omega$. Así la velocidad angular inicial ω_0 en el tiempo t en el cual la bala impacta el bloque de madera se relaciona con V mediante $V = l\omega_0$ o $\omega_0 = \left(\dfrac{m_b}{m_w + m_b}\right)\dfrac{v_b}{l}$.

a) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \theta'(0) = \omega_0.$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que

$$v_b = \left(\frac{m_w + m_b}{m_b}\right)\sqrt{lg}\,\theta_{\text{máx}}.$$

c) Use la figura 3.R.3 para expresar $\cos\theta_{\text{máx}}$ en términos de l y h. Entonces utilice los primeros dos términos de la serie de Maclaurin para $\cos\theta$ a fin de expresar $\theta_{\text{máx}}$ en términos de l y h. Por último, demuestre que v_b está dada (aproximadamente) por

$$v_b = \left(\frac{m_w + m_b}{m_b}\right)\sqrt{2gh}.$$

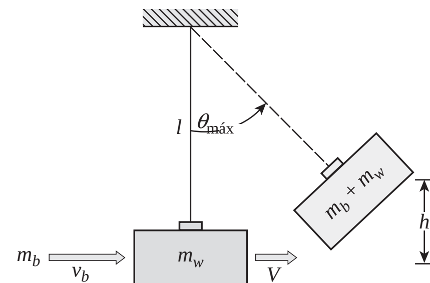


FIGURA 3.R.3 Péndulo balístico del problema 57

58. Use el resultado del problema 57 para encontrar la velocidad del orificio v_b cuando $m_b = 5\text{g}$, $m_w = 1$ kg y $h = 6$ cm.

4

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Estructura del capítulo

En los modelos matemáticos lineales desarrollados para un sistema físico, tal como un sistema resorte-masa o un circuito eléctrico en serie, la entrada o función impulsora representa o una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje aplicado $E(t)$. En la sección 3.8 consideramos problemas en los cuales las funciones f y E eran continuas. No obstante, funciones impulsoras discontinuas no son raras. Por ejemplo, el voltaje aplicado en un circuito debería ser continuo y periódico por tramos. Resolver la ecuación diferencial del sistema puede resultar difícil cuando se utilizan las herramientas analizadas en el capítulo 3. La **transformada de Laplace**, que se estudia en este capítulo, es una herramienta invaluable que simplifica la solución de problemas como éstos.

4.1 Definición de la transformada de Laplace

Introducción En el curso de cálculo elemental, usted aprendió que la diferenciación y la integración son *transformadas*, lo cual significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, según sea el caso, en una función lineal, en una familia de funciones polinomiales cúbicas, y en una constante gracias a operaciones de diferenciación, integración indefinida e integración definida:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x, \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c, \quad \int_0^3 x^2\,dx = 9.$$

Además, estas dos transformadas poseen la **propiedad de linealidad**: ello significa que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para las constantes α y β,

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

y

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

siempre que existan cada derivada y cada integral. En esta sección examinaremos un tipo especial de transformada integral llamada transformada de Laplace. Además de poseer la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales de valor inicial.

Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f con respecto a una de las variables produce una función de la otra variable. Por ejemplo, si y se mantiene constante vemos que $\int_1^2 2xy^2\,dx = 3y^2$. De manera similar, una integral definida, tal como $\int_a^b K(s, t) f(t)\,dt$, transforma a una función $f(t)$ en una función de la variable s. A nosotros nos interesan en particular las **transformadas integrales** de este último tipo, donde el intervalo de integración es el intervalo $[0, \infty)$ no acotado.

Definición básica Si $f(x)$ está definida para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s, t) f(t)\,dt$ está definida como un límite:

$$\int_0^\infty K(s, t) f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s, t) f(t)\,dt. \tag{1}$$

Si existe el límite, se dice que la integral existe o es convergente; si no hay límite, la integral no existe y se afirma que es divergente. Este límite, en general, existe sólo para ciertos valores de la variable s. La elección $K(s, t) = e^{-st}$ produce una transformada integral especialmente importante.

Definición 4.1.1 Transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{2}$$

es la **transformada de Laplace** de f, siempre y cuando la integral converja.

Cuando la integral definitoria (2) converge, el resultado es una función de s. En el análisis general, cuando utilicemos letras minúsculas nos referiremos a la función que se va a transformar, y letras mayúsculas denotarán su transformada de Laplace; por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s) \quad \text{y} \quad \mathscr{L}\{H(t)\} = h(s).$$

EJEMPLO 1 Uso de la definición 4.1.1

Calcule $\mathscr{L}\{1\}$.

Solución A partir de (2),

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

siempre y cuando $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \to 0$ conforme $b \to \infty$. Para $s < 0$, la integral es divergente. ≡

El uso del signo de límite deviene en una tarea tediosa, de manera que adoptaremos la notación $|_0^\infty$ como abreviatura de $\lim_{b\to\infty}(\ )|_b^0$. Por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

En el límite superior, se entiende que nos referimos a que $e^{-st} \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $s > 0$.

EJEMPLO 2 Uso de la definición 4.1.1

Calcule $\mathscr{L}\{t\}$.

Solución A partir de la definición 4.1.1, tenemos que $\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt$. Si integramos por partes usando $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$, $s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1, obtenemos

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$ ≡

EJEMPLO 3 Uso de la definición 4.1.1

Calcule $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$.

Solución A partir de la definición 4.1.1, tenemos

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$$
$$= \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\bigg|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

El resultado deriva del hecho de que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s + 3 > 0$ o $s > -3$. ≡

EJEMPLO 4 Uso de la definición 4.1.1

Calcule $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$.

Solución A partir de la definición 4.1.1 y la integración por partes obtenemos

$$\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen } 2t\,dt = \frac{-e^{-st}\,\text{sen } 2t}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$
$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt, \quad s > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\cos 2t\, dt = 0,\ s > 0 \qquad \text{Transformada de Laplace de sen } 2t$$

$$= \frac{2}{s}\left[\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen} 2t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\}.$$

En este punto tenemos una ecuación con $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$ en ambos lados de la igualdad. Al resolver para esa cantidad se produce el resultado

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \qquad s > 0. \qquad \equiv$$

$\mathscr{L}$ es una transformada lineal Para una suma de funciones, podemos escribir

$$\int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt = \alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt + \beta\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)\, dt$$

siempre que ambas integrales converjan para $s > c$. Por lo tanto, se deduce que

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{3}$$

Debido a la propiedad dada en (3), se dice que $\mathscr{L}$ es una **transformada lineal**. Por ejemplo, de los ejemplos 1 y 2,

$$\mathscr{L}\{1 + 5t\} = \mathscr{L}\{1\} + 5\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2},$$

y de los ejemplos 3 y 4,

$$\mathscr{L}\{4e^{-3t} - 10 \operatorname{sen} 2t\} = 4\mathscr{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}.$$

La generalización de algunos de los problemas anteriores la enunciaremos mediante el teorema 4.1.1. A partir de ahora nos abstendremos de indicar cualquier restricción sobre s, pues se entiende que s está lo bastante restringida como para garantizar la convergencia de la transformada de Laplace apropiada.

Teorema 4.1.1 **Transformadas de algunas funciones básicas**

a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *c)* $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

d) $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ *e)* $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

f) $\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$ *g)* $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

El apéndice III proporciona una lista más amplia de las transformadas.

Condiciones de suficiencia para que exista $\mathscr{L}\{f(t)\}$ No es necesario que converja la integral que define la transformada de Laplace. Por ejemplo, ni $\mathscr{L}\{1/t\}$ ni $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$ existen. Las condiciones de suficiencia que garantizan la existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$ son que f sea continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial cuando $t > T$. Recuerde que una función f es continua por tramos en $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \le a \le t \le b$, hay cuando mucho una cantidad finita de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(t_{k-1} < t_k)$, en los cuales f tiene discontinuidades finitas y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$. Véase la **FIGURA 4.1.1**. El concepto de orden exponencial está definido de la siguiente manera.

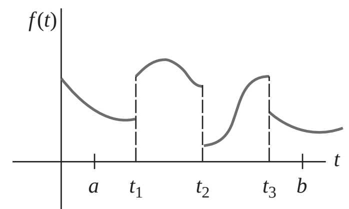


FIGURA 4.1.1 Función continua por tramos

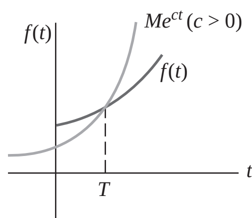


FIGURA 4.1.2 La función f es de orden exponencial

Definición 4.1.2 Orden exponencial

Se dice que una función f es de **orden exponencial** c si existen constantes c, $M > 0$, y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Si f es una función *creciente*, entonces la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, sólo indica que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, donde c es una constante positiva. Véase la **FIGURA 4.1.2**. Todas las funciones $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2 \cos t$ son de orden exponencial $c = 1$ para $t > 0$ puesto que, respectivamente,

$$|t| \leq e^t, \quad |e^{-t}| \leq e^t, \quad |2 \cos t| \leq 2e^t.$$

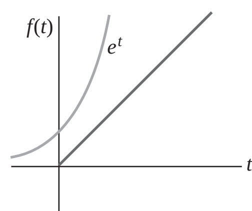
En la **FIGURA 4.1.3** se ofrece una comparación de las gráficas existentes en el intervalo $[0, \infty)$.

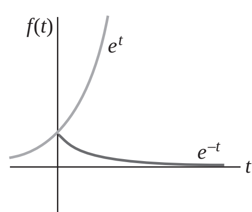
Una función tal como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial pues, como ilustra la **FIGURA 4.1.4**, su gráfica crece con más rapidez que cualquier potencia lineal positiva de e para $t > c > 0$.

Una potencia integral positiva de t siempre es de orden exponencial ya que, para $c > 0$

$$|t^n| \leq Me^{ct} \quad \text{o} \quad \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M \quad \text{para } t > T$$

es equivalente a demostrar que $\lim_{t\to\infty} t^n/e^{ct}$ es finito para $n = 1, 2, 3, \ldots$ El resultado se obtiene mediante n aplicaciones de la regla de L'Hôpital.





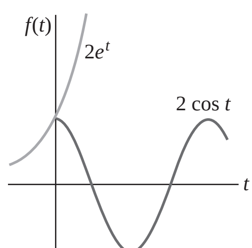


FIGURA 4.1.3 Las funciones con gráficas coloreadas son de orden exponencial

Teorema 4.1.2 Condiciones de suficiencia para la existencia

Si $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial c, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

DEMOSTRACIÓN

Mediante la propiedad aditiva del intervalo de las integrales definidas,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 existe ya que se puede escribir como una suma de integrales en los intervalos donde $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora f es de orden exponencial, por lo tanto existen constantes c, $M > 0$, $T > 0$ de manera que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Entonces podemos escribir

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \leq M\int_T^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_T^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

para $s > c$. Puesto que $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}\,dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt$ converge según la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, implica que I_2 existe cuando $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ existe para $s > c$. ≡

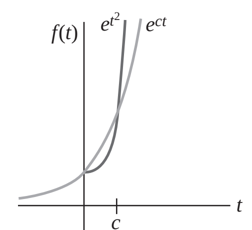


FIGURE 4.1.4 $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial

EJEMPLO 5 Transformada de una función continua por tramos

Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$ para $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3. \end{cases}$

Solución La función continua por tramos aparece en la **FIGURA 4.1.5**. Como f está definida en dos partes, expresamos a $\mathscr{L}\{f(t)\}$ como la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^3 e^{-st}(0)\,dt + \int_3^\infty e^{-st}(2)\,dt \\ &= -\frac{2e^{-st}}{s}\bigg|_3^\infty \\ &= \frac{2e^{-3s}}{s}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

≡

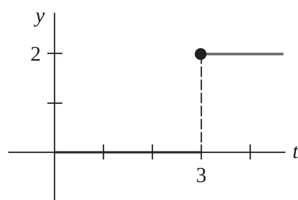


FIGURA 4.1.5 Función continua por tramos en el ejemplo 5

Comentarios

A través de todo el capítulo nos concentraremos principalmente en las funciones que son tanto continuas por tramos como de orden exponencial. Sin embargo, advertimos que estas dos condiciones son suficientes mas no necesarias para la existencia de una transformada de Laplace. La función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$; no obstante, existe su transformada de Laplace. Véase el problema 42 en los ejercicios 4.1.

4.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas del 1 al 18, use la definición 4.1.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2 \end{cases}$

7.

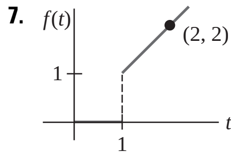


FIGURA 4.1.6 Gráfica para el problema 7

8.

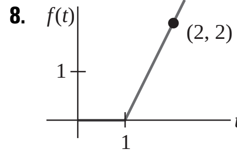


FIGURA 4.1.7 Gráfica para el problema 8

9.

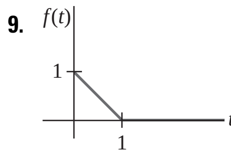


FIGURA 4.1.8 Gráfica para el problema 9

10.

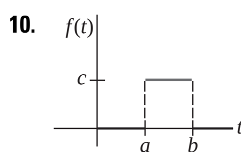


FIGURA 4.1.9 Gráfica para el problema 10

11. $f(t) = e^{t+7}$ **12.** $f(t) = e^{-2t-5}$

13. $f(t) = te^{4t}$ **14.** $f(t) = t^2 e^{-2t}$

15. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$ **16.** $f(t) = e^{t} \cos t$

17. $f(t) = t \cos t$ **18.** $f(t) = t \operatorname{sen} t$

En los problemas del 19 al 36, use el teorema 4.1.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t) = 2t^4$ **20.** $f(t) = t^5$

21. $f(t) = 4t - 10$ **22.** $f(t) = 7t + 3$

23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$ **24.** $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

25. $f(t) = (t + 1)^3$ **26.** $f(t) = (2t - 1)^3$

27. $f(t) = 1 + e^{4t}$ **28.** $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$ **30.** $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$ **32.** $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$ **34.** $f(t) = \cosh kt$

35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$ **36.** $f(t) = e^{-t} \cosh t$

En los problemas del 37 al 40, encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ utilizando primero una identidad trigonométrica adecuada.

37. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

38. $f(t) = \cos^2 t$

39. $f(t) = \operatorname{sen}(4t + 5)$

40. $f(t) = 10 \cos(t - \pi/6)$

41. Una definición de la **función gamma** está dada por la integral impropia $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt,\ \alpha > 0$.

a) Demuestre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Demuestre que $\Gamma\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha > -1$.

42. Use el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y el problema 41 para encontrar la transformada de Laplace de:

a) $f(t) = t^{-1/2}$ *b*) $f(t) = t^{1/2}$ *c*) $f(t) = t^{3/2}$.

Problemas de análisis

43. Construya una función $F(t)$ que sea de orden exponencial, pero donde $f(t) = F'(t)$ no sea de orden exponencial. Construya una función $f(t)$ que no sea de orden exponencial, pero cuya transformada de Laplace exista.

44. Suponga que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ para $s > c_1$ y que $\mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ para $s > c_2$. ¿Cuándo $\mathscr{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$?

45. La figura 4.1.4 sugiere, pero no demuestra, que la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial. ¿Cómo puede la observación de que $t^2 > \ln M + ct$, para $M > 0$ y t lo suficientemente grande, demostrar que $e^{t^2} > Me^{ct}$ para cualquier c?

46. Use el inciso c) del teorema 4.1.1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \frac{s - a + ib}{(s - a)^2 + b^2},$$

donde a y b son reales e $i^2 = -1$. Muestre cómo aplicar la fórmula de Euler (página 113) para deducir los resultados.

$$\mathscr{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

y $$\mathscr{L}\{e^{at}\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

47. ¿En qué condiciones una función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, es una transformada lineal?

48. La demostración del inciso b) del teorema 4.1.1 requiere inducción matemática. Demuestre que si

$$\mathscr{L}\{t^{n-1}\} = (n-1)!/s^n$$

se *asume* como verdadera, entonces se deduce que $\mathscr{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$.

4.2 La transformada inversa y transformadas de derivadas

Introducción En esta sección damos unos cuantos pequeños pasos en el estudio de cómo se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones. Después de analizar el concepto de la transformada *inversa* de Laplace y examinar transformadas de derivadas, usamos la transformada de Laplace para resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

4.2.1 Transformadas inversas

El problema de la inversa Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, que es $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y escribimos $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. Para los ejemplos 1, 2 y 3 dados en la sección 4.1, tenemos, respectivamente,

$$1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}, \quad t = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \quad \text{y} \quad e^{-3t} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}.$$

El análogo del teorema 4.1.1 para la transformada inversa se presenta a continuación.

Teorema 4.2.1 **Algunas transformadas inversas**

$$\textbf{\textit{a}})\quad 1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$\textbf{\textit{b}})\quad t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\},\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{\textit{c}})\quad e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

$$\textbf{\textit{d}})\quad \operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} \qquad \textbf{\textit{e}})\quad \cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$$

$$\textbf{\textit{f}})\quad \operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} \qquad \textbf{\textit{g}})\quad \cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$$

Cuando calculamos transformadas inversas, muchas veces sucede que una función de s bajo consideración no coincide *exactamente* con la forma de la transformada de Laplace $F(s)$ dada en una tabla. Puede ser necesario entonces "arreglar" la función de s multiplicándola y dividiéndola empleando una constante apropiada.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema 4.2.1

Calcule ***a***) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ ***b***) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+7}\right\}$.

Solución ***a***) Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 4.2.1, identificamos $n + 1 = 5$ o $n = 4$ y entonces multiplicamos y dividimos empleando 4!:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4.$$

b) Para hacer coincidir la forma dada en el inciso *d*) del teorema 4.2.1, identificamos $k^2 = 7$ y, por lo tanto, $k = \sqrt{7}$. Arreglamos la expresión al multiplicarla y dividirla por $\sqrt{7}$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t. \qquad \equiv$$

■ **$\mathscr{L}^{-1}$ es una transformada lineal** La transformada inversa de Laplace también es una transformada lineal; es decir, para las constantes α y β,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}, \tag{1}$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g. Al igual que (2) de la sección 4.1, (1) se extiende a cualquier combinación lineal finita de transformadas de Laplace.

EJEMPLO 2 División término a término y linealidad

Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$.

Solución Primero escribimos nuevamente como dos expresiones la función de s que estamos considerando, lo cual se logra mediante la división de término a término, y después usamos (1):

División término a término ↓ Linealidad y arreglo de constantes ↓

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \tag{2}$$

$$= -2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t. \quad \leftarrow \text{Incisos } e) \text{ y } d) \text{ del teorema 4.2.1 con } k = 2 \qquad \equiv$$

■ **Fracciones parciales** Las fracciones parciales cumplen una función importante cuando se trata de encontrar las transformadas inversas de Laplace. Como se mencionó en la sección 2.2, la descomposición de la expresión racional en fracciones componentes puede hacerse con rapidez mediante un solo comando en la mayoría de los sistemas computacionales algebraicos. De hecho, algunos de estos sistemas contienen programas que implementan los comandos de la transformada de Laplace y de la transformada inversa de Laplace. En esta sección y en las siguientes, para aquellas personas con acceso a tales programas, revisaremos algunos conocimientos básicos de álgebra en los casos importantes donde el denominador de una transformada de Laplace $F(s)$ contenga factores lineales distintos, factores lineales repetidos y polinomios cuadráticos sin factores reales. Examinaremos cada uno de estos casos conforme se desarrolle el capítulo.

EJEMPLO 3 Fracciones parciales y linealidad

Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

◀ Fracciones parciales: factores lineales distintos en el denominador.

Solución Existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$

$$= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2). \tag{3}$$

Por comparación de los coeficientes de potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones en las tres incógnitas: A,

B y C. No obstante, recuerde que hay una vía más corta para determinar estas incógnitas. Si establecemos $s = 1$, $s = 2$ y $s = -4$ en (3) obtenemos, respectivamente,*

$$16 = A(-1)(5), \quad 25 = B(1)(6), \quad 1 = C(-5)(-6),$$

y entonces $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$, $C = \frac{1}{30}$. Por lo tanto, la descomposición de la fracción parcial es

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}, \tag{4}$$

y de esta manera, con base en la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$ y el inciso *c*) del teorema 4.2.1,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \tag{5}$$ ≡

4.2.2 Transformadas de derivadas

■ **Transformada de una derivada** Tal como se señaló en la introducción del presente capítulo, nuestra meta inmediata es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Con ese fin, necesitamos calcular cantidades como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ y $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por ejemplo, si f' es continua cuando $t \geq 0$, la integración por partes da entonces

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$
$$= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}$$

o

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{6}$$

Aquí hemos supuesto que $e^{-st}f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De manera similar, con ayuda de (6),

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt = e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$
$$= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}$$
$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \quad \leftarrow \text{de (6)}$$

o

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{7}$$

Asimismo, es posible demostrar que

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{8}$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de las derivadas de una función f debe ser evidente en los resultados obtenidos en (6), (7) y (8). El teorema siguiente produce la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de f. Se omite la demostración.

Teorema 4.2.2 Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

* Los números 1, 2 y -4 son los ceros del denominador común $(s-1)(s-2)(s+4)$.

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales A partir del resultado general que se da en el teorema 4.2.2, resulta evidente que $\mathscr{L}\{d^n y/dt^n\}$ depende de $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y de las derivadas $n - 1$ de $y(t)$ calculadas en $t = 0$. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea tan adecuada para resolver problemas de valor inicial lineales donde la ecuación diferencial tenga *coeficientes constantes*. Una ecuación diferencial de tal índole simplemente es una combinación lineal de los términos $y, y', y'', ..., y^{(n)}$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t),$$
$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde a_i, $i = 0, 1, ..., n$ y $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ son constantes. Gracias a la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \quad (9)$$

Con base en el teorema 4.2.2, (9) se convierte en

$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)]$$
$$+ a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s), \quad (10)$$

donde $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$. En otras palabras,

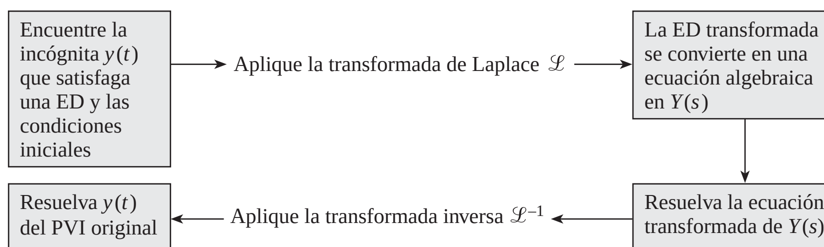
la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en Y(s).

Si resolvemos la ecuación general transformada (10) para el símbolo $Y(s)$, primero obtenemos $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$, y después escribimos

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \quad (11)$$

donde $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio de grado s menor o igual que $n - 1$ y consiste en varios productos de los coeficientes a_i, $i = 1, ..., n$, y las condiciones iniciales prescritas $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$, y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$.* Por lo general, ponemos los dos términos dados en (11) sobre el menor denominador común y después descomponemos la expresión en dos o más fracciones parciales. Por último, la solución de $y(t)$ del problema de valor inicial original es $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se efectúa término a término.

El procedimiento se resume en el siguiente diagrama.



El ejemplo siguiente ilustra este método de resolución de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 4 Resolución de un PVI de primer orden

Usar la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13\,\text{sen}\,2t, \qquad y(0) = 6.$$

* El polinomio $P(s)$ es lo mismo que el polinomio auxiliar de n-ésimo grado dado en la expresión (13) de la sección 3.3, con el símbolo acostumbrado m reemplazado por s.

Solución Primero tomamos la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\,\mathscr{L}\{y\} = 13\,\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}. \tag{12}$$

Pero de (6), $\mathscr{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$, y el inciso *d*) del teorema 4.1.1, $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, y por lo tanto (12) es lo mismo que

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \qquad \text{o} \qquad (s + 3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}.$$

Al resolver la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s + 3} + \frac{26}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)}. \tag{13}$$

Fracciones parciales: polinomiales cuadráticas sin factores reales.

Puesto que el polinomio cuadrático $s^2 + 4$ no se factoriza con números reales, su numerador asumido en la descomposición de la fracción parcial es un polinomio lineal en s:

$$\frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}.$$

Al poner el lado derecho de la igualdad sobre un denominador común e igualar los numeradores se tiene $6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)$. Al establecer $s = -3$, de inmediato se produce $A = 8$. Como el denominador no tiene más ceros reales, igualamos los coeficientes de s^2 y s: $6 = A + B$ y $0 = 3B + C$. Al aplicar el valor de A en la primera ecuación se tiene $B = -2$, y al usar después este último valor en la segunda ecuación resulta $C = 6$. Por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{8}{s + 3} + \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}.$$

Aún no hemos terminado porque la última expresión racional todavía tiene que escribirse como dos fracciones. Pero esto se hizo en el ejemplo 2 mediante la división término a término. Con base en (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}.$$

Se deduce de los incisos *c*), *d*) y *e*) del teorema 4.2.1 que la solución del problema de valor inicial es $y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\,\text{sen } 2t$. ≡

EJEMPLO 5 Solución de un PVI de segundo orden

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 5$.

Solución Si procedemos como en el ejemplo 4, transformamos la ED al tomar la suma de las transformadas término por término, usamos (6) y (7), aplicamos las condiciones iniciales dadas, así como la transformada inversa *c*) del teorema 4.1.1, y después resolvemos para $Y(s)$:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s + 4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s + 4)} = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)} \tag{14}$$

y, por lo tanto, $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Los detalles de la descomposición de $Y(s)$ en fracciones parciales ya fueron analizados en el ejemplo 3. En vista de (4) y (5), la solución del problema de valor inicial es $y(t) = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$. ≡

Los ejemplos 4 y 5 ilustran el procedimiento básico de cómo usar la transformada de Laplace para resolver un problema de valor inicial lineal, pero estos ejemplos pueden aparecer para demostrar un método que no es mucho mejor que el presentado para tales problemas en las secciones 2.4 y de la 3.3 a la 3.6. No saque ninguna conclusión negativa de estos dos ejemplos. Sí hay una gran cantidad de álgebra inherente en el uso de la transformada de Laplace, *pero* observe que no tuvimos que usar la variación de parámetros o preocuparnos por los casos y el álgebra del método de coeficientes indeterminados. Además, como el método incorpora las condiciones iniciales prescritas directamente a la solución, no hay necesidad de realizar operaciones por separado para aplicar las condiciones iniciales a la solución general $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + y_p$ de la ED para encontrar constantes específicas en una solución particular del problema de valor inicial.

La transformada de Laplace tiene muchas propiedades operacionales. Examinaremos algunas y en las secciones siguientes ilustraremos cómo nos permiten resolver problemas de mayor complejidad.

Terminamos esta sección con un poco de teoría adicional relacionada con los tipos de funciones de s con los que trabajaremos normalmente. El teorema siguiente indica que no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

Teorema 4.5.1 Comportamiento de $F(s)$ cuando $s \to \infty$

Si f es continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces $\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\{f(t)\} = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Como $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo cerrado [0, T], está necesariamente acotada en el intervalo. Es decir, $|f(t)| \le M_1 = M_1e^{0t}$. También, debido a que f se supone como de orden exponencial, existen constantes γ, $M_2 > 0$ y $T > 0$, tales que $|f(t)| \le M_2e^{\gamma t}$ para $t > T$. Si M denota el máximo de $\{M_1, M_2\}$ y c denota el máximo de $\{0, \gamma\}$, entonces

$$|\mathscr{L}\{f(t)\}| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \le M\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{ct}\,dt = -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\bigg|_0^\infty = \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Cuando $s \to \infty$, tenemos $|\mathscr{L}\{f(t)\}| \to 0$, y, por lo tanto, $\mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$. ≡

Como una consecuencia del teorema 4.2.3, podemos decir que funciones de s tales como $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = s/(s + 1)$ no son las transformadas de Laplace de funciones continuas por tramos de orden exponencial ya que $F_1(s) \not\to 0$ y $F_2(s) \not\to 0$ cuando $s \to \infty$. Pero usted no debe concluir a partir de esto que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ *no* son transformadas de Laplace. Existen otras clases de funciones.

Comentarios

i) La transformada inversa de Laplace de una función $F(s)$ puede no ser única, en otras palabras, es posible que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ y que incluso $f_1 \ne f_2$. Para nuestros propósitos, esto no es algo por lo que haya qué preocuparse. Si f_1 y f_2 son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces dichas funciones son *en esencia* las mismas. Consulte el problema 44 en los ejercicios 4.2. Sin embargo si f_1 y f_2 son continuas en $[0, \infty)$ y $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, entonces $f_1 = f_2$ en el intervalo.

ii) Este comentario es para aquellos que requieran hacer a mano una descomposición fraccional parcial. Hay otra forma de determinar los coeficientes en una descomposición fraccional parcial en el caso especial cuando $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ es una función racional de s y el denominador de F es un producto de *distintos* factores lineales. Ilustremos lo anterior al volver a analizar el ejemplo 3. Suponga que multiplicamos ambos lados de la descomposición supuesta

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \tag{15}$$

por, digamos, $s - 1$, simplifique, y después establezca $s = 1$. Como los coeficientes de B y C en el lado derecho de la igualdad son cero, tenemos

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = A \quad \text{o} \quad A = -\frac{16}{5}.$$

Escrito de otra forma,

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = -\frac{16}{5} = A,$$

donde hemos coloreado u *ocultado* el factor que se canceló cuando multiplicamos el lado izquierdo por $s - 1$. Ahora, para obtener B y C, simplemente calculamos el lado izquierdo de (15) mientras cubrimos, a su vez, $s - 2$ y $s + 4$:

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right|_{s=2} = \frac{25}{6} = B \quad \text{y} \quad \left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{30} = C.$$

La descomposición deseada (15) está dada en (4). Esta segunda técnica para determinar los coeficientes se conoce como el **método de cubrimiento**.

iii) En este comentario continuamos con nuestra introducción a la terminología de sistemas dinámicos. Debido a (9) y (10), la transformada de Laplace está bien adaptada a sistemas *lineales* dinámicos. En (11), el polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ es el coeficiente total de $Y(s)$ en (10) y es simplemente el lado izquierdo de la ED con las derivadas $d^k y/dt^k$ sustituidas por las potencias s^k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Es común denominar al recíproco de $P(s)$, usualmente conocido como $W(s) = 1/P(s)$, como la **función de transferencia** del sistema y escribir (11) como:

$$Y(s) = W(s)Q(s) + W(s)G(s). \tag{16}$$

De esta manera hemos separado, a manera de suma, los efectos sobre la respuesta que se deben a las condiciones iniciales (esto es, $W(s)Q(s)$) y a la función de entrada g (es decir, $W(s)G(s)$). Véanse (13) y (14), Por lo tanto, la respuesta del sistema $y(t)$ es una superposición de dos respuestas:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\} = y_0(t) + y_1(t).$$

Si la entrada es $g(t) = 0$, entonces la solución al problema es $y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}$. A esta solución se le denomina **respuesta de entrada nula** del sistema. Por otro lado, la función $y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}$ es la salida provocada por la entrada $g(t)$. Ahora, si el estado inicial del sistema es el estado nulo (es decir, todas las condiciones iniciales son cero), entonces $Q(s) = 0$, y por lo tanto la única solución al problema de valor inicial es $y_1(t)$. A la solución anterior se le conoce como **respuesta para el estado nulo** del sistema. Tanto $y_0(t)$ como $y_1(t)$ son soluciones particulares: $y_0(t)$ es una solución del problema de valor inicial que consiste en la ecuación homogénea asociada con las condiciones iniciales dadas, y $y_1(t)$ es una solución del problema de valor inicial que consiste en la ecuación no homogénea cuyas condiciones iniciales son nulas. En el ejemplo 5 se ve que, a partir de (14), la función de transferencia es $W(s) = 1/(s^2 - 3s + 2)$, y la respuesta de entrada nula es:

$$y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right\} = -3e^t + 4e^{2t},$$

y la respuesta para el estado nulo es:

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Verifique que la suma de $y_0(t)$ y $y_1(t)$ sea la solución $y(t)$ en ese ejemplo y que $y_0(0) = 1$, $y_1'(0) = 5$, en tanto que $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$.

4.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

4.2.1 Transformadas inversas

En los problemas del 1 al 30, use el teorema 4.2.1 para encontrar la transformada inversa dada.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$

4.2.2 Transformadas de derivadas

En los problemas del 31 al 40, use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado.

31. $\frac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$

32. $2\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = -3$

33. $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$

34. $y' - y = 2\cos 5t, \quad y(0) = 0$

35. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

36. $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

37. $y'' + y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t, \quad y(0) = 10,\ y'(0) = 0$

38. $y'' + 9y = e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

39. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

40. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \text{sen}\,3t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

Las formas inversas de los resultados obtenidos en el problema 46 de los ejercicios 4.1 son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$$

y
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\,\text{sen}\,bt.$$

En los ejercicios 41 y 42, use la transformada de Laplace y estas inversas para resolver el problema de valor inicial dado.

41. $y' + y = e^{-3t}\cos 2t, \quad y(0) = 0$

42. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

Problemas de análisis

43. ***a***) Con un ligero cambio en la notación, la transformada incluida en (6) es lo mismo que

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\,\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Con $f(t) = te^{at}$, analice cómo puede usarse este resultado junto con *c*) del teorema 4.1.1 para calcular $\mathscr{L}\{te^{at}\}$.

b) Proceda como en el inciso *a*), pero esta vez analice cómo usar (7) con $f(t) = t\,\text{sen}\,kt$ junto con *d*) y *e*) del teorema 4.1.1 para calcular $\mathscr{L}\{t\,\text{sen}\,kt\}$.

44. Construya dos funciones f_1 y f_2 que tengan la misma transformada de Laplace. No son necesarias ideas muy elaboradas.

45. Lea de nuevo el apartado *Comentarios iii*) de la página 208. Encuentre la entrada nula y la respuesta de estado nulo para el PVI del problema 36.

46. Suponga que $f(t)$ es una función para la cual $f'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial c. Use los resultados obtenidos en esta sección y en la 4.1 para justificar

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Verifique este resultado con $f(t) = \cos kt$.

4.3 Teoremas de traslación

Introducción No es conveniente usar la definición 4.1.1 cada vez que deseemos encontrar la transformada de Laplace para una función $f(t)$ dada. Por ejemplo, la integración por partes requerida para determinar la transformada de, digamos, $f(t) = e^t t^2$ sen $3t$ es, en pocas palabras, formidable cuando se hace a mano. En esta sección y en la siguiente presentamos varios teoremas que ahorran esfuerzo y permiten crear una lista más amplia de transformadas (véase la tabla incluida en el apéndice III) sin la necesidad de usar la definición de la transformada de Laplace.

4.3.1 Traslación en el eje *s*

Calcular las transformadas tales como $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ y $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$ resulta sencillo siempre que conozcamos $\mathscr{L}\{t^3\}$ y $\mathscr{L}\{\cos 4t\}$, lo cual sabemos. En general, si conocemos $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de la función f, es decir, $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$, sin ningún esfuerzo adicional que el de *trasladar*, o *desplazar*, $F(s)$ a $F(s-a)$. Este resultado se conoce como **primer teorema de la traslación** o **primer teorema del desplazamiento**.

Teorema 4.3.1 **Primer teorema de la traslación**

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración es inmediata, dado que por definición de 4.1.1

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a). \quad \equiv$$

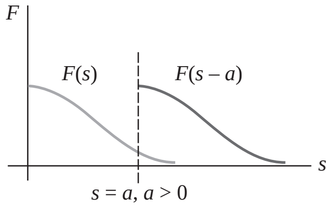


FIGURA 4.3.1 Desplazamiento sobre el eje s

Si consideramos a s como una variable real, entonces la gráfica de $F(s-a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada sobre el eje x por la cantidad $|a|$. Si $a > 0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza a unidades hacia la derecha, mientras que si $a < 0$, la gráfica se desplaza $|a|$ unidades hacia la izquierda. Véase la **FIGURA 4.3.1**.

Para enfatizar, algunas veces resulta útil usar el simbolismo

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s\to s-a},$$

donde $s \to s-a$ significa que en la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ reemplazamos el símbolo s siempre que aparezca por $s-a$.

EJEMPLO 1 Uso del primer teorema de la traslación

Calcule ***a)*** $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ y ***b)*** $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

Solución Los resultados se deducen de los teoremas 4.1.1 y 4.3.1.

a) $$\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathscr{L}\{t^3\}_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\bigg|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

b) $$\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathscr{L}\{\cos 4t\}_{s\to s-(-2)} = \frac{s}{s^2+16}\bigg|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16} \quad \equiv$$

Forma inversa del teorema 4.3.1 Para calcular la inversa de $F(s-a)$ debemos reconocer $F(s)$, encontrar $f(t)$ al tomar la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, y después multiplicar $f(t)$ por la función exponencial e^{at}. Este procedimiento se puede resumir de manera simbólica en la siguiente forma:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t) \tag{1}$$

donde $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

EJEMPLO 2 Fracciones parciales y completar el cuadrado

Calcule *a*) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ y *b*) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

Fracciones parciales: factores lineales repetidos.

Solución *a*) Un factor lineal repetido es un término $(s-a)^n$, donde a es un número real y n un entero positivo ≥ 2. Recuerde que si $(s-a)^n$ aparece en el denominador de una expresión racional, entonces la descomposición asumida contiene n fracciones parciales con numeradores y denominadores constantes $s-a$, $(s-a)^2$, ..., $(s-a)^n$. Por lo tanto, con $a=3$ y $n=2$ escribimos

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{(s-3)^2}.$$

El numerador obtenido al poner los dos términos situados a la derecha sobre un denominador común es $2s+5=A(s-3)+B$, y esta identidad produce $A=2$ y $B=11$. Por lo tanto,

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{2}{s-3}+\frac{11}{(s-3)^2} \tag{2}$$

y
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}. \tag{3}$$

Ahora $1/(s-3)^2$ es $F(s)=1/s^2$ desplazada 3 unidades hacia la derecha. Como $\mathscr{L}^{-1}\{1/s^2\}=t$, se deduce de (1) que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\}=e^{3t}t.$$

Por último, (3) es
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}=2e^{3t}+11e^{3t}t. \tag{4}$$

b) Para comenzar, observe que el polinomio cuadrático s^2+4s+6 no tiene ceros reales y, por lo tanto, no tiene factores lineales reales. En esta situación completamos el cuadrado:

$$\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}=\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}. \tag{5}$$

Nuestra meta aquí es reconocer la expresión planteada en la derecha como alguna transformada de Laplace $F(s)$ donde s ha sido reemplazado en todas partes por $s+2$. Lo que estamos intentando es parecido a lo hecho en el inciso *b*) del ejemplo 1 anterior. El denominador en (5) ya está en la forma correcta, es decir, s^2+2 con s reemplazado por $s+2$. No obstante, debemos arreglar el numerador manipulando las constantes: $\frac{1}{2}s+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{5}{3}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}$.

Ahora por división término a término, la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$, los incisos *e*) y *d*) del teorema 4.2.1, y por último la forma (1),

$$\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}=\frac{(1/2)(s+2)+2/3}{(s+2)^2+2}=\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}+\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\} \tag{6}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t. \tag{7}$$ ≡

EJEMPLO 3 Problema de valor inicial

Resuelva $y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$, $\quad y(0)=2$, $\quad y'(0)=17$.

Solución Antes de transformar la ED, observe que su lado derecho es similar a la función incluida en el inciso *a*) del ejemplo 1. Usamos el teorema 4.3.1, las condiciones iniciales, simplificamos, y entonces resolvemos para $Y(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$:

$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\mathscr{L}\{y'\} + 9\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

El primer término localizado a la derecha ya se ha descompuesto en fracciones parciales individuales en la expresión (2) del inciso *a*) del ejemplo 2:

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

Por lo tanto, $$y(t) = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}. \quad (8)$$

A partir de la forma inversa (1) del teorema 4.3.1, los últimos dos términos son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\Big|_{s\to s-3}\right\} = te^{3t} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\Big|_{s\to s-3}\right\} = t^4e^{3t},$$

y así (8) es $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}$. ≡

EJEMPLO 4 Un problema de valores iniciales

Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

Solución

$$\mathscr{L}\{y''\} + 4\mathscr{L}\{y'\} + 6\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\} + \mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 4s + 6)Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}.$$

Puesto que en el denominador el término cuadrático no se factoriza en factores lineales reales, se encuentra que la descomposición de la fracción parcial para $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{s/2 + 5/3}{s^2+4s+6}.$$

Además, en la preparación para tomar la transformada inversa, ya hemos manipulado el último término en la forma necesaria a partir del inciso *b*) del ejemplo 2. De manera que, en vista de los resultados obtenidos en (6) y (7), tenemos la solución

$$y(t) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t.$$ ≡

4.3.2 Traslación en el eje *t*

■ **Función escalón unitario** En ingeniería es común encontrar funciones que están en estado "activo" o "inactivo". Por ejemplo, una fuerza externa que actúe sobre un sistema mecánico o un voltaje aplicado a un circuito pueden ser suspendidas después de cierto tiempo. Resulta conveniente, entonces, definir una función especial que sea del número 0 (inactiva) hasta cierto tiempo $t = a$, y de número 1 (activa) después de ese tiempo. Esta función se denomina **función escalón unitario** o **función de Heaviside**.

Definición 4.3.1 Función escalón unitario

La **función escalón unitario** $\mathcal{U}(t - a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a. \end{cases}$$

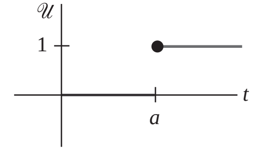


FIGURA 4.3.2 Gráfica de la función escalón unitario

Observe que definimos $\mathcal{U}(t - a)$ sólo en el eje t no negativo puesto que es todo lo que nos interesa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido más amplio, $\mathcal{U}(t - a) = 0$ cuando $t < a$. La gráfica de $\mathcal{U}(t - a)$ se presenta en la **FIGURA 4.3.2**.

Cuando una función f definida para $t \ge 0$ se multiplica por $\mathcal{U}(t - a)$, la función escalón unitario "desactiva" una porción de la gráfica de esa función. Por ejemplo, considere la función $f(t) = 2t - 3$. Para "desactivar" la parte de la gráfica de f en, digamos, el intervalo $0 \le t < 1$, simplemente formamos el producto $(2t - 3)\mathcal{U}(t - 1)$. Véase la **FIGURA 4.3.3**. En general, la gráfica de $f(t)\mathcal{U}(t - a)$ es 0 (desactivado) para $0 \le t < a$ y es la porción de la gráfica desactivada (activada) cuando $t \ge a$.

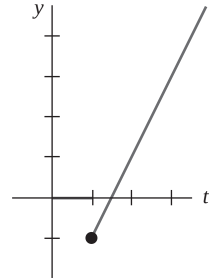


FIGURA 4.3.3 La función se puede escribir como $f(t) = (2t - 3)\mathcal{U}(t - 1)$

La función escalón unitario también se puede utilizar para escribir en forma compacta funciones definidas por tramos. Por ejemplo, al considerar los intervalos $0 \le t < 2$, $2 \le t < 3$, $t \ge 3$, y los valores correspondientes de $\mathcal{U}(t - 2)$ y $\mathcal{U}(t - 3)$, debe resultar evidente que la función definida por tramos mostrada en la **FIGURA 4.3.4** es la misma que $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t - 2) + \ (t - 3)$. También, una función general definida por tramos del tipo

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \le t < a \\ h(t), & t \ge a \end{cases} \tag{9}$$

es la misma que

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t-a) + h(t)\mathcal{U}(t-a). \tag{10}$$

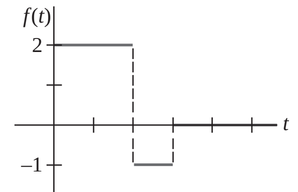


FIGURA 4.3.4 La función se puede escribir como $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t - 2) + \mathcal{U}(t - 3)$

De manera similar, una función del tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ g(t), & a \le t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases} \tag{11}$$

se puede escribir como $\quad f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)]. \quad (12)$

EJEMPLO 5 Una función definida por tramos

Exprese $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ en términos de funciones escalón unitario. Grafíquelos.

Solución La gráfica de f se presenta en la **FIGURA 4.3.5**. Ahora, a partir de (9) y (10) con $a = 5$, $g(t) = 20t$ y $h(t) = 0$, obtenemos $f(t) = 20t - 20t\,\mathcal{U}(t - 5)$. ≡

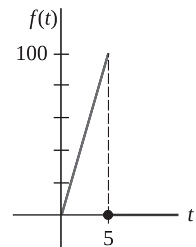


FIGURA 4.3.5 Función del ejemplo 5

Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \ge 0$. La función definida por tramos

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases} \tag{13}$$

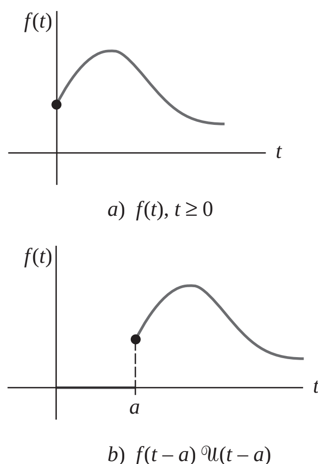


FIGURA 4.3.6 Desplazamiento en el eje t

desempeña un papel importante en el siguiente análisis. Como se muestra en la **FIGURA 4.3.6**, cuando $a > 0$ la gráfica de la función $y = f(t - a)\mathscr{U}(t - a)$ coincide con la gráfica de $y = f(t - a)$ cuando $t \geq a$ (la cual es *toda* la gráfica de $y = f(t)$, $t \geq 0$, desplazada en a unidades hacia la derecha en el eje t), pero es idéntica a cero cuando $0 \leq t < a$.

En el teorema 4.3.1 vimos que un múltiplo exponencial de $f(t)$ da como resultado una traslación de la transformada $F(s)$ en el eje s. Como una consecuencia del teorema siguiente vemos que siempre que $F(s)$ se multiplique por una función exponencial e^{-as}, $a > 0$, la transformada inversa del producto $e^{-as}F(s)$ será la función f desplazada a lo largo del eje t en la forma ilustrada por la figura 4.3.6*b*). Este resultado, presentado a continuación en su versión transformada directa, se denomina **segundo teorema de la traslación** o **segundo teorema del desplazamiento**.

Teorema 4.3.2 Segundo teorema de la traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\mathscr{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN

Mediante la propiedad aditiva de intervalos para integrales, $\int_0^\infty e^{-st}f(t - a)\mathscr{U}(t - a)\,dt$ puede escribirse como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\mathscr{U}(t - a)\} = \int_0^a e^{-st}f(t - a)\underbrace{\mathscr{U}(t - a)}_{\text{Cero para } 0 \leq t < a}\,dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t - a)\underbrace{\mathscr{U}(t - a)}_{\text{Uno para } t \geq a}\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}f(t - a)\,dt.$$

Ahora, si establecemos que $v = t - a$, $dv = dt$ en la última integral, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\mathscr{U}(t - a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)\,dv$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)\,dv = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}. \equiv$$

Muchas veces deseamos encontrar la transformada de Laplace de sólo una función escalón unitario. Esto se puede lograr con base en la definición 4.1.1 o en el teorema 4.3.2. Si identificamos $f(t) = 1$ en el teorema 4.3.2, entonces $f(t - a) = 1$, $F(s) = \mathscr{L}\{1\} = 1/s$, y así

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{14}$$

Por ejemplo, mediante (14), la transformada de Laplace de la función ilustrada en la figura 4.3.4 es

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = 2\mathscr{L}\{1\} - 3\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - 2)\} + \mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - 3)\}$$

$$= 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

■ **Forma inversa del teorema 4.3.2** Si $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ la forma inversa del teorema 4.3.2, $a > 0$, es

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)\mathscr{U}(t - a). \tag{15}$$

EJEMPLO 6 Uso de la fórmula (15)

Calcule ***a)*** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s - 4}e^{-2s}\right\}$ y ***b)*** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

Solución ***a***) Con las identificaciones $a = 2$, $F(s) = 1/(s-4)$, $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$, a partir de (15) tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\mathscr{U}(t-2).$$

b) Con $a = \pi/2$, $F(s) = s/(s^2+9)$, $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos 3t$, (15) produce

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\} = \cos 3(t-\pi/2)\,\mathscr{U}(t-\pi/2).$$

La última expresión puede simplificarse un poco mediante la fórmula de adición para el coseno. Verifique si el resultado es lo mismo que $-\text{sen}\, 3t\,\mathscr{U}(t-\pi/2)$. ≡

Forma alternativa del teorema 4.3.2 Con frecuencia enfrentamos el problema de encontrar la transformada de Laplace del producto de una función g y una función escalón unitario $\mathscr{U}(t-a)$ donde la función g carece de la forma desplazada precisa $f(t-a)$ del teorema 4.3.2. Para encontrar la transformada de Laplace de $g(t)\mathscr{U}(t-a)$, podemos arreglar $g(t)$ para convertirla en la forma requerida $f(t-a)$ empleando manipulaciones algebraicas. Por ejemplo, si queremos usar el teorema 4.3.2 para encontrar la transformada de Laplace de $t^2\mathscr{U}(t-2)$, tendríamos que forzar a $g(t) = t^2$ a convertirse en la forma $f(t-2)$. Usted deberá trabajar los detalles minuciosamente y verificar que $t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4$ es una identidad. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^2\mathscr{U}(t-2)\} &= \mathscr{L}\{(t-2)^2\mathscr{U}(t-2) + 4(t-2)\mathscr{U}(t-2) + 4\mathscr{U}(t-2)\},\\ &= \frac{2e^{-2s}}{s^3} + \frac{4e^{-2s}}{s^2} + \frac{4e^{-2s}}{s}\end{aligned}$$

mediante el teorema 4.3.2. Pero como estas manipulaciones son lentas y con frecuencia no resultan evidentes, es más fácil diseñar una versión alternativa del teorema 4.3.2. Empleando la definición 4.1.1, la definición de $\mathscr{U}(t-a)$, y la sustitución $u = t - a$, obtenemos

$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}g(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}g(u+a)\,du.$$

Es decir,
$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}. \tag{16}$$

Con $a = 2$ y $g(t) = t^2$ tenemos mediante (16)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^2\mathscr{U}(t-2)\} &= e^{-2s}\mathscr{L}\{(t+2)^2\}\\ &= e^{-2s}\mathscr{L}\{t^2+4t+4\}\\ &= e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right),\end{aligned}$$

Que concuerda con nuestros cálculos previos.

EJEMPLO 7 Segundo teorema de la traslación. Forma alternativa

Calcule $\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$.

Solución Con $g(t) = \cos t$, $a = \pi$, entonces $g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t$ mediante la fórmula de la adición para la función coseno. Entonces, mediante (16)

$$\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$ ≡

EJEMPLO 8 Un problema de valores iniciales

Resuelva $y' + y = f(t)$, $y(0) = 5$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi, \\ 3\cos t, & t \ge \pi. \end{cases}$

Solución La función f se puede escribir como $f(t) = 3\cos t\,\mathcal{U}(t - \pi)$ y entonces por linealidad, con los resultados del ejemplo 7 y las fracciones parciales acostumbradas, tenemos

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi)\}$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = -3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$(s+1)Y(s) = 5 - \frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right]. \tag{17}$$

Ahora que si procedemos como lo hicimos en el ejemplo 6, a partir de (15) con $a = \pi$ se deduce que las inversas de los términos entre llaves son

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\} = e^{-(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi),$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \cos(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi).$$

Por lo tanto, la inversa de (17) es

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\cos(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$$

$$= 5e^{-t} + \frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)} + \operatorname{sen} t + \cos t\right]\mathcal{U}(t-\pi) \quad \leftarrow \text{Identidades trigonométricas}$$

$$= \begin{cases} 5e^{-t}, & 0 \le t < \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}\cos t, & t \ge \pi. \end{cases} \tag{18}$$

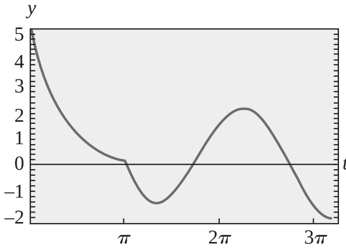


FIGURA 4.3.7 Gráfica de la función (18) en el ejemplo 8

Con ayuda de una herramienta de graficación, obtenemos la gráfica de (18) mostrada en la **FIGURA 4.3.7**. ≡

■ Vigas

En la sección 3.9 vimos que la deflexión estática $y(x)$ de una viga uniforme de longitud L que soporta una carga $w(x)$ por unidad de longitud se encuentra a partir de la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x), \tag{19}$$

donde E es el módulo de Young de elasticidad e I es un momento de inercia del corte transversal de la viga. La transformada de Laplace resulta particularmente útil cuando $w(x)$ está definida por tramos, pero con el fin de usar la transformada, debemos suponer de manera tácita que $y(x)$ y $w(x)$ están definidas en $(0, \infty)$ y no en $(0, L)$. Observe también que el siguiente ejemplo es un problema de valores en la frontera más que de valor inicial.

EJEMPLO 9 Un problema de valores en la frontera

Una viga de longitud L está empotrada por ambos extremos como se muestra en la **FIGURA 4.3.8**. Encuentre la deflexión de la viga cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0\left(1 - \frac{2}{L}x\right), & 0 < x \le L/2 \\ 0, & L/2 < x < L, \end{cases}$$

donde w_0 es una constante.

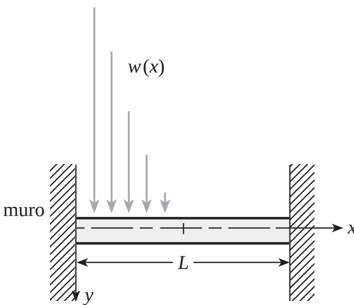


FIGURA 4.3.8 Viga empotrada con una carga variable en el ejemplo 9

Solución Recuerde que, como la viga está empotrada por sus dos extremos, las condiciones de frontera son $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$. Ahora, con base en (10), podemos expresar $w(x)$ en términos de la función escalón unitario:

$$w(x) = w_0\left(1 - \frac{2}{L}x\right) - w_0\left(1 - \frac{2}{L}x\right)\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right)\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$

Al transformar (19) respecto a la variable x se tiene

$$EI(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)) = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right]$$

o bien
$$s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right].$$

Si establecemos $c_1 = y''(0)$ y $c_2 = y'''(0)$, entonces

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s^5} - \frac{1}{s^6} + \frac{1}{s^6}e^{-Ls/2}\right],$$

y en consecuencia

$$y(x) = \frac{c_1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{c_2}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

$$+ \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} - \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\} + \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}e^{-Ls/2}\right\}\right]$$

$$= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$

Al aplicar las condiciones $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ al último resultado se produce un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2:

$$c_1\frac{L^2}{2} + c_2\frac{L^3}{6} + \frac{49w_0L^4}{1\,920EI} = 0$$

$$c_1L + c_2\frac{L^2}{2} + \frac{85w_0L^3}{960EI} = 0.$$

Al resolver, encontramos $c_1 = 23w_0L^2/960EI$ y $c_2 = -9w_0L/40EI$. Por lo tanto, la deflexión es:

$$y(x) = \frac{23w_0L^2}{1\,920EI}x^2 - \frac{3w_0L}{80EI}x^3 + \frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]. \quad \equiv$$

4.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

4.3.1 Traslación en el eje *s*

En los problemas del 1 al 20, encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

1. $\mathcal{L}\{te^{10t}\}$

2. $\mathcal{L}\{te^{-6t}\}$

3. $\mathcal{L}\{t^3e^{-2t}\}$

4. $\mathcal{L}\{t^{10}e^{-7t}\}$

5. $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$

6. $\mathcal{L}\{e^{2t}(t - 1)^2\}$

7. $\mathcal{L}\{e^t \operatorname{sen} 3t\}$

8. $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$

9. $\mathcal{L}\{(1 - e^t + 3e^{-4t})\cos 5t\}$

10. $\mathcal{L}\left\{e^{3t}\left(9 - 4t + 10\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\right\}$

11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^3}\right\}$

12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 1)^4}\right\}$

13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 6s + 10}\right\}$

14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\}$

15. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}$

16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$ **18.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s-2)^2}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$ **20.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

En los problemas del 21 al 30, use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado.

21. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$
22. $y' - y = 1 + te^t, \quad y(0) = 0$
23. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
24. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
25. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
26. $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
27. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$
28. $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
29. $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
30. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

En los problemas 31 y 32, use la transformada de Laplace y el procedimiento delineado en el ejemplo 9 para resolver el problema de valores en la frontera dado.

31. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(1) = 2$
32. $y'' + 8y' + 20y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
33. Un peso de 4 libras estira un resorte 2 pies. El peso se libera del reposo a 18 pulgadas por encima de la posición de equilibrio, y el movimiento resultante se presenta en un medio que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a $\frac{7}{8}$ veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento $x(t)$.
34. Recuerde que la ecuación diferencial para la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor de un circuito *LRC* en serie es:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{20}$$

Véase la sección 3.8. Use la transformada de Laplace para encontrar $q(t)$ cuando $L = 1$ h, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.005$ f, $E(t) = 150$ V, $t > 0$, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. ¿Cuál es la corriente $i(t)$?
35. Considere la batería de voltaje constante E_0 que carga el capacitor mostrado en la **FIGURA 4.3.9**. Divida la ecuación (20) entre L y defina $2\lambda = R/L$ y $\omega^2 = 1/LC$. Use la transformada de Laplace para mostrar que la solución $q(t)$ de $q'' + 2\lambda q' + \omega^2 q = E_0/L$, sujeta a $q(0) = 0$, $i(0) = 0$, es

$$q(t) = \begin{cases} E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\operatorname{senh}\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t\right)\right], & \lambda > \omega \\ E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\right], & \lambda = \omega \\ E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)\right], & \lambda < \omega. \end{cases}$$

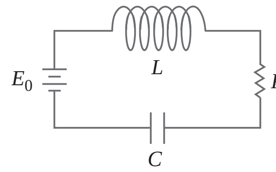


FIGURA 4.3.9 Circuito del problema 35

36. Use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en una serie *RC* cuando $q(0) = 0$ y $E(t) = E_0e^{-kt}$, $k > 0$. Considere dos casos: $k \neq 1/RC$ y $k = 1/RC$.

4.3.2 Traslación en el eje *t*

En los problemas del 37 al 48, encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

37. $\mathscr{L}\{(t-1)\,\mathscr{U}(t-1)\}$ **38.** $\mathscr{L}\{e^{2-t}\,\mathscr{U}(t-2)\}$
39. $\mathscr{L}\{t\,\mathscr{U}(t-2)\}$ **40.** $\mathscr{L}\{(3t+1)\,\mathscr{U}(t-1)\}$
41. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$ **42.** $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\,\mathscr{U}(t-\pi/2)\}$
43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$ **44.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$
45. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$ **46.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$
47. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$ **48.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

En los problemas del 49 al 54, haga coincidir la gráfica dada con alguna de las funciones ilustradas de *a*) a *f*). La gráfica de $f(t)$ aparece en la **FIGURA 4.3.10**.

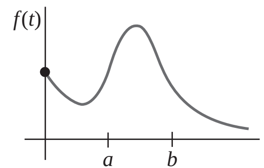


FIGURA 4.3.10 Gráfica para los problemas del 49 al 54

a) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$
b) $f(t-b)\,\mathscr{U}(t-b)$
c) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$
d) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$
e) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$
f) $f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t-a)\,\mathscr{U}(t-b)$

49.

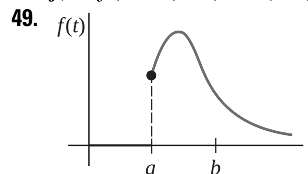


FIGURA 4.3.11 Gráfica para el problema 49

50.

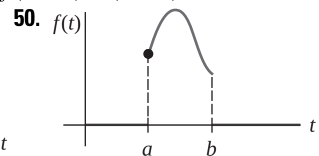


FIGURA 4.3.12 Gráfica para el problema 50

51.

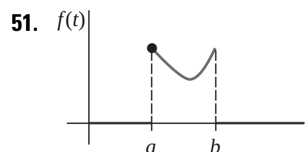


FIGURA 4.3.13 Gráfica para el problema 51

52.

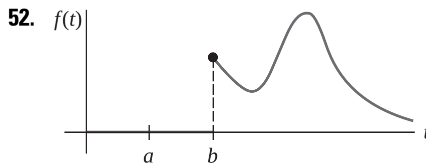


FIGURA 4.3.14 Gráfica para el problema 52

53.

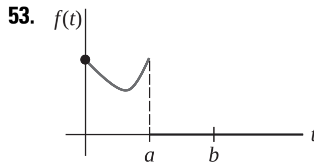


FIGURA 4.3.15 Gráfica para el problema 53

54.

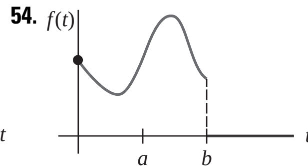


FIGURA 4.3.16 Gráfica para el problema 54

En los problemas del 55 al 62, escriba cada función en términos de las funciones escalón unitario. Encuentre la transformada de Laplace de la función dada.

55. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$

56. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$

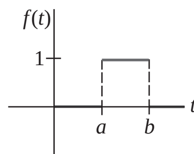
57. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

58. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3\pi/2 \\ \operatorname{sen} t, & t \ge 3\pi/2 \end{cases}$

59. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

60. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

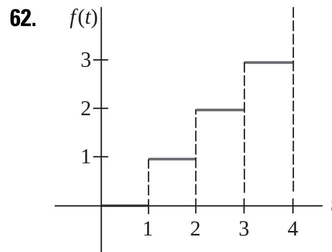
61.



pulso rectangular

FIGURA 4.3.17 Gráfica para el problema 61

62.



función escalera

FIGURA 4.3.18 Gráfica para el problema 62

En los ejercicios del 63 al 70, use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado.

63. $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}$

64. $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases}$

65. $y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

66. $y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

67. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t\, \mathcal{U}(t - 2\pi), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

68. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t - 1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

69. $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

70. $y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathcal{U}(t - 2) - \mathcal{U}(t - 4) + \mathcal{U}(t - 6),$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

71. Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera del reposo desde la posición de equilibrio, encuentre la ecuación de movimiento $x(t)$ si una fuerza aplicada $f(t) = 20t$ actúa sobre el sistema cuando $0 \le t < 5$ y después se elimina (véase el ejemplo 5). Ignore cualquier fuerza de amortiguamiento. Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica $x(t)$ en el intervalo [0, 10].

72. Resuelva el problema 71 si la fuerza aplicada $f(t) = \operatorname{sen} t$ actúa sobre el sistema cuando $0 \le t < 2\pi$ y después se elimina.

En los problemas 73 y 74, use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito *RC* en serie sujeto a las condiciones dadas.

73. $q(0) = 0$, $R = 2.5\ \Omega$, $C = 0.08$ f, $E(t)$ dada en la **FIGURA 4.3.19**

74. $q(0) = q_0$, $R = 10\ \Omega$, $C = 0.1$ f, $E(t)$ dada en la **FIGURA 4.3.20**

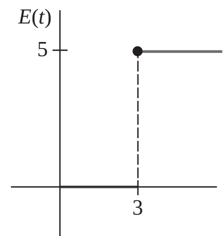


FIGURA 4.3.19 $E(t)$ del problema 73

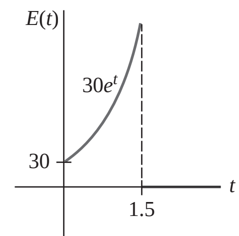


FIGURA 4.3.20 $E(t)$ del problema 74

75. ***a***) Use la transformada de Laplace para encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito *LR* en serie de malla simple cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ h, $R = 10\ \Omega$ y $E(t)$ es como aparece en la **FIGURA 4.3.21**.

b) Use un programa computacional de graficación para graficar $i(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 6$. Utilice la gráfica para estimar $i_{\text{máx}}$ e $i_{\text{mín}}$, los valores máximos y mínimos de la corriente.

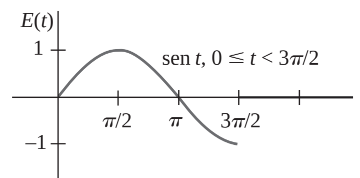


FIGURA 4.3.21 $E(t)$ del problema 75

76. ***a***) Mediante la transformada de Laplace, encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$, $R = 50\ \Omega$, $C = 0.01$ f y $E(t)$ es como aparece en la **FIGURA 4.3.22**.

b) Suponga que $E_0 = 100$ V. Use un programa de cómputo para trazar la gráfica $q(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 6$. Emplee la gráfica para estimar $q_{máx}$, el valor máximo de la carga.

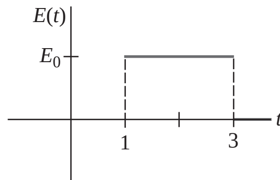


FIGURA 4.3.22 $E(t)$ del problema 76

77. Una viga en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho. Use la transformada de Laplace para encontrar la deflexión $y(x)$ cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \le x < L. \end{cases}$$

78. Resuelva el problema 77 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/3 \\ w_0, & L/3 \le x < 2L/3 \\ 0, & 2L/3 \le x < L. \end{cases}$$

79. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho cuando la carga es como se dio en el ejemplo 9.

80. Una viga está empotrada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en el derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ cuando la carga es como la dada en el problema 77.

81. **Pastel dentro de un horno** Lea de nuevo el ejemplo 4 de la sección 2.7 sobre el enfriamiento de un pastel que se saca del horno.

a) Diseñe un modelo matemático para la temperatura de un pastel mientras está *adentro* del horno con base en los siguientes supuestos: en $t = 0$, la mezcla del pastel está a la temperatura ambiente de 70 °F; el horno no está precalentado, de manera que cuando $t = 0$ y la mezcla del pastel se coloca en el horno, la temperatura en el interior de éste es también de 70 °F; la temperatura del horno se incrementa linealmente hasta $t = 4$ minutos, cuando se llega a la temperatura deseada de 300 °F; la temperatura del horno es una constante de 300° cuando $t \ge 4$.

b) Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado en el inciso *a*).

≡ Problemas de análisis

82. Analice cómo arreglaría cada una de las siguientes funciones de manera que el teorema 4.3.2 pudiera usarse directamente para encontrar la transformada de Laplace dada. Verifique sus respuestas mediante la expresión (16) de esta sección.

a) $\mathscr{L}\{(2t + 1)\,\mathscr{U}(t - 1)\}$

b) $\mathscr{L}\{e^t\,\mathscr{U}(t - 5)\}$

c) $\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t - \pi)\}$

d) $\mathscr{L}\{(t^2 - 3t)\,\mathscr{U}(t - 2)\}$

83. ***a***) Suponga que el teorema 4.3.1 se mantiene cuando el símbolo a es reemplazado por ki, donde k es un número real e $i^2 = -1$. Demuestre que se puede utilizar $\mathscr{L}\{te^{kti}\}$ para deducir

$$\mathscr{L}\{t \cos kt\} = \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

y

$$\mathscr{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$$

b) Ahora use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial

$$x'' + \omega^2 x = \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0.$$

4.4 Propiedades operacionales adicionales

■ **Introducción** En esta sección desarrollamos muchas más propiedades operacionales de la transformada de Laplace. En específico, veremos cómo encontrar la transformada de una función $f(t)$ que está multiplicada por un monomio t^n, la transformada de un tipo especial de integral, y la transformada de una función periódica. Las dos últimas propiedades de las transformadas nos permiten resolver algunas ecuaciones con las cuales no hemos trabajado hasta este punto: las ecuaciones integrales de Volterra, ecuaciones integrodiferenciales, y ecuaciones diferenciales ordinarias donde la función de entrada es una función periódica definida por tramos.

4.4.1 Derivadas de transformadas

■ **Multiplicación de una función por t^n** La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t se puede encontrar al diferenciar la transformada de Laplace de $f(t)$. Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y si suponemos que es posible efectuar el intercambio de diferenciación e integración, entonces

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\};$$

es decir,

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

De manera similar, $\mathscr{L}\{t^2f(t)\} = \mathscr{L}\{t \cdot tf(t)\} = -\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}\{t\,f(t)\}$

$$= -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Los dos casos anteriores sugieren el resultado general para $\mathscr{L}\{t^nf(t)\}$.

Teorema 4.4.1 Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

EJEMPLO 1 Uso del teorema 4.4.1

Calcule $\mathscr{L}\{t\,\text{sen}\,kt\}$.

Solución Con $f(t) = \text{sen}\,kt$, $F(s) = k/(s^2 + k^2)$ y $n = 1$, el teorema 4.4.1 da

$$\mathscr{L}\{t\,\text{sen}\,kt\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\text{sen}\,kt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$$ ≡

Si deseamos calcular $\mathscr{L}\{t^2\,\text{sen}\,kt\}$ y $\mathscr{L}\{t^3\,\text{sen}\,kt\}$, todo lo que necesitamos hacer, cada vez, es tomar el negativo de la derivada respecto a s del resultado obtenido en el ejemplo 1 y después tomar el negativo de la derivada respecto a s de $\mathscr{L}\{t^2\,\text{sen}\,kt\}$.

Para encontrar las transformadas de las funciones t^ne^{at}, podemos usar el primer teorema de la traslación o el teorema 4.4.1. Por ejemplo,

$$\text{Teorema 4.3.1:}\quad \mathscr{L}\{te^{3t}\} = \mathscr{L}\{t\}_{s\to s-3} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$\text{Teorema 4.4.1:}\quad \mathscr{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3} = (s-3)^{-2} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Observe que se puede utilizar cualquier teorema.

EJEMPLO 2 Un problema de valor inicial

Resuelva $x'' + 16x = \cos 4t$, $\quad x(0) = 0$, $\quad x'(0) = 1$.

Solución El problema de valor inicial podría describir el movimiento forzado, sin amortiguación, y resonante de una masa en un resorte. La masa comienza con velocidad inicial de 1 pie por segundo en dirección descendente a partir de la posición de equilibrio.

Al transformar la ecuación diferencial se tiene

$$(s^2 + 16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} \quad \text{o} \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2}.$$

Del ejemplo 1, acabamos de aprender que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = t\,\text{sen}\,kt, \tag{1}$$

y entonces, con la identificación $k = 4$ en (1) y en el inciso d) del teorema 4.2.1, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4t + \frac{1}{8}\,t\,\text{sen}\,4t.$$ ≡

4.4.2 Transformadas de integrales

Convolución Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces un producto especial, denotado como $f * g$, está definido por la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau \tag{2}$$

y se conoce como **convolución** de f y g. La convolución $f * g$ es una función de t. Por ejemplo,

$$e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} t - \cos t + e^t). \tag{3}$$

Se puede demostrar que $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$, es decir, $f * g = g * f$. Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.

No es verdad que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales. No obstante, *es verdad* que la transformada de Laplace del producto especial (2) es el producto de las transformadas de Laplace de f y g. Esto significa que es posible encontrar la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones sin evaluar realmente la integral como lo hicimos en (3). El resultado que se deriva es conocido como **teorema de convolución**.

Teorema 4.4.2 Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \quad \text{y} \quad G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta.$$

Si procedemos de manera formal, tenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)\, d\tau\, d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)} g(\beta)\, d\beta. \end{aligned}$$

Al mantener τ fija, $t = \tau + \beta$, $dt = d\beta$, de manera que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau)\, dt.$$

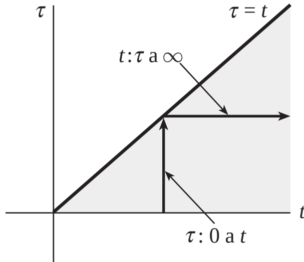


FIGURA 4.4.1 Cambio en el orden de integración de t primera a τ primera

En el plano $t\tau$ estamos integrando sobre la región sombreada de la **FIGURA 4.4.1**. Como f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de la integración:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau\right\} dt = \mathscr{L}\{f * g\}. \equiv$$

EJEMPLO 3 Transformada de una convolución

Calcule $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau\right\}$.

Solución Con $f(t) = e^t$ y $g(t) = \text{sen}\, t$ el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\text{sen}(t - \tau)\, d\tau\right\} = \mathscr{L}\{e^t\} \cdot \mathscr{L}\{\text{sen}\, t\} = \frac{1}{s - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s - 1)(s^2 + 1)}. \quad \equiv$$

Forma inversa del teorema 4.4.2 El teorema de convolución algunas veces resulta útil para encontrar las transformadas inversas de Laplace del producto de dos transformadas de Laplace. Con base en el teorema 4.4.2 tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g. \tag{4}$$

Muchos de los resultados incluidos en la tabla de transformadas de Laplace del apéndice III se pueden derivar utilizando (4). Por ejemplo, en el ejemplo siguiente obtenemos la entrada 25 de la tabla:

$$\mathscr{L}\{\text{sen}\, kt - kt\cos kt\} = \frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 4 Transformada inversa como una convolución

Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\}$.

Solución Sea $F(s) = G(s) = \dfrac{1}{s^2 + k^2}$

de manera que $\quad f(t) = g(t) = \dfrac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 + k^2}\right\} = \dfrac{1}{k}\text{sen}\, kt.$

En este caso, (4) da

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \text{sen}\, k\tau\ \text{sen}\, k(t - \tau)\, dt. \tag{6}$$

De sus conocimientos de trigonometría, recuerde ahora que

$$\text{sen}\, A\ \text{sen}\, B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)].$$

Si establecemos $A = k\tau$ y $B = k(t - \tau)$, podemos realizar la integración en (6):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos k(2\tau - t) - \cos kt]\, d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\text{sen}\, k(2\tau - t) - \tau\cos kt\right]_0^t \\ &= \frac{\text{sen}\, kt - kt\cos kt}{2k^3}.\end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados por $2k^3$ resulta la forma inversa de (5). $\equiv$

Transformada de una integral Cuando $g(t) = 1$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{7}$$

La forma inversa de (7),

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}, \tag{8}$$

se puede usar en vez de fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar. Por ejemplo, para $f(t) = \operatorname{sen} t$ sabemos que $F(s) = 1/(s^2 + 1)$, y, por lo tanto, mediante (8)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau = 1 - \cos t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/s(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t (1 - \cos\tau)\, d\tau = t - \operatorname{sen} t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/s^2(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t (\tau - \operatorname{sen}\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$$

y así sucesivamente.

■ **Ecuación integral de Volterra** El teorema de convolución y el resultado obtenido en (7) son útiles para resolver otros tipos de ecuaciones en los cuales una función desconocida aparezca bajo un signo integral. En el ejemplo siguiente, resolveremos una **ecuación integral de Volterra** para $f(t)$,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son conocidas. Observe que la integral incluida en (9) tiene la forma de convolución (2) con el símbolo h como parte de g.

EJEMPLO 5 Una ecuación integral

Resuelva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \displaystyle\int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}\, d\tau$ para $f(t)$..

Solución En la integral identificamos $h(t-\tau) = e^{t-\tau}$ de manera que $h(t) = e^t$. Tomamos la transformada de Laplace de cada término; en particular, mediante el teorema 4.4.2, la transformada de la integral es el producto de $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{e^t\} = 1/(s-1)$:

$$F(s) = 3\cdot\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s)\cdot\frac{1}{s-1}.$$

Después de resolver la última ecuación para $F(s)$ y realizar la descomposición de la fracción parcial, encontramos

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

Entonces la transformada inversa da

$$f(t) = 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$ ≡

■ **Circuitos en serie** En una malla única o circuito en serie, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través de un inductor, un resistor y un capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$. Ahora se sabe que las caídas de voltaje a través de un inductor, un resistor y un capacitor son, respectivamente,

$$L\frac{di}{dt}, \quad R\,i(t), \quad \text{y} \quad \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau,$$

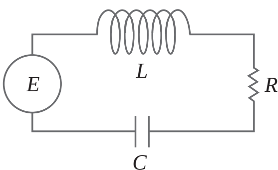


FIGURA 4.4.2 Circuito *LRC* en serie

donde $i(t)$ es la corriente y L, R y C son constantes. Se deduce que la corriente en un circuito, tal como el ilustrado en la **FIGURA 4.4.2**, está regida por la **ecuación integrodiferencial**

$$L\frac{di}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = E(t). \tag{10}$$

EJEMPLO 6 Una ecuación integrodiferencial

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito *LRC* de malla única cuando $L = 0.1$ h, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.1$ f, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado es

$$E(t) = 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1).$$

Solución Mediante los datos proporcionados, la ecuación (10) se convierte en

$$0.1\frac{di}{dt} + 2i + 10\int_0^t i(\tau)\,d\tau = 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1).$$

Ahora, mediante (7), $\mathscr{L}\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\} = I(s)/s$, donde $I(s) = \mathscr{L}\{i(t)\}$. Por lo tanto, la transformada de Laplace de la ecuación integrodiferencial es

$$0.1sI(s) + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right]. \leftarrow \text{mediante (16) de la sección 4.3}$$

Al multiplicar esta ecuación por $10s$, usando $s^2 + 20s + 100 = (s+10)^2$, y resolviendo entonces para $I(s)$ resulta

$$I(s) = 1\,200\left[\frac{1}{s(s+10)^2} - \frac{1}{s(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

Por fracciones parciales,

$$I(s) = 1\,200\left[\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2} - \frac{1/100}{s}e^{-s}\right.$$
$$\left. + \frac{1/100}{s+10}e^{-s} + \frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

A partir de la forma inversa del segundo teorema de traslación, ecuación (15) de la sección 4.3, finalmente obtenemos

$$i(t) = 12[1 - \mathcal{U}(t-1)] - 12[e^{-10t} - e^{-10(t-1)}\mathcal{U}(t-1)]$$
$$- 120te^{-10t} - 1\,080(t-1)e^{-10(t-1)}\mathcal{U}(t-1).$$

Escrita como una función definida por tramos, la corriente es

$$i(t) = \begin{cases} 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t}, & 0 \le t < 1 \\ -12e^{-10t} + 12e^{-10(t-1)} - 120te^{-10t} - 1\,080(t-1)e^{-10(t-1)}, & t \ge 1. \end{cases} \quad (11)$$

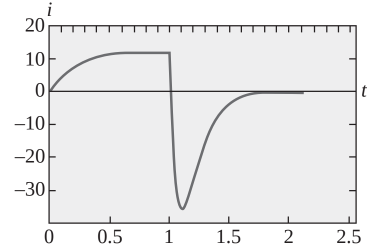


FIGURA 4.4.3 Gráfica de corriente $i(t)$ del ejemplo 6

Usamos la última forma de la solución y un CAS para graficar $i(t)$ en cada uno de los dos intervalos, y después combinamos las gráficas. En la **FIGURA 4.4.3** observe que aunque la entrada $E(t)$ es discontinua, el resultado o respuesta $i(t)$ es una función continua. ≡

Postdata. Redux de la función de Green Al aplicar la transformada de Laplace al problema de valor inicial.

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

donde a y b son constantes, encontramos que la transformada de $y(t)$ es

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b},$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Al reescribir la transformada anterior como el producto

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}F(s)$$

podemos usar la forma inversa del teorema de convolución (4) para escribir la solución del PVI como

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

donde $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + as + b}\right\} = g(t)$ y $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Por otro lado, sabemos de (9) de la sección 3.10 que la solución del PVI está también dada por

$$y(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

donde $G(t, \tau)$ es la función de Green para la ecuación diferencial.

Al comparar (12) y (13) vemos que la función de Green para la ecuación diferencial está relacionada con $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + as + b}\right\} = g(t)$ por

$$G(t, \tau) = g(t - \tau). \tag{14}$$

Por ejemplo, para el problema de valor inicial $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ encontramos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}\text{sen } 2t = g(t).$$

En el ejemplo 4 de la sección 3.10, las funciones de los símbolos x y t las desempeñan, respectivamente, t y τ en este análisis.

Por lo tanto, de (14) vemos que la función de Green para la ED $y'' + 4y = f(t)$ es $G(t, \tau) = g(t - \tau) = \frac{1}{2}\sin 2(t - \tau)$. Véase el ejemplo 4 en la sección 3.10.

4.4.3 Transformada de una función periódica

Función periódica Si una función periódica f tiene periodo T, $T > 0$, entonces $f(t + T) = f(t)$. La transformada de Laplace de una función periódica se puede obtener por integración en un periodo.

Teorema 4.4.3 Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial, y periódica con periodo T, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

DEMOSTRACIÓN

Escribimos la transformada de Laplace de f como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Cuando $t = u + T$, la última integral se convierte en

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u + T)\, du = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) = e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Por lo tanto, $$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

El teorema se demuestra resolviendo para $\mathscr{L}\{f(t)\}$ la ecuación incluida en la última línea. ≡

EJEMPLO 7 Transformada de una función periódica

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica mostrada en la **FIGURA 4.4.4**.

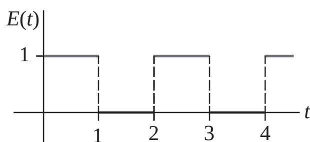


FIGURA 4.4.4 Onda cuadrada del ejemplo 7

Solución La función $E(t)$ se denomina onda cuadrada y tiene periodo $T = 2$. En el intervalo $0 \le t < 2$, $E(t)$ puede definirse mediante

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2, \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $f(t + 2) = f(t)$. Ahora, con base en el teorema 4.4.3,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{E(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}E(t)\,dt = \frac{1}{1 - e^{-st}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1\,dt + \int_1^2 e^{-st}\cdot 0\,dt\right]\\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}}\frac{1 - e^{-s}}{s} \qquad \leftarrow 1 - e^{-2s} = (1 + e^{-s})(1 - e^{-s})\\ &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})}. \qquad (15)\ \equiv\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Un voltaje periódico aplicado

La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie de malla única es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t). \qquad (16)$$

Determinar la corriente $i(t)$ cuando $i(0) = 0$ y $E(t)$ es la función de onda cuadrada que ilustra la figura 4.4.4.

Solución Mediante el resultado obtenido en (15) del ejemplo anterior, la transformada de Laplace de la ED es

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \quad \text{o} \quad I(s) = \frac{1/L}{s(s + R/L)}\cdot\frac{1}{1 + e^{-s}}. \qquad (17)$$

Para encontrar la transformada inversa de Laplace de la última función, usamos primero las series geométricas. Con la identificación $x = e^{-s}$, $s > 0$, la serie geométrica

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \text{se convierte en} \quad \frac{1}{1 + e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots.$$

Con base en $$\frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{L/R}{s} - \frac{L/R}{s + R/L},$$

entonces podemos reescribir (17) como

$$\begin{aligned}I(s) &= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right)(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots)\\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s + R/L} - \frac{1}{s + R/L}e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s + R/L} - \frac{e^{-3s}}{s + R/L} + \cdots\right).\end{aligned}$$

Al aplicar la forma del segundo teorema de traslación a cada término de ambas series obtenemos

$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{1}{R}(1 - \mathscr{U}(t - 1) + \mathscr{U}(t - 2) - \mathscr{U}(t - 3) + \cdots)\\ &\quad - \frac{1}{R}(e^{-Rt/L} - e^{-R(t-1)/L}\mathscr{U}(t - 1) + e^{-R(t-2)/L}\mathscr{U}(t - 2) - e^{-R(t-3)/L}\mathscr{U}(t - 3) + \cdots)\end{aligned}$$

o, de modo equivalente,

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L}) + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1 - e^{-R(t-n)/L})\mathscr{U}(t - n).$$

Para interpretar la solución supongamos, con fines ilustrativos, que $R = 1$, $L = 1$ y $0 \le t < 4$. En este caso,

$$i(t) = 1 - e^{-t} - (1 - e^{t-1})\mathscr{U}(t - 1) + (1 - e^{-(t-2)})\mathscr{U}(t - 2) - (1 - e^{-(t-3)})\mathscr{U}(t - 3);$$

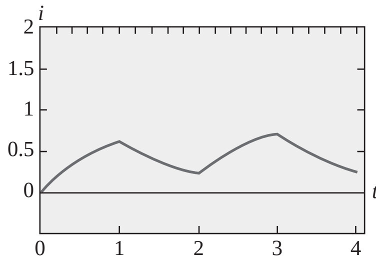


FIGURA 4.4.5 Gráfica de la corriente $i(t)$ del ejemplo 8

en otras palabras,

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \le t < 1 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)}, & 1 \le t < 2 \\ 1 - e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}, & 2 \le t < 3 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)} + e^{-(t-3)}, & 3 \le t < 4. \end{cases} \qquad (18)$$

La gráfica de $i(t)$ en el intervalo $0 \le t < 4$, dado en la **FIGURA 4.4.5**, se obtuvo con ayuda de un CAS. ≡

4.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

4.4.1 Derivadas de transformadas

En los problemas del 1 al 8, use el teorema 4.4.1 para calcular la transformada de Laplace dada.

1. $\mathscr{L}\{te^{-10t}\}$
2. $\mathscr{L}\{t^3e^t\}$
3. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$
4. $\mathscr{L}\{t\,\text{senh}\,3t\}$
5. $\mathscr{L}\{t\,\text{senh}\,t\}$
6. $\mathscr{L}\{t^2\cos t\}$
7. $\mathscr{L}\{te^{2t}\,\text{sen}\,6t\}$
8. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$

En los problemas del 9 al 14, use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado. Consulte la tabla de transformadas de Laplace incluida en el apéndice III según sea necesario.

9. $y' + y = t\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 0$
10. $y' - y = te^t\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 0$
11. $y'' + 9y = \cos 3t, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 5$
12. $y'' + y = \text{sen}\,t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
13. $y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

14. $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ \text{sen}\,t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$$

En los problemas 15 y 16, use una herramienta de graficación para trazar la solución indicada.

15. $y(t)$ del problema 13 en el intervalo $0 \le t < 2\pi$
16. $y(t)$ del problema 14 en el intervalo $0 \le t < 3\pi$

En algunos casos, la transformada de Laplace puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes de variable monomial. En los problemas 17 y 18 use el teorema 4.4.1 para reducir la ecuación diferencial dada a una ecuación diferencial lineal de primer orden en la función transformada $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Resuelva la ED de primer orden para $Y(s)$ y después encuentre $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

17. $ty'' - y' = 2t^2, \quad y(0) = 0$
18. $2y'' + ty' - 2y = 10, \quad y(0) = y'(0) = 0$

4.4.2 Transformadas de integrales

En los problemas del 19 al 30, use el teorema 4.4.2 para calcular la transformada de Laplace dada. No calcule la integral antes de transformar.

19. $\mathscr{L}\{1 * t^3\}$
20. $\mathscr{L}\{t^2 * te^t\}$
21. $\mathscr{L}\{e^{-t} * e^t\cos t\}$
22. $\mathscr{L}\{e^{2t} * \text{sen}\,t\}$
23. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$
24. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}$
25. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\, d\tau\right\}$
26. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau\,\text{sen}\,\tau\, d\tau\right\}$
27. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$
28. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \text{sen}\,\tau\cos(t-\tau)\, d\tau\right\}$
29. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \text{sen}\,\tau\, d\tau\right\}$
30. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}$

En los problemas del 31 al 34, use (8) para calcular la transformada inversa dada.

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)}\right\}$
32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$
33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\}$
34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)^2}\right\}$

35. La tabla incluida en el apéndice III no contiene una entrada para

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8k^3s}{(s^2+k^2)^3}\right\}.$$

a) Use (4) junto con los resultados obtenidos en (5) para calcular esta transformada inversa. Con ayuda de un CAS, calcule la integral de convolución.
b) Examine de nuevo su respuesta al inciso *a*). ¿Podría haber obtenido el resultado de otra manera?

36. Use la transformada de Laplace y los resultados del problema 35 para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + y = \text{sen}\,t + t\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Emplee una herramienta de graficación para trazar la solución.

En los problemas 37 a 46, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral o la ecuación integrodiferencial dada.

37. $f(t) + \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = t$

38. $f(t) = 2t - 4\int_0^t \operatorname{sen} \tau f(t - \tau) d\tau$

39. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau$

40. $f(t) + 2\int_0^t f(\tau) \cos (t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \operatorname{sen} t$

41. $f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = 1$

42. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t - \tau) d\tau$

43. $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau) d\tau$

44. $t - 2f(t) = \int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau}) f(t - \tau) d\tau$

45. $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0$

46. $\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

En los problemas 47 y 48, resuelva la ecuación (10) sujeta a $i(0) = 0$ con L, R, C y $E(t)$ como está dado. Use una herramienta de graficación para trazar la solución en el intervalo $0 \le t \le 3$.

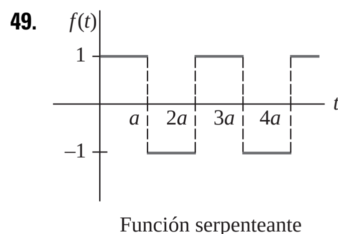
47. $L = 0.1$ h, $R = 3\ \Omega$, $C = 0.05$ f,
$E(t) = 100[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)]$

48. $L = 0.005$ h, $R = 1\ \Omega$, $C = 0.02$ f,
$E(t) = 100[t - (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)]$

4.4.3 Transformada de una función periódica

En los problemas del 49 al 54, use el teorema 4.4.3 para encontrar la transformada de Laplace de la función periódica dada.

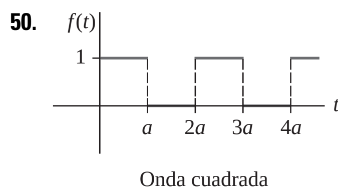
49.



Función serpenteante

FIGURA 4.4.6 Gráfica para el problema 49

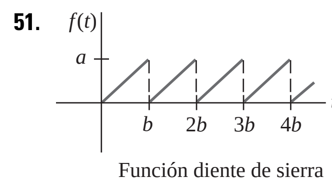
50.



Onda cuadrada

FIGURA 4.4.7 Gráfica para el problema 50

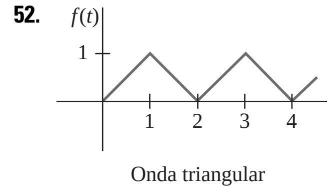
51.



Función diente de sierra

FIGURA 4.4.8 Gráfica para el problema 51

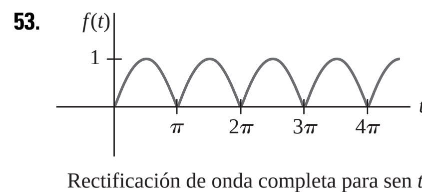
52.



Onda triangular

FIGURA 4.4.9 Gráfica para el problema 52

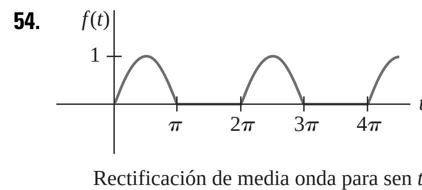
53.



Rectificación de onda completa para sen t

FIGURA 4.4.10 Gráfica para el problema 53

54.



Rectificación de media onda para sen t

FIGURA 4.4.11 Gráfica para el problema 54

En los problemas 55 y 56, resuelva la ecuación (16) sujeta a $i(0) = 0$ con $E(t)$ como está dado. Use una herramienta graficadora para trazar la solución en el intervalo $0 \le t < 4$ para el caso de $L = 1$ y $R = 1$.

55. $E(t)$ es la función serpenteante del problema 49 con amplitud 1 y $a = 1$.

56. $E(t)$ es la función diente de sierra del problema 51 con amplitud 1 y $b = 1$.

En los problemas 57 y 58, resuelva el modelo para un sistema resorte-masa impulsado con amortiguamiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

donde la función impulsora f es como se especifica. Use una herramienta de graficación para trazar $x(t)$ para los valores indicados de t.

57. $m = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $k = 5$, f es la función serpenteante descrita en el problema 49 con amplitud de 10, y $a = \pi$, $0 \le t < 2\pi$.

58. $m = 1$, $\beta = 2$, $k = 1$, f es la onda cuadrada del problema 50 con amplitud de 5, y $a = \pi$, $0 \le t < 4\pi$.

Problemas de análisis

59. Analice cómo se puede usar el teorema 4.4.1 para encontrar

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}.$$

60. La **ecuación diferencial de Bessel de orden $n = 0$** es

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

En la sección 5.3 veremos una solución del problema de valor inicial $ty'' + y' + ty = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ es $y = J_0(t)$, llamada **función de Bessel** de la primera especie de orden $v = 0$. Use el procedimiento indicado en las instrucciones para resolver los problemas 17 y 18 y mostrar que

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

[*Sugerencia:* Quizá necesite consultar el problema 46 en los ejercicios 4.2. También, se sabe que $J_0(0) = 1$.]

61. ***a***) Se sabe que la **ecuación diferencial de Laguerre**

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

posee soluciones polinomiales cuando n es un entero no negativo. Desde luego, estas soluciones se denominan **polinomiales de Laguerre** y se denotan mediante $L_n(t)$. Encuentre $y = L_n(t)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sabiendo que $L_n(0) = 1$.

b) Demuestre que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}t^ne^{-t}\right\} = Y(s),$$

donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ y $y = L_n(t)$ es una solución polinomial de la ED del inciso *a*). Concluya que

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}t^ne^{-t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tareas para el laboratorio de cómputo

62. En este problema se le conducirá por los comandos de *Mathematica* que le permitirán obtener la transformada simbólica de Laplace de una ecuación diferencial y la solución del problema de valor inicial al encontrar la transformada inversa. En *Mathematica*, la transformada de Laplace de una función $y(t)$ se obtiene usando **LaplaceTransform [y[t], t, s]**. En la línea dos de la sintaxis, reemplace **LaplaceTransform [y[t], t, s]** por el símbolo **Y**. (*Si usted no tiene* Mathematica, *entonces adapte el procedimiento dado para encontrar la sintaxis correspondiente en el CAS que tenga a la mano.*)

Considere el problema de valor inicial

$$y'' + 6y' + 9y = t \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -1.$$

Reproduzca el problema de manera precisa y después, a su debido tiempo, ejecute cada línea en la secuencia de comandos dada. Copie el resultado a mano o imprímalo.

```
diffequat = y''[t] + 6y'[t] + 9y[t] = = t Sin[t]
transformdeq = LaplaceTransform [diffequat, t, s]/.
   {y[0] − > 2, y'[0] − > −1,
   LaplaceTransform [y[t], t, s] − > Y}
soln = Solve[transformdeq, Y] // Flatten
Y = Y/. soln
InverseLaplaceTransform[Y, s, t]
```

63. Modifique de manera apropiada el procedimiento del problema 62 para encontrar una solución de

$$y''' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 1.$$

64. La carga $q(t)$ de un capacitor instalado en un circuito LC en serie está dada por

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = 1 - 4\mathscr{U}(t-\pi) + 6\mathscr{U}(t-3\pi), \; q(0) = 0, \; q'(0) = 0.$$

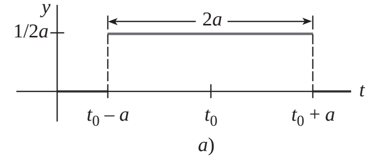
Modifique de manera apropiada el procedimiento del problema 62 para encontrar $q(t)$. Grafique la solución.

4.5 La función delta de Dirac

Introducción Justo antes del apartado *Comentarios* incluido en la página 207 indicamos, como una consecuencia inmediata del teorema 4.2.3, que $F(s) = 1$ no puede ser la transformada de Laplace de una función f continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. En el siguiente análisis vamos a presentar una función muy diferente a las que usted ha estudiado en cursos previos. Veremos que, de hecho, existe una función, o más precisamente, una función *generalizada*, cuya transformada de Laplace es $F(s) = 1$.

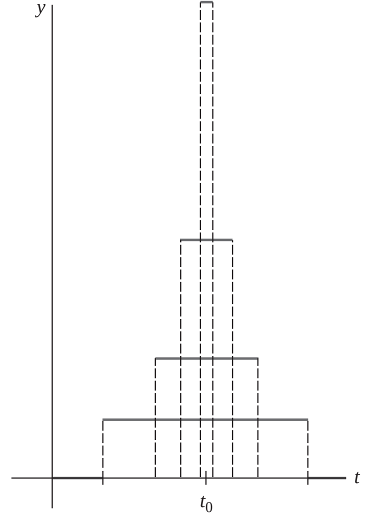
Impulso unitario Los sistemas mecánicos trabajan muchas veces bajo una fuerza externa (o fem en un circuito eléctrico) de magnitud mayor que actúa sólo durante un periodo muy corto. Por ejemplo, un relámpago puede hacer vibrar el ala de un avión, o una masa sujeta a un resorte puede recibir un fuerte impacto con la cabeza de un martillo, una pelota (de beisbol, golf o tenis) puede lanzarse hacia las alturas por un golpe violento dado con algún tipo

de palo (bat de beisbol, palo de golf, raqueta de tenis). La gráfica de la función definida por tramos



$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a, \end{cases} \tag{1}$$

$a > 0$, $t_0 > 0$, mostrada en la **FIGURA 4.5.1*a***), serviría como un modelo para una fuerza de tal tipo. Para un valor pequeño de a, $\delta_a(t - t_0)$ es esencialmente una función constante de gran magnitud que está "activa" durante un periodo muy corto, alrededor de t_0. El comportamiento de $\delta_a(t - t_0)$ cuando $a \to 0$ se ilustra en la figura 4.5.1*b*). La función $\delta_a(t - t_0)$ se denomina **impulso unitario** puesto que posee la propiedad de integración $\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)\, dt = 1$.



b) Comportamiento de δ_a cuando $a \to 0$

FIGURA 4.5.1 Impulso unitario

Función delta de Dirac En la práctica, resulta conveniente trabajar con otro tipo de impulso unitario, una "función" que aproxime $\delta_a(t - t_0)$ y esté definida por el límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0). \tag{2}$$

La última expresión, que no es en absoluto una función, se puede caracterizar por dos propiedades

$$i)\ \ \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad ii)\ \ \int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1.$$

El impulso unitario $\delta(t - t_0)$ se denomina **función delta de Dirac**.

Es posible obtener la transformada de Laplace de la función delta de Dirac mediante el supuesto formal de que $\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \to 0} \mathscr{L}\{\delta_a(t - t_0)\}$.

Teorema 4.5.1 Transformada de la función delta de Dirac

Para $t_0 > 0$,

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN

Para comenzar, podemos escribir $\delta_a(t - t_0)$ en términos de la función escalón unitario por virtud de (11) y (12) de la sección 4.3:

$$\delta_a(t - t_0) = \frac{1}{2a}[\mathscr{U}(t - (t_0 - a)) - \mathscr{U}(t - (t_0 + a))].$$

Con base en la linealidad y en (14) de la sección 4.3, la transformada de Laplace de esta última expresión es

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t - t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-s(t_0 - a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0 + a)}}{s}\right] = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa}\right). \tag{4}$$

Puesto que (4) tiene la forma indeterminada 0/0 cuando $a \to 0$, aplicamos la regla de L' Hôpital:

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \to 0} \mathscr{L}\{\delta_a(t - t_0)\} = e^{-st_0} \lim_{a \to 0}\left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa}\right) = e^{-st_0}. \qquad \equiv$$

Ahora, cuando $t_0 = 0$, parece factible concluir con base en (3) que

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

El último resultado enfatiza el hecho de que $\delta(t)$ no es el tipo usual de función que hemos estado considerando, pues a partir del teorema 4.2.3 esperamos que $\mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$ cuando $s \to \infty$.

EJEMPLO 1 Dos problemas de valor inicial

Resuelva $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$ sujeto a

a) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ ***b)*** $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

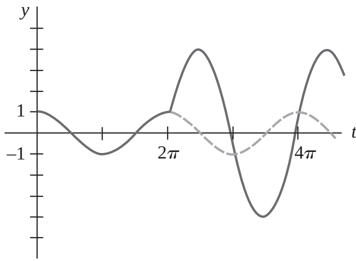


FIGURA 4.5.2 En el ejemplo 1*a*) la masa recibe un golpe cuando $t = 2\pi$

Los dos problemas de valor inicial podrían servir como modelos para describir el movimiento de una masa localizada en un resorte que se mueve en un medio cuyo amortiguamiento es de magnitud insignificante. Cuando $t = 2\pi$, la masa recibe un fuerte golpe. En *a*), la masa se libera del reposo desde una unidad por debajo de la posición de equilibrio. En *b*), la masa está en reposo en la posición de equilibrio.

Solución ***a)*** De (3), la transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s} \quad \text{o} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

Mediante la forma inversa del segundo teorema de traslación, encontramos

$$y(t) = \cos t + 4\,\text{sen}(t - 2\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi).$$

Puesto que $\text{sen}(t - 2\pi) = \text{sen}\, t$, la solución anterior se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4\,\text{sen}\, t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \tag{5}$$

En la **FIGURA 4.5.2**, vemos que a partir de la gráfica trazada para (5), la masa está exhibiendo un movimiento armónico simple hasta que recibe un golpe en $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es para incrementar la amplitud de la vibración a $\sqrt{17}$ cuando $t > 2\pi$.

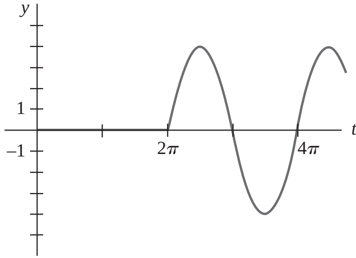


FIGURA 4.5.3 En el ejemplo 1*b*) no hay movimiento hasta que la masa recibe un golpe cuando $t = 2\pi$

b) En este caso, la transformada de la ecuación es simplemente

$$Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

y así

$$y(t) = 4\,\text{sen}(t - 2\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 4\,\text{sen}\, t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \tag{6}$$

La gráfica de (6) ilustrada en la **FIGURA 4.5.3** muestra, como podría esperarse a partir de las condiciones iniciales, que la masa no exhibe movimiento sino hasta que recibe un golpe cuando $t = 2\pi$. ≡

Comentarios

i) Si $\delta(t - t_0)$ fuera una función en el sentido usual, entonces la propiedad *ii*) en la página 231 podría implicar que $\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 0$ en lugar de $\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1$. Dado que la función delta de Dirac no se "comporta" como una función ordinaria, aun cuando quienes la usaron produjeron resultados correctos, en un principio los matemáticos la recibieron con gran desdén. Sin embargo, en la década de 1940, el matemático francés Laurent Schwartz, en su libro *Théorie des Distributions*, otorgó fundamentos sólidos a la controversial función de Dirac, lo cual, a su vez, condujo a una rama de las matemáticas completamente nueva conocida como la **teoría de las distribuciones** o **funciones generalizadas**. En esta teoría, (2) no es una definición aceptada de $\delta(t - t_0)$, ni se habla tampoco de una función cuyos valores sean ∞ o 0. Aunque ya no se abunde más sobre este tema, basta con decir que la función delta de Dirac es mejor caracterizada por sus efectos sobre otras funciones. Si f es una función continua, entonces

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0) \tag{7}$$

puede tomarse como la *definición* de $\delta(t - t_0)$. Este resultado se conoce como **propiedad de tamizado** porque $\delta\,(t - t_0)$ tiene el efecto de dispersar el valor de $f(t_0)$ fuera del conjunto de valores de f en $[0, \infty)$. Observe que la propiedad *ii*) (con $f(t) = 1$) y (3) (con $f(t) = e^{-st}$) son consistentes con (7).

ii) En el apartado *Comentarios* de la sección 4.2 indicamos que la función de transferencia de una ecuación diferencial lineal general de n-ésimo orden con coeficientes constantes es $W(s) = 1/P(s)$, donde $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$. La función de transferencia es la transformada

de Laplace de la función $w(t)$, llamada **función peso** de un sistema lineal. Pero $w(t)$ se puede caracterizar en términos del análisis que se esté realizando. Por simplicidad, consideremos un sistema lineal de segundo orden en el cual la entrada sea un impulso unitario cuando $t = 0$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Al aplicar la transformada de Laplace y usando $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$, se muestra que la transformada de la respuesta y es, en este caso, la función de transferencia

$$Y(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{P(s)} W(s) \quad \text{y si} \quad y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)}\right\} = w(t).$$

Con base en esto podemos ver, en general, que la función de peso $y = w(t)$ de un sistema lineal de n-ésimo orden es la respuesta de estado nulo del sistema a un impulso unitario. Por esta razón, $w(t)$ se denomina también **respuesta de impulso** del sistema.

4.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas del 1 al 12, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales que se indican.

1. $y' - 3y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0$

2. $y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 2$

3. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

4. $y'' + 16y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

5. $y'' + y = \delta(t - \pi/2) + \delta(t - 3\pi/2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

6. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

7. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

8. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

9. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

10. $y'' + 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

11. $y'' + 4y' + 13y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

12. $y'' - 7y' + 6y = e^t + \delta(t - 2) + \delta(t - 4), \ y(0) = 0, y'(0) = 0$

13. Una viga uniforme de longitud L soporta una carga concentrada w_0 en $x = \frac{1}{2}L$. La viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ a partir de

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta(x - \tfrac{1}{2}L),$$

donde $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$.

14. Resuelva la ecuación diferencial dada en el problema 13 sujeta a $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0$. En este caso, la viga está empotrada en ambos extremos. Véase la **FIGURA 4.5.4**.

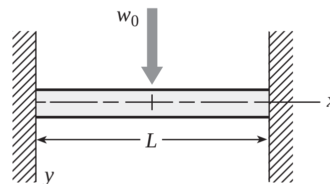


FIGURA 4.5.4 Viga para el problema 14

≡ Problemas de análisis

15. Alguien le dice a usted que las soluciones de los dos problemas de valor inicial

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

y $$y'' + 2y' + 10y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$

son exactamente las mismas. ¿Está usted de acuerdo o en desacuerdo? Defienda su respuesta.

4.6 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

■ **Introducción** Cuando las condiciones iniciales están especificadas, la transformada de Laplace se reduce de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas.

Resortes acoplados En nuestro primer ejemplo resolvimos el modelo

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

que describe el movimiento de dos masas m_1 y m_2 en el sistema de resorte acoplado que ilustra la figura 3.12.1 de la sección 3.12.

EJEMPLO 1 Vuelta al ejemplo 4 de la sección 3.12

Use la transformada de Laplace para resolver

$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + \quad x_2'' + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sujeto a $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$. Éste es el sistema (1) con $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$.

Solución La transformada de cada ecuación es

$$\begin{aligned} s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde $X_1(s) = \mathscr{L}\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = \mathscr{L}\{x_2(t)\}$. El sistema anterior es lo mismo que

$$\begin{aligned} (s^2 + 10)X_1(s) - \qquad 4X_2(s) &= 1 \\ -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) &= -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Al resolver (3) para $X_1(s)$ y usar fracciones parciales en el resultado se tiene

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12},$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Al sustituir la expresión por $X_1(s)$ en la primera ecuación de (3) se obtiene

$$X_2(s) = -\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{2/5}{s^2 + 2} - \frac{3/5}{s^2 + 12}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Por último, la solución para el sistema (2) dado es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t. \end{aligned} \tag{4}$$

La solución (4) es la misma que la obtenida en (14) de la sección 3.12. ≡

■ **Redes** En la expresión (18) de la sección 2.9 vimos que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ mostradas en la red que contiene el inductor, el resistor y el capacitor de la **FIGURA 4.6.1** estaban regidas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

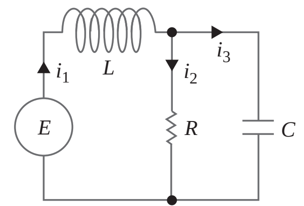


FIGURA 4.6.1 Red eléctrica

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t)$$
$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0. \qquad (5)$$

Resolvemos este sistema mediante la transformada de Laplace del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Red eléctrica

Resuelva el sistema dado en (5) bajo las condiciones $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, considerando que las corrientes i_1 e i_2 son inicialmente cero.

Solución Debemos resolver

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60$$
$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

sujeta a $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

Cuando se aplica la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema y se simplifica resulta

$$sI_1(s) + \qquad 50I_2(s) = \frac{60}{s}$$
$$-200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) = 0,$$

donde $I_1(s) = \mathscr{L}\{i_1(t)\}$ e $I_2(s) = \mathscr{L}\{i_2(t)\}$. Al resolver el sistema para I_1 e I_2 y descomponer los resultados en fracciones parciales se tiene

$$I_1(s) = \frac{60s + 12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$
$$I_2(s) = \frac{12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}.$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace, encontramos que las corrientes son

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$
$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}.$$

≡

Observe que tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ del ejemplo 2 tienden hacia el valor $E/R = \frac{6}{5}$ cuando $t \to \infty$. Además, como la corriente que atraviesa el capacitor es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 60te^{-100t}$, observamos que $i_3(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

■ **Péndulo doble** Tal como ilustra la **FIGURA 4.6.2**, un péndulo doble oscila en un plano vertical debido a la influencia de la gravedad. Para desplazamientos pequeños $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, se puede demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es

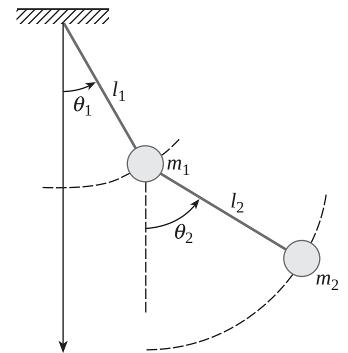


FIGURA 4.6.2 Péndulo doble

$$(m_1 + m_2)l_1^2\,\theta_1'' + m_2 l_1 l_2 \theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1 g\,\theta_1 = 0$$
$$m_2 l_2^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_2 \theta_1'' + m_2 l_2 g\,\theta_2 = 0. \qquad (6)$$

Como se indica en la figura 4.6.2, θ_1 se mide (en radianes) desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del eje del sistema, y θ_2 se mide desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del centro de la masa m_1. La dirección positiva es hacia la derecha y la negativa hacia la izquierda.

EJEMPLO 3 Péndulo doble

Se deja como ejercicio completar los detalles mediante la transformada de Laplace para resolver el sistema (6) cuando $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 16$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = -1$, $\theta_1'(0) = 0$ y $\theta_2'(0) = 0$. Debe encontrar que

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{4}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{3}{4}\cos 2t \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2}\cos 2t. \end{aligned} \tag{7}$$

Con ayuda de un CAS, se obtuvieron las posiciones de las dos masas en $t = 0$ y en los momentos siguientes que se muestran en la **FIGURA 4.6.3**. Véase el problema 21 en los ejercicios 4.6.

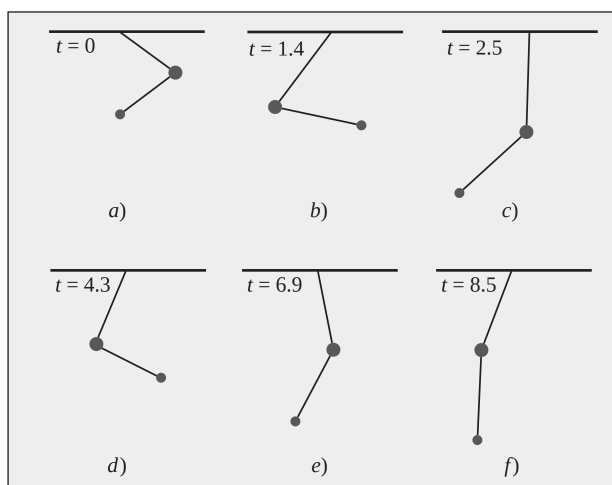


FIGURA 4.6.3 Posiciones de las masas en diferentes momentos ≡

4.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas del 1 al 12, use la transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales dado.

1. $\dfrac{dx}{dt} = -x + y$

$\dfrac{dy}{dt} = 2x$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2y + e^t$

$\dfrac{dy}{dt} = 8x - t$

$x(0) = 1,\ y(0) = 1$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

$x(0) = -1,\ y(0) = 2$

4. $\dfrac{dx}{dt} + 3x + \dfrac{dy}{dt} = 1$

$\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} - y = e^t$

$x(0) = 0,\ y(0) = 0$

5. $2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x = 1$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$

$x(0) = 0,\ y(0) = 0$

6. $\dfrac{dx}{dt} + x - \dfrac{dy}{dt} + y = 0$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1$

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + y - x = 0$

$x(0) = 0,\ x'(0) = -2,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 0$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 4\dfrac{dx}{dt} = 0$

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,$
$y(0) = -1,\ y'(0) = 5$

9. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4t$

$x(0) = 8,\ x'(0) = 0,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

10. $\dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{d^3y}{dt^3} = 6 \text{ sen } t$

$\dfrac{dx}{dt} + 2x - 2\dfrac{d^3y}{dt^3} = 0$

$x(0) = 0,\ y(0) = 0,$
$y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

11. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}$

$x(0) = 0,\ x'(0) = 2,$
$y(0) - 0$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2\mathcal{U}(t-1)$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x - y + \mathcal{U}(t-1)$

$x(0) = 0,\ y(0) = \frac{1}{2}$

13. Resuelva el sistema (1) cuando $k_1 = 3, k_2 = 2, m_1 = 1, m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2(0) = 1, x_2'(0) = 0$.

14. Derive el sistema de ecuaciones diferenciales descritas por el movimiento vertical en línea recta de los resortes acoplados en equilibrio que muestra la **FIGURA 4.6.4**. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.

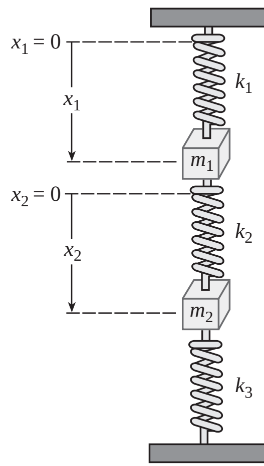


FIGURA 4.6.4 Resortes acoplados del problema 14

15. ***a***) Muestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ presentes en la red eléctrica mostrada en la figura 4.6.5 es

$$L_1\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

$$L_2\frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t).$$

b) Resuelva el sistema dado en el inciso *a*) si $R = 5\ \Omega$, $L_1 = 0.01$ h, $L_2 = 0.0125$ h, $E = 100$ V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

c) Determine la corriente $i_1(t)$.

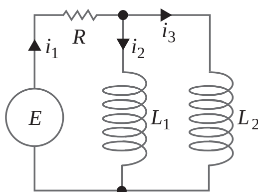


FIGURA 4.6.5 Red para el problema 15

16. ***a***) En el problema 12 de los ejercicios 2.9 se le pidió demostrar que las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ ilustradas en la red eléctrica de la **FIGURA 4.6.6** satisfacen

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1i_2 = E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$

Resuelva el sistema si $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 1$ h, $C = 0.2$ f,

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2, \end{cases}$$

$i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

b) Determine la corriente $i_1(t)$.

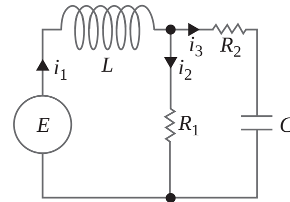


FIGURA 4.6.6 Red para el problema 16

17. Resuelva el sistema dado en la expresión (17) de la sección 2.9 cuando $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E(t) = 50 \text{ sen } t$ V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

18. Resuelva (5) cuando $E = 60$ V, $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

19. Resuelva (5) cuando $E = 60$ V, $L = 2$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

20. ***a***) Muestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para la carga $q(t)$ presente en el capacitor y la corriente $i_3(t)$ de la red eléctrica mostrada en la **FIGURA 4.6.7** es

$$R_1\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q + R_1i_3 = E(t)$$

$$L\frac{di_3}{dt} + R_2i_3 - \frac{1}{C}q = 0.$$

b) Encuentre la carga presente en el capacitor cuando $L = 1$ h, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1$ f,

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 50e^{-t}, & t \ge 1, \end{cases}$$

$i_3(0) = 0$ y $q(0) = 0$.

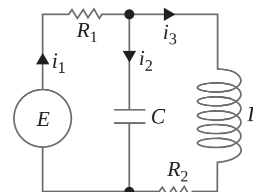


FIGURA 4.6.7 Red para el problema 20

Tareas para el laboratorio de cómputo

21. ***a***) Use la transformada de Laplace y la información del ejemplo 3 para obtener la solución (7) del sistema dado en (6).

b) Use una herramienta de graficación para trazar las gráficas de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $t\theta$. ¿Qué masa tiene los desplazamientos extremos de mayor magnitud? Con las gráficas, estime el primer momento en que cada masa pasa por la posición de equilibrio. Analice si el movimiento de los péndulos es periódico.

c) Como ecuaciones paramétricas, grafique $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $\theta_1\theta_2$. La curva definida por estas ecuaciones paramétricas se denomina **curva de Lissajous**.

d) La posición de las masas cuando $t = 0$ está dada en la figura 4.6.3*a*). Observe que hemos usado 1 radián ≈ 57.3°. Use una calculadora o alguna aplicación computacional para hacer tablas y elabore una tabla de valores para los ángulos θ_1 y θ_2 para $t = 1, 2, ..., 10$ segundos. Después, grafique las posiciones de las dos masas en esos tiempos.

e) Use un CAS para encontrar el primer momento en que $\theta_1(t) = \theta_2(t)$, y calcule el valor angular correspondiente. Trace las posiciones de las dos masas en esos tiempos.

f) Utilice un CAS para trazar también las líneas apropiadas y simular las barras del péndulo en la figura 4.6.3. Use la capacidad de animación de su sistema para hacer una "película" del movimiento del péndulo doble desde $t = 0$ hasta $t = 10$ usando un incremento de tiempo de 0.1. [*Sugerencia:* Exprese las coordenadas $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ de las masas m_1 y m_2, respectivamente, en términos de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.]

4 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 y 2, use la definición de la transformada de Laplace para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & t \ge 1 \end{cases}$ **2.** $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}$

En los problemas del 3 al 24, llene los espacios en blanco o responda verdadero o falso.

3. Si f no es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces no existirá $\mathscr{L}\{f(t)\}$. ______

4. La función $f(t) = (e^t)^{10}$ no es de orden exponencial. ______

5. $F(s) = s^2/(s^2 + 4)$ no es la transformada de Laplace de una función continua por tramos y de orden exponencial. ______

6. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)g(t)$. ______

7. $\mathscr{L}\{e^{-7t}\} =$ ______ **8.** $\mathscr{L}\{te^{-7t}\} =$ ______

9. $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} =$ ______ **10.** $\mathscr{L}\{e^{-3t} \text{ sen } 2t\} =$ ______

11. $\mathscr{L}\{t \text{ sen } 2t\} =$ ______ **12.** $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\, \mathscr{U}(t - \pi)\} =$ ______

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{20}{s^6}\right\} =$ ______ **14.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s - 1}\right\} =$ ______

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s - 5)^3}\right\} =$ ______

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 - 5}\right\} =$ ______

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 - 10s + 29}\right\} =$ ______

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{s^2}\right\} =$ ______

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s + \pi}{s^2 + \pi^2}e^{-s}\right\} =$ ______

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{L^2s^2 + n^2\pi^2}\right\} =$ ______

21. $\mathscr{L}\{e^{-5t}\}$ existe para $s >$ ______.

22. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces $\mathscr{L}\{te^{8t}f(t)\} =$ ______.

23. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $k > 0$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at}f(t - k)\mathscr{U}(t - k)\} =$ ______.

24. $\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t e^{a\tau}f(\tau)\,d\tau\right\} =$ ________ mientras que $\mathscr{L}\left\{e^{at}\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} =$ ______.

En los problemas del 25 al 28, use la función escalón unitario y anote una ecuación para cada gráfica en términos de la función $y = f(t)$ cuya gráfica está dada en la **FIGURA 4.R.1**.

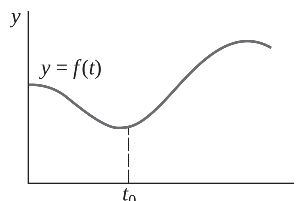


FIGURA 4.R.1 Gráfica para los problemas del 25 al 28

25.

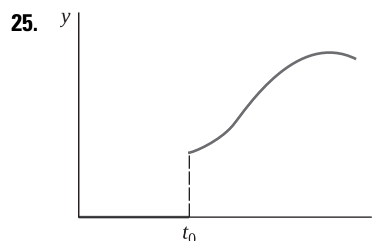


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 25

26.

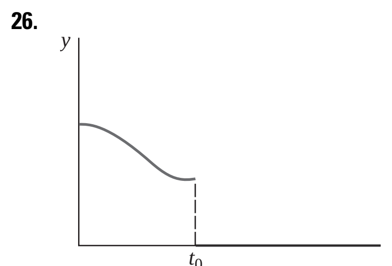


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 26

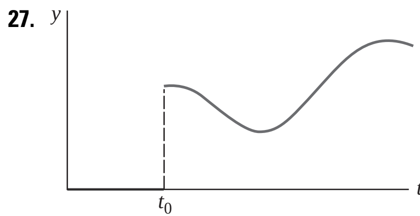
27.


FIGURA 4.R.4 Gráfica para el problema 27

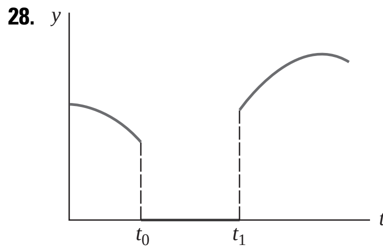
28.


FIGURA 4.R.5 Gráfica para el problema 28

En los problemas del 29 al 32, exprese f en términos de funciones escalón unitario. Encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ y $\mathscr{L}\{e^t f(t)\}$.

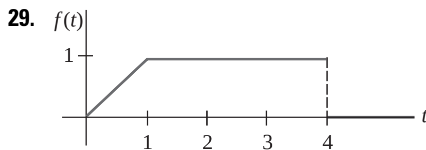
29.


FIGURA 4.R.6 Gráfica para el problema 29

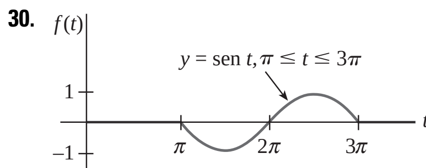
30.


FIGURA 4.R.7 Gráfica para el problema 30

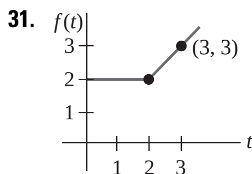
31.


FIGURA 4.R.8 Gráfica para el problema 31

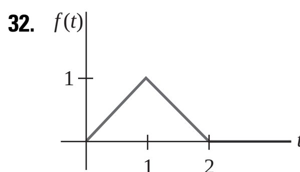
32.


FIGURA 4.R.9 Gráfica para el problema 32

En los problemas del 33 al 38, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación dada

33. $y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

34. $y'' - 8y' + 20y = te^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

35. $y'' + 6y' + 5y = t - t\,\mathscr{U}(t-2), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

36. $y' - 5y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1$

37. $y'(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1$

38. $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau = 6t^3$

En los problemas 39 y 40, use la transformada de Laplace para resolver cada sistema.

39. $x' + y = t$
$4x + y' = 0$
$x(0) = 1, \; y(0) = 2$

40. $x'' + y'' = e^{2t}$
$2x' + y'' = -e^{2t}$
$x(0) = 0, \; y(0) = 0$
$x'(0) = 0, \; y'(0) = 0$

41. La corriente $i(t)$ presente en un circuito RC en serie se puede determinar con base en la ecuación integral

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E(t),$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado. Determine $i(t)$ cuando $R = 10\ \Omega$, $C = 0.5$ f y $E(t) = 2(t^2 + t)$.

42. Un circuito en serie contiene un inductor, un resistor y un capacitor para los cuales $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 10\ \Omega$ y $C = 0.01$ f, respectivamente. El voltaje

$$E(t) = \begin{cases} 10, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$$

se aplica al circuito. Determine la carga instantánea $q(t)$ presente en el capacitor cuando $t > 0$ si $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$.

43. Una viga uniforme en voladizo, de longitud L, está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en el derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ si la carga por unidad está dada por

$$w(x) = \frac{2w_0}{L}\left[\tfrac{1}{2}L - x + \left(x - \tfrac{1}{2}L\right)\mathscr{U}\left(x - \tfrac{1}{2}L\right)\right].$$

44. Cuando una viga uniforme está soportada por una base elástica, la ecuación diferencial para su deflexión $y(x)$ es

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4a^4y = \frac{w(x)}{EI},$$

donde a es una constante. Para el caso en que $a = 1$, encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga de longitud π soportada elásticamente y que está empotrada en concreto por ambos extremos cuando se aplica una carga concentrada w_0 en $x = \pi/2$. [*Sugerencia:* Use la tabla de transformadas de Laplace incluida en el apéndice III.]

45. ***a***) Suponga que dos péndulos idénticos están acoplados por medio de un resorte con constante k. Véase la **FIGURA 4.R.10**. Bajo los mismos supuestos formulados en el análisis del ejemplo 3, es posible demostrar que cuando el desplazamiento de los ángulos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ es pequeño, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que describe el movimiento es

$$\theta_1'' + \frac{g}{l}\theta_1 = -\frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\theta_2'' + \frac{g}{l}\theta_2 = \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2).$$

Use la transformada para resolver el sistema cuando $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_1'(0) = 0, \theta_2(0) = \psi_0, \theta_2'(0) = 0$, donde θ_0 y ψ_0 son constantes. Por comodidad, establezca $\omega^2 = g/l$, $K = k/m$.

b) Use la solución obtenida en el inciso *a*) para analizar el movimiento de péndulos acoplados en el caso especial donde las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_1'(0) = 0, \theta_2(0) = \theta_0, \theta_2'(0) = 0$. Cuando las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_1'(0) = 0, \theta_2(0) = -\theta_0, \theta_2'(0) = 0$.

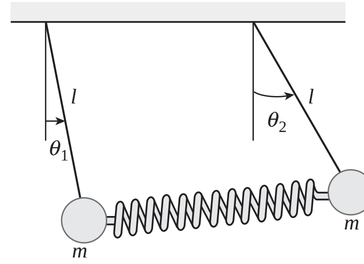


FIGURA 4.R.10 Péndulos acoplados del problema 45

SOLUCIONES EN SERIE PARA ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

5

Estructura del capítulo

Hasta aquí hemos resuelto principalmente ecuaciones diferenciales de segundo orden o de orden mayor donde la ecuación es lineal y tiene coeficientes constantes. Cuando se trata de aplicaciones, las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables son tan importantes, si no es que más, como las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. La única ecuación diferencial lineal con coeficientes variables que hemos considerado hasta ahora es la ecuación de Cauchy-Euler (sección 3.6). En el presente capítulo veremos que la facilidad con que resolvimos las ecuaciones de Cauchy-Euler de segundo orden no se podrá aplicar ni siquiera a una simple ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables como $y'' + xy = 0$. Veremos que las soluciones de esta ecuación diferencial se definen mediante **series infinitas**.

5.1 Soluciones en torno a puntos ordinarios

Introducción En la sección 3.3 vimos que resolver una ecuación diferencial lineal homogénea con *coeficientes constantes* era esencialmente un problema de álgebra. Cuando encontramos las raíces de la ecuación auxiliar pudimos escribir una solución general de la ecuación diferencial como una combinación lineal de las funciones elementales x^k, $x^ke^{\alpha x}$, $x^ke^{\alpha x}\cos \beta x$ y $x^ke^{\alpha x}\text{sen } \beta x$, donde k es un entero no negativo. Pero como se señaló en la introducción a la sección 3.6, no es posible resolver la *mayoría* de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con *coeficientes variables* en términos de funciones elementales. Un método común para resolver ecuaciones de esta naturaleza es asumir una solución en la forma de series infinitas y proceder de manera similar al método de coeficientes indeterminados (sección 3.4). En esta sección, consideramos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables que poseen soluciones en la forma de *series de potencias*.

5.1.1 Repaso de las series de potencias

De sus conocimientos de cálculo, recuerde que una serie de potencias en $x - a$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots.$$

Se dice que tal serie es una **serie de potencias centrada en *a***. Por ejemplo, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(x + 1)^n$ está centrada en $a = -1$. En esta sección, nos enfocaremos principalmente en las series de potencias en x; en otras palabras, series de potencias como $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^n = x + 2x^2 + 4x^3 + \cdots$ que estén centradas en $a = 0$. La siguiente lista resume algunas cuestiones importantes sobre las series de potencias.

- **Convergencia** Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ es convergente en un valor específico de x si su secuencia de sumas parciales $\{S_N(x)\}$ converge; es decir, si $\text{lím}_{N\to\infty} S_N(x) = \text{lím}_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} c_n(x - a)^n$ existe. Si el límite no existe en x, se dice que la serie es divergente.
- **Intervalo de convergencia** Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. El intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales x para los que la serie converge.
- **Radio de convergencia** Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R. Si $R > 0$, entonces una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converge para $|x - a| < R$ y diverge para $|x - a| > R$. Si la serie converge sólo en su centro a, en ese caso, $R = 0$. Si la serie converge para toda x, entonces escribimos $R = \infty$. Recuerde que la desigualdad de valor absoluto $|x - a| < R$ es equivalente a la desigualdad simultánea $a - R < x < a + R$. Una serie de potencias puede o no converger en los extremos $a - R$ y $a + R$ de su intervalo.
- **Convergencia absoluta** Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge de manera absoluta. En otras palabras, si x está en el intervalo de convergencia y no es un extremo del intervalo, entonces la serie de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(x - a)^n|$ converge.
- **Prueba de relación** La convergencia de las series de potencias a menudo se puede determinar mediante la prueba de relación. Suponga que $c_n \neq 0$ para toda n, y que
$$\text{lím}_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x - a)^{n+1}}{c_n(x - a)^n}\right| = |x - a| \,\text{lím}_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L.$$
Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge, y si $L = 1$, la prueba no es concluyente. Por ejemplo, para la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(x - 3)^n/2^n n$, la prueba de relación da
$$\text{lím}_{n\to\infty} \left|\frac{(x - 3)^{n+1}/2^{n+1}(n + 1)}{(x - 3)^n/2^n n}\right| = |x - 3| \,\text{lím}_{n\to\infty} \frac{n}{2(n + 1)} = \frac{1}{2}|x - 3|.$$
La serie converge absolutamente para $[\frac{1}{2}|x - 3| < 1$ o $|x - 3| < 2$ o $1 < x < 5$. Este último intervalo se denomina intervalo *abierto* de convergencia. La serie diverge para $|x - 3| > 2$, es decir, para $x > = 5$ o $x < 1$. En el extremo izquierdo $x = 1$ del intervalo

abierto de convergencia, la serie de constantes $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/n)$ es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alterna. En el extremo derecho $x = 5$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ es la serie armónica divergente. El intervalo de convergencia de la serie es [1, 5) y el radio de convergencia es $R = 2$.

- **Una serie de potencias define una función** Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si el radio de convergencia es $R > 0$, entonces f es continua, diferenciable e integrable en el intervalo $(a - R, a + R)$. Además, $f'(x)$ y $\int f(x)\,dx$ se pueden determinar mediante diferenciación e integración término a término. En un extremo, la convergencia puede perderse por diferenciación o ganarse por integración. Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias en x, entonces las primeras dos derivadas son $y' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ y $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,x^{n-2}$. Observe que el primer término en la primera derivada y los primeros dos términos en la segunda derivada son cero. Omitimos estos términos y escribimos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n nx^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}. \tag{1}$$

Estos resultados son importantes y se utilizarán en breve.

- **Propiedad de identidad** Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = 0$, $R > 0$, para todo número x en el intervalo de convergencia, entonces $c_n = 0$ para toda n.
- **Función analítica en un punto** Se dice que una función f es analítica en un punto a si puede representarse mediante una serie de potencias en $x - a$ con un radio de convergencia positivo. En cálculo se ha demostrado que es posible representar funciones tales como e^x, cos x, sen x, ln$(x - 1)$, mediante las series de Taylor. Recuerde, por ejemplo, que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \ \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \tag{2}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

para $|x| < \infty$. Estas series de Taylor centradas en 0, llamadas series de Maclaurin, muestran que e^x, sen x y cos x son analíticas en $x = 0$.

- **Aritmética de las series de potencias** Las series de potencias pueden combinarse mediante operaciones de suma, multiplicación y división. Los procedimientos son similares a la forma en que se suman, multiplican o dividen dos polinomios, es decir, se suman los coeficientes de potencias iguales de x, se aplica la ley distributiva, se agrupan términos semejantes, y se efectúa una larga división. Por ejemplo, usando series de potencias en (2),

$$\begin{aligned} e^x \operatorname{sen} x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + \cdots\right) \\ &= (1)x + (1)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)x^5 + \cdots \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \cdots. \end{aligned}$$

Puesto que la serie de potencias para e^x y sen x convergen para $|x| < \infty$, la serie de producto converge en el mismo intervalo. Los problemas que implican la multiplicación o la división de una serie de potencias se pueden resolver de modo más sencillo mediante un sistema computacional de álgebra.

Cambio del índice de suma Para el resto de esta sección, así como para el capítulo, es importante que usted se adiestre en la simplificación de la suma de dos o más series de potencias, expresada cada serie en notación de suma (sigma), para una expresión con una sola Σ. Tal como ilustra el siguiente ejemplo, combinar dos o más sumas en una sola muchas veces requiere de volver a realizar la indexación, es decir, un desplazamiento del índice de la suma.

EJEMPLO 1 Suma de dos series de potencias

Escriba $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ como una serie de potencias.

Solución Con el fin de sumar las dos series, es necesario que *ambos índices de las sumas comiencen con el mismo número y que en cada serie las potencias de x estén "en fase"*, es decir, si una serie inicia con un múltiplo de, digamos, x a la primera potencia, entonces

Importante.

la otra serie deberá comenzar con la misma potencia. Observe que en el problema dado, la primera serie comienza con x^0, mientras que la segunda serie empieza con x^1. Si escribimos el primer término de la primera serie fuera de la notación de suma,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2 \cdot 1c_2 x^0 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{\text{serie comienza con } x \text{ para } n=3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{\text{serie comienza con } x \text{ para } n=0},$$

vemos que ambas series del lado derecho comienzan con la misma potencia de x, es decir, con x^1. Para obtener el mismo índice de suma nos basamos en los exponentes de x; sea $k = n - 2$ en la primera serie y al mismo tiempo sea $k = n + 1$ en la segunda serie. El lado derecho se convierte en

$$c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k. \tag{3}$$

(mismo — mismo)

Recuerde que el índice de la suma es una variable "muda"; el hecho de que $k = n - 1$ en un caso y $k = n + 1$ en el otro, no debe causar confusión si se recuerda que lo importante es el *valor* del índice de la suma. En ambos casos, k adopta los mismos valores sucesivos $k = 1, 2, 3, \ldots$ cuando n asume los valores $n = 2, 3, 4, \ldots$ para $k = n - 1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$ para $k = n + 1$. Ahora ya estamos en condiciones de sumar las series expresadas en (3) término a término:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k. \tag{4}$$ ≡

Si no está convencido del resultado de (4), entonces escriba algunos términos en ambos lados de la igualdad.

5.1.2 Soluciones en series de potencias

■ **Una definición** Supongamos que la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{5}$$

se escribe en su forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{6}$$

si se divide entre el primer coeficiente $a_2(x)$. Formulamos la siguiente definición.

Definición 5.1.1 Puntos ordinarios y singulares

Se dice que un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (5) si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ de la forma estándar (6) son analíticos en x_0. Y de un punto que no es ordinario se afirma que es un **punto singular** de la ecuación.

Todo valor finito de x es un punto ordinario de $y'' + (e^x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$. En particular, $x = 0$ es un punto ordinario, pues como ya vimos en (2), tanto e^x como sen x son analíticos en este punto. La negación en el segundo enunciado de la definición 5.1.1 estipula que si al menos una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ de (6) no es analítica en x_0, entonces x_0 es un punto singular. Observe que $x = 0$ es un punto singular de la ecuación diferencial $y'' + (e^x)y' + (\ln x)y = 0$, puesto que $Q(x) = \ln x$ es discontinua en $x = 0$ y, por lo tanto, no se puede representar mediante una serie de potencias en x.

■ **Coeficientes polinómicos** Nos interesa principalmente el caso en que (5) tiene coeficientes polinómicos. Un polinomio es analítico en cualquier valor x, y una función racional es analítica *salvo* en los puntos donde su denominador sea cero. Por lo tanto, si $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, entonces ambas funciones racionales $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ son analíticas excepto donde $a_2(x_0) = 0$.

Por lo tanto, se deduce que $x = x_0$ es un punto ordinario de (5) si $a_2(x_0) \neq 0$, mientras que $x = x_0$ es un punto singular de (5) si $a_2(x_0) = 0$.

Por ejemplo, los únicos puntos singulares de la ecuación $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ son soluciones de $x^2 - 1 = 0$ o $x = \pm 1$. Todos los demás valores finitos* de x son puntos ordinarios. Un examen de la ecuación de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ muestra que tiene un punto singular en $x = 0$. Los puntos singulares no necesitan ser números reales. La ecuación $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ tiene puntos singulares en las soluciones de $x^2 + 1 = 0$, es decir, $x = \pm i$. Todos los demás valores de x, reales o complejos, son puntos ordinarios.

Enunciamos, sin demostrarlo, el teorema siguiente sobre la existencia de soluciones en forma de series de potencias.

Teorema 5.1.1 Existencia de soluciones en forma de series de potencias

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (5), siempre podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias centradas en x_0, es decir, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Una solución en forma de serie converge al menos en algún intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia entre x_0 y el punto singular más cercano.

Se dice que una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ es una **solución en torno al punto ordinario x_0**. En el teorema 5.1.1, la distancia R es el valor *mínimo* o el **límite inferior** para el radio de convergencia. Por ejemplo, los números complejos $1 \pm 2i$ son los puntos singulares de $(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' - y = 0$, pero puesto que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación, el teorema 5.1.1 garantiza que podemos encontrar dos soluciones en forma de series de potencias en 0. Es decir, las soluciones se parecen a $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y, además, sin encontrar realmente esas soluciones, sabemos que cada serie debe converger *al menos* para $|x| < \sqrt{5}$, donde $R = \sqrt{5}$ es la distancia entre 0 y cualquiera de los números $1 + 2i$ o $1 - 2i$ presentes en el plano complejo. Sin embargo, la ecuación diferencial tiene una solución que es válida para valores mucho más grandes de x; de hecho, esta solución es válida en $(-\infty, \infty)$ porque podemos demostrar que una de las dos soluciones es un polinomio.

En los siguientes ejemplos, así como en los ejercicios 5.1, por simplicidad, sólo encontraremos soluciones en forma de series de potencias en torno a un punto ordinario $x = 0$. Si fuera necesario encontrar una solución en forma de series de potencias de una EDO en torno a un punto ordinario $x_0 \neq 0$, simplemente podemos cambiar la variable $t = x - x_0$ en la ecuación (esto traduce $x = x_0$ en $t = 0$), encontrar las soluciones para la nueva ecuación de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, y después volver a sustituir $t = x - x_0$.

Todas las soluciones en forma de series de potencias estarán centradas en 0.

Encontrar una solución en forma de series de potencias de una EDO lineal homogénea de segundo orden se ha descrito con exactitud como "el método de coeficientes indeterminados de *series*", puesto que el procedimiento es muy parecido al efectuado en la sección 3.4. En resumen, la idea es ésta: sustituimos $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en la ecuación diferencial, combinamos las series como lo hicimos en el ejemplo 1, y después igualamos todos los coeficientes del lado derecho de la ecuación para determinar los coeficientes c_n. Pero como el lado derecho es cero, el último paso requiere, en virtud de la propiedad de identidad incluida en la lista anterior, que todos los coeficientes de x se igualen a cero. No, esto *no* significa que todos los coeficientes *sean* cero; ello no tendría sentido, después de todo, el teorema 5.1.1 garantiza que podemos encontrar dos soluciones. El ejemplo 2 ilustra cómo el solo supuesto de que $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ lleva a dos conjuntos de coeficientes tales que sólo tengamos dos series de potencias distintas $y_1(x)$ y $y_2(x)$, desarrolladas ambas en torno al punto ordinario $x = 0$. La solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$; de hecho, si $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ y $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ entonces $C_1 = c_0$ y $C_2 = c_1$.

EJEMPLO 2 Soluciones en forma de series de potencias

Resuelva $y'' + xy = 0$.

Solución Puesto que no hay puntos singulares finitos, el teorema 5.1.1 garantiza que existen dos soluciones en forma de series de potencias, centradas en 0, convergentes para $|x| < \infty$. Al sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y la segunda derivada $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1)c_n x^{n-2}$ (véase la expresión (1)) en la ecuación diferencial se obtiene

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}. \quad (7)$$

* Para los fines del presente volumen, los puntos singulares y los ordinarios siempre serán puntos finitos. Es posible que una EDO tenga, digamos, un punto singular en el infinito.

Ahora ya agregamos las últimas dos series al lado derecho de la igualdad en (7) mediante el desplazamiento del índice de la suma visto en el ejemplo 1. Con base en el resultado de (4),

$$y'' + xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k + 1)(k + 2)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k = 0. \tag{8}$$

En este punto, recurrimos a la propiedad de identidad. Como (8) es igual a cero, necesitamos que el coeficiente de cada potencia de x sea igual a cero, es decir, $2c_2 = 0$ (es el coeficiente de x^0), y

$$(k + 1)(k + 2)c_{k+2} + c_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Ahora $2c_2 = 0$ ordena evidentemente que $c_2 = 0$. Pero la expresión dada en (9), denominada **relación de recurrencia**, determina las c_k de tal manera que podemos elegir que cierto subconjunto del conjunto de coeficientes sea *diferente de cero*. Como $(k + 1)(k + 2) \neq 0$ para todos los valores de k, podemos resolver (9) para c_{k+2} en términos de c_{k-1}:

Esta fórmula se denomina relación de recurrencia de dos términos. 

$$c_{k+2} = -\frac{c_{k-1}}{(k + 1)(k + 2)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Esta relación genera coeficientes consecutivos de la solución supuesta cuando dejamos que k adopte los enteros sucesivos indicados en (10):

$$\begin{aligned}
k &= 1, & c_3 &= -\frac{c_0}{2 \cdot 3} \\
k &= 2, & c_4 &= -\frac{c_1}{3 \cdot 4} \\
k &= 3, & c_5 &= -\frac{c_2}{4 \cdot 5} = 0 \quad \leftarrow c_2 \text{ es cero} \\
k &= 4, & c_6 &= -\frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}c_0 \\
k &= 5, & c_7 &= -\frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}c_1 \\
k &= 6, & c_8 &= -\frac{c_5}{7 \cdot 8} = 0 \quad \leftarrow c_5 \text{ es cero} \\
k &= 7, & c_9 &= -\frac{c_6}{8 \cdot 9} = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}c_0 \\
k &= 8, & c_{10} &= -\frac{c_7}{9 \cdot 10} = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}c_1 \\
k &= 9, & c_{11} &= -\frac{c_8}{10 \cdot 11} = 0 \quad \leftarrow c_8 \text{ es cero}
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Ahora, al sustituir los coeficientes que se acaban de obtener en el supuesto original

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdots$$

obtenemos

$$y = c_0 + c_1x + 0 - \frac{c_0}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{c_1}{3 \cdot 4}x^4 + 0 + \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}x^6$$
$$+ \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + 0 - \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^9 - \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}x^{10} + 0 + \cdots.$$

Después de agrupar los términos que contienen c_0 y los términos que contienen c_1, obtenemos $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}x^6 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^9 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} x^{3k}$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}x^{10} + \cdots = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} x^{3k+1}.$$

Puesto que el uso iterativo de (10) dejó a c_0 y c_1 completamente indeterminados, podemos elegirlos de manera arbitraria. Como se mencionó antes de este ejemplo, la combinación lineal $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ en realidad representa la solución general de la ecuación diferencial. Aunque sabemos a partir del teorema 5.1.1 que cada solución en forma de serie converge para $|x| < \infty$, este hecho se puede verificar también mediante la prueba de la relación. ≡

La ecuación diferencial del ejemplo 2 se conoce como **ecuación de Airy**, y se encuentra al estudiar la difracción de la luz, la difracción de las ondas de radio alrededor de la superficie terrestre, aerodinámica, y la deflexión de una delgada columna vertical uniforme que se arquea por su propio peso. Otras formas comunes de la ecuación de Airy son $y'' - xy = 0$ y $y'' + \alpha^2 xy = 0$. Véase el problema 40 en los ejercicios 5.3 para conocer una aplicación de la última ecuación.

EJEMPLO 3 Solución en forma de series de potencias

Resuelva $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

Solución Como vimos en la página 245, la ecuación diferencial dada tiene puntos singulares en $x = \pm i$ y, por lo tanto, una solución en forma de series de potencias centrada en 0 convergerá al menos para $|x| < 1$, donde 1 es la distancia desde 0 hasta i o $-i$ en el plano complejo. El supuesto de que $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^n$ y sus primeras dos derivadas (véase (1)) llevan a

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2x^0 - c_0x^0 + 6c_3x + c_1x - c_1x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{k=n}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n}_{k=n}$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.$$

De esta última identidad, concluimos que $2c_2 - c_0 = 0$, $6c_3 = 0$ y

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0.$$

Por lo tanto, $$c_2 = \frac{1}{2}c_0, \quad c_3 = 0,$$

$$c_{k+2} = \frac{1-k}{k+2}c_k, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Al sustituir $k = 2, 3, 4, \ldots$ en la última fórmula se tiene

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2\, 2!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0 \quad \leftarrow c_3 \text{ es cero}$$

$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6}c_0 = \frac{1 \cdot 3}{2^3\, 3!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0 \quad \leftarrow c_5 \text{ es cero}$$

$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}c_0 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4\, 4!}c_0$$

$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0 \quad \leftarrow c_7 \text{ es cero}$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}c_0 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5\, 5!}c_0$$

y así sucesivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + \cdots \\ &= c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2\, 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3\, 3!}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4\, 4!}x^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5\, 5!}x^{10} - \cdots\right] + c_1x \\ &= c_0y_1(x) + c_1y_2(x). \end{aligned}$$

Las soluciones son el polinomio $y_2(x) = x$ y las series de potencias

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n\, n!}x^{2n}, \quad |x| < 1. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Relación de recurrencia de tres términos

Si buscamos una solución de series de potencias $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x$ para la ecuación diferencial

$$y'' - (1 + x)y = 0,$$

obtenemos $c_2 = c_0/2$ y la relación de recurrencia

Esta fórmula se denomina relación de recurrencia de tres términos.

$$c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

El examen de la fórmula muestra que los coeficientes $c_3, c_4, c_5, \ldots$ están expresados en términos tanto de c_1 como de c_0 y, además, el álgebra requerida para hacer esto se dificulta un poco. Para simplificar, podemos elegir primero $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$; esto produce coeficientes consecutivos para una solución que se expresan por completo en términos de c_0:

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}c_0$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}c_0$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{4 \cdot 5}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{30}c_0$$

y así sucesivamente. Después, al elegir $c_0 = 0, c_1 \neq 0$, los coeficientes para la otra solución se expresan en términos de c_1:

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0 = 0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}c_1$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}c_1$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{120}c_1$$

y así sucesivamente. Por último, vemos que la solución general de la ecuación es $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

y

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots.$$

Cada serie converge para todos los valores finitos de x. ≡

Coeficientes no polinomiales El ejemplo siguiente ilustra cómo encontrar una solución en forma de series de potencias en torno a un punto ordinario $x_0 = 0$ de una ecuación diferencial cuando sus coeficientes no son polinomios. En este ejemplo presentaremos una aplicación de la multiplicación de dos series de potencias.

EJEMPLO 5 Ecuación diferencial ordinaria con coeficientes no polinomiales

Resuelva $y'' + (\cos x)y = 0$.

Solución Observamos que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación porque, como ya hemos visto, $\cos x$ es analítico en ese punto. Mediante la serie de Maclaurin de $\cos x$ dada en (2), junto con el supuesto acostumbrado $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^n$ y los resultados de (1), encontramos que

$$y'' + (\cos x)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots)$$

$$= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \cdots = 0.$$

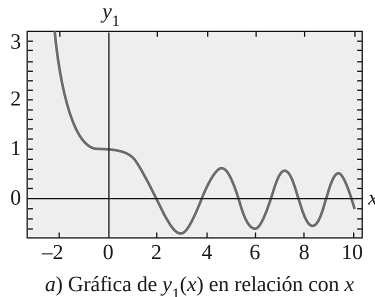
Se deduce que

$$2c_2 + c_0 = 0, \quad 6c_3 + c_1 = 0, \quad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \quad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0,$$

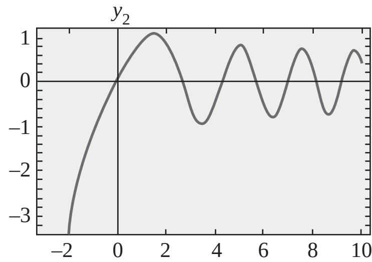
y así sucesivamente. Esto da $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$, $c_3 = -\frac{1}{6}c_1$, $c_4 = \frac{1}{12}c_0$, $c_5 = \frac{1}{30}c_1$, …. Al agrupar términos, llegamos a la solución general $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots \quad \text{y} \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots.$$

Puesto que la ecuación diferencial no tiene puntos singulares finitos, ambas series convergen para $|x| < \infty$. ≡



a) Gráfica de $y_1(x)$ en relación con x



b) Gráfica de $y_2(x)$ en relación con x

FIGURA 5.1.1 Soluciones de la ecuación de Airy

Curvas solución La gráfica aproximada de una solución en forma de series de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ puede ser determinada en varias formas. Siempre podemos recurrir a la graficación de los términos en la secuencia de sumas parciales de las series; en otras palabras, las gráficas de los polinomios $S_N(x) = \sum_{n=0}^{R} c_n x^n$. Para valores grandes de N, $S_N(x)$ nos debe indicar el comportamiento de $y(x)$ cerca del punto ordinario $x = 0$. También podemos obtener una curva solución aproximada con ayuda de un programa de solución numérica, tal como lo hicimos en la sección 3.11. Por ejemplo, si usted revisa cuidadosamente las soluciones en forma de series de la ecuación de Airy presentada en el ejemplo 2, verá que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son, a su vez, las soluciones de los problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + xy = 0, \quad & y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \\ y'' + xy = 0, \quad & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Las condiciones iniciales especificadas "eligen" las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ a partir de $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$, pues debe resultar evidente luego de nuestro supuesto básico de la serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ que $y(0) = c_0$ y $y'(0) = c_1$. Ahora, si su programa de solución numérica requiere un sistema de ecuaciones, la sustitución $y' = u$ en $y'' + xy = 0$ da $y'' = u' = -xy$, y por lo tanto un sistema de dos ecuaciones de primer orden equivalente a la ecuación de Airy es

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= -xy. \end{aligned} \tag{12}$$

Las condiciones iniciales para el sistema (12) son los dos conjuntos de condiciones iniciales presentados en (11), pero se escriben como $y(0) = 1$, $u(0) = 0$ y $y(0) = 0$, $u(0) = 1$. Las gráficas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ mostradas en la **FIGURA 5.1.1** se obtuvieron con ayuda de un programa de solución numérica aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño del paso de $h = 0.1$.

Comentarios

i) En los problemas que siguen, no espere poder escribir una solución en términos de la notación de sumatoria para cada caso. Aun cuando sea posible generar tantos términos como se desee en una solución en serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ya sea por medio de una relación de recurrencia o, como en el ejemplo 5, por multiplicación, quizá no sea posible deducir ningún término general para los coeficientes c_n. Tal vez tengamos que conformarnos con simplemente escribir los primeros términos de la serie, como lo hicimos en los ejemplos 4 y 5.

ii) Un punto x_0 es un punto ordinario de una ED lineal *no homogénea* de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ si $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son analíticas en x_0. Además, el teorema 5.1.1 se extiende a las ecuaciones diferenciales de este tipo, en otras palabras, podemos encontrar soluciones en forma de series de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas igual que en los ejemplos del 2 al 5. Véase el problema 36 en los ejercicios 5.1.

5.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

5.1.1 Repaso de las series de potencias

En los problemas del 1 al 4, encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia para las series de potencias dadas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100)^n}{n!} (x + 7)^n$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x - 5)^k$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!(x - 1)^k$

En los problemas 5 y 6, la función dada es analítica en $x = 0$. Encuentre los primeros cuatro términos de una serie de potencias en x. Desarrolle a mano la multiplicación o use un CAS, como le sea indicado.

5. $\operatorname{sen} x \cos x$

6. $e^{-x} \cos x$

En los problemas 7 y 8, la función dada es analítica en $x = 0$. Encuentre los primeros cuatro términos de una serie de potencias en x. Desarrolle a mano la larga división o use un CAS, como le sea indicado. Proporcione el intervalo de convergencia abierto.

7. $\dfrac{1}{\cos x}$

8. $\dfrac{1 - x}{2 + x}$

En los problemas 9 y 10, escriba de nuevo la serie de potencias dada en forma tal que su término general implique x^k.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+2}$

10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (2n - 1) c_n x^{n-3}$

En los problemas 11 y 12, escriba nuevamente la expresión dada como una sola serie de potencias cuyo término general implique a x^k.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$

En los problemas 13 y 14, verifique mediante sustitución directa que una serie de potencias dada es una solución particular de la ecuación diferencial indicada.

13. $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad (x+1)y'' + y' = 0$

14. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad xy'' + y' + xy = 0$

5.1.2 Soluciones en series de potencias

En los problemas 15 y 16, sin resolver la ecuación diferencial dada, encuentre un límite menor para el radio de convergencia de soluciones en forma de series de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$. En torno al punto ordinario $x = 1$.

15. $(x^2 - 25)y'' + 2xy' + y = 0$

16. $(x^2 - 2x + 10)y'' + xy' - 4y = 0$

En los problemas del 17 al 28, encuentre dos soluciones en forma de series de potencias de la ecuación diferencial dada en torno al punto ordinario $x = 0$.

17. $y'' - xy = 0$

18. $y'' + x^2y = 0$

19. $y'' - 2xy' + y = 0$

20. $y'' - xy' + 2y = 0$

21. $y'' + x^2y' + xy = 0$

22. $y'' + 2xy' + 2y = 0$

23. $(x - 1)y'' + y' = 0$

24. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$

25. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$

26. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$

27. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

28. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$

En los problemas del 29 al 32, use el método de las series de potencias para resolver el problema de valor inicial dado.

29. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \ y(0) = -2, \ y'(0) = 6$

30. $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0, \ y(0) = 2, \ y'(0) = -1$

31. $y'' - 2xy' + 8y = 0, \ y(0) = 3, \ y'(0) = 0$

32. $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$

En los problemas 33 y 34, use el procedimiento del ejemplo 5 para encontrar dos soluciones en forma de series de potencias de la ecuación diferencial dada en torno al punto ordinario $x = 0$.

33. $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$ **34.** $y'' + e^xy' - y = 0$

Problemas de análisis

35. Sin resolver realmente la ecuación diferencial $(\cos x)y'' + y' + 5y = 0$, encuentre un límite menor para el radio de convergencia de las soluciones en forma de series de potencias en torno a $x = 0$. En torno a $x = 1$.

36. ¿Cómo puede usarse el método descrito en esta sección para encontrar una solución en forma de series de potencias de la ecuación *no homogénea* $y'' - xy = 1$ en torno al punto ordinario $x = 0$? ¿De $y'' - 4xy' - 4y = e^x$? Desarrolle sus ideas resolviendo ambas ecuaciones diferenciales.

37. ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular de la ecuación diferencial $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$? Apoye sus respuestas con operaciones matemáticas válidas.

38. Para fines de este problema, ignore las gráficas dadas en la figura 5.1.1. Si la ecuación diferencial de Airy se escribe como $y'' = -xy$, ¿qué se puede afirmar sobre la forma de una curva solución si $x > 0$ y $y > 0$? ¿Si $x > 0$ y $y < 0$?

Tareas para el laboratorio de cómputo

39. *a*) Encuentre dos soluciones de series de potencias para $y'' + xy' + y = 0$, y exprese las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en términos de notación de suma.

b) Use un CAS para graficar las sumas parciales $S_N(x)$ para $y_1(x)$. Utilice $N = 2, 3, 5, 6, 8, 10$. Repita usando las sumas parciales $S_N(x)$ para $y_2(x)$.

c) Compare las gráficas del inciso *b*) con la curva obtenida usando un programa de solución numérica. Use las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ y $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

d) Examine de nuevo la solución $y_1(x)$ del inciso *a*). Exprese esta serie como una función elemental. Después use (5) de la sección 3.2 para encontrar una segunda solución de la ecuación. Compruebe que esta segunda solución sea la misma que la solución de series de potencias $y_2(x)$.

40. *a*) Encuentre uno o más términos diferentes de cero para cada una de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ del ejemplo 5.

b) Encuentre una solución en forma de serie $y(x)$ del problema de valor inicial $y'' + (\cos x)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

c) Utilice un CAS para graficar las sumas parciales $S_N(x)$ para la solución $y(x)$ del inciso *b*). Use $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

d) Compare las gráficas obtenidas en el inciso *c*) con la curva obtenida mediante un programa de solución numérica para el problema de valor inicial del inciso *b*).

5.2 Soluciones en torno a puntos singulares

Introducción Las dos ecuaciones diferenciales $y'' + xy = 0$ y $xy'' + y = 0$ son similares sólo en cuanto a que ambas son ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales simples de segundo orden con coeficientes variables. Eso es todo lo que tienen en común. Como $x = 0$ es un *punto ordinario* de la primera ecuación, en la sección anterior vimos que no había problema en determinar dos soluciones en forma de series de potencias centradas en ese punto.

En contraste, ya que $x = 0$ es un *punto singular* de la segunda ED, determinar dos soluciones en forma de series infinitas (observe que no nos referimos a "soluciones en forma de series de potencias") de la ecuación en torno a ese punto se vuelve una tarea más difícil.

■ Una definición Un punto singular $x = x_0$ de una ecuación lineal diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

se subdivide en regular o irregular. La clasificación depende nuevamente de las funciones P y Q incluidas en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (2)$$

Definición 5.2.1 Puntos singulares regulares e irregulares

Se dice que un punto x_0 es un **punto singular regular** de la ecuación diferencial (1) si las funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Un punto singular no regular se conoce como **punto singular irregular** de la ecuación.

La segunda oración de la definición 5.2.1 indica que si una o las dos funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ no son analíticas en x_0, entonces x_0 es un punto singular irregular.

■ Coeficientes polinomiales Como en la sección 5.1, nos interesan sobre todo las ecuaciones lineales (1) donde los coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes. Ya hemos visto que si $a_2(x_0) = 0$, entonces $x = x_0$ es un punto singular de (1) puesto que, en la forma estándar (2), al menos una de las funciones racionales $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ no es analítica en ese punto. Pero como $a_2(x)$ es un polinomio y x_0 es uno de sus ceros, a partir del teorema del factor aprendido en álgebra se deduce que $x - x_0$ es un factor de $a_2(x)$. Esto significa que después de reducir $a_1(x)/a_2(x)$ y $a_0(x)/a_2(x)$ a sus términos mínimos, el factor $x - x_0$ debe permanecer, para alguna potencia entera positiva, en uno o en ambos denominadores. Ahora suponga que $x = x_0$ es un punto singular de (1), pero que ambas funciones definidas por los productos $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Sacamos la conclusión de que multiplicar $P(x)$ por $x - x_0$ y $Q(x)$ por $(x - x_0)^2$ tiene el efecto (mediante cancelación) de que $x - x_0$ ya no aparezca en ningún denominador. Ahora podemos determinar si x_0 es regular dando un rápido vistazo a los denominadores:

Si a lo sumo, $x - x_0$ aparece elevado a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ y cuando mucho a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$, entonces $x = x_0$ es un punto singular regular.

Además, observe que si $x = x_0$ es un punto singular regular y multiplicamos (2) por $(x - x_0)^2$, entonces la ED original se puede escribir en la siguiente forma

$$(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (3)$$

donde p y q son analíticos en $x = x_0$.

EJEMPLO 1 Clasificación de puntos singulares

Debe resultar evidente que $x = 2$ y $x = -2$ son puntos singulares de

$$(x^2 - 4)^2y'' + 3(x - 2)y' + 5y = 0.$$

Después de dividir la ecuación entre $(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$ y reducir los coeficientes a los términos mínimos, encontramos que

$$P(x) = \frac{3}{(x - 2)(x + 2)^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{5}{(x - 2)^2(x + 2)^2}.$$

Ahora probamos $P(x)$ y $Q(x)$ en cada punto singular.

Para que $x = 2$ sea un punto singular regular, el factor $x - 2$ puede aparecer elevado a lo sumo a la primera potencia en el denominador de $P(x)$, y cuando mucho a la segunda poten-

cia en el denominador de $Q(x)$. Una revisión de los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$ muestra que ambas condiciones se satisfacen, entonces $x = 2$ es un punto singular regular. Por otra parte, llegamos a la misma conclusión al advertir que ambas funciones racionales

$$p(x) = (x - 2)P(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \qquad \text{y} \qquad q(x) = (x-2)^2 Q(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

son analíticas en $x = 2$.

Ahora, como el factor $x - (-2) = x + 2$ aparece elevado a la segunda potencia en el denominador de $P(x)$, podemos concluir de inmediato que $x = -2$ es un punto singular irregular de la ecuación. Esto se deduce también del hecho de que $p(x) = (x + 2)P(x) = 3/[(x - 2)(x + 2)]$ no es analítica en $x = -2$. ≡

En el ejemplo 1 observe: puesto que $x = 2$ es un punto singular regular, la ecuación original se puede escribir como

$$(x-2)^2 y'' + (x-2)\underbrace{\frac{3}{(x+2)^2}}_{p(x)\text{ analítica en } x=2} y' + \underbrace{\frac{5}{(x+2)^2}}_{q(x)\text{ analítica en } x=2} y = 0.$$

Como otro ejemplo, podemos ver que $x = 0$ es un punto singular irregular de $x^3y'' - 2xy' + 8y = 0$ por observación de los denominadores de $P(x) = -2/x^2$ y $Q(x) = 8/x^3$. Por otro lado, $x = 0$ es un punto singular regular de $xy'' - 2xy' + 8y = 0$ puesto que $x - 0$ y $(x - 0)^2$ ni siquiera aparecen en los denominadores respectivos de $P(x) = -2$ y $Q(x) = 8/x$. Para un punto singular $x = x_0$, ninguna potencia negativa de $x - x_0$ menor que uno (es decir, cero) y ninguna potencia no negativa menor que dos (es decir, cero y uno) en los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente, implican que x_0 sea un punto singular regular. Un punto singular puede ser un número complejo. Usted deberá verificar si $x = 3i$ y $x = -3i$ son dos puntos singulares regulares de $(x^2 + 9)y'' - 3xy' + (1 - x)y = 0$.

Cualquier ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, con constantes reales a, b y c, tiene un punto singular regular en $x = 0$. Usted deberá verificar que dos soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ sean $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$. Si intentamos encontrar una solución en forma de series de potencias en torno al punto singular regular $x = 0$, es decir, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, tendríamos éxito en obtener solamente la solución polinomial $y_1 = x^2$. El no poder obtener la segunda solución no nos causa asombro porque $\ln x$, y en consecuencia $y_2 = x^2 \ln x$, no es analítica en $x = 0$; es decir, y_2 no posee un desarrollo en forma de serie de Taylor centrado en $x = 0$.

Método de Frobenius Para resolver una ecuación diferencial (1) en torno a un punto singular regular, empleamos el teorema siguiente hecho por Frobenius.

Teorema 5.2.1 Teorema de Frobenius

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1), existe entonces al menos una solución diferente de cero de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}, \tag{4}$$

donde el número r es una constante a determinar. La serie convergerá al menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Preste atención a las palabras *al menos* incluidas en la primera oración del teorema 5.2.1. Esto significa que, en contraste con el teorema 5.1.1, no tenemos la certeza de poder encontrar dos soluciones en serie del tipo indicado en (4). El **método de Frobenius**, para encontrar soluciones en serie en torno a un punto singular regular x_0, es similar al "método de coeficientes indeterminados en serie" de la sección anterior donde sustituimos $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y determinamos los coeficientes desconocidos c_n mediante una relación de recurrencia. Sin embargo, en este procedimiento tenemos una tarea adicional; antes de determinar los coeficientes, primero debemos encontrar el exponente desconocido r. Si se encuentra que r es un número no entero no negativo, entonces la solución correspondiente $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ no será una serie de potencias.

Todas las soluciones estarán en torno al punto singular regular 0.

Tal como lo hicimos en el análisis de soluciones en torno a puntos ordinarios, siempre supondremos, para simplificar la resolución de ecuaciones diferenciales, que el punto singular regular es $x = 0$.

EJEMPLO 2 Dos soluciones en serie

Como $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0, \tag{5}$$

intentamos encontrar una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Ahora

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-2}$$

de manera que

$$\begin{aligned} 3xy'' + y' - y &= 3\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \\ &= x^r\Big[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n-1}}_{k = n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n}_{k = n}\Big] \\ &= x^r\Big[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k]x^k\Big] = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica $r(3r - 2)c_0 = 0$

$$(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Puesto que no se gana nada al suponer que $c_0 = 0$, entonces debemos tener

$$r(3r - 2) = 0, \tag{6}$$

y

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k + r + 1)(3k + 3r + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Los dos valores de r que satisfacen la ecuación cuadrática (6), $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$, cuando se sustituyen en (7), dan dos relaciones de recurrencia diferentes:

$$r_1 = \tfrac{2}{3}, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k + 5)(k + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$r_2 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k + 1)(3k + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

De (8) encontramos:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{5 \cdot 1} \\ c_2 &= \frac{c_1}{8 \cdot 2} = \frac{c_0}{2!\,5 \cdot 8} \\ c_3 &= \frac{c_2}{11 \cdot 3} = \frac{c_0}{3!\,5 \cdot 8 \cdot 11} \\ c_4 &= \frac{c_3}{14 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{c_0}{n!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n + 2)}. \end{aligned}$$

De (9) encontramos:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{1 \cdot 1} \\ c_2 &= \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2!\,1 \cdot 4} \\ c_3 &= \frac{c_2}{3 \cdot 7} = \frac{c_0}{3!\,1 \cdot 4 \cdot 7} \\ c_4 &= \frac{c_3}{4 \cdot 10} = \frac{c_0}{4!\,1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{(-1)^n c_0}{n!\,1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)}. \end{aligned}$$

Aquí encontramos algo que no sucedió cuando obtuvimos soluciones en torno a un punto ordinario; tenemos lo que parecen ser dos conjuntos diferentes de coeficientes, pero cada conjunto contiene el *mismo* múltiplo de c_0. Si omitimos este término, las soluciones en serie son

$$y_1(x) = x^{2/3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n + 2)} x^n\right] \tag{10}$$

$$y_2(x) = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)} x^n\right]. \tag{11}$$

Mediante la prueba de la relación podemos demostrar que tanto (10) como (11) convergen para todos los valores finitos de x, es decir, $|x| < \infty$. Asimismo, por la forma de estas soluciones, es posible deducir que ninguna de esas series es un múltiplo constante de la otra y, por consiguiente, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes en el eje x. Entonces, de acuerdo con el principio de superposición, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es otra solución de (5). En cualquier intervalo que no contenga el origen, tal como $(0, \infty)$, esta combinación representa la solución general de la ecuación diferencial. ≡

Ecuación indicial La ecuación (6) se denomina **ecuación indicial** del problema, y los valores $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$ se llaman **raíces indiciales**, o **exponentes**, de la singularidad $x = 0$. En general, después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y simplificar, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en r que resulta de igualar *a cero el coeficiente total de la potencia mínima de x*. Resolvemos para los dos valores de r y sustituimos esos valores en una relación de recurrencia como (7). El teorema 5.2.1 garantiza que se puede encontrar al menos una solución en serie de la forma supuesta.

Es posible obtener la ecuación indicial antes de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial. Si $x = 0$ es un punto singular regular de (1), entonces, en virtud de la definición 5.2.1, ambas funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$, donde P y Q están definidas por la forma estándar (2), son analíticas en $x = 0$; es decir, los desarrollos de series de potencias

$$p(x) = xP(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{y} \quad q(x) = x^2Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \tag{12}$$

son válidos en los intervalos que tienen un radio de convergencia positivo. Al multiplicar (2) por x^2, se obtiene la forma dada en (3):

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0. \tag{13}$$

Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ y las dos series de (12) en (13) y desarrollar la multiplicación de las series, encontramos que la ecuación indicial general es

$$r(r - 1) + a_0r + b_0 = 0, \tag{14}$$

donde a_0 y b_0 están definidas en (12). Véanse los problemas 13 y 14 en los ejercicios 5.2.

EJEMPLO 3 Dos soluciones en serie

Resuelva $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$.

Solución Al sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
2xy'' + (1 + x)y' + y &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r + 1)c_n x^{n+r} \\
&= x^r\Bigg[r(2r - 1)c_0x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n-1}}_{k = n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n + r + 1)c_n x^n}_{k = n}\Bigg] \\
&= x^r\left[r(2r - 1)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k + r + 1)(2k + 2r + 1)c_{k+1} + (k + r + 1)c_k]x^k\right],
\end{aligned}$$

lo cual implica $$r(2r-1)=0 \tag{15}$$

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+(k+r+1)c_k=0, \quad k=0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

A partir de la ecuación (15) podemos ver que las raíces indiciales son $r_1=\frac{1}{2}$ y $r_2=0$.

Para $r_1=\frac{1}{2}$, podemos dividir la ecuación (16) entre $k+\frac{3}{2}$ para obtener

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{2(k+1)}, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

mientras que para $r_2=0$, (16) se convierte en

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{2k+1}, \quad k=0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

De (17):

$$c_1=\frac{-c_0}{2\cdot 1}$$
$$c_2=\frac{-c_1}{2\cdot 2}=\frac{c_0}{2^2\cdot 2!}$$
$$c_3=\frac{-c_2}{2\cdot 3}=\frac{-c_0}{2^3\cdot 3!}$$
$$c_4=\frac{-c_3}{2\cdot 4}=\frac{c_0}{2^4\cdot 4!}$$
$$\vdots$$
$$c_n=\frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}.$$

De (18):

$$c_1=\frac{-c_0}{1}$$
$$c_2=\frac{-c_1}{3}=\frac{c_0}{1\cdot 3}$$
$$c_3=\frac{-c_2}{5}=\frac{-c_0}{1\cdot 3\cdot 5}$$
$$c_4=\frac{-c_3}{7}=\frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$
$$\vdots$$
$$c_n=\frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}.$$

Por lo tanto, para la raíz indicial $r_1=\frac{1}{2}$ obtenemos la solución

$$y_1(x)=x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+1/2},$$

donde hemos omitido nuevamente c_0. La serie converge para $x \geq 0$; por lo tanto, la serie no está definida para los valores negativos de x debido a la presencia de $x^{1/2}$. Para $r_2=0$, una segunda solución es

$$y_2(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}x^n, \quad |x|<\infty.$$

En el intervalo $(0,\infty)$, la solución general es $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. ≡

EJEMPLO 4 Sólo una solución en serie

Resuelva $xy''+y=0$.

Solución A partir de $xP(x)=0$ y $x^2Q(x)=x$ y del hecho de que 0 y x son sus propias series de potencias centradas en 0, concluimos que $a_0=0$ y $b_0=0$ y también de la ecuación (14) que la ecuación indicial es $r(r-1)=0$. El lector deberá verificar que las dos relaciones de recurrencia que corresponden a las raíces indiciales $r_1=1$ y $r_2=0$ produzcan exactamente el mismo conjunto de coeficientes. En otras palabras, en este caso, el método de Frobenius produce sólo una solución en serie

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{144}x^4+\cdots.$$ ≡

■ **Tres casos** Para fines de este análisis, supongamos nuevamente que $x=0$ es una ecuación (1) de punto singular regular y que las raíces indiciales r_1 y r_2 de la singularidad son reales, con r_1 denotando la raíz mayor. Cuando se usa el método de Frobenius, distinguimos tres casos correspondientes a la naturaleza de las raíces indiciales r_1 y r_2.

***Caso I*:** Si r_1 y r_2 son distintas y no difieren por un entero, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1} \quad \text{y} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}.$$

Éste es el caso que se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

En el siguiente caso, vemos que cuando la diferencia de las raíces indiciales $r_1 - r_2$ es un entero positivo, la segunda solución *puede* contener un logaritmo.

***Caso II*:** Si $r_1 - r_2 = N$, donde N es un entero positivo, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0, \tag{19}$$

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0, \tag{20}$$

donde C es una constante que podría ser cero.

Finalmente, en el último caso, cuando las raíces indiciales r_1 y r_2 son iguales, una segunda solución *siempre* contendrá un logaritmo. La situación es análoga a la solución de una ecuación de Cauchy-Euler cuando las raíces de la ecuación auxiliar son iguales.

***Caso III*:** Si $r_1 = r_2$, entonces siempre existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0, \tag{21}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}. \tag{22}$$

Encontrar una segunda solución Cuando la diferencia $r_1 - r_2$ es un entero positivo (caso II), *podemos* o *no* encontrar dos soluciones de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Esto es algo que no sabemos de antemano, pero se determina luego de encontrar las raíces indiciales y examinar cuidadosamente la relación de recurrencia que define los coeficientes c_n. Quizá tengamos la suerte de encontrar dos soluciones que impliquen sólo potencias de x, es decir, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$ (ecuación (19)) y $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$ (ecuación (20) con $C = 0$). Véase el problema 31 en los ejercicios 5.2. Por otra parte, en el ejemplo 4 vemos que la diferencia de las raíces indiciales es un entero positivo ($r_1 - r_2 = 1$), y del método de Frobenius no resultó una segunda solución en serie. En esta situación, la ecuación (20), con $C \neq 0$, indica cómo se ve una segunda solución. Por último, cuando la diferencia $r_1 - r_2$ es un cero (caso III), el método de Frobenius no da una segunda solución en serie; la segunda solución (22) siempre contiene un logaritmo y es en realidad la ecuación (20) con $C = 1$. Una forma de obtener esta segunda solución con el término logarítmico es usar el hecho de que

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx \tag{23}$$

Ésta es la ecuación (5) de la sección 3.2.

también es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ siempre que $y_1(x)$ sea la solución conocida. Ilustraremos cómo usar (23) en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Ejemplo 4 vuelto a analizar, mediante un CAS

Encuentre la solución general de $xy'' + y = 0$.

Solución A partir de la solución conocida del ejemplo 4,

$$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots,$$

podemos construir una segunda solución $y_2(x)$ mediante la fórmula (23). Para quienes tengan el tiempo, la energía y la paciencia, el pesado trabajo de elevar series al cuadrado,

resolver largas divisiones e integrar el cociente, puede hacerse a mano. Pero todas estas operaciones se realizan con relativa facilidad al usar un CAS. Damos los resultados:

He aquí un buen momento para usar un sistema algebraico de cómputo.



$$y_2\ x\ = y_1(x)\int \frac{e^{-\int 0\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx = y_1(x)\int \frac{dx}{\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots\right]^2}$$

$$= y_1(x)\int \frac{dx}{\left[x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{7}{72}x^5 + \cdots\right]} \quad \leftarrow \text{después de elevar al cuadrado}$$

$$= y_1(x)\int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \cdots\right]dx \quad \leftarrow \text{después de la larga división}$$

$$= y_1(x)\left[-\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right] \quad \leftarrow \text{después de integrar}$$

$$= y_1(x)\ln x + y_1(x)\left[-\frac{1}{x} + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right] \quad \leftarrow \text{multiplicación}$$

o bien
$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \left[-1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right].$$

En el intervalo $(0, \infty)$, la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. 

Comentarios

i) Las tres formas distintas de una ecuación diferencial lineal de segundo orden en (1), (2) y (3) fueron usadas para analizar varios conceptos teóricos. Pero a un nivel práctico, cuando se trata de efectivamente resolver una ecuación diferencial usando el método de Frobenius, es aconsejable trabajar con una ED de la forma dada en (1).
ii) Cuando la diferencia de las raíces indiciales $r_1 - r_2$ es un entero positivo ($r_1 > r_2$), a veces es conveniente iterar la relación de recurrencia utilizando primero la raíz más pequeña r_2. Consulte los problemas 31 y 32 en los ejercicios 5.2.
iii) Puesto que una *r* indicial es una raíz de una ecuación cuadrática, esto podría resultar complejo. Sin embargo, no analizaremos este caso.
iv) Si $x = 0$ es un punto singular irregular, quizá no podamos encontrar *alguna* solución de la ED de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$.

5.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas del 1 al 10, determine los puntos singulares de la ecuación diferencial dada. Clasifique cada punto singular como regular o irregular.

1. $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$
2. $x(x + 3)^2y'' - y = 0$
3. $(x^2 - 9)^2y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$
4. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{(x-1)^3}y = 0$
5. $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$
6. $x^2(x - 5)^2y'' + 4xy' + (x^2 - 25)y = 0$
7. $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y = 0$
8. $x(x^2 + 1)^2y'' + y = 0$
9. $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0$
10. $(x^3 - 2x^2 + 3x)^2y'' + x(x - 3)^2y' - (x + 1)y = 0$

En los problemas 11 y 12, escriba la ecuación diferencial dada en la forma (3) para cada punto singular regular de la ecuación. Identifique las funciones $p(x)$ y $q(x)$.

11. $(x^2 - 1)y'' + 5(x + 1)y' + (x^2 - x)y = 0$
12. $xy'' + (x + 3)y' + 7x^2y = 0$

En los problemas 13 y 14, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Use la forma general de la ecuación indicial dada en (14) para encontrar las raíces indiciales de singula-

ridad. Sin resolver, analice la cantidad de soluciones en serie que esperaría encontrar usando el método de Frobenius.

13. $x^2y'' + (\frac{5}{3}x + x^2)y' - \frac{1}{3}y = 0$

14. $xy'' + y' + 10y = 0$

En los problemas del 15 al 24, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Demuestre que las raíces indiciales de la singularidad no difieren por un entero. Use el método de Frobenius para obtener dos soluciones en serie linealmente independientes en torno a $x = 0$. Forme la solución general en $(0, \infty)$.

15. $2xy'' - y' + 2y = 0$ **16.** $2xy'' + 5y' + xy = 0$

17. $4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$

18. $2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$

19. $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$

20. $x^2y'' - (x - \frac{2}{9})y = 0$

21. $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$

22. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{4}{9})y = 0$

23. $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$

24. $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

En los problemas del 25 al 30, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Demuestre que las raíces indiciales de la singularidad difieren por un entero. Use el método de Frobenius para obtener al menos una solución en serie en torno a $x = 0$. Aplique (21) donde sea necesario y un CAS, si se le indica, para encontrar una segunda solución. Forme la solución general en $(0, \infty)$.

25. $xy'' + 2y' - xy = 0$

26. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

27. $xy'' - xy' + y = 0$

28. $y'' + \dfrac{3}{x}y' - 2y = 0$

29. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$

30. $xy'' + y' + y = 0$

En los problemas 31 y 32, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Demuestre que las raíces indiciales de la singularidad difieren por un entero. Use la relación de recurrencia encontrada mediante el método de Frobenius con la mayor raíz r_1 primero. ¿Cuántas soluciones encontró? Después use la relación de recurrencia con la raíz mínima r_2. ¿Cuántas soluciones encontró?

31. $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$

32. $x(x - 1)y'' + 3y' - 2y = 0$

33. ***a***) La ecuación diferencial $x^4y'' + \lambda y = 0$ tiene un punto singular irregular en $x = 0$. Demuestre que la sustitución $t = 1/x$ produce la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0,$$

la cual ahora tiene un punto singular regular en $t = 0$.

b) Use el método de esta sección para encontrar dos soluciones en serie de la segunda ecuación dada en el inciso *a*) en torno al punto singular $t = 0$.

c) Exprese cada solución en serie de la ecuación original en términos de funciones elementales.

34. El pandeo de una columna ahusada En el ejemplo 3 de la sección 3.9, vimos que cuando una fuerza compresiva vertical y constante o carga P fue aplicada a una columna delgada de corte transversal uniforme, la deflexión $y(x)$ satisfizo el problema de valores en la frontera

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Aquí los supuestos son que la columna está empotrada en sus dos extremos. La columna se pandeará o se curvará sólo cuando la fuerza compresiva sea una carga crítica P_n.

a) En este problema supondremos que la columna tiene una longitud L, está empotrada en ambos extremos, sus cortes transversales son circulares, y está ahusada tal como indica la **FIGURA 5.2.1*a***). Si la columna, un cono truncado, tiene conicidad lineal $y = cx$ según muestra el corte transversal de la figura 5.2.1*b*), el momento de inercia de un corte transversal respecto a un eje perpendicular al plano xy es $I = \frac{1}{4}\pi r^4$, donde $r = y$ y $y = cx$. Por lo tanto, podemos escribir $I(x) = I_0(x/b)^4$, donde $I_0 = I(b) = \frac{1}{4}\pi(cb)^4$. Al sustituir $I(x)$ en la ecuación diferencial dada en (24), vemos que en este caso la deflexión está determinada con base en el problema de valores en la frontera

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

donde $\lambda = Pb^4/EI_0$. Use los resultados del problema 33 para encontrar las cargas críticas P_n para la columna cónica. Utilice una identidad apropiada para expresar los modos de pandeo $y_n(x)$ como una sola función.

b) Use un CAS para trazar la gráfica del primer modo de pandeo $y_1(x)$ correspondiente a la carga de Euler P_1 cuando $b = 11$ y $a = 1$.

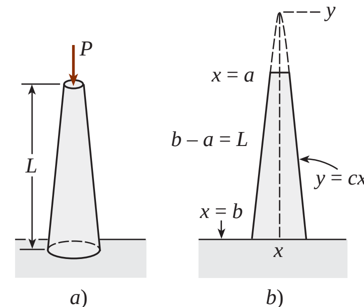


FIGURA 5.2.1 Columna cónica del problema 34

Problemas de análisis

35. Analice cómo definiría usted un punto singular regular para la ecuación diferencial lineal de tercer orden

$$a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

36. Cada una de las ecuaciones diferenciales

$$x^3y'' + y = 0 \quad \text{y} \quad x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

tiene un punto singular irregular en $x = 0$. Determine si el método de Frobenius produce una solución en serie de cada ecuación diferencial en torno a $x = 0$. Analice y explique sus hallazgos.

37. Hemos visto que $x = 0$ es un punto singular regular de cualquier ecuación de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. ¿Están relacionadas la ecuación indicial (14) para una ecuación de Cauchy-Euler y su ecuación auxiliar? Analice.

5.3 Funciones especiales

Introducción Las dos ecuaciones diferenciales

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1}$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \tag{2}$$

se presentan con frecuencia en estudios avanzados de matemáticas aplicadas, en física e ingeniería. Se denominan **ecuación de Bessel de orden ν** y **ecuación de Legendre de orden n**, respectivamente. Como es natural, las soluciones de (1) se denominan **funciones de Bessel** y las soluciones de (2) son **funciones de Legendre**. Cuando resolvamos (1) supondremos que $\nu \geq 0$, y en (2) sólo consideraremos el caso en que n es un entero no negativo. Puesto que buscaremos soluciones en serie de cada ecuación en torno a $x = 0$, observamos que el origen se encuentra en un punto singular regular de la ecuación de Bessel pero es un punto ordinario de la ecuación de Legendre.

5.3.1 Funciones de Bessel

Solución Como $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel, sabemos que existe al menos una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Al sustituir la última expresión en (1) se tiene

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)(n + r - 1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= c_0(r^2 - r + r - \nu^2)x^r \\ &\quad + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n + r)(n + r - 1) + (n + r) - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \\ &= c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n + r)^2 - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Con base en (3), vemos que la ecuación indicial es $r^2 - \nu^2 = 0$ de manera que las raíces indiciales son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Cuando $r_1 = \nu$, (3) se convierte en

$$\begin{aligned} & x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n + 2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \\ &\qquad = x^\nu \left[(1 + 2\nu)c_1 x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n + 2\nu)x^n}_{k = n - 2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}}_{k = n}\right] \\ &\qquad = x^\nu \left[(1 + 2\nu)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{k+2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, mediante el argumento acostumbrado podemos escribir $(1 + 2\nu)c_1 = 0$ y

$$(k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k = 0$$

o bien

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k + 2)(k + 2 + 2\nu)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

En (4), la alternativa $c_1 = 0$ trae como consecuencia que $c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$, entonces para $k = 0, 2, 4, \ldots$ encontramos, después de establecer $k + 2 = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, que

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n + \nu)}. \tag{5}$$

Por lo tanto, $c_2 = -\dfrac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)}$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(2 + \nu)} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(1 + \nu)(2 + \nu)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3(3 + \nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)}$$

$$\vdots$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (n + \nu)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Se acostumbra elegir un valor específico para c_0, a saber:

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

donde $\Gamma(1 + \nu)$ es la función gamma. Véase el apéndice II. Como esta última función posee la conveniente propiedad de que $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, podemos reducir el producto indicado en el denominador de (6) a un solo término. Por ejemplo,

$$\Gamma(1 + \nu + 1) = (1 + \nu)\Gamma(1 + \nu)$$
$$\Gamma(1 + \nu + 2) = (2 + \nu)\Gamma(2 + \nu) = (2 + \nu)(1 + \nu)\Gamma(1 + \nu).$$

De este modo, podemos expresar (6) como

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!(1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (n + \nu)\Gamma(1 + \nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!\Gamma(1 + \nu + n)}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Funciones de Bessel de primer tipo La solución en serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu}$ por lo general se representa mediante $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \tag{7}$$

Si $\nu \geq 0$, la serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. También, para el segundo exponente $r_2 = -\nu$ obtenemos, exactamente en la misma forma,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1 - \nu + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \tag{8}$$

Las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se denominan **funciones de Bessel de primer tipo** de orden ν y $-\nu$, respectivamente. Según sea el valor de ν, la ecuación (8) puede contener potencias negativas de x y, por lo tanto, ser convergente en $(0, \infty)$.*

Ahora debemos tener cuidado al escribir la solución general de (1). Cuando $\nu = 0$ resulta evidente que (7) y (8) son iguales. Si $\nu > 0$ y $r_1 - r_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu$ no es un entero positivo, del caso I visto en la sección 5.2 se deduce que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1) en $(0, \infty)$, y por lo tanto la solución general en el intervalo es $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$. Pero con base en el caso II de la sección 5.2 también sabemos que cuando $r_1 - r_2 = 2\nu$ es un entero positivo, *puede* existir una segunda solución de (1) en forma de serie. En este segundo caso pueden distinguirse dos posibilidades. Cuando $\nu = m =$ es un entero positivo, la expresión, $J_{-m}(x)$ definida por (8) y $J_m(x)$ no son soluciones linealmente independientes. Es posible demostrar que J_{-m} es un múltiplo constante de J_m (véase la propiedad (*i*) en la página 264). Además, $r_1 - r_2 = 2\nu$ puede ser un entero positivo cuando ν es la mitad de un entero positivo impar. En este último caso, podemos demostrar que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En otras palabras, la solución general de (1) en $(0, \infty)$ es

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad \nu \neq \text{entero}. \tag{9}$$

Las gráficas de $y = J_0(x)$ y $y = J_1(x)$ se muestran en la **FIGURA 5.3.1**.

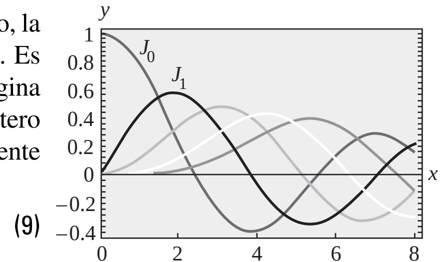


FIGURA 5.3.1 Funciones de Bessel de primer tipo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

* Cuando reemplazamos x por $|x|$, las series dadas en (7) y (8) convergen para $0 < |x| < \infty$.

EJEMPLO 1 Solución general: ν no es un entero

Al identificar $\nu^2 = \frac{1}{4}$ y $\nu = \frac{1}{2}$ a partir de (9), podemos ver que la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1J_{1/2}(x) + c_2J_{-1/2}(x)$. ≡

Funciones de Bessel de segundo tipo Si $v \neq$ entero, la función definida por la combinación lineal

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen } \nu\pi} \tag{10}$$

y la función $J_v(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1). Por lo tanto, otra forma de la solución general de (1) es $y = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$, siempre y cuando $v \neq$ entero. Cuando $v \to m$, donde m es un entero, (10) tiene la forma indeterminada 0/0. No obstante, mediante la regla de L'Hôpital se puede demostrar que $\lim_{\nu\to m} Y_\nu(x)$ existe. Además, la función

$$Y_m(x) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(x)$$

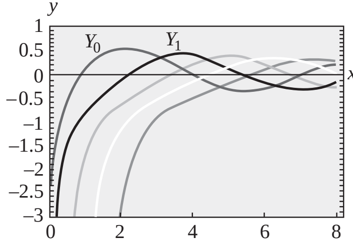


FIGURA 5.3.2 Funciones de Bessel de segundo tipo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

y $J_m(x)$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$. Por lo tanto, para *cualquier* valor de v, la solución general de la ecuación (1) en $(0, \infty)$ se puede escribir como

$$y = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x). \tag{11}$$

$Y_\nu(x)$ se llama **función de Bessel de segundo tipo** de orden v. La **FIGURA 5.3.2** muestra las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$.

EJEMPLO 2 Solución general: ν es un entero

Al identificar $\nu^2 = 9$ y $v = 3$ con base en (11), podemos ver que la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1J_3(x) + c_2Y_3(x)$. ≡

Ecuaciones diferenciales solucionables en términos de funciones de Bessel Algunas veces es posible transformar una ecuación diferencial en una ecuación (1) mediante un cambio de variable. Entonces podemos expresar la solución de la ecuación original en términos de funciones de Bessel. Por ejemplo, si $t = \alpha x$, $\alpha > 0$, en

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{12}$$

entonces, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \alpha\frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \alpha^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Por consiguiente, (12) se convierte en

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2\alpha^2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{t}{\alpha}\right)\alpha\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0 \quad \text{o} \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

La última ecuación es la ecuación de Bessel de orden v con solución $y = c_1J_\nu(t) + c_2Y_\nu(t)$. Al volver a sustituir $t = \alpha x$ en la última expresión, encontramos que la solución general de (12) es

$$y = c_1J_\nu(\alpha x) + c_2Y_\nu(\alpha x). \tag{13}$$

La ecuación (12), llamada **ecuación paramétrica de Bessel de orden** v, y su solución general (13) son muy importantes en el estudio de ciertos problemas de valores en la frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales expresadas en coordenadas cilíndricas.

Otra ecuación que guarda cierto parecido con (1) es la **ecuación modificada de Bessel de orden** v,

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)\,y = 0. \tag{14}$$

Esta ED se puede resolver tal como se acaba de explicar para la ecuación (12). Esta vez, si $t = ix$, donde $i^2 = -1$, entonces (14) se convierte en

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

Puesto que las soluciones de la última ED son $J_\nu(t)$ y $Y_\nu(t)$, las soluciones de *valor complejo* de la ecuación (14) son $J_\nu(ix)$ y $Y_\nu(ix)$. Una solución de valores reales, llamada **función de Bessel modificada de primer tipo** de orden ν entero se define en términos de $J_\nu(ix)$:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \tag{15}$$

Véase el problema 21 en los ejercicios 5.3. Analógicamente a (10), la **función de Bessel modificada de segundo tipo** de orden $\nu \neq$ entero, se define como

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}, \tag{16}$$

y para el entero $\nu = n$,

$$K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x).$$

Como I_ν y K_ν son linealmente independientes en el intervalo $(0, \infty)$ para todo valor de ν, la solución general de (14) es

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x). \tag{17}$$

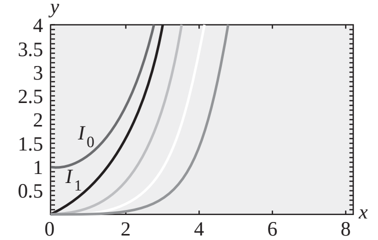


FIGURA 5.3.3 Función de Bessel modificada de primer tipo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

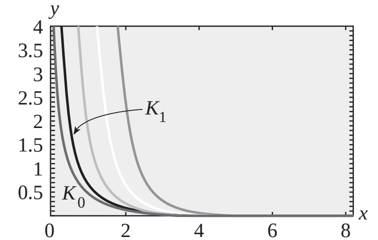


FIGURA 5.3.4 Función de Bessel modificada de segundo tipo para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Las gráficas de $I_0(x)$ e $I_1(x)$ se ilustran en la **FIGURA 5.3.3** y las de $K_0(x)$ y $K_1(x)$, en la **FIGURA 5.3.4**. A diferencia de las funciones de Bessel de primer y segundo tipos, las gráficas de las funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipos no son oscilatorias. Además, las gráficas en las figuras 5.3.3 y 5.3.4 ilustran el hecho de que las funciones de Bessel modificadas $I_n(x)$ y $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2\ldots$ no tienen ceros reales en el intervalo $(0, \infty)$. También, observe que $K_n(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$.

Procediendo como se hizo en (12) y (13), vemos que la solución general de la **forma paramétrica** de la ecuación de Bessel modificada de orden ν

$$x^2y'' + xy' - (\alpha^2x^2 + \nu^2)\, y = 0$$

en el intervalo $(0, \infty)$ es

$$y = c_1\, I_\nu(\alpha x) + c_2\, K_\nu(\alpha x).$$

Aún otra ecuación, importante porque muchas ecuaciones diferenciales encajan en esta forma mediante elecciones adecuadas de los parámetros, es

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right)y = 0, \quad p \geq 0. \tag{18}$$

Aunque no lo explicaremos de manera detallada, la solución general de (18),

$$y = x^a\left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 Y_p(bx^c)\right], \tag{19}$$

se puede encontrar mediante un cambio tanto en las variables independientes como en las dependientes: $z = bx^c$, $y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z)$. Si p no es un entero, entonces puede reemplazarse Y_p en (19) por J_{-p}.

EJEMPLO 3 Uso de la solución general (18)

Encuentre la solución general de $xy'' + 3y' + 9y = 0$ en $(0, \infty)$.

Solución Si escribimos la ED dada como

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{9}{x}y = 0$$

podemos hacer las siguientes identificaciones con (18):

$$1 - 2a = 3, \quad b^2c^2 = 9, \quad 2c - 2 = -1 \qquad \text{y} \qquad a^2 - p^2c^2 = 0.$$

Las ecuaciones primera y tercera implican $a = -1$ y $c = \frac{1}{2}$. Con estos valores, la segunda y cuarta se satisfacen cuando $b = 6$ y $p = 2$. De la ecuación (19) encontramos que en el intervalo $[0, \infty)$ la solución general para la ED dada es $y = x^{-1}\left[c_1J_2(6x^{1/2}) + c_2Y_2(6x^{1/2})\right]$. ≡

EJEMPLO 4 Vuelta a la degradación de rigidez de un resorte

Recuerde que en la sección 3.8 estudiamos que un modelo matemático para el movimiento libre no amortiguado de una masa sujeta a un resorte con degradación de rigidez está dado por $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$. Ahora ya podemos encontrar la solución general de la ecuación. Se deja como ejercicio demostrar que el cambio de variables $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}$ transforma la ecuación diferencial de la degradación del resorte en la forma

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

Vemos que esta ecuación tiene la forma de (1) con $\nu = 0$ donde los símbolos x y s tienen las funciones de y y x, respectivamente. La solución general de la nueva ecuación es $x = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s)$. Al sustituir nuevamente s, la solución general de $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ es

$$x(t) = c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}\right) + c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}\right).$$

Véanse los problemas 33 y 39 en los ejercicios 5.3. ≡

El otro modelo que se analizó en la sección 5.1 fue el de un resorte cuyas características cambian con el tiempo, $mx'' + ktx = 0$. Al dividir todo entre m vemos que $x'' + (k/m)tx = 0$ es la ecuación de Airy, $y'' + \alpha^2xy = 0$. Véase el ejemplo 2 de la sección 5.1. La solución general de la ecuación diferencial de Airy también se puede expresar en términos de las funciones de Bessel. Véanse los problemas 34, 35 y 40 de los ejercicios 5.3.

Propiedades A continuación enunciamos algunas de las propiedades más útiles de las funciones de Bessel de orden m, $m = 0, 1, 2, \ldots$:

$$i)\ J_{-m}(x) = (-1)^mJ_m(x) \qquad ii)\ J_m(-x) = (-1)^mJ_m(x)$$

$$iii)\ J_m(0) = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \qquad iv)\ \lim_{x\to 0^+} Y_m(x) = -\infty.$$

Observemos que la propiedad *ii*) indica que $J_m(x)$ es una función par si m es un entero par, y una función impar si m es un entero impar. En la figura 5.3.2, las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ ilustran la propiedad *iv*): $Y_m(x)$ no está acotada en el origen. Este hecho no resulta evidente luego del examen de la ecuación (10). Las soluciones de la ecuación de Bessel de orden 0 se pueden obtener mediante las soluciones $y_1(x)$ dadas en (21) y $y_2(x)$ en (22) de la sección 5.2. Es posible demostrar que la ecuación (21) de la sección 5.2 es $y_1(x) = J_0(x)$, mientras que la ecuación (22) de esa sección es

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

La función de Bessel de segundo tipo de orden 0, $Y_0(x)$, está definida entonces para ser la combinación lineal $Y_0(x) = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1(x) + \frac{2}{\pi}y_2(x)$ para $x > 0$. Es decir,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\left[\gamma + \ln\frac{x}{2}\right] - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

donde $\gamma = 0.57721566\ldots$ es la **constante de Euler**. Debido a la presencia del término logarítmico, resulta evidente que $Y_0(x)$ es discontinua en $x = 0$.

■ **Valores numéricos** Los primeros cinco ceros no negativos de $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ están dados en la tabla 5.3.1. Algunos valores adicionales de esas cuatro funciones se presentan en la tabla 5.3.2.

TABLA 5.3.1 Ceros de J_0, J_1, Y_0 y Y_1

$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
2.4048	0.0000	0.8936	2.1971
5.5201	3.8317	3.9577	5.4297
8.6537	7.0156	7.0861	8.5960
11.7915	10.1735	10.2223	11.7492
14.9309	13.3237	13.3611	14.8974

TABLA 5.3.2 Valores numéricos de J_0, J_1, Y_0 y Y_1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	1.0000	0.0000	—	—
1	0.7652	0.4401	0.0883	−0.7812
2	0.2239	0.5767	0.5104	−0.1070
3	−0.2601	0.3391	0.3769	0.3247
4	−0.3971	−0.0660	−0.0169	0.3979
5	−0.1776	−0.3276	−0.3085	0.1479
6	0.1506	−0.2767	−0.2882	−0.1750
7	0.3001	−0.0047	−0.0259	−0.3027
8	0.1717	0.2346	0.2235	−0.1581
9	−0.0903	0.2453	0.2499	0.1043
10	−0.2459	0.0435	0.0557	0.2490
11	−0.1712	−0.1768	−0.1688	0.1637
12	0.0477	−0.2234	−0.2252	−0.0571
13	0.2069	−0.0703	−0.0782	−0.2101
14	0.1711	0.1334	0.1272	−0.1666
15	−0.0142	0.2051	0.2055	0.0211

■ **Relación de recurrencia diferencial** Las fórmulas de recurrencia que relacionan las funciones de Bessel de diferentes órdenes son importantes en teoría y en aplicaciones. En el ejemplo siguiente deduciremos una **relación de recurrencia diferencial**.

EJEMPLO 5 Deducción mediante definición de series

Deduzca la fórmula $xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$.

Solución De la ecuación (7) podemos deducir que

$$\begin{aligned} xJ'_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\nu)}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \\ &= \nu\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \\ &= \nu J_\nu(x) + x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}}_{k=n-1} \\ &= \nu J_\nu(x) - x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2+\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

≡

El resultado del ejemplo 5 se puede escribir en forma alternativa. Al dividir $xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x)$ entre x se obtiene

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Esta última expresión se reconoce como una ecuación diferencial lineal de primer orden en $J_\nu(x)$. Al multiplicar ambos lados de la igualdad por el factor de integración $x^{-\nu}$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{20}$$

Asimismo, se puede demostrar que

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_\nu(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x). \tag{21}$$

Véase el problema 27 de los ejercicios 5.3. Las relaciones de recurrencia diferenciales (20) y (21) también son válidas para la función de Bessel de segundo tipo, $Y_\nu(x)$. Observe que cuando $\nu = 0$, de (14) se deduce que

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad \text{y} \quad Y'_0(x) = -Y_1(x). \tag{22}$$

Una aplicación de estos resultados se da en el problema 39 en los ejercicios 5.3.

Funciones esféricas de Bessel Cuando el orden ν es la mitad de un entero impar, es decir, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$, la función de Bessel de primer tipo $J_\nu(x)$ puede expresarse en términos de las funciones elementales sen x, cos x y potencias de x. Estas funciones de Bessel se denominan **funciones esféricas de Bessel**. Consideremos el caso en que $\nu = \frac{1}{2}$. De (7),

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1 + \frac{1}{2} + n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

En vista de la propiedad $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$ y de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ los valores de $\Gamma(1 + \frac{1}{2} + n)$ para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \Gamma(1 + \tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \Gamma(1 + \tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \frac{5 \cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3 4 \cdot 2}\sqrt{\pi} = \frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{9}{2}) = \Gamma(1 + \tfrac{7}{2}) = \tfrac{7}{2}\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \frac{7 \cdot 5!}{2^6 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2^6 \cdot 6 \cdot 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7!}{2^7 3!}\sqrt{\pi}.$$

En general, $$\Gamma(1 + \tfrac{1}{2} + n) = \frac{(2n + 1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

Por lo tanto,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Puesto que la serie infinita incluida en la última línea es la serie de Maclaurin para sen x, hemos demostrado que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{sen}\, x. \tag{23}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{24}$$

Véanse los problemas 31 y 32 en los ejercicios 5.3.

5.3.2 Funciones de Legendre

Solución Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación de Legendre (2), sustituimos la serie $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^k$, desplazamos los índices de la suma y combinamos las series para obtener

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = [n(n+1)c_0 + 2c_2] + [(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3]x$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j]x^j = 0,$$

lo cual implica que

$$n(n+1)c_0 + 2c_2 = 0$$
$$(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3 = 0$$
$$(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j = 0$$

o

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$
$$c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$

$$c_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j, \qquad j = 2, 3, 4, \ldots. \tag{25}$$

Si j asume los valores 2, 3, 4, …, se produce la relación de recurrencia (25).

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}c_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

$$c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6 \cdot 5}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7 \cdot 6}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, cuando menos para $|x| < 1$, obtenemos dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots\right] \\ y_2(x) &= c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Observe que si n es un entero par, la primera serie termina, mientras que $y_2(x)$ es una serie infinita. Por ejemplo, si $n = 4$, entonces

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{4 \cdot 5}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{4!}x^4\right] = c_0\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right].$$

De igual manera, cuando n es un entero impar, la serie para $y_2(x)$ termina con x^n; es decir, *cuando n es un entero no negativo*, *obtenemos una solución en forma de polinomio de n-ésimo grado* de la ecuación de Legendre.

Como sabemos que un múltiplo constante de una solución de la ecuación de Legendre también es una solución, se acostumbra elegir valores específicos para c_0 o c_1, dependiendo de si n es un entero positivo par o impar, respectivamente. Para $n = 0$ elegimos $c_0 = 1$ y para $n = 2, 4, 6, \ldots,$

$$c_0 = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots n};$$

mientras que para $n = 1$ se elige $c_1 = 1$, y para $n = 3, 5, 7, \ldots,$

$$c_1 = (-1)^{(n-1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdots (n - 1)}.$$

Por ejemplo, cuando $n = 4$ tenemos

$$y_1(x) = (-1)^{4/2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right] = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Polinomios de Legendre Estas soluciones polinomiales específicas de n-ésimo grado se denominan **polinomios de Legendre** y se representan mediante $P_n(x)$. A partir de las series para $y_1(x)$ y $y_2(x)$ y de las elecciones para c_0 y c_1 que acabamos de explicar, encontramos que algunos primeros polinomios de Legendre son

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, && P_1(x) = x, \\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), && P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), && P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \tag{27}$$

Recordemos que $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, …, son, a su vez, soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ n = 1: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ n = 2: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ n = 3: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \\ \vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \end{aligned} \tag{28}$$

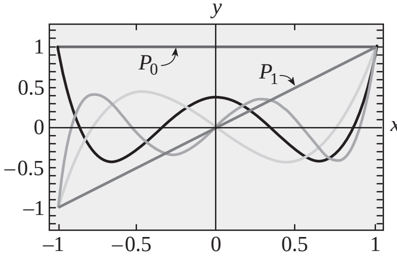


FIGURA 5.3.5 Polinomios de Legendre para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las gráficas, en el intervalo $[-1, 1]$, de los seis polinomios de Legendre dados en (27) se presentan en la **FIGURA 5.3.5**.

Propiedades Se le invita a verificar las siguientes propiedades mediante los polinomios de Legendre dados en (27).

i) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

ii) $P_n(1) = 1$ *iii*) $P_n(-1) = (-1)^n$

iv) $P_n(0) = 0$, n impar *v*) $P'_n(0) = 0$, n par.

La propiedad (*i*) indica, tal como se puede apreciar en la figura 5.3.5, que $P_n(x)$ es una función par o impar cuando n es par o impar.

Relación de recurrencia Las relaciones de recurrencia entre los polinomios de Legendre de diferentes grados también son importantes en algunos aspectos de sus aplicaciones. Establecemos, sin demostrarla, la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$(k + 1)P_{k+1}(x) - (2k + 1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \tag{29}$$

la cual es válida para $k = 1, 2, 3, \ldots$. En (27) enumeramos los primeros seis polinomios de Legendre. Si, digamos, se desea determinar $P_6(x)$, es posible usar (29) con $k = 5$. Esta relación expresa $P_6(x)$ en términos de $P_4(x)$ y $P_5(x)$. Véase el problema 45 de los ejercicios 5.3.

Otra fórmula, aunque no una relación de recurrencia, puede generar polinomios de Legendre por diferenciación. La **fórmula de Rodrigues** para estos polinomios es

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Véase el problema 48 en los ejercicios 5.3.

Comentarios

Aunque hemos supuesto que el parámetro n en la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

representa un entero no negativo, en un marco más general, n puede representar a cualquier número real. Si *n no* es un entero no negativo, entonces las dos funciones de Legendre $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dadas en (26) son series infinitas convergentes en un intervalo abierto $(-1, 1)$ y divergentes (no acotadas) en $x = \pm 1$. Si n es un entero no negativo, entonces como acabamos de ver, una de las funciones de Legendre en (26) es un polinomio y la otra es una serie infinita convergente para $-1 < x < 1$. Debe tener presente el hecho de que la ecuación de Legendre tiene soluciones acotadas en el intervalo *cerrado* $[-1, 1]$ sólo cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$. Más concretamente, las únicas funciones de Legendre que están acotadas en un intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ o los múltiplos constantes de estos polinomios. Consulte el problema 47 en los ejercicios 5.3 y el problema 24 en los ejercicios de repaso del capítulo 5.

5.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

5.3.1 Funciones de Bessel

En los problemas del 1 al 6, use (1) para encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada en $(0, \infty)$.

1. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
3. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$
4. $16x^2y'' + 16xy' + (16x^2 - 1)y = 0$
5. $xy'' + y' + xy = 0$
6. $\frac{d}{dx}[xy'] + \left(x - \frac{4}{x}\right)y = 0$

En los problemas del 7 al 10, utilice la ecuación (12) para encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada en $(0, \infty)$.

7. $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$
8. $x^2y'' + xy' + (36x^2 - \frac{1}{4})y = 0$
9. $x^2y'' + xy' + (25x^2 - \frac{4}{9})y = 0$
10. $x^2y'' + xy' + (2x^2 - 64)y = 0$

En los problemas 11 y 12, use el cambio de variable indicado para determinar la solución general de la ecuación diferencial dada en $(0, \infty)$.

11. $x^2y'' + 2xy' + \alpha^2x^2y = 0; \quad y = x^{-1/2}u(x)$
12. $x^2y'' + (\alpha^2x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4})y = 0; \quad y = \sqrt{x}u(x)$

En los problemas del 13 al 20, use (18) para determinar la solución general de la ecuación diferencial dada en $(0, \infty)$.

13. $xy'' + 2y' + 4y = 0$
14. $xy'' + 3y' + xy = 0$
15. $xy'' - y' + xy = 0$
16. $xy'' - 5y' + xy = 0$
17. $x^2y'' + (x^2 - 2)y = 0$
18. $4x^2y'' + (16x^2 + 1)y = 0$
19. $xy'' + 3y' + x^3y = 0$
20. $9x^2y'' + 9xy' + (x^6 - 36)y = 0$
21. Use la serie incluida en (7) para verificar que $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$ es una función real.
22. Suponga que en la ecuación (18) b puede ser un número imaginario puro, es decir, $b = \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = -1$. Use este supuesto para expresar la solución general de la ecuación diferencial dada en términos de las funciones de Bessel modificadas I_n y K_n.
    a) $y'' - x^2y = 0$
    b) $xy'' + y' - 7x^3y = 0$

En los problemas del 23 al 26, primero usamos (18) para expresar la solución general de la ecuación diferencial dada en términos de las funciones de Bessel. Después aplicamos (23) y (24) y expresamos la solución general en términos de funciones elementales.

23. $y'' + y = 0$

24. $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$

25. $16x^2y'' + 32xy' + (x^4 - 12)y = 0$

26. $4x^2y'' - 4xy' + (16x^2 + 3)y = 0$

27. ***a***) Proceda como en el ejemplo 5 para demostrar que

$$xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x).$$

[*Sugerencia:* Escriba $2n + \nu = 2(n + \nu) - \nu$.]

b) Use el resultado del inciso *a*) para deducir (21).

28. Emplee la fórmula obtenida en el ejemplo 5 junto con el inciso *a*) del problema 27 para deducir la relación de recurrencia

$$2\nu J_\nu(x) = xJ_{\nu+1}(x) + xJ_{\nu-1}(x).$$

En los problemas 29 y 30, use (20) o (21) para obtener el resultado que se proporciona.

29. $\int_0^x rJ_0(r)\,dr = xJ_1(x)$

30. $J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$

31. Proceda como en la página 266 para derivar la forma elemental de $J_{-1/2}(x)$ dada en (24).

32. ***a***) Use la relación de recurrencia del problema 28 junto con (23) y (24) para expresar $J_{3/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$ y $J_{5/2}(x)$ en términos de sen x, cos x y potencias de x.

b) Mediante una herramienta de graficación trace las gráficas de $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$ y $J_{5/2}(x)$.

33. Aplique el cambio de variables $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}$ para demostrar que la ecuación diferencial de un resorte que se degrada $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$, se convierte en

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

34. Demuestre que $y = x^{1/2}w(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$ es una solución de la ecuación diferencial de Airy $y'' + \alpha^2xy = 0$, $x > 0$, siempre que w sea una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{3}$, es decir, $t^2w'' + tw' + (t^2 - \frac{1}{9})w = 0$, $t > 0$. [*Sugerencia:* Después de diferenciar, sustituir y simplificar, establezca $t = \frac{2}{3}\alpha x^{3/2}$.]

35. ***a***) Con el resultado del problema 34, exprese la solución general de la ecuación diferencial de Airy para $x > 0$ en términos de la función de Bessel.

b) Verifique los resultados del inciso *a*) mediante (18).

36. Use la tabla 5.3.1 para encontrar los primeros tres valores propios positivos y sus correspondientes funciones propias del problema de valores en la frontera

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0,$$
$$y(x),\ y'(x) \text{ acotada cuando } x \to 0^+,\ y(2) = 0.$$

[*Sugerencia*: Al identificar $\lambda = \alpha^2$, la ED es la ecuación paramétrica de Bessel de orden cero.]

37. ***a***) Use (18) para demostrar que la solución general de la ecuación diferencial $xy'' + \lambda y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ es

$$y = c_1\sqrt{x}J_1(2\sqrt{\lambda x}) + c_2\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{\lambda x}).$$

b) Verifique por sustitución directa que $y = \sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$ es una solución particular de la ED para el caso $\lambda = 1$.

38. ***a***) Use (15) para demostrar que

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\operatorname{senh} x.$$

b) Use (15) para demostrar que

$$I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x.$$

c) Exprese $K_{1/2}(x)$ en términos de funciones elementales.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

39. ***a***) Use la solución general dada en el ejemplo 4 para resolver el PVI

$$4x'' + e^{-0.1t}x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -\tfrac{1}{2}.$$

También utilice $J'_0(x) = -J_1(x)$ y $Y'_0(x) = -Y_1(x)$ junto con la tabla 5.3.1 o un CAS para calcular los coeficientes.

b) Utilice un CAS para graficar la solución obtenida en el inciso *a*) en el intervalo $0 \le t \le \infty$.

40. ***a***) Use la solución general obtenida en el problema 35 para resolver el PVI

$$4x'' + tx = 0, \quad x(0.1) = 1, \quad x'(0.1) = -\tfrac{1}{2}.$$

Utilice un CAS para calcular los coeficientes.

b) Use un CAS para graficar la solución obtenida en el inciso *a*) en el intervalo $0 \le t \le 200$.

41. Columna flexionada por su propio peso Una columna delgada uniforme de longitud L, ubicada verticalmente con un extremo empotrado en el suelo, se flexionará o curvará, apartándose de la vertical, por la influencia de su propio peso, cuando su longitud o altura sea mayor que cierto valor crítico. Se puede demostrar que la deflexión angular $\theta(x)$ de la columna respecto a la vertical en un punto $P(x)$ es una solución del problema de valores en la frontera

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2} + \delta g(L - x)\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(L) = 0,$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal, δ es la densidad lineal constante y x es la distancia medida a lo largo de la columna a partir de la base. Véase la **FIGURA 5.3.6**.

La columna se curvará sólo para aquellos valores de L donde el problema de valores en la frontera tenga una solución no trivial.

a) Formule nuevamente el problema de valores en la frontera cambiando las variables $t = L - x$. Entonces use los resultados de un problema anterior de este bloque de ejercicios para expresar la solución general de la ecuación diferencial en términos de funciones de Bessel.

b) Use la solución general encontrada en el inciso *a*) para establecer una solución del problema de valores en la frontera y una ecuación que defina la longitud crítica L, es decir, el valor mínimo de L respecto al cual la columna empezará a curvarse.

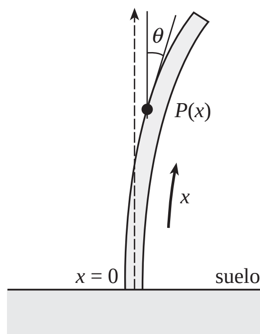


FIGURA 5.3.6 Columna para el problema 41

c) Con ayuda de un CAS, determine la longitud crítica L de una sólida varilla de acero con radio $r = 0.05$ pulgadas, $\delta g = 0.28\,A$ libras/pulg, $E = 2.6 \times 10^7$ libras/pulg^2, $A = \pi r^2$ e $I = \frac{1}{4}\pi r^4$.

42. Curvatura de una columna delgada En el ejemplo 3 de la sección 3.9 vimos que cuando una fuerza compresiva vertical constante, o carga, P se aplicaba a una columna delgada de sección transversal uniforme y empotrada en ambos extremos, la deflexión $y(x)$ era una solución del PVF:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

a) Si el factor de rigidez de curvatura EI es proporcional a x, entonces $EI(x) = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad. Si $EI(L) = kL = M$ es el factor de rigidez máximo, entonces $k = M/L$ y, por lo tanto, $EI(x) = Mx/L$. Utilice la información del problema 37 para encontrar la solución de

$$M\frac{x}{L}\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

cuando se sabe que $\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{\lambda x})$ *no* es cero en $x = 0$.

b) Utilice la tabla 5.3.1 para encontrar la carga de Euler P_1 para la columna.

c) Utilice un CAS para graficar el primer modo de curvatura $y_1(x)$ que corresponda a la carga de Euler P_1. Por cuestiones de simplicidad, suponga que $c_1 = 1$ y $L = 1$.

43. Péndulo de longitud variable Para el péndulo simple descrito en la página 179 de la sección 3.11, suponga que la barra que sostiene la masa m en un extremo se reemplaza por un alambre o una cuerda flexible y que el alambre está enrollado sobre una polea en el punto de apoyo O de la figura 3.11.3. De esta manera, mientras está en movimiento en un plano vertical, la masa m puede elevarse o descender. En otras palabras, la longitud $l(t)$ del péndulo varía con el tiempo. Bajo los mismos supuestos que llevaron a la ecuación (6) en la sección 3.11, se puede demostrar* que la ecuación diferencial para el ángulo de desplazamiento θ es ahora

$$l\theta'' + 2l'\theta' + g\,\text{sen}\,\theta = 0.$$

a) Si l aumenta a una tasa constante v y si $l(0) = l_0$, demuestre que una linealización de la ED anterior es

$$(l_0 + vt)\theta'' + 2v\theta' + g\theta = 0. \qquad \textbf{(31)}$$

b) Haga el cambio de variables $x = (l_0 + vt)/v$, y demuestre que (31) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{vx}\theta = 0.$$

c) Use el inciso *b*) y (18) para expresar la solución general de la ecuación (31) en términos de funciones de Bessel.

d) Use la solución general obtenida en el inciso *c*) para resolver el problema de valor inicial constituido por la ecuación (31) y las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$. [*Sugerencia:* Para simplificar los cálculos, aplique un cambio adicional de variable $u = \frac{2}{v}\sqrt{g(l_0 + vt)} = 2\sqrt{\frac{g}{v}}\,x^{1/2}$. También, recuerde que (20) es aplicable tanto para $J_1(u)$ como para $Y_1(u)$. Finalmente, la identidad

$$J_1(u)Y_2(u) - J_2(u)Y_1(u) = -\frac{2}{\pi u}$$

le será útil.]

e) Utilice un CAS para graficar la solución $\theta(t)$ del PVI del inciso *d*) cuando $l_0 = 1$ pie, $\theta_0 = \frac{1}{10}$ radián y $v = \frac{1}{60}$ pies/s. Experimente con la gráfica mediante diferentes intervalos de tiempo como [0, 10], [0, 30], etcétera.

f) ¿Qué indican las gráficas en cuanto al ángulo de desplazamiento $\theta(t)$ a medida que la longitud l del alambre aumenta con el tiempo?

5.3.2 Funciones de Legendre

44. a) Use las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación de Legendre dada en (26) y la elección adecuada de c_0 y c_1 para encontrar los polinomios de Legendre $P_6(x)$ y $P_7(x)$.

b) Escriba las ecuaciones diferenciales para las que $P_6(x)$ y $P_7(x)$ sean soluciones particulares.

45. Use la relación de recurrencia (29) y $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ para generar los siguientes seis polinomios de Legendre.

46. Demuestre que la ecuación diferencial

$$\text{sen}\,\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)(\text{sen}\,\theta)y = 0$$

se puede transformar en ecuación de Legendre mediante la sustitución $x = \cos\theta$.

47. Encuentre los primeros tres valores positivos de λ para los cuales el problema

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$
$$y(0) = 0, \; y(x), \; y'(x) \text{ acotada en } [-1, 1]$$

tiene soluciones no triviales.

Tareas para el laboratorio de cómputo

48. Para los fines de este problema, ignore la lista de polinomios de Legendre dada en la página 268 y las gráficas de la figura 5.3.5. Utilice la fórmula de Rodrigues (30) para generar los

* Véase *Mathematical Methods in Physical Sciences*, Mary Boas, John Wiley & Sons, Inc., 1996; también el artículo de Borelli, Coleman y Hobson en *Mathematics Magazine*, vol. 58, núm. 2, marzo de 1985.

polinomios de Legendre $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$. Con un CAS, desarrolle las diferenciaciones y simplificaciones.

49. Utilice un CAS para graficar $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

50. Emplee una aplicación apropiada para buscar raíces y determine los ceros de $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$. Si los polinomios de Legendre son funciones incorporadas en su CAS, encuentre ceros de polinomios de Legendre de grado superior. Formule un supuesto acerca de la ubicación de los ceros en cualquier polinomio de Legendre $P_n(x)$, y después investigue si es verdadero.

5 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 y 2, responda cierto o falso sin remitirse al texto.

1. La solución general de $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ es $y = c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x)$. ______

2. Puesto que $x = 0$ es un punto singular irregular de $x^3y'' - xy' + y = 0$, la ED no posee solución que sea analítica en $x = 0$. ______

3. Se garantiza que ambas soluciones en forma de series de potencias de $y'' + \ln(x + 1)y' + y = 0$ centradas en el punto ordinario $x = 0$ convergen para toda x, ¿en *cuál* de los siguientes intervalos?

***a*)** $(-\infty, \infty)$ ***b*)** $(-1, \infty)$

***c*)** $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ***c*)** $[-1, 1]$

4. $x = 0$ es un punto ordinario de cierta ecuación diferencial lineal. Después de sustituir en la ED la solución supuesta $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se obtiene el siguiente sistema algebraico al igualar los coeficientes x^0, x^1, x^2 y x^3 a cero:

$$\begin{aligned} 2c_2 + 2c_1 + c_0 &= 0 \\ 6c_3 + 4c_2 + c_1 &= 0 \\ 12c_4 + 6c_3 + c_2 - \tfrac{1}{3}c_1 &= 0 \\ 20c_5 + 8c_4 + c_3 - \tfrac{2}{3}c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que c_0 y c_1 son arbitrarios, escriba los primeros cinco términos de dos soluciones en forma de series de potencia de la ecuación diferencial.

5. Suponga se sabe que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_k(x - 4)^k$ converge en -2 y diverge en 13. Analice si la serie converge en -7, 0, 7, 10 y 11. Las respuestas posibles son *sí*, *no*, *quizá*.

6. Utilice las series de Maclaurin para sen x y cos x junto con una división larga para encontrar los primeros tres términos diferentes de cero de una serie de potencias en x para la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

En los problemas 7 y 8, construya una ecuación diferencial lineal de segundo orden que tenga las propiedades dadas.

7. Un punto singular regular en $x = 1$ y un punto singular irregular en $x = 0$.

8. Puntos singulares regulares en $x = 1$ y en $x = -3$.

En los problemas 9 a 14, utilice un método adecuado de series infinitas en torno a $x = 0$ para encontrar dos soluciones de la ecuación diferencial dada.

9. $2xy'' + y' + y = 0$ **10.** $y'' - xy' - y = 0$

11. $(x - 1)y'' + 3y = 0$ **12.** $y'' - x^2y' + xy = 0$

13. $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0$ **14.** $(\cos x)y'' + y = 0$

En los problemas 15 y 16, resuelva el problema de valor inicial dado.

15. $y'' + xy' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

16. $(x + 2)y'' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

17. Sin resolver la ecuación diferencial

$$(1 - 2 \operatorname{sen} x)y'' + xy = 0$$

encuentre el límite más bajo para el radio de convergencia de las soluciones en forma de series de potencia en torno al punto ordinario $x = 0$.

18. Aunque $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial, explique por qué no es buena idea intentar encontrar una solución del PVI

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = -6, \quad y'(1) = 3$$

de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Mediante las series de potencias, encuentre una mejor manera de resolver el problema.

En los problemas 19 y 20, determine si $x = 0$ es un punto ordinario, un punto singular o un punto singular irregular de la ecuación diferencial dada. [*Sugerencia:* Recuerde las series de Maclaurin para cos x y e^x.]

19. $xy'' + (1 - \cos x)y' + x^2y = 0$

20. $(e^x - 1 - x)y'' + xy = 0$

21. Observe que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + x^2y' + 2xy = 5 - 2x + 10x^3.$$

Utilice el supuesto $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para encontrar la solución general $y = y_c + y_p$ que consista en tres series de potencias centradas en $x = 0$.

22. La ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = x^2 + y^2$ no se puede resolver en términos de funciones elementales. No obstante, una solución puede expresarse en términos de las funciones de Bessel.

***a*)** Demuestre que la sustitución $y = -\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$ lleva a la ecuación $u'' + x^2u = 0$.

***b*)** Use la expresión (18) de la sección 5.3 para encontrar la solución general de $u'' + x^2u = 0$.

***c*)** Utilice (20) y (21) de la sección 5.3 en las formas

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

y $$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x)$$

como ayuda para mostrar que una familia de soluciones de un parámetro de $dy/dx = x^2 + y^2$ está dada por

$$y = x \frac{J_{3/4}(\frac{1}{2}x^2) - cJ_{-3/4}(\frac{1}{2}x^2)}{cJ_{1/4}(\frac{1}{2}x^2) + J_{-1/4}(\frac{1}{2}x^2)}.$$

23. Exprese la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales en el intervalo $(0, \infty)$ en términos de funciones de Bessel.

a) $4x^2y'' + 4xy' + (64x^2 - 9)y = 0$

b) $x^2y'' + xy' - (36x^2 + 9)y = 0$

24. ***a***) A partir de las expresiones (27) y (28) de la sección 5.3 sabemos que cuando $n = 0$, la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ tiene la solución polinomial $y = P_0(x) = 1$. Utilice la ecuación (5) de la sección 3.2 para demostrar que una segunda función de Legendre que satisface la ED en el intervalo $(-1, 1)$ es

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

b) También sabemos, con base en (27) y (28) de la sección 5.3, que cuando $n = 1$ la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ posee la solución polinomial $y = P_1(x) = x$. Utilice la ecuación (5) de la sección 3.2 para demostrar que una segunda función de Legendre que satisface la ED en el intervalo $(-1, 1)$ es

$$y = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

c) Utilice una herramienta de graficación para trazar las funciones de Legendre dadas en los incisos *a*) y *b*).

25. ***a***) Utilice series binomiales para demostrar formalmente que

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

b) Utilice el resultado obtenido en el inciso *a*) para demostrar que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Véanse las propiedades *ii*) y *iii*) incluidas en la página 268.

6 SOLUCIONES NUMÉRICAS A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Estructura del capítulo

Una ecuación diferencial no siempre debe poseer una solución, e incluso cuando exista alguna es posible que no podamos presentarla en forma explícita o implícita; entonces deberemos darnos por satisfechos con una **aproximación** a la solución. En el presente capítulo continuaremos la idea básica presentada en la sección 2.6, la cual se refiere al uso de la ecuación diferencial para construir algoritmos con los cuales aproximar las coordenadas de los puntos ubicados sobre una curva solución real.

6.1 Métodos de Euler y análisis de errores

Introducción En el capítulo 2 analizamos uno de los métodos numéricos más simples para aproximar soluciones de problemas de valor inicial de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Recuerde que el elemento central del **método de Euler** era la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{1}$$

donde f representa a la función obtenida a partir de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Mediante el uso recursivo de (1) para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se llega a las coordenadas y $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de puntos ubicados en sucesivas "líneas tangentes" a la curva solución en $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o $x_n = x_0 + nh$, donde h es una constante y equivale al tamaño del incremento entre x_n y x_{n+1}. Los valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ aproximan los valores de una solución $y(x)$ del problema de valor inicial (PVI) en $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Sin embargo, cualquier ventaja de (1) debida a su simplicidad se pierde en lo burdo de sus aproximaciones.

Una comparación En el problema 4 del ejercicio 2.6 se le pidió utilizar el método de Euler y obtener el valor aproximado de $y(1.5)$ para la solución del problema de valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. Usted debió haber obtenido la solución analítica $y = e^{x^2-1}$, así como resultados similares a los presentados en las tablas 6.1.1 y 6.1.2.

TABLA 6.1.1 Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4903	0.5625	16.12

TABLA 6.1.2 Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1000	1.1079	0.0079	0.72
1.10	1.2155	1.2337	0.0182	1.47
1.15	1.3492	1.3806	0.0314	2.27
1.20	1.5044	1.5527	0.0483	3.11
1.25	1.6849	1.7551	0.0702	4.00
1.30	1.8955	1.9937	0.0982	4.93
1.35	2.1419	2.2762	0.1343	5.90
1.40	2.4311	2.6117	0.1806	6.92
1.45	2.7714	3.0117	0.2403	7.98
1.50	3.1733	3.4903	0.3171	9.08

En este caso, con un tamaño del paso de $h = 0.1$, un error relativo de 16% en el cálculo de la aproximación a $y(1.5)$ es completamente inaceptable. A costa de duplicar el número de operaciones, se obtiene cierta mejora en la precisión al reducir a la mitad el tamaño del paso en $h = 0.05$.

Errores en métodos numéricos Al seleccionar y utilizar un método numérico para determinar la solución de un problema de valor inicial, debemos estar conscientes de las distintas fuentes de error. Para ciertos tipos de cálculo, la acumulación de errores puede reducir la precisión de una aproximación hasta el punto de volver inservible el cálculo. Por otra parte, dependiendo del uso dado a una solución numérica, una precisión extrema podría no compensar el trabajo y la complicación adicionales.

Una fuente de error que siempre está presente en los cálculos es el **error de redondeo**. Éste se genera a partir del hecho de que toda calculadora o computadora pueden representar números utilizando únicamente cierta cantidad finita de dígitos. Suponga, para efectos de ilustración, que contamos con una calculadora que utiliza aritmética de base 10 y soporta cuatro dígitos, de este modo $\frac{1}{3}$ se representa en la calculadora como 0.3333 y $\frac{1}{9}$ como 0.1111. Si utilizamos esta calculadora para determinar $(x^2 - \frac{1}{9})/(x - \frac{1}{3})$ para $x = 0.3334$, obtenemos

$$\frac{(0.3334)^2 - 0.1111}{0.3334 - 0.3333} = \frac{0.1112 - 0.1111}{0.3334 - 0.3333} = 1.$$

Sin embargo, con ayuda de un poco de álgebra vemos que

$$\frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})}{x - \frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3},$$

de modo que cuando $x = 0.3334$, $(x^2 - \frac{1}{9})/(x - \frac{1}{3}) \approx 0.3334 + 0.3333 = 0.6667$. Este ejemplo demuestra que los efectos de errores de redondeo pueden resultar bastante serios a menos que se tenga cuidado. Una forma de reducir el efecto de los errores de redondeo es minimizar la cantidad de cálculos. Al emplear computadoras, otra técnica es utilizar aritmética de doble precisión para verificar los resultados. En términos generales, el error de redondeo es impredecible y difícil de analizar, y lo pasaremos por alto en el siguiente análisis de errores. Nos concentraremos en analizar el error introducido por utilizar una fórmula o un algoritmo para aproximar los valores de la solución.

Errores de truncamiento para el método de Euler En la secuencia de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$, generados a partir de (1), el valor de y_1 generalmente no concordará con la solución real evaluada en x_1, a saber, $y(x_1)$, debido a que el algoritmo sólo proporciona una aproximación de línea recta para la solución. Observe la figura 2.6.2. El error se denomina **error de truncamiento local**, **error de fórmula** o **error de discretización**. Se presenta en cada etapa; es decir, si suponemos que y_n es precisa, entonces y_{n+1} contendrá un error de truncamiento local.

A fin de deducir una fórmula en el error de truncamiento local para el método de Euler, utilizamos la fórmula de Taylor con residuo. Si una función $y(x)$ posee $k + 1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contiene a a y a x, entonces

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x - a}{1!} + \cdots + y^{(k)}(a)\frac{(x - a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c)\frac{(x - a)^{k+1}}{(k + 1)!},$$

donde c representa un punto entre a y x. Al establecer $k = 1$, $a = x_n$ y $x = x_{n+1} = x_n + h$, obtenemos

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)\frac{h}{1!} + y''(c)\frac{h^2}{2!} \quad \text{o} \quad y(x_{n+1}) = \underbrace{y_n + hf(x_n, y_n)}_{y_{n+1}} + y''(c)\frac{h^2}{2!}.$$

El método de Euler (1) es la última fórmula sin el término final; por ello, el error de truncamiento local en y_{n+1} es

$$y''(c)\frac{h^2}{2!} \quad \text{donde} \quad x_n < c < x_{n+1}.$$

El valor de c por lo general se desconoce (existe en forma teórica), y así el error *exacto* no puede calcularse, aunque un límite superior sobre el valor absoluto del error es

$$M\frac{h^2}{2!} \quad \text{donde} \quad M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|.$$

Al analizar los errores que surgen por uso de los métodos numéricos, resulta útil emplear la notación $O(h^n)$. Para definir este concepto, hacemos que $e(h)$ indique el error en un cálculo numérico que depende de h. Se dice entonces que $e(h)$ es el orden h^n, indicado mediante $O(h^n)$, si existe una constante C y un entero positivo n tales que $|e(h)| \le Ch^n$ para un h lo suficientemente pequeño. De este modo, el error de truncamiento local para el método de Euler será $O(h^2)$. Se observa que, en general, si en un método numérico $e(h)$ es de orden h^n, y h es reducido a la mitad, el nuevo error será aproximadamente $C(h/2)^n = Ch^n/2^n$, es decir, el error se reduce por un factor de $(\frac{1}{2})^n$.

EJEMPLO 1 Acotamiento del error de truncamiento local

Determine una cota para los errores de truncamiento local para el método de Euler aplicado a $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

Solución De la solución $y = e^{x^2-1}$ obtenemos $y'' = (2 + 4x^2)e^{x^2-1}$ y, por lo tanto, el error de truncamiento local es

$$y''(c)\,\frac{h^2}{2} = (2 + 4c^2)e^{(c^2-1)}\,\frac{h^2}{2},$$

donde c está entre x_n y $x_n + h$. En particular, para $h = 0.1$ podemos obtener una cota superior del error de truncamiento local para y_1 si reemplazamos c con 1.1:

$$[2 + (4)(1.1)^2]e^{((1.1)^2-1)}\,\frac{(0.1)^2}{2} = 0.0422.$$

Tal como puede advertirse en la tabla 6.1.1, después de la primera etapa el error es de 0.0337, menor que el valor dado por el acotamiento.

Asimismo, podemos obtener una cota para el error de truncamiento local a partir de cualquiera de las cinco etapas que se muestran en la tabla 6.1.1 si reemplazamos c por 1.5 (mediante este valor de c obtenemos el valor máximo de $y''(c)$ para cualquier etapa, sin embargo, puede resultar excesivo para las primeras etapas). Luego de hacerlo tenemos

$$[2 + (4)(1.5)^2]e^{((1.5)^2-1)}\,\frac{(0.1)^2}{2} = 0.1920 \tag{2}$$

como acotamiento superior para el error de truncamiento local en cada etapa. ≡

En el ejemplo 1, observe que si h se reduce a la mitad a 0.05, el acotamiento de error será de 0.0480, alrededor de la cuarta parte de lo calculado en (2). Esto era de esperarse porque el error de truncamiento local para el método de Euler es $O(h^2)$.

En el análisis anterior, supusimos que el valor de y_n era exacto cuando se calculó y_{n+1}, pero esto no es así porque contiene errores de truncamiento local en cada una de las etapas anteriores. Este error total se conoce como **error de truncamiento global**. Un análisis integral del error de truncamiento global está más allá del alcance de este libro, pero se puede demostrar que el error de truncamiento global es $O(h)$ para el método de Euler.

En cuanto al método de Euler, esperamos que si el tamaño del paso se reduce a la mitad, el error también lo haga. Esto se confirma en las tablas 6.1.1 y 6.1.2, donde el error absoluto en $x = 1.50$ con $h = 0.1$ es de 0.5625 y con $h = 0.05$ es de 0.3171, casi la mitad del valor anterior.

En general, es posible demostrar que si un método para la solución numérica de una ecuación diferencial tiene un error de truncamiento local $O(h^{\alpha+1})$, entonces el error de truncamiento global es $O(h^\alpha)$.

En el resto de ésta y en las siguientes secciones estudiaremos métodos que llevan a una precisión mucho mayor que el método de Euler.

Método mejorado de Euler El método numérico definido por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}, \tag{3}$$

donde

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{4}$$

se conoce comúnmente como **método mejorado de Euler**. Con el fin de calcular y_{n+1} para $n = 0, 1, 2, ...$, a partir de (3) debemos, en cada etapa, utilizar primero el método de Euler presentado en (4) para obtener una estimación inicial y^*_{n+1}. Por ejemplo, con $n = 0$, (4) daría $y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, y después, al conocer este valor, usamos (3) para obtener $y_1 = y_0 + h(f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1))/2$, donde $x_1 = x_0 + h$. Estas ecuaciones pueden visualizarse con facilidad. En la **FIGURA 6.1.1** observe que $m_0 = f(x_0, y_0)$ y $m_1 = f(x_1, y^*_1)$ son las pendientes mostradas mediante las líneas rectas sólidas que atraviesan los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y^*_1), respectivamente. Al determinar un promedio de estas pendientes, es decir, $m_{prom} = (f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1))/2$, obtenemos la pendiente oblicua de líneas paralelas discontinuas. Con la primera etapa, en lugar de avanzar a lo largo de la línea que atraviesa (x_0, y_0) con pendiente $f(x_0, y_0)$

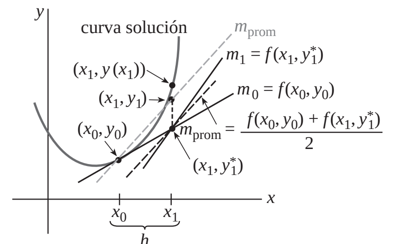


FIGURA 6.1.1 La pendiente m_{prom} es el promedio de m_0 y m_1

respecto del punto de coordenada y y_1^* obtenido por el método de Euler, avanzamos a lo largo de la línea discontinua de color que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m_{prom} hasta alcanzar x_1. Por observación de la figura, parece factible que y_1 sea una mejora sobre y_1^*.

En general, el método mejorado de Euler es un ejemplo de **método predictor y corrector**. El valor de y_{n+1}^* dado en (4) *pronostica* un valor de $y(x_n)$, mientras que el valor de y_{n+1} definido por la fórmula (3) *corrige* esta estimación.

EJEMPLO 2 Método mejorado de Euler

Aplique el método mejorado de Euler para obtener el valor aproximado de $y(1.5)$ y determinar la solución del problema de valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. Compare los resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

Solución Con $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $f(x_n, y_n) = 2x_n y_n$, $n = 0$ y $h = 0.1$ primero calculamos (4):

$$y_1^* = y_0 + (0.1)(2x_0 y_0) = 1 + (0.1)2(1)(1) = 1.2.$$

Usamos este último valor en (3) junto con $x_1 = 1 + h = 1 + 0.1 = 1.1$:

$$y_1 = y_0 + (0.1)\frac{2x_0y_0 + 2x_1y_1^*}{2} = 1 + (0.1)\frac{2(1)(1) + 2(1.1)(1.2)}{2} = 1.232.$$

Los valores comparativos de los cálculos para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ se presentan en las tablas 6.1.3 y 6.1.4, respectivamente.

TABLA 6.1.3 Método mejorado de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2320	1.2337	0.0017	0.14
1.20	1.5479	1.5527	0.0048	0.31
1.30	1.9832	1.9937	0.0106	0.53
1.40	2.5908	2.6117	0.0209	0.80
1.50	3.4509	3.4904	0.0394	1.13

TABLA 6.1.4 Método mejorado de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1077	1.1079	0.0002	0.02
1.10	1.2332	1.2337	0.0004	0.04
1.15	1.3798	1.3806	0.0008	0.06
1.20	1.5514	1.5527	0.0013	0.08
1.25	1.7531	1.7551	0.0020	0.11
1.30	1.9909	1.9937	0.0029	0.14
1.35	2.2721	2.2762	0.0041	0.18
1.40	2.6060	2.6117	0.0057	0.22
1.45	3.0038	3.0117	0.0079	0.26
1.50	3.4795	3.4904	0.0108	0.31

≡

Observe que no podemos calcular primero todos los valores de y_n^*.

Aquí es necesario formular una breve advertencia. No podemos calcular primero todos los valores de y_n^* y después sustituirlos en la fórmula (3). En otras palabras, no es posible usar los datos de la tabla 6.1.1 como apoyo para determinar los valores de la tabla 6.1.3. ¿Por qué no?

Errores de truncamiento para el método mejorado de Euler El error de truncamiento local para el método mejorado de Euler es $O(h^3)$. La derivación de este resultado es similar a la del error de truncamiento local para el método de Euler. Puesto que el error de truncamiento local para el método mejorado de Euler es $O(h^3)$, el error de truncamiento global es $O(h^2)$. Esto se puede ver en el ejemplo 2; cuando el tamaño del paso se reduce desde $h = 0.1$ hasta $h = 0.05$, el error absoluto en $x = 1.50$ se reduce de 0.0394 a 0.0108, una reducción de aproximadamente $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

6.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

Dados los problemas de valor inicial presentados en los ejercicios del 1 al 10, use el método mejorado de Euler para obtener una aproximación al valor indicado con cuatro decimales. Primero utilice $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1, \quad y(1) = 5; \; y(1.5)$
2. $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 2; \; y(0.5)$
3. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$
4. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1; \; y(0.5)$
5. $y' = e^{-y}, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$
6. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$
7. $y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0.5; \; y(0.5)$
8. $y' = xy + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1; \; y(0.5)$
9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 1; \; y(1.5)$
10. $y' = y - y^2, \quad y(0) = 0.5; \; y(0.5)$
11. Considere el problema de valor inicial $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Utilice el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para obtener los valores aproximados de la solución en $x = 0.5$. En cada etapa, compare el valor aproximado con el valor exacto de la solución analítica.
12. Aunque tal vez no resulte evidente a partir de la ecuación diferencial, su solución puede "comportarse mal" cerca del punto x en el cual deseamos aproximar $y(x)$. Los procedimientos numéricos pueden dar resultados muy diferentes cerca de este punto. Sea $y(x)$ la solución del problema de valor inicial $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$.
    a) Utilice un programa de solución numérica para trazar la gráfica de la solución en el intervalo [1, 1.4].
    b) Con el tamaño del paso $h = 0.1$, compare los resultados que se obtuvieron mediante el método de Euler con los del método mejorado de Euler en la aproximación de $y(1.4)$.
13. Considere el problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y = e^{2x}$.
    a) Aproxime $y(0.1)$ empleando una etapa y el método de Euler.
    b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en y_1.
    c) Compare el error real en y_1 con su error de acotamiento.
    d) Aproxime $y(0.1)$ empleando dos etapas y el método de Euler.
    e) Verifique si el error de truncamiento global para el método de Euler es $O(h)$ mediante la comparación de los errores determinados en los incisos *a*) y *d*).
14. Repita el problema 13 mediante el método mejorado de Euler. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
15. Repita el problema 13 mediante el problema de valor inicial $y' = x - 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}e^{-2x}.$$
16. Repita el problema 15 mediante el método mejorado de Euler. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
17. Considere el problema de valor inicial $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es
$$y(x) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$
    a) Deduzca una fórmula donde intervengan c y h para el error de truncamiento local en la etapa n-ésima si se utiliza el método de Euler.
    b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en cada etapa si $h = 0.1$ se usa para aproximar $y(1.5)$.
    c) Aproxime $y(1.5)$ mediante $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con el método de Euler. Véase el problema 1 en los ejercicios 2.6.
    d) Determine los errores en el inciso *c*) y verifique si el error de truncamiento global del método de Euler es $O(h)$.
18. Repita el problema 17 mediante el método mejorado de Euler, el cual tiene un error de truncamiento global $O(h^2)$. Véase el problema 1. Quizá necesite más de cuatro cifras decimales para apreciar el efecto de reducir el orden del error.
19. Repita el problema 17 para el problema de valor inicial $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Véase el problema 5 en los ejercicios 2.6.
20. Repita el problema 19 usando el método mejorado de Euler, el cual tiene como error de truncamiento global $O(h^2)$. Véase el problema 5. Tal vez necesite más de cuatro cifras decimales para advertir el efecto de reducir el orden del error.

≡ Problemas de análisis

21. Responda la pregunta "¿Por qué no?" que sigue a las tres oraciones escritas después del ejemplo 2 en la página 278.

6.2 Métodos de Runge-Kutta

■ **Introducción** Tal vez uno de los procedimientos numéricos más conocidos y más exactos para obtener soluciones aproximadas para un problema de valor inicial de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ sea el **método de Runge-Kutta de cuarto orden**. Como su nombre lo indica, existen métodos de Runge-Kutta de diferentes órdenes.

Métodos de Runge-Kutta De manera fundamental, todos los métodos de Runge-Kutta son generalizaciones de la fórmula básica de Euler (1) presentada en la sección 6.1, donde la función de la pendiente f se reemplaza por un promedio ponderado de pendientes en el intervalo $x_n \le x \le x_{n+1}$. Es decir,

$$y_{n+1} = y_n + h\overbrace{(w_1k_1 + w_2k_2 + \cdots + w_mk_m)}^{\text{promedio ponderado}}. \tag{1}$$

Aquí los pesos w_i, $i = 1, 2, ..., m$ son constantes que en general satisfacen $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$ y cada k_i, $i = 1, 2, ..., m$ es la función f evaluada en un punto seleccionado (x, y) para el cual $x_n \le x \le x_{n+1}$. Veremos que los números k_i están definidos de manera recursiva. El número m se denomina **orden** del método. Observe que si se toma $m = 1$, $w_1 = 1$ y $k_1 = f(x_n, y_n)$ obtenemos la conocida fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Por lo tanto, se dice que el método de Euler es un método de **Runge-Kutta de primer orden**.

El promedio incluido en (1) no se forma de manera aleatoria, sino que los parámetros son elegidos de manera que (1) concuerde con el polinomio de Taylor de grado m. Como vimos en la última sección, si una función $y(x)$ posee $k + 1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contenga a a y a x, entonces escribimos

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x-a}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + y^{(k+1)}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

donde c es algún número localizado entre a y x. Si reemplazamos a por x_n y x por $x_{n+1} = x_n + h$, entonces la fórmula anterior se convierte en

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(c),$$

donde c es ahora algún número situado entre x_n y x_{n+1}. Cuando $y(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$, en el caso de que $k = 1$ y el resto $\frac{1}{2}h^2y''(c)$ sea pequeño, vemos que un polinomio de Taylor $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$ de primer grado concuerda con la fórmula de aproximación del método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Un método de Runge-Kutta de segundo orden Como ilustración adicional de (1), consideremos ahora un **método de Runge-Kutta de segundo orden**. Éste consiste en encontrar constantes, o parámetros, w_1, w_2, α y β de manera que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2), \tag{2}$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta hk_1)$$

concuerda con un polinomio de Taylor de segundo orden. Para nuestros fines, basta saber que esto se puede lograr siempre que las constantes satisfagan la condición de

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad w_2\beta = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Éste es un sistema algebraico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene una cantidad infinita de soluciones.

$$w_1 = 1 - w_2, \quad \alpha = \frac{1}{2w_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2w_2}, \tag{4}$$

donde $w_2 \ne 0$. Por ejemplo, la opción $w_2 = \frac{1}{2}$ produce $w_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y, por lo tanto, (2) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{y} \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1).$$

Puesto que $x_n + h = x_{n+1}$ y $y_n + hk_1 = y_n + hf(x_n, y_n)$, el resultado anterior viene a ser un método mejorado de Euler cuyo resumen aparece en (3) y (4) de la sección 6.1.

En vista de que $w_2 \ne 0$ se puede elegir de manera arbitraria en (4), existen muchos métodos posibles de Runge-Kutta de segundo orden. Véase el problema 2 de los ejercicios 6.2.

En esta sección, omitiremos cualquier análisis referente a los métodos de tercer orden con el fin de abordar el punto principal de estudio.

Un método de Runge-Kutta de cuarto orden Un **método de Runge-Kutta de cuarto orden** consiste en encontrar parámetros de manera que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4), \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 hk_1 + \beta_5 hk_2 + \beta_6 hk_3) \end{aligned}$$

concuerde con un polinomio de Taylor de cuarto grado. Esto produce un sistema de 11 ecuaciones con 13 incógnitas. El conjunto de valores que se utiliza con mayor frecuencia para parámetros da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \tag{6}$$

A pesar de que las fórmulas de cuarto orden se pueden deducir con facilidad, el algoritmo resumido en (6) se utiliza muy ampliamente y es considerado como una herramienta computacional tan valiosa que a menudo se le denomina como *el* método de Runge-Kutta de cuarto orden o *el método clásico* de Runge-Kutta. De ahora en adelante, cuando utilicemos la abreviatura "el método RK4" nos estaremos refiriendo a (6).

Le aconsejamos revisar cuidadosamente las fórmulas dadas en (6); observe que k_2 depende de k_1, k_3 depende de k_2, y k_4 depende de k_3. También, k_2 y k_3 implican aproximaciones a la pendiente en el punto medio $x_n + \frac{1}{2}h$ del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

EJEMPLO 1 Método RK4

Aplique el método RK4 con $h = 0.1$ para determinar una aproximación a $y(1.5)$ y encontrar la solución de $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

Solución Para fines de ilustración, calcularemos el caso en que $n = 0$. De acuerdo con (6) encontramos

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = 2x_0y_0 = 2 \\ k_2 &= f(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1), y_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)2) \\ &= 2(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1))(y_0 + \tfrac{1}{2}(0.2)) = 2.31 \\ k_3 &= f(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1), y_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)2.31) \\ &= 2(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1))(y_0 + \tfrac{1}{2}(0.231)) = 2.34255 \\ k_4 &= f(x_0 + (0.1), y_0 + (0.1)2.34255) \\ &= 2(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234255) = 2.715361 \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1 + \frac{0.1}{6}(2 + 2(2.31) + 2(2.34255) + 2.715361) = 1.23367435. \end{aligned}$$

TABLA 6.2.1 Método RK4 con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% relativo de error
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2337	1.2337	0.0000	0.00
1.20	1.5527	1.5527	0.0000	0.00
1.30	1.9937	1.9937	0.0000	0.00
1.40	2.6116	2.6117	0.0001	0.00
1.50	3.4902	3.4904	0.0001	0.00

Los cálculos restantes se resumen en la tabla 6.2.1, cuyas cifras están redondeadas a cuatro decimales. ≡

Al analizar la tabla 6.2.1, nos damos cuenta de por qué el método de Runge-Kutta es tan famoso. Si todo lo que deseamos es una precisión al cuarto decimal, no hay necesidad de

utilizar un tamaño menor del paso. La tabla 6.2.2 compara los resultados de aplicar los métodos de Euler, mejorado de Euler y de Runge-Kutta de cuarto orden al problema de valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. (Véanse las tablas 6.1.1 y 6.1.3.)

TABLA 6.2.2 $y' = 2xy,\ y(1) = 1$

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$					Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$				
x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real	x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2320	1.2337	1.2337	1.05	1.1000	1.1077	1.1079	1.1079
1.20	1.4640	1.5479	1.5527	1.5527	1.10	1.2155	1.2332	1.2337	1.2337
1.30	1.8154	1.9832	1.9937	1.9937	1.15	1.3492	1.3798	1.3806	1.3806
1.40	2.2874	2.5908	2.6116	2.6117	1.20	1.5044	1.5514	1.5527	1.5527
1.50	2.9278	3.4509	3.4902	3.4904	1.25	1.6849	1.7531	1.7551	1.7551
					1.30	1.8955	1.9909	1.9937	1.9937
					1.35	2.1419	2.2721	2.2762	2.2762
					1.40	2.4311	2.6060	2.6117	2.6117
					1.45	2.7714	3.0038	3.0117	3.0117
					1.50	3.1733	3.4795	3.4903	3.4904

Errores de truncamiento para el método RK4 En la sección 6.1 vimos que los errores de truncamiento global para el método de Euler y para el método mejorado de Euler son, respectivamente, $O(h)$ y $O(h^2)$. Debido a que la primera ecuación incluida en (6) concuerda con un polinomio de Taylor de cuarto grado, el error de truncamiento local para este método es $y^{(5)}(c)h^5/5!$ u $O(h^5)$, y el error de truncamiento global es, por lo tanto, $O(h^4)$. Ahora se puede advertir por qué el método de Euler, el método mejorado de Euler y (6) son los métodos de Runge-Kutta de *primero*, *segundo* y *cuarto órdenes*, respectivamente.

EJEMPLO 2 Cota para errores de truncamiento local

Encuentre una cota para los errores de truncamiento local para el método RK4 aplicado a $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

Solución Al calcular la quinta derivada de la solución conocida $y(x) = e^{x^2-1}$ obtenemos

$$y^{(5)}(c)\,\frac{h^5}{5!} = (120c + 160c^3 + 32c^5)e^{c^2-1}\,\frac{h^5}{5!}. \tag{7}$$

Por lo tanto, con $c = 1.5$, (7) produce una cota de 0.00028 para el error de truncamiento local en cada una de las cinco etapas cuando $h = 0.1$. En la tabla 6.2.1 observamos que en y_1 el error es mucho menor que esta cota.

La tabla 6.2.3 muestra las aproximaciones a la solución del problema de valor inicial en $x = 1.5$ que se obtienen mediante el método RK4. Al calcular el valor de la solución analítica en $x = 1.5$, podemos determinar el error en estas aproximaciones. Como el método es tan exacto, en la solución numérica se requieren muchas cifras decimales para poder apreciar el efecto de dividir entre dos el tamaño del paso. Observe que cuando h se divide entre dos, de $h = 0.1$ a $h = 0.05$, el error se divide entre un factor aproximado de $2^4 = 16$, como se esperaba. ≡

TABLA 6.2.3 Método RK4

h	Aproximación	Error
0.1	3.49021064	$1.32321089 \times 10^{-4}$
0.05	3.49033382	$9.13776090 \times 10^{-6}$

Métodos de adopción Hemos visto que la precisión de un método numérico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales se puede mejorar disminuyendo el tamaño del paso h. Desde luego, esta precisión mejorada por lo común tiene un costo, es decir, mayor tiempo invertido en los cálculos y una gran posibilidad de errores de redondeo. En general, en el intervalo de aproximación pueden existir subintervalos donde baste un tamaño del paso relativamente grande y otros subintervalos donde un tamaño del paso más pequeño sea necesario con el fin de mantener el error de truncamiento dentro de cierto límite deseado. Los métodos numéricos que emplean un tamaño del paso variable se llaman **métodos de adopción**. Una de las rutinas de adaptación más difundidas es el **método de Runge-Kutta-Fehlberg**. Debido a que Fehlberg empleó dos métodos de Runge-Kutta de órdenes diferentes, un método de cuarto orden y otro de quinto, este algoritmo a menudo recibe el nombre de **método RKF45**.*

* El método de Runge-Kutta de cuarto orden usado en RKF45 *no* es el mismo que el presentado en (6).

6.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

1. Utilice el método RK4 con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Compare este valor aproximado con el valor real obtenido en el problema 11 de los ejercicios 6.1.

2. Suponga que $w_2 = \frac{3}{4}$ en (4). Emplee el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial dado en el ejercicio 1. Compare este valor aproximado con el valor aproximado obtenido en el problema 11 de los ejercicios 6.1.

En los problemas del 3 al 12, utilice el método RK4 con $h = 0.1$ para obtener una aproximación decimal al valor indicado.

3. $y' = 2x - 3y + 1, \quad y(1) = 5; \; y(1.5)$

4. $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 2; \; y(0.5)$

5. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1; \; y(0.5)$

7. $y' = e^{-y}, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$

8. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0; \; y(0.5)$

9. $y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0.5; \; y(0.5)$

10. $y' = xy + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1; \; y(0.5)$

11. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 1; \; y(1.5)$

12. $y' = y - y^2, \quad y(0) = 0.5; \; y(0.5)$

13. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, entonces la velocidad v de una masa m que cae desde una altura h está determinada por

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \; k > 0.$$

Sean $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs y $g = 32$ pies/s^2.

a) Utilice el método RK4 con $h = 1$ para aproximar la velocidad $v(5)$.

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del PVI en el intervalo [0, 6].

c) Use la separación de variables para resolver el PVI y después encuentre el valor real $v(5)$.

14. Un modelo matemático para el área A (en cm^2) que ocupa una colonia de bacterias (*B. dendroides*) está dado por

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suponga que el área inicial es de 0.24 cm^2.

a) Utilice el método RK4 con $h = 0.5$ para completar la tabla siguiente.

t (días)	1	2	3	4	5
A (observado)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A (aproximado)					

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del problema de valor inicial. Estime los valores $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$ a partir de la gráfica.

c) Use la separación de variables para resolver el problema de valor inicial y calcular los valores $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$.

15. Considere el problema de valor inicial $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$. Véase el problema 12 en los ejercicios 6.1.

a) Compare los resultados obtenidos de usar el método RK4 en el intervalo [1, 1.4] con tamaños del paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del problema de valor inicial en el intervalo [1, 1.4].

16. Considere el problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y(x) = e^{2x}$.

a) Aproxime $y(0.1)$ empleando una etapa y el método RK4 de cuarto orden.

b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en y_1.

c) Compare el error real en y_1 con su acotamiento de error.

d) Aproxime $y(0.1)$ empleando dos etapas y el método RK4.

e) Verifique si el error de truncamiento global para el método RK4 es $O(h^4)$ al comparar los errores de los incisos *a*) y *d*).

17. Repita el problema 16 mediante el problema de valor inicial $y' = -2y + x$, $y(0) = 1$. La solución analítica es

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}e^{-2x}.$$

18. Considere el problema de valor inicial $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

a) Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en la etapa n-ésima si se utiliza el método RK4.

b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en cada etapa si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.5)$.

c) Aproxime $y(1.5)$ mediante el método RK4 con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Véase el problema 3. Necesitará más de seis cifras decimales para poder apreciar el efecto de reducir el tamaño del paso.

19. Repita el ejercicio 18 para el problema de valor inicial $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Véase el problema 7.

Problemas de análisis

20. El conteo de la cantidad de evaluaciones de la función f necesarias para resolver el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ se usa como una medida de la complejidad computacional de un método numérico. Determine cuántas evaluaciones de f se requieren para cada etapa de los métodos de Euler, de Euler mejorado y el RK4. Mediante algunos ejemplos específicos, compare la precisión de tales métodos cuando se usan con programas computacionales de complejidad similar.

Tareas para el laboratorio de cómputo

21. El método RK4 para resolver un problema de valor inicial en un intervalo $[a, b]$ da como resultado un conjunto finito de puntos que son supuestos de los puntos ubicados en la gráfica de la solución exacta. Con el fin de ampliar este conjunto de puntos discretos y obtener una solución aproximada definida en *todos* los puntos del intervalo $[a, b]$, podemos usar una **función de interpolación**. Ésta es una función, que pueden desarrollar la mayoría de los sistemas algebraicos computacionales, que concuerda exactamente con los datos dados y supone una transición uniforme entre los puntos de datos. Estas funciones de interpolación pueden ser polinomios o conjuntos de polinomios unidos de modo uniforme entre sí. En *Mathematica* se puede utilizar el comando **y** = **Interpolation[data]** para obtener una función de interpolación a través de los puntos **data** = { $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}$ }. Ahora la función de interpolación **y[x]** puede manejarse como cualquier otra función del sistema algebraico de cómputo.

a) Encuentre la solución analítica del problema de valor inicial $y' = -y + 10 \text{ sen } 3x$; $y(0) = 0$ en el intervalo [0, 2]. Grafique esta solución y determine sus raíces positivas.

b) Utilice el método RK4 con $h = 0.1$ para aproximar una solución del problema de valor inicial dado en el inciso *a*). Obtenga una función de interpolación en el intervalo [0, 2].

6.3 Métodos de varios pasos

Introducción El método de Euler, el método mejorado de Euler y el método de Runge-Kutta son ejemplos de métodos numéricos **de un solo paso** o **inicio**. En ellos se calcula cada valor sucesivo y_{n+1} sólo con base en la información sobre el valor inmediato anterior y_n. Por otra parte, en los **métodos de varios pasos**, o **continuos**, los valores calculados a partir de varios pasos se usan para obtener el valor de y_{n+1}. Existe gran cantidad de fórmulas de los métodos de varios pasos que son aplicables para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales, pero ya que aquí no es nuestra intención describir el vasto campo de procedimientos numéricos, sólo consideraremos uno de tales métodos.

Método de Adams-Bashforth-Moulton El método de varios pasos descrito en esta sección se denomina **método Adams-Bashforth-Moulton** de cuarto orden o, un poco más rebuscado, **método Adams-Bashforth/Adams-Moulton**. Al igual que el método mejorado de Euler, se trata de un método de predictor-corrector, es decir, se usa una fórmula para predecir un valor y^*_{n+1}, que a su vez se usa para obtener un valor corregido y_{n+1}. En este método el predictor es la fórmula de Adams-Bashforth

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}), \tag{1}$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y'_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$

$$y'_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

para $n \geq 3$. Después, el valor de y^*_{n+1} se sustituye en el corrector Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}), \tag{2}$$

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1}).$$

Observemos que la fórmula (1) requiere conocer los valores de y_0, y_1, y_2 y y_3 con el fin de obtener el valor de y_4. El valor de y_0 es, por supuesto, la condición inicial dada. Como en el método Adams-Bashforth/Adams-Moulton el error de truncamiento local es $O(h^5)$, los valores de y_1, y_2 y y_3 se calculan por lo general mediante un método que tenga la misma propiedad de error, tal como la fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden.

EJEMPLO 1 Método de Adams-Bashforth-Moulton

Obtenga una aproximación a $y(0.8)$ mediante el método de Adams-Bashforth-Moulton, con $h = 0.2$, para la solución de

$$y' = x + y - 1, \quad y(0) = 1.$$

Solución Con un tamaño del paso de $h = 0.2$, $y(0.8)$ aproximará y_4. Para comenzar, usamos el método RK4 con $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $h = 0.2$ para obtener

$$y_1 = 1.02140000, \quad y_2 = 1.09181796, \quad y_3 = 1.22210646.$$

Ahora establecemos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ y $f(x, y) = x + y - 1$, y encontramos

$$\begin{aligned} y_0' &= f(x_0, y_0) = (0) + (1) - 1 = 0 \\ y_1' &= f(x_1, y_1) = (0.2) + (1.02140000) - 1 = 0.22140000 \\ y_2' &= f(x_2, y_2) = (0.4) + (1.09181796) - 1 = 0.49181796 \\ y_3' &= f(x_3, y_3) = (0.6) + (1.22210646) - 1 = 0.82210646. \end{aligned}$$

Con los valores anteriores, el predictor de la ecuación (1) da entonces

$$y_4^* = y_3 + \frac{0.2}{24}(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') = 1.42535975.$$

Para usar la corrección (2) primero necesitamos

$$y_4' = f(x_4, y_4^*) = 0.8 + 1.42535975 - 1 = 1.22535975.$$

Por último, (2) produce

$$y_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') = 1.42552788. \quad \equiv$$

Usted deberá comprobar que en el ejemplo 1 el valor exacto de $y(0.8)$ sea $y(0.8) = 1.42554093$.

Estabilidad de los métodos numéricos

Una cuestión importante en el uso de métodos numéricos es su estabilidad para aproximar la solución de un problema de valor inicial. En otras palabras, un método numérico es **estable** si pequeños cambios en la condición inicial redundan sólo en pequeños cambios en la solución calculada. Se dice que un método numérico es **inestable** cuando no es estable. La razón de que las consideraciones de estabilidad sean importantes es que, en cada etapa sucesiva después de la primera etapa de una técnica numérica, esencialmente comenzamos otra vez con un nuevo problema de valor inicial, donde la condición inicial es el valor aproximado de la solución calculado en la etapa previa. Debido a la presencia del error de redondeo, es casi seguro que este valor varíe al menos un poco en relación con el verdadero valor de la solución. Además del error de redondeo, otra fuente común de error se presenta en la propia condición inicial; en aplicaciones físicas, muchas veces los datos se obtienen empleando mediciones imprecisas.

Un posible método para detectar inestabilidad en una solución numérica de un problema específico de valor inicial es comparar las soluciones aproximadas obtenidas con tamaños del paso reducidos. Si el método numérico es inestable, el error quizá se incremente con tamaños menores del paso. Otra forma de verificar la estabilidad es observar lo que le sucede a las soluciones cuando la condición inicial se perturba ligeramente (por ejemplo, al cambiar $y(0) = 1$ a $y(0) = 0.999$).

Para conocer un análisis más detallado y preciso de la estabilidad, consulte algún libro de análisis numérico. En general, todos los métodos estudiados en este capítulo tienen buenas características de estabilidad.

Ventajas y desventajas de los métodos de varios pasos

En la elección de un método para resolver numéricamente una ecuación diferencial influyen muchos aspectos. Los métodos de un solo paso, en particular el método de Runge-Kutta, a menudo se eligen por su exactitud y porque son fáciles de programar. No obstante, una de sus principales desventajas es que el lado derecho de la ecuación diferencial debe evaluarse muchas veces en cada etapa. Por ejemplo, el método RK4 requiere cuatro evaluaciones de función en cada etapa. Por otra parte, si las evaluaciones de función se calcularon y guardaron en la etapa previa, con un

método de varios pasos se requiere sólo una nueva evaluación de función por etapa. Esto puede generar grandes ahorros de tiempo y costo.

Por ejemplo, para resolver numéricamente $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ con el método RK4 en n pasos, se requieren $4n$ evaluaciones de función. En el método de varios pasos de Adams-Bashforth se requieren 16 evaluaciones de función para iniciar con el método de Runge-Kutta de cuarto orden y $n - 4$ evaluaciones para las n etapas del Adams-Bashforth, lo que da un total de $n + 12$ evaluaciones de función para este método. En general, este método de Adams-Bashforth requiere un poco más de la cuarta parte de las evaluaciones de función requeridas para el RK4. Si la evaluación de $f(x, y)$ resulta complicada, el método de varias etapas será más eficiente.

Otro aspecto relacionado con los métodos de varios pasos es cuántas veces se debe repetir la fórmula correctora Adams-Moulton en cada etapa. Cada vez que se usa el corrector, se realiza otra evaluación de función, de manera que la precisión aumenta a cambio de perder una de las ventajas del método de varios pasos. En la práctica, el corrector se calcula una vez, y si el valor de y_{n+1} cambia mucho, vuelve a iniciarse el problema completo con un tamaño menor del paso. Esto suele ser la base de los métodos de tamaño del paso variable, cuyo análisis está fuera del alcance de este texto.

6.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

1. Obtenga la solución analítica del problema de valor inicial dado en el ejemplo 1. Compare los valores reales de $y(0.2)$, $y(0.4)$, $y(0.6)$ y $y(0.8)$ con las aproximaciones y_1, y_2, y_3 y y_4.
2. Escriba un programa de cómputo para el método Adams-Bashforth-Moulton.

En los problemas 3 y 4 use el método Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(0.8)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial respectivo. Emplee $h = 0.2$ y el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

3. $y' = 2x - 3y + 1, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 2$

En los problemas del 5 al 8 utilice el método Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(1.0)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial respectivo. Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$. Aplique el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

5. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$
6. $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 1$
7. $y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0$
8. $y' = xy + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

6.4 Ecuaciones y sistemas de orden superior

Introducción Hasta aquí nos hemos enfocado en las técnicas numéricas que se pueden utilizar para aproximar la solución de un problema de valor inicial de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Para aproximar la solución de un problema de valor inicial de segundo orden, debemos expresar una ED de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello comenzamos por escribir la ED de segundo orden en su forma normal al resolver para y'' en términos de x, y y y'.

Problemas de valor inicial de segundo orden Un problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = u_0, \tag{1}$$

se puede expresar como un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si $y' = u$, la ecuación diferencial presentada en (1) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u). \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que $y'(x_0) = u(x_0)$, las condiciones iniciales correspondientes para (2) son, por lo tanto, $y(x_0) = y_0$, $u(x_0) = u_0$. El sistema (2) puede resolverse numéricamente ahora si se le aplica un método numérico particular a cada ecuación diferencial de primer orden. Por ejemplo, el **método de Euler** aplicado al sistema (2) sería

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + hf(x_n, y_n, u_n), \end{aligned} \tag{3}$$

mientras que el método de **Runge-Kutta de cuarto orden**, o **método RK4**, se escribiría como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= u_n & k_1 &= f(x_n, y_n, u_n) \\ m_2 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_1 & k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_1, u_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\ m_3 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_2 & k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_2, u_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\ m_4 &= u_n + hk_3 & k_4 &= f(x_n + h, y_n + hm_3, u_n + hk_3). \end{aligned}$$

En general, podemos expresar cualquier ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

como un sistema de n ecuaciones de primer orden mediante las sustituciones $y = u_1$, $y' = u_2$, $y'' = u_3, \ldots, y^{(n-1)} = u_n$.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Use el método de Euler para determinar el valor aproximado de $y(0.2)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \qquad (5)$$

Solución En términos de la sustitución $y' = u$, la ecuación es equivalente al sistema

$$y' = u$$
$$u' = -xu - y.$$

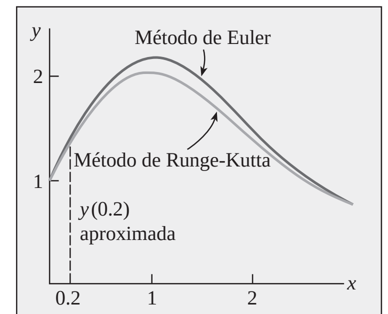
Por lo tanto, con base en (3) obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + hu_n$$
$$u_{n+1} = u_n + h[-x_n u_n - y_n].$$

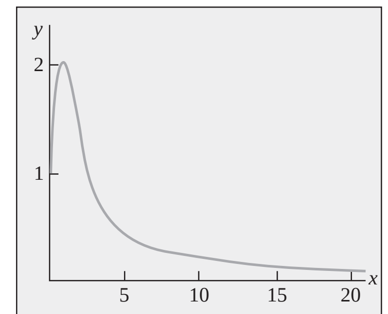
Mediante el tamaño del paso $h = 0.1$ y $y_0 = 1$, $u_0 = 2$, encontramos

$$y_1 = y_0 + (0.1)u_0 = 1 + (0.1)2 = 1.2$$
$$u_1 = u_0 + (0.1)[-x_0u_0 - y_0] = 2 + (0.1)[-(0)(2) - 1] = 1.9$$
$$y_2 = y_1 + (0.1)u_1 = 1.2 + (0.1)(1.9) = 1.39$$
$$u_2 = u_1 + (0.1)[-x_1u_1 - y_1] = 1.9 + (0.1)[-(0.1)(1.9) - 1.2] = 1.761.$$

En otras palabras, $y(0.2) \approx 1.39$ y $y'(0.2) \approx 1.761$. ≡



a) Método de Euler (gris)
Runge-Kutta (negra)



b) Runge-Kutta

FIGURA 6.4.1 Curvas solución numéricas

Con ayuda de la función graficadora de un programa de solución numérica, en la **FIGURA 6.4.1*a*)** comparamos la curva solución de (5) generada por el método de Euler ($h = 0.1$) en el intervalo [0, 3] con la curva solución generada por el método RK4 ($h = 0.1$). A partir de la figura 6.4.1(*b*), parecería que la solución $y(x)$ de (4) tiene la propiedad de que $y(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

■ Sistemas reducidos a sistemas de primer orden Mediante un procedimiento similar al que acabamos de analizar, se suele reducir un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden al resolver primero la derivada de orden superior de cada variable dependiente y realizando después las sustituciones adecuadas para las derivadas de orden inferior.

EJEMPLO 2 Un sistema escrito de nuevo como sistema de primer orden

Escriba
$$x'' - x' + 5x + 2y'' = e^t$$
$$-2x + y'' + 2y = 3t^2$$

como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución Escriba el sistema como

$$x'' + 2y'' = e^t - 5x + x'$$
$$y'' = 3t^2 + 2x - 2y$$

y después elimine y'' multiplicando la segunda ecuación por 2 y restando. Con ello se obtiene

$$x'' = -9x + 4y + x' + e^t - 6t^2.$$

Puesto que la segunda ecuación del sistema ya expresa la derivada de orden superior de y en términos de las funciones restantes, ahora estamos en posición de poder introducir variables nuevas. Si $x' = u$ y $y' = v$, las expresiones para x'' y y'' se convierten, respectivamente, en

$$u' = x'' = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$
$$v' = y'' = 2x - 2y + 3t^2.$$

El sistema original puede escribirse entonces en la forma

$$x' = u$$
$$y' = v$$
$$u' = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$
$$v' = 2x - 2y + 3t^2.$$
≡

Tal vez no sea posible desarrollar las reducciones ilustradas en el ejemplo 2.

Solución numérica de un sistema La solución de un sistema de la forma

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se puede aproximar mediante una versión de los métodos de Euler, Runge-Kutta o Adams-Bashforth-Moulton adaptada al sistema. Por ejemplo, el **método RK4** aplicado al sistema

$$x' = f(t, x, y)$$
$$y' = g(t, x, y) \tag{6}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

se ve así:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{7}$$

donde

$$
\begin{aligned}
m_1 &= f(t_n, x_n, y_n) & k_1 &= g(t_n, x_n, y_n)\\
m_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}m_1, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) & k_2 &= g(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}m_1, y_n + \tfrac{1}{2}k_1)\\
m_3 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}m_2, y_n + \tfrac{1}{2}k_2) & k_3 &= g(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}m_2, y_n + \tfrac{1}{2}k_2)\\
m_4 &= f(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3) & k_4 &= g(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

EJEMPLO 3 Método RK4

Considere el problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x + 4y\\
y' &= -x + 6y\\
x(0) &= -1, \quad y(0) = 6.
\end{aligned}
$$

Aplique el método RK4 para aproximar $x(0.6)$ y $y(0.6)$. Compare los resultados con $h = 0.2$ y $h = 0.1$.

Solución Mostraremos los cálculos de x_1 y y_1 con el tamaño del paso $h = 0.2$. Con las identificaciones $f(t, x, y) = 2x + 4y$, $g(t, x, y) = -x + 6y$, $t_0 = 0$, $x_0 = -1$ y $y_0 = 6$, a partir de (8) podemos ver que

$$
\begin{aligned}
m_1 &= f(t_0, x_0, y_0) = f(0, -1, 6) = 2(-1) + 4(6) = 22\\
k_1 &= g(t_0, x_0, y_0) = g(0, -1, 6) = -1(-1) + 6(6) = 37\\
m_2 &= f(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1) = f(0.1, 1.2, 9.7) = 41.2\\
k_2 &= g(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1) = g(0.1, 1.2, 9.7) = 57\\
m_3 &= f(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2) = f(0.1, 3.12, 11.7) = 53.04\\
k_3 &= g(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2) = g(0.1, 3.12, 11.7) = 67.08\\
m_4 &= f(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = f(0.2, 9.608, 19.416) = 96.88\\
k_4 &= g(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = g(0.2, 9.608, 19.416) = 106.888.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, de (7) obtenemos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{0.2}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\\
&= -1 + \frac{0.2}{6}(2.2 + 2(41.2) + 2(53.04) + 96.88) = 9.2453\\
y_1 &= y_0 + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\\
&= 6 + \frac{0.2}{6}(37 + 2(57) + 2(67.08) + 106.888) = 19.0683,
\end{aligned}
$$

donde, como es costumbre, los valores calculados de x_1 y y_1 se redondean a cuatro cifras decimales. Estos números nos dan las aproximaciones de $x_1 \approx x(0.2)$ y $y_1 \approx y(0.2)$. Los valores subsecuentes, obtenidos con ayuda de una computadora, se resumieron en las tablas 6.4.1 y 6.4.2 ≡

TABLA 6.4.1 $h = 0.2$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.20	9.2453	19.0683
0.40	46.0327	55.1203
0.60	158.9430	150.8192

TABLA 6.4.2 $h = 0.1$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.10	2.3840	10.8883
0.20	9.3379	19.1332
0.30	22.5541	32.8539
0.40	46.5103	55.4420
0.50	88.5729	93.3006
0.60	160.7563	152.0025

El lector deberá comprobar que la solución del problema de valor inicial planteado en el ejemplo 3 esté dada por $x(t) = (26t - 1)e^{4t}$, $y(t) = (13t + 6)e^{4t}$. A partir de estas ecuaciones vemos que los valores reales $x(0.6) = 160.9384$ y $y(0.6) = 152.1198$ están comparados de manera favorable con los datos de la última línea de la tabla 6.4.2. La gráfica de la solución en las cercanías de $t = 0$ se muestra en la **FIGURA 6.4.2**; la gráfica se obtuvo con un programa de solución numérica mediante el método RK4 y $h = 0.1$.

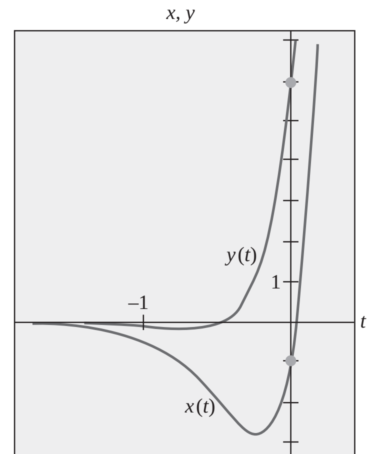


FIGURA 6.4.2 Curvas solución numéricas para el problema de valor inicial del ejemplo 3

En conclusión, expresamos el **método de Euler** para el sistema general (6) como:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n)\\
y_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n).
\end{aligned}
$$

6.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

1. Utilice el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$$

Utilice $h = 0.1$. Encuentre la solución exacta del problema y compare el valor real de $y(0.2)$ con y_2.

2. Mediante el método de Euler aproxime $y(1.2)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 4,\ y'(1) = 9,$$

donde $x > 0$. Utilice $h = 0.1$. Encuentre la solución analítica del problema y compare el valor real de $y(1.2)$ con y_2.

En los problemas 3 y 4, repita el problema indicado mediante el método RK4. Primero use $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

3. Problema 1 **4.** Problema 2

5. Utilice el método RK4 para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ sea una solución del problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \cos t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

6. Cuando $E = 100$ V, $R = 10\ \Omega$ y $L = 1$ h, el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_3(t)$ presentes en la red eléctrica ilustrada en la **FIGURA 6.4.3** es

$$\frac{di_1}{dt} = -20i_1 + 10i_3 + 100$$

$$\frac{di_3}{dt} = 10i_1 - 20i_3,$$

donde $i_1(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$. Aplique el método RK4 para aproximar $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5. Utilice $h = 0.1$. Emplee un programa de solución numérica para graficar la solución en el intervalo $0 \le t \le 5$. Utilice sus gráficas para pronosticar el comportamiento de $i_1(t)$ e $i_3(t)$ cuando $t \to \infty$.

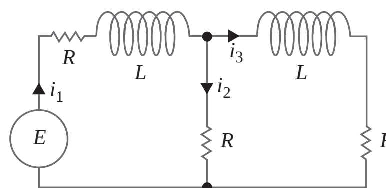


FIGURA 6.4.3 Red del problema 6

En los problemas del 7 al 12, use el método de Runge-Kutta para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$. Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$. Emplee un programa de solución numérica y $h = 0.1$ para graficar la solución en las cercanías de $t = 0$.

7. $x' = 2x - y$
$y' = x$
$x(0) = 6,\ y(0) = 2$

8. $x' = x + 2y$
$y' = 4x + 3y$
$x(0) = 1,\ y(0) = 1$

9. $x' = -y + t$
$y' = x - t$
$x(0) = -3,\ y(0) = 5$

10. $x' = 6x + y + 6t$
$y' = 4x + 3y - 10t + 4$
$x(0) = 0.5,\ y(0) = 0.2$

11. $x' + 4x - y' = 7t$
$x' + y' - 2y = 3t$
$x(0) = 1,\ y(0) = -2$

12. $x' + y' = 4t$
$-x' + y' + y = 6t^2 + 10$
$x(0) = 3,\ y(0) = -1$

6.5 Problemas de valores en la frontera de segundo orden

Introducción En la sección 6.4 acabamos de ver cómo aproximar la solución de un *problema de valor inicial de segundo orden* $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = u_0$. En esta sección vamos a examinar dos métodos útiles para aproximar una solución de un *problema de valores en la frontera de segundo orden* $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. A diferencia de los procedimientos que se emplean en los problemas de valor inicial de segundo orden, los métodos de los problemas de valores en la frontera de segundo orden no requieren que la ED de segundo orden se escriba nuevamente como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Aproximaciones por diferencias finitas El desarrollo de una serie de Taylor, centrada en un punto a, de una función $y(x)$ es

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x-a}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots.$$

Si definimos $h = x - a$, entonces la línea anterior equivale a

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{h}{1!} + y''(a)\frac{h^2}{2!} + y'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Para el análisis siguiente conviene volver a escribir esta última expresión en dos formas alternativas:

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \tag{1}$$

y

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \tag{2}$$

Si h es pequeña, podemos ignorar los términos en que aparezcan h^4, h^5, ..., puesto que estos valores son insignificantes. De hecho, si ignoramos todos los términos donde aparece h^2 y potencias mayores, cuando (1) y (2) se resuelven producen, respectivamente, las siguientes aproximaciones para la primera derivada

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x + h) - y(x)] \tag{3}$$

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x) - y(x - h)]. \tag{4}$$

Cuando se restan (1) y (2) se tiene también

$$y'(x) \approx \frac{1}{2h}[y(x + h) - y(x - h)]. \tag{5}$$

Por otra parte, si ignoramos los términos en que aparece h^3 o una potencia superior, después al sumar (1) y (2) se obtiene una aproximación de la segunda derivada $y''(x)$:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}[y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)]. \tag{6}$$

Los lados derechos de (3), (4), (5) y (6) se denominan **cocientes de diferencias**. Las expresiones

$$y(x + h) - y(x), \quad y(x) - y(x - h), \quad y(x + h) - y(x - h)$$

y

$$y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)$$

se denominan **diferencias finitas**. En específico, $y(x + h) - y(x)$ es llamada una **diferencia hacia adelante**, $y(x) - y(x - h)$ es una **diferencia hacia atrás**, y tanto $y(x + h) - y(x - h)$ como $y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)$ son llamadas **diferencias centrales**. Los resultados de (5) y (6) se denominan **aproximaciones por diferencia central** para las derivadas y' y y''.

Método de diferencias finitas Considere ahora un problema de valores en la frontera lineal de segundo orden:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{7}$$

Suponga que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ representa una partición regular del intervalo $[a, b]$; es decir, $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, ..., n$, y $h = (b - a)/n$. Los puntos

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a + (n - 1)h,$$

se llaman **puntos interiores de la malla** del intervalo $[a, b]$. Si definimos

$$y_i = y(x_i), \quad P_i = P(x_i), \quad Q_i = Q(x_i) \quad \text{y} \quad f_i = f(x_i)$$

y si y'' y y' de (7) se reemplazan con sus aproximaciones por diferencia central (5) y (6), obtenemos

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_iy_i = f_i$$

o, después de simplificar,

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} + (-2 + h^2Q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1} = h^2f_i. \tag{8}$$

Esta última ecuación, conocida como **ecuación de diferencias finitas**, es una aproximación de la ecuación diferencial. Nos permite aproximar la solución $y(x)$ de (7) en los puntos interiores de la malla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ del intervalo $[a, b]$. Si definimos i y adoptamos los valores 1, 2,…, $n - 1$ en (8), obtenemos $n - 1$ ecuaciones en las $n - 1$ incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Debemos tener en cuenta que conocemos y_0 y y_n, pues son las condiciones de frontera especificadas $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ y $y_n = y(x_n) = y(b) = \beta$.

En el ejemplo 1 consideramos un problema de valores en la frontera, para el cual podemos comparar los valores aproximados encontrados con los valores exactos de una solución explícita.

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencias finitas

Aplique la ecuación de diferencias (8) con $n = 4$ para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 5.$$

Solución Para usar (8) identificamos $P(x) = 0$, $Q(x) = -4$, $f(x) = 0$ y $h = (1 - 0)/4 = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, la ecuación de diferencias es

$$y_{i+1} - 2.25y_i + y_{i-1} = 0. \tag{9}$$

Ahora los puntos interiores son $x_1 = 0 + \frac{1}{4}$, $x_2 = 0 + \frac{2}{4}$, $x_3 = 0 + \frac{3}{4}$, así, para $i = 1$, 2 y 3, (9) produce el siguiente sistema para las respectivas y_1, y_2 y y_3:

$$\begin{aligned} y_2 - 2.25y_1 + y_0 &= 0 \\ y_3 - 2.25y_2 + y_1 &= 0 \\ y_4 - 2.25y_3 + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Debido a que las condiciones de frontera son $y_0 = 0$ y $y_4 = 5$, el sistema anterior se convierte en

$$\begin{aligned} -2.25y_1 + \quad y_2 \qquad\quad &= 0 \\ y_1 - 2.25y_2 + \quad y_3 &= 0 \\ y_2 - 2.25y_3 &= -5. \end{aligned}$$

Cuando se resuelve el sistema se obtienen $y_1 = 0.7256$, $y_2 = 1.6327$ y $y_3 = 2.9479$.

Ahora la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = c_1 \cosh 2x + c_2 \operatorname{senh} 2x$. La condición $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$. La otra condición de frontera determina a c_2. De esta forma vemos que una solución explícita del problema de valores en la frontera es $y(x) = (5 \operatorname{senh} 2x)/\operatorname{senh} 2$.

Por lo tanto, los valores exactos (redondeados a cuatro cifras decimales) de esta solución en los puntos interiores son los siguientes: $y(0.25) = 0.7184$, $y(0.5) = 1.6201$ y $y(0.75) = 2.9354$. ≡

En el ejemplo 1, la exactitud de las aproximaciones se puede mejorar usando un valor menor de h. Por supuesto, la desventaja aquí es que para un valor menor de h se necesita resolver un sistema de ecuaciones mayor. Se deja al lector como ejercicio demostrar que con $h = \frac{1}{8}$, las aproximaciones $y(0.25)$, $y(0.5)$ y $y(0.75)$ son 0.7202, 1.6233 y 2.9386, respectivamente. Véase el problema 11 en los ejercicios 6.5.

EJEMPLO 2 Empleo del método de diferencias finitas

Use la ecuación de diferencias (8) con $n = 10$ para aproximar la solución de

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 6.$$

Solución En este caso identificamos $P(x) = 3$, $Q(x) = 2$, $f(x) = 4x^2$ y $h = (2 - 1)/10 = 0.1$ y, por lo tanto, (8) se convierte en

$$1.15y_{i+1} - 1.98y_i + 0.85y_{i-1} = 0.04x_i^2. \tag{10}$$

Ahora los puntos interiores son $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 1.3$, $x_4 = 1.4$, $x_5 = 1.5$, $x_6 = 1.6$, $x_7 = 1.7$, $x_8 = 1.8$ y $x_9 = 1.9$. Para $i = 1, 2, ..., 9$ y $y_0 = 1$, $y_{10} = 6$, (10) produce un sistema de nueve ecuaciones y nueve incógnitas:

$$\begin{aligned}
1.15y_2 - 1.98y_1 \qquad\qquad &= -0.8016 \\
1.15y_3 - 1.98y_2 + 0.85y_1 &= 0.0576 \\
1.15y_4 - 1.98y_3 + 0.85y_2 &= 0.0676 \\
1.15y_5 - 1.98y_4 + 0.85y_3 &= 0.0784 \\
1.15y_6 - 1.98y_5 + 0.85y_4 &= 0.0900 \\
1.15y_7 - 1.98y_6 + 0.85y_5 &= 0.1024 \\
1.15y_8 - 1.98y_7 + 0.85y_6 &= 0.1156 \\
1.15y_9 - 1.98y_8 + 0.85y_7 &= 0.1296 \\
-1.98y_9 + 0.85y_8 &= -6.7556.
\end{aligned}$$

Podemos resolver este gran sistema de ecuaciones mediante la eliminación de Gauss o, con relativa facilidad, empleando un sistema asistido por computadora. El resultado es $y_1 = 2.4047$, $y_2 = 3.4432$, $y_3 = 4.2010$, $y_4 = 4.7469$, $y_5 = 5.1359$, $y_6 = 5.4124$, $y_7 = 5.6117$, $y_8 = 5.7620$ y $y_9 = 5.8855$. ≡

Método de tanteos Otra forma de aproximar una solución de un problema de valores en la frontera $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, es el **método de tanteos**. El punto de partida es reemplazar el problema de valores en la frontera con un problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = m_1. \tag{11}$$

El número m_1 incluido en (11) es simplemente un supuesto de la pendiente desconocida de la curva solución en un punto conocido $(a, y(a))$. Entonces, aplicamos paso a paso una de las técnicas numéricas a la ecuación de segundo orden dada en (11) para encontrar una aproximación β_1 para el valor de $y(b)$. Si β_1 concuerda con el valor dado $y(b) = \beta$ dentro de una tolerancia establecida previamente, los cálculos se detienen; de otra forma los cálculos se repiten, comenzando con un supuesto distinto $y'(a) = m_2$ para obtener una segunda aproximación β_2 para $y(b)$. Este método se puede continuar con el método de prueba y error, o las pendientes sucesivas m_3, m_4, ..., pueden ajustarse de alguna forma sistemática; una interpolación lineal resulta muy útil cuando la ecuación diferencial (11) es lineal. El procedimiento es análogo a tirar a un blanco (la "mira" es la elección de la pendiente inicial) hasta llegar a la diana, que es $y(b)$. Véase el problema 14 en los ejercicios 6.5.

Desde luego, el fundamento para usar estos métodos numéricos es el supuesto, no siempre válido, de que existe una solución del problema de valores en la frontera.

Comentarios

El método de aproximación que utiliza diferencias finitas se puede aplicar a problemas de valores en la frontera donde la primera derivada se especifica en una frontera, por ejemplo, un problema como $y'' = f(x, y, y')$, $y'(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Véase el problema 13 en los ejercicios 6.5.

6.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 10, use el método de diferencias finitas y el valor indicado de n para aproximar la solución del problema de valores en la frontera dado.

1. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 4,\ y(2) = 1;\ n = 4$

2. $y'' - y = x^2, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0;\ n = 4$

3. $y'' + 2y' + y = 5x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0;\ n = 5$

4. $y'' - 10y' + 25y = 1, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0;\ n = 5$

5. $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}, \quad y(0) = 3,\ y(1) = 0;\ n = 6$

6. $y'' + 5y' = 4\sqrt{x}, \quad y(1) = 1,\ y(2) = -1;\ n = 6$

7. $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 5,\ y(2) = 0;\ n = 8$

8. $x^2y'' - xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 0,\ y(2) = -2;\ n = 8$

9. $y'' + (1 - x)y' + xy = x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2;\ n = 10$

10. $y'' + xy' + y = x, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0;\ n = 10$

11. Vuelva a trabajar en el problema 1, con $n = 8$.

12. El potencial electrostático u entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$ y $r = 4$ se determina a partir de

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad u(1) = 50,\ u(4) = 100.$$

Use el método de esta sección con $n = 6$ para aproximar la solución de este problema de valores en la frontera.

13. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + xy = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = -1.$$

a) Encuentre la ecuación en diferencias que corresponde a la ecuación diferencial. Demuestre que cuando $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$, la ecuación en diferencias produce n ecuaciones en $n + 1$ incógnitas $y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. Aquí y_{-1} y y_0 son incógnitas puesto que y_{-1} representa una aproximación a y en el punto exterior $x = -h$ y y_0 no está especificado en $x = 0$.

b) Use la aproximación por diferencia central (5) para demostrar que $y_1 - y_{-1} = 2h$. Mediante esta ecuación, elimine y_{-1} del sistema determinado en el inciso *a*).

c) Mediante $n = 5$ y el sistema de ecuaciones encontrado en los incisos *a*) y *b*), aproxime la solución del problema de valores en la frontera.

Tarea para el laboratorio de cómputo

14. Considere el problema de valores en la frontera $y'' = y' - \text{sen}(xy)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1.5$. Use el método de tanteos para aproximar la solución de este problema. (La aproximación real se puede obtener mediante una técnica numérica, digamos, el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$; o aún mejor, si tiene acceso a un CAS, como *Mathematica* o *Maple*, podrá utilizar la función **NDSolve**.)

6 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 4, construya una tabla en la que se comparen los valores indicados de $y(x)$ obtenidos con los métodos de Euler, mejorado de Euler y de Runge-Kutta. Redondee sus cálculos a cuatro cifras decimales y use $h = 0.05$.

1. $y' = 2 \ln xy, \quad y(1) = 2;$
$y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5)$

2. $y' = \text{sen}\, x^2 + \cos y^2, \quad y(0) = 0;$
$y(0.1), y(0.2), y(0.3), y(0.4), y(0.5)$

3. $y' = \sqrt{x + y}, \quad y(0.5) = 0.5;$
$y(0.6), y(0.7), y(0.8), y(0.9), y(1.0)$

4. $y' = xy + y^2, \quad y(1) = 1;$
$y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5)$

5. Utilice el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $y'' - (2x + 1)y = 1$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. Primero con un tamaño del paso de $h = 0.2$, y después repita los cálculos usando dos pasos con $h = 0.1$.

6. Emplee el método de Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $y' = 4x - 2y$, $y(0) = 2$. Use $h = 0.1$ y el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

7. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$, donde $x(t)$, $y(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$x' = x + y$$
$$y' = x - y$$
$$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$$

8. Utilice el método de diferencias finitas con $n = 0$ para aproximar la solución del problema de valores en la frontera $y'' + 6.55(1 + x)y = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.



Planta geotérmica en la isla de Blue Lagoon

Parte 2

Matrices

7 MATRICES

Estructura del capítulo

En las matemáticas con frecuencia enfrentamos la tarea de manejar arreglos de números o funciones. A uno de dichos arreglos se le denomina **matriz**. La invención de la teoría de matrices se debe al eminente matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895).

7.1 Álgebra matricial

Introducción En la última sección del capítulo 18 se verá que un vector en R^n es una n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los vectores a menudo se escriben como un arreglo horizontal o vertical sin comas:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

A cada uno de los arreglos mostrados en (1) se le denomina **matriz**. Nuestro objetivo en esta sección es el estudio del álgebra de tales arreglos.

Una definición Los arreglos mostrados en (1) son casos especiales de (2) en la definición que sigue.

Definición 7.1.1 Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números o funciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

A los números o funciones incluidos en el arreglo (2) se les llama **entidades** o **elementos** de la matriz. Si una matriz tiene m renglones y n columnas decimos que su **tamaño** es de m por n (y se escribe $m \times n$). Una matriz de $n \times n$ se denomina matriz **cuadrada** o matriz de **orden** $\boldsymbol{n}$. Una matriz de 1×1 es simplemente una constante o función. Por ejemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3 mientras que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 5 & \sqrt{3} & \pi & -4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

es una matriz cuadrada de 4×4 o una matriz de orden 4. A lo largo del libro denotaremos a una matriz mediante una letra mayúscula en negritas, tal como **A**, **B**, **C** o **X**.

El elemento que aparece en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima de una matriz **A** de $m \times n$ se escribe como a_{ij}. Por lo tanto, una matriz **A** de $m \times n$ se abrevia como $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$. En una matriz cuadrada de $n \times n$ a los elementos $a_{11}, a_{22} \ldots, a_{nn}$ se les llama **elementos de la diagonal principal**. Los elementos de la diagonal principal de la matriz **B** mostrada en (3) son 9, -2, -1 y -4.

Definición 7.1.2 Vectores columna y renglón

Una matriz de $n \times 1$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

se llama **vector columna**. Una matriz de $1 \times n$,

$$(a_1 \ \ a_2 \ \ \cdots \ \ a_n),$$

se llama **vector renglón**.

Definición 7.1.3 Igualdad de matrices

Dos matrices **A** y **B** de $m \times n$ son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y j.

En otras palabras, dos matrices son iguales si, y sólo si, tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

EJEMPLO 1 Igualdad

a) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no son iguales puesto que el tamaño de la primera matriz es de 2×2 y el de la segunda es de 2×3.

b) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ no son iguales puesto que, en los segundos renglones, los elementos correspondientes no son iguales. ≡

Suma de matrices Cuando dos matrices **A** y **B** son del mismo tamaño, podemos sumarlas mediante la adición de sus elementos correspondientes.

Definición 7.1.4 Suma de matrices

Si **A** y **B** son matrices de $m \times n$, entonces su **suma** es

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

EJEMPLO 2 Suma de dos matrices

a) La suma de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -6 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 9 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 & 3+(-8) \\ 0+9 & 4+3 & 6+5 \\ -6+1 & 10+(-1) & -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -5 \\ 9 & 7 & 11 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) La suma de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no está definida puesto que **A** y **B** tienen tamaños diferentes. ≡

Definición 7.1.5 Múltiplo escalar de una matriz

Si k es un número real, entonces el **múltiplo escalar** de una matriz **A** es

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

En otras palabras, para calcular $k\mathbf{A}$ simplemente multiplicamos cada elemento de **A** por k. Por ejemplo, a partir de la definición 7.1.5, $5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 & 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 4 & 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$. Se observa de paso que, para cualquier matriz **A**, el múltiplo escalar $k\mathbf{A}$ es lo mismo que $\mathbf{A}k$.

La **resta** de dos matrices de $m \times n$ se define de la manera usual: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ donde $-\mathbf{B} = (-1)\mathbf{B}$.

El teorema siguiente resume algunas propiedades de la suma y la multiplicación escalar de matrices. Cada una de las seis partes del teorema puede demostrarse mediante el uso de las definiciones 7.1.4 y 7.1.5.

Teorema 7.1.1 Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar

Suponga que **A**, **B** y **C** son matrices de $m \times n$ y que k_1 y k_2 son escalares. Por lo tanto,

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ← Ley conmutativa de la suma

ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ ← Ley asociativa de la suma

iii) $(k_1k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A})$

iv) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

v) $k_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k_1\mathbf{A} + k_1\mathbf{B}$ ← Ley distributiva

vi) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$ ← Ley distributiva

Multiplicación de matrices Acabamos de estudiar que cualquier matriz **A** puede multiplicarse por un escalar; sin embargo, ¿pueden multiplicarse entre sí dos matrices? La siguiente definición proporciona la respuesta.

Definición 7.1.6 Multiplicación de matrices

Sea **A** una matriz que tenga m renglones y p columnas, y sea **B** una matriz con p renglones y n columnas. El **producto AB** es la matriz de $m \times n$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times n}.$$

La definición 7.1.6 establece que el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ está definido solamente cuando el número de columnas de la matriz **A** es igual que el número de renglones de **B**. La dimensión del producto puede determinarse a partir de

$$\mathbf{A}_{m \times p}\mathbf{B}_{p \times n} = \mathbf{C}_{m \times n}.$$

El número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B**.

Asimismo, usted podrá observar que los elementos en, digamos, el i-ésimo renglón de la matriz resultante $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ se forma utilizando la definición del producto interno o punto del renglón (vector) i-ésimo de **A** con cada una de las columnas (vectores) de **B**.

EJEMPLO 3 Multiplicación de matrices

Encuentre el producto **AB** de las matrices siguientes:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ ***b***) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución A partir de la definición 7.1.6 se tiene:

a) $$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 9 + 7 \cdot 6 & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 + 5 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 48 \\ 57 & 34 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-4) + 8\cdot 2 & 5\cdot(-3) + 8\cdot 0 \\ 1\cdot(-4) + 0\cdot 2 & 1\cdot(-3) + 0\cdot 0 \\ 2\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot(-3) + 7\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ -4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$ ≡

A diferencia de la suma, la multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa. Esto es, $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$. Observe que en el inciso *a*) del ejemplo 3, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ 48 & 82 \end{pmatrix}$, mientras que en el inciso *b*) el producto **BA** *no está definido*, ya que la primera matriz (en este caso la matriz **B**) no tiene el mismo número de columnas que la segunda matriz tiene de renglones.

El producto de una matriz de $m \times n$ con un vector columna de $n \times 1$ es un vector columna de $m \times 1$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A menudo resulta muy conveniente escribir un vector columna como la suma de dos o más vectores columna. En vista de las definiciones 7.1.4 y 7.1.5, el resultado en (4) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

■ **Ley asociativa** Aunque aquí no se demostrará, la multiplicación de matrices es **asociativa**. Si **A** es una matriz de $m \times p$, **B** una matriz de $p \times r$ y **C** una matriz de $r \times n$, entonces el producto

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

es una matriz de $m \times n$.

■ **Ley distributiva** Si tanto **B** como **C** son matrices de $r \times n$ y **A** es una matriz de $m \times r$, entonces la **ley distributiva** es

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Además, si el producto $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}$ está definido, entonces

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

Definición 7.1.7 Transpuesta de una matriz

La **transpuesta** de la matriz $m \times n$ (2) es la matriz $\mathbf{A}^T$ de $n \times m$ dada por

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, los renglones de una matriz **A** se convierten en las columnas de su transpuesta $\mathbf{A}^T$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Si } \mathbf{B} = (5\ 3), \text{ entonces } \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En el teorema siguiente proporcionamos algunas propiedades importantes de la matriz transpuesta.

Teorema 7.1.2 Propiedades de la transpuesta

Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices y k es un escalar. Por lo tanto,

i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ← Transpuesta de la transpuesta
ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ← Transpuesta de una suma
iii) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ ← Transpuesta de un producto
iv) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$ ← Transpuesta de un múltiplo escalar

Desde luego, en las propiedades *ii*) y *iii*) del teorema 7.1.2 suponemos que la suma y el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están definidos. Observe con cuidado que el inciso *iii*) del teorema indica que la transpuesta del producto es el producto de las transpuestas *con el orden invertido*. Además, tanto *ii*) como *iii*) pueden hacerse extensivas a cualquier suma o producto finitos de matrices. Por ejemplo, en el caso de tres matrices, tenemos

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T \quad \text{y} \quad (\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Matrices especiales En la teoría de matrices existen muchos tipos de matrices que son importantes debido a que poseen ciertas propiedades. A continuación presentamos una lista de algunas de estas matrices:

- Una matriz formada sólo por elementos cero se denomina **matriz cero** y se denota mediante un $\mathbf{0}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices cero. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{0}$ son matrices $m \times n$, entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}. \tag{5}$$

Además, $$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

- Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **triangular** si todos sus elementos ubicados por debajo de la diagonal principal son ceros o si todos sus elementos por arriba de la diagonal principal son ceros. En otras palabras, la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es triangular si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ o $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Siendo más específicos, en el primer caso la matriz se llama **triangular superior**, y en el segundo caso tenemos una matriz **triangular inferior**. Las matrices siguientes son triangulares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 15 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior Matriz triangular inferior

- Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es una **matriz diagonal** si todos sus elementos que no se encuentran en la diagonal principal son ceros. Simbólicamente $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. La siguiente es una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Cuando todos los elementos a_{ii} de una matriz diagonal $\mathbf{A}$ son iguales, tenemos una **matriz escalar**. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar. Una matriz escalar de $n \times n$

es simplemente un múltiplo escalar de una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En general, la matriz de $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

se representa con el símbolo **I** (o mediante $\mathbf{I}_n$ cuando existe la necesidad de enfatizar el orden de la matriz). Para cualquier matriz **A** de $m \times n$ se comprueba fácilmente que $\mathbf{I}_m\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$. Debido a que esta última propiedad es análoga a $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para cualquier número real a, a la matriz **I** se le denomina **matriz identidad**.

- Se dice que una matriz **A** de $n \times n$ es **simétrica** si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$; esto es, **A** es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i y j. Lo anterior significa que los elementos de una matriz simétrica son simétricos con respecto a la diagonal principal de la matriz. Por ejemplo, una inspección rápida de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

muestra que es simétrica. Además, al calcular la transpuesta de **A** podemos observar que

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Comentarios

Suponga que el símbolo $M_{m,n}$ expresa el conjunto de todas las matrices $m \times n$ donde se encuentran definidas las operaciones de suma y multiplicación escalar de matrices. Entonces,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ está en } M_{m,n} \quad \text{y} \quad k\mathbf{A} \text{ está en } M_{m,n} \tag{7}$$

para todas **A** y **B** en $M_{m,n}$ y para cada escalar k. Es decir, $M_{m,n}$ es cerrado respecto a la suma matricial y a la multiplicación escalar. Cuando combinamos (7) con las propiedades (5) y (6) y con las propiedades listadas en el teorema 7.1.1, de inmediato podemos deducir que $M_{m,n}$ es un espacio vectorial. Para efectos prácticos, los espacios vectoriales $M_{1,n}$ (vectores renglón) y $M_{n,1}$ (vectores columna) no se pueden distinguir a partir del espacio vectorial R^n.

7.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas 1 a 6, establezca el tamaño de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4. $(5 \quad 7 \quad -15)$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & 0 \\ 7 & -10 & 2 & 12 \\ 0 & 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \\ -10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

En los problemas del 7 al 10, determine si las matrices mostradas son iguales.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} \sqrt{(-2)^2} & 1 \\ 2 & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0.125 & 0.2 \\ 1.414 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 y 12, determine los valores de x y y para los que las matrices son iguales.

11. $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4x & 5 \end{pmatrix}$

En los problemas 13 y 14, encuentre los elementos c_{23} y c_{12} de la matriz $\mathbf{C} = 2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

15. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, ***b)*** $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, ***c)*** $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

16. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, ***b)*** $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, ***c)*** $2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

17. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{AB}$, ***b)*** $\mathbf{BA}$, ***c)*** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, ***d)*** $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB}$.

18. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{AB}$, ***b)*** $\mathbf{BA}$.

19. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{BC}$, ***b)*** $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, ***c)*** $\mathbf{C}(\mathbf{BA})$, ***d)*** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

20. Si $\mathbf{A} = (5 \quad -6 \quad 7)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{AB}$, ***b)*** $\mathbf{BA}$, ***c)*** $(\mathbf{BA})\mathbf{C}$, ***d)*** $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

21. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = (2 \quad 4 \quad 5)$, encuentre ***a)*** $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, ***b)*** $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, ***c)*** $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$.

22. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$, ***b)*** $2\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$, ***c)*** $\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

23. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $(\mathbf{AB})^T$, ***b)*** $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

24. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre ***a)*** $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$, ***b)*** $2\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$.

En los problemas del 25 al 28, escriba la suma como una sola matriz columna.

25. $4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

26. $3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

En los problemas 29 y 30, determine el tamaño de la matriz **A** de tal forma que se defina el producto dado.

29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 6 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

En los problemas del 31 al 34, suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Verifique la propiedad que se expresa calculando los miembros derecho e izquierdo de la igualdad dada.

31. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

32. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

33. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

34. $(6\mathbf{A})^T = 6\mathbf{A}^T$

35. Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Verifique si la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{AA}^T$ es simétrica.

36. Demuestre que si **A** es una matriz de $m \times n$, entonces $\mathbf{AA}^T$ es simétrica.

37. En la teoría de matrices, una gran parte de las propiedades del sistema de números reales no es válida. Si a y b son números reales, entonces $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$. Encuentre dos matrices tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

38. Si a, b y c son números reales y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$ implica que $a = b$. En el caso de matrices, $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$, no implica necesariamente que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Verifique esto,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En los problemas 39 y 40, sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices de $n \times n$. Explique por qué, en general, *no* es válida la fórmula dada.

39. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

40. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

41. Escriba $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sin matrices.

42. Escriba el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{B}$ son vectores columna.

43. Compruebe que la forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ es la misma que

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

44. Compruebe que la integral del campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ puede escribirse como

$$\text{integral } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial/\partial x & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}.$$

(Los lectores que no estén familiarizados con el concepto de la integral de un campo vectorial deberán ver la sección 19.7.)

45. Como se muestra en la **FIGURA 7.1.1*a*)**, una nave espacial puede efectuar rotaciones, llamadas **elevación**, **giro** y **ruedo**, respecto a tres ejes distintos. Para describir las coordenadas de un punto P utilizamos dos sistemas de coordenadas: un sistema de coordenadas cartesianas fijo y tridimensional donde las coordenadas de P sean (x, y, z), y un sistema de coordenadas de la nave que se mueva con cada rotación en particular. En la figura 7.1.1*b*) se ilustra un ruedo; es decir, una rotación alrededor del eje z (el cual es perpendicular al plano del papel). Las coordenadas (x_Y, y_Y, z_Y) del punto P en el sistema nave-espacio después del ruedo están relacionadas con las coordenadas (x, y, z) de P en el sistema fijo de coordenadas mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_Y &= x\cos\gamma + y\,\text{sen}\,\gamma \\ y_Y &= -x\,\text{sen}\,\gamma + y\cos\gamma \\ z_Y &= z \end{aligned}$$

donde γ es el ángulo de rotación.

***a*)** Compruebe que el sistema de ecuaciones anterior puede escribirse como la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x_Y \\ y_Y \\ z_Y \end{pmatrix} = \mathbf{M}_Y\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $$\mathbf{M}_Y = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\,\gamma & 0 \\ -\text{sen}\,\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***b*)** Cuando la nave espacial realiza una elevación, un giro y un ruedo *en secuencia* a los ángulos α, β y γ, respectivamente, las coordenadas finales del punto P en el sistema de la nave espacial (x_S, y_S, z_S) se obtienen a partir de la secuencia de transformaciones

$$\begin{aligned} x_P &= x & x_R &= x_P\cos\beta - z_P\,\text{sen}\,\beta \\ y_P &= y\cos\alpha + z\,\text{sen}\,\alpha & y_R &= y_P \\ z_P &= -y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha; & z_R &= x_P\,\text{sen}\,\beta + z_P\cos\beta; \end{aligned}$$

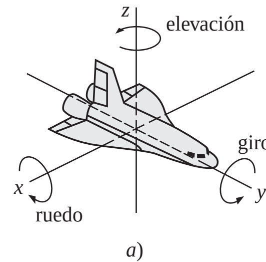
$$\begin{aligned} x_S &= x_R\cos\gamma + y_R\,\text{sen}\,\gamma \\ y_S &= -x_R\,\text{sen}\,\gamma + y_R\cos\gamma \\ z_S &= z_R. \end{aligned}$$

Escriba esta secuencia de transformaciones como una ecuación matricial

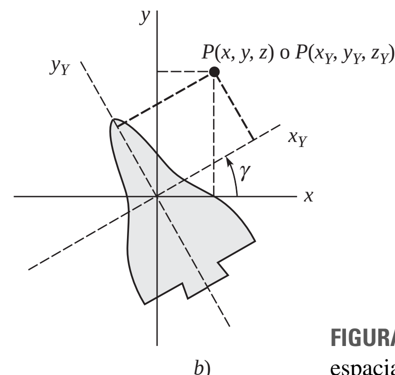
$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \mathbf{M}_Y\mathbf{M}_R\mathbf{M}_P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{M}_\gamma$ es la misma que aparece en el inciso *a*). Identifique las matrices $\mathbf{M}_R$ y $\mathbf{M}_P$.

***c*)** Suponga que las coordenadas de un punto son (1, 1, 1) en el sistema de coordenadas fijo. Determine las coordenadas del punto en el sistema de la nave si ésta realiza una elevación, un giro y un ruedo en secuencia a los ángulos $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.



a)



b)

FIGURA 7.1.1 Nave espacial del problema 45

46. Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede escribirse como el producto de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ y una matriz triangular superior $\mathbf{U}$, entonces se dice que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es una **factorización LU** de $\mathbf{A}$. Compruebe que una matriz $\mathbf{A}$ dada puede escribirse como el producto de las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ indicadas.

***a*)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. Proyecto *a*) Una matriz **A** puede **ser partida** en submatrices. Por ejemplo, las matrices de 3 × 5 y de 5 × 2

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 0 & 7 \\ -4 & 1 \\ \hline -2 & -1 \\ 2 & 5 \end{array}\right)$$

pueden escribirse como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es el bloque superior izquierdo, o submatriz, que se indica a gris en **A**; A_{12} es el bloque superior derecho, y así sucesivamente. Calcule el producto **AB** utilizando las matrices particionadas.

***b*)** Investigue de qué manera pueden ser útiles las matrices particionadas cuando se utiliza una computadora para llevar a cabo cálculos matriciales que involucren matrices de gran tamaño.

7.2 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

Introducción Recuerde: se dice que cualquier ecuación de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales, es una **ecuación lineal** en las variables x y y. La gráfica de una ecuación lineal en dos variables es una línea recta. Para números reales a, b, c y d, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal en las variables x, y y z, y es la ecuación de un plano en el espacio tridimensional. En general, una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_n,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b_n son números reales, es una ecuación lineal en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En la presente sección estudiaremos los **sistemas de ecuaciones lineales**, a los que también se les conoce con el nombre de **sistemas lineales**.

Forma general Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas tiene la forma general

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

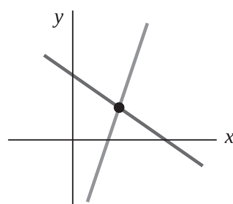
En el sistema lineal (1), los **coeficientes** de las incógnitas pueden abreviarse como a_{ij}, donde i significa el renglón y j la columna en la que aparece el coeficiente. Por ejemplo, a_{23} es el coeficiente de la incógnita localizada en el segundo renglón y la tercera columna (es decir, x_3). Por lo tanto, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Los números $b_1, b_2, \ldots, b_m$ se llaman **constantes** del sistema. Si todas las constantes son cero, se dice que el sistema (1) es **homogéneo**, de otra forma es **no homogéneo**. Por ejemplo,

Este sistema es homogéneo ↓

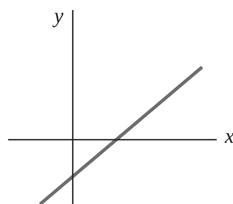
$$\begin{aligned} 5x_1 - 9x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 \qquad &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es no homogéneo ↓

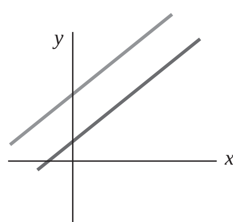
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9. \end{aligned}$$



a)



b)



c)

FIGURA 7.2.1 Solución única en *a*); un número infinito de soluciones en *b*); sin solución en *c*)

Solución Una **solución** de un sistema lineal (1) es un conjunto de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ es una solución del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 &= 7. \end{aligned}$$

Para comprobar lo anterior, sustituimos x_1 por 3 y x_2 por -1 en cada ecuación:

$$3(3) + 6(-1)9 - 6 = 3 \quad \text{y} \quad 3 - 4(-1) = 3 + 4 = 7.$$

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución, y es **inconsistente** cuando no tiene soluciones. Si un sistema lineal es consistente tiene ya sea

- una solución única (es decir, exactamente una solución), o
- un número infinito de soluciones.

Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales no puede tener, digamos, exactamente tres soluciones. En un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas, las líneas se intersecan en un punto, como ilustra la **FIGURA 7.2.1*a*)** (solución única), son idénticas, figura 7.2.1*b*) (un número infinito de soluciones), o son paralelas, figura 7.2.1*c*) (inconsistente).

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Compruebe que $x_1 = 14 + 7t$, $x_2 = 9 + 6t$, $x_3 = t$, donde t es un número real cualquiera, es una solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Solución Al reemplazar x_1, x_2 y x_3 por $14 + 7t$, $9 + 6t$ y t, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} 2(14 + 7t) - 3(9 + 6t) + 4t &= 1 \\ 14 + 7t - (9 + 6t) - t &= 5. \end{aligned}$$

Por cada número real t obtenemos una solución diferente del sistema; en otras palabras, el sistema tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, $t = 0$, $t = 4$ y $t = -2$ proporcionan las tres soluciones

$$\begin{aligned} &x_1 = 14, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = 0, \\ &x_1 = 42, \quad x_2 = 33, \quad x_3 = 4, \\ \text{y} \qquad &x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2, \end{aligned}$$

respectivamente. Desde el punto de vista geométrico, cada ecuación del sistema representa una plano en R^3. En este caso, los planos se intersecan formando una línea; las ecuaciones paramétricas de la línea son $x_1 = 14 + 7t$, $x_2 = 9 + 6t$, $x_3 = t$. ≡

Resolución de sistemas Podemos transformar un sistema de ecuaciones lineales en un sistema equivalente (es decir, en uno que tenga las mismas soluciones) mediante las **operaciones elementales** siguientes:

i) La multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.
ii) El intercambio de posiciones de las ecuaciones presentes en el sistema.
iii) La suma de un múltiplo diferente de cero de una ecuación con cualquiera de las demás ecuaciones.

Tal como ilustra el ejemplo siguiente, estas operaciones elementales nos permiten eliminar variables sistemáticamente a partir de las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema lineal

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Solución Comenzamos intercambiando los renglones primero y segundo:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es eliminar x_1 de las ecuaciones segunda y tercera. Si sumamos a la segunda ecuación -2 veces la primera, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Sumándole a la tercera ecuación -5 veces la primera, obtenemos un nuevo sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Ahora vamos a utilizar la segunda ecuación para eliminar la variable x_2 a partir de las ecuaciones primera y tercera. Para hacer más sencillo el procedimiento, multiplicaremos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Sumamos a la primera ecuación -2 veces la segunda y obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

A continuación, sumando 3 veces la segunda ecuación a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2}x_3 &= \frac{55}{2}. \end{aligned}$$

Utilizaremos la última ecuación para eliminar la variable x_3 de las ecuaciones primera y segunda. Para tal fin, multiplicamos la tercera ecuación por $\frac{2}{11}$:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

En este punto podríamos utilizar la **sustitución hacia atrás**; esto es, sustituir el valor $x_3 = 5$ en las ecuaciones restantes para determinar x_1 y x_2. Sin embargo, continuando con nuestra eliminación sistemática, sumamos a la segunda ecuación $-\frac{3}{2}$ veces la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 &= -10 \\ x_2 \qquad &= -3 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Por último, sumando a la primera ecuación 4 veces la tercera, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 10 \\ x_2 \qquad &= -3 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Es evidente que $x_1 = 10$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$ es la solución al sistema original. ≡

Matriz aumentada Lo que refleja la solución del sistema lineal del ejemplo 2 debe convencerlo de que la solución del sistema no depende de qué símbolos se utilicen como variables. Por lo tanto, los sistemas

$$\begin{aligned} 2x + 6y + z &= 7 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 5x + 7y - 4z &= 9 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2u + 6v + w &= 7 \\ u + 2v - w &= -1 \\ 5u + 7v - 4w &= 9 \end{aligned}$$

tienen la misma solución que el sistema del ejemplo 2. En otras palabras, en la solución de un sistema lineal, los símbolos utilizados para denotar las variables no tienen significado; son los coeficientes de las variables y las constantes los que determinan la solución del sistema. De hecho, podemos resolver un sistema de la forma (1) eliminando completamente las variables y realizando las operaciones de los renglones del arreglo de coeficientes y constantes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2}$$

A este arreglo se le denomina **matriz aumentada** del sistema o simplemente **matriz del sistema** (1).

EJEMPLO 3 Matrices aumentadas

a) La matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right)$ representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 &= 8. \end{aligned}$$

b) El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 8x_2 &= 7 \\ x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \begin{aligned} x_1 + 0x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 0x_3 &= 7 \\ 0x_1 + x_2 + 9x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right). \qquad \equiv$$

Operaciones elementales con renglones Puesto que los renglones de una matriz aumentada representan las ecuaciones de un sistema lineal, las tres operaciones elementales de un sistema lineal listado previamente son equivalentes a las siguientes **operaciones elementales con renglones**:

i) Multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero.
ii) Intercambio de cualquier par de renglones.
iii) Suma de un múltiplo constante diferente de cero de un renglón a cualquier otro renglón.

Desde luego, cuando sumamos un múltiplo de un renglón a otro, sumamos los elementos correspondientes en los renglones. Se puede decir que dos matrices son **equivalentes por renglón** si puede obtenerse un renglón a partir de otro mediante una secuencia de operaciones elementales con renglones. Al procedimiento de llevar a cabo operaciones elementales con renglones en una matriz para obtener una matriz con renglones equivalentes se le llama **reducción de renglones**.

Métodos de eliminación Para resolver un sistema como el expresado en (1) utilizando una matriz aumentada, podemos aplicar tanto el **método de eliminación gaussiana** como el de **eliminación de Gauss-Jordan**. En el primero, se reduce a renglones la matriz aumentada del sistema hasta llegar a una matriz aumentada equivalente en renglones, la cual se presenta en la llamada **forma escalonada**:

i) El primer elemento diferente de cero en un renglón diferente de cero es un 1.
ii) En los renglones consecutivos diferentes de cero, el primer elemento 1 situado en el renglón más bajo aparece a la derecha del 1 localizado en el renglón más alto.
iii) Los renglones cuyos elementos son todos iguales a cero se encuentran en el inciso inferior de la matriz.

En el método de Gauss-Jordan, continúan realizándose las operaciones de renglón hasta obtener una matriz aumentada que se encuentre en su **forma escalonada reducida**. Una matriz escalonada reducida tiene las tres propiedades que se listaron anteriormente, además de la siguiente:

iv) Una columna que contenga como primer elemento un 1, tendrá ceros en cualquier otro lugar.

EJEMPLO 4 Formas escalonadas

a) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

se encuentran en forma escalonada. El lector debe verificar que los tres criterios enunciados se satisfagan para esta forma.

b) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

se encuentran en forma escalonada reducida. Observe que todos los elementos restantes localizados en las columnas que contienen un elemento 1 son cero. ≡

Se debe observar que en la eliminación gaussiana nos detuvimos cuando se obtuvo *una* matriz aumentada en forma escalonada. En otras palabras, utilizando diferentes secuencias de operaciones de renglón, es posible obtener distintas formas escalonadas. Este método requiere entonces el uso de la sustitución hacia atrás. En la eliminación de Gauss-Jordan nos detuvimos cuando se obtuvo *la* matriz aumentada en la forma escalonada reducida. Cualquier secuencia

Nota: Las operaciones con renglones pueden dar como resultado diferentes formas escalonadas.

de operaciones con renglones nos llevará a la misma matriz aumentada en forma escalonada reducida. Este método no requiere la sustitución hacia atrás; la solución del sistema será evidente al inspeccionar la matriz final. En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestro objetivo en ambos métodos es simplemente hacer que el coeficiente de x_1 en la primera ecuación* sea igual a uno y después utilizar múltiplos de esta ecuación para eliminar x_1 de las demás ecuaciones. El proceso se repite para las variables restantes.

Para mantener un registro de las operaciones con renglones que se realicen en una matriz aumentada, se utiliza la siguiente notación:

Símbolo	Significado
R_{ij}	Intercambie los renglones i y j
cR_i	Multiplique el i-ésimo renglón por la constante c diferente de cero
$cR_i + R_j$	Multiplique el i-ésimo renglón por c y súmelo al renglón j-ésimo

EJEMPLO 5 Métodos de eliminación y matrices aumentadas

Resuelva el sistema lineal del ejemplo 2 utilizando *a*) la eliminación gaussiana y *b*) la eliminación de Gauss-Jordan.

Solución ***a***) Al utilizar las operaciones de renglón en la matriz aumentada del sistema, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \overset{R_{12}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\overset{3R_2+R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{55}{2} \end{array}\right) \overset{\frac{2}{11}R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

La última matriz está en la forma escalonada y representa el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Sustituir $x_3 = 5$ en la segunda ecuación nos da $x_2 = -3$. Al reemplazar ambos valores en la primera ecuación obtenemos finalmente $x_1 = 10$.

b) Comenzamos con la última matriz escrita anteriormente. Puesto que los primeros elementos localizados en la segunda y tercera columnas son unos, debemos hacer, a su vez, que los elementos restantes de la segunda y tercera columnas sean ceros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{-2R_2+R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{-4R_3+R_1 \\ -\frac{3}{2}R_3+R_2}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

La última matriz está en la forma escalonada reducida. Tomando en cuenta lo que significa la matriz en términos de ecuaciones, podemos observar que la solución del sistema es $x_1 = 10, x_2 = -3, x_3 = 5$. ≡

EJEMPLO 6 Eliminación por el método de Gauss-Jordan

Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + \quad x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 19. \end{aligned}$$

* Siempre es posible intercambiar las ecuaciones de tal forma que la primera ecuación contenga a la variable x_1.

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -7 \\ 4 & 1 & 3 & | & 5 \\ 2 & -5 & 7 & | & 19 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{-4R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -7 \\ 0 & -11 & 11 & | & 33 \\ 0 & -11 & 11 & | & 33 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{-\frac{1}{11}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & -7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{-3R_2+R_1 \\ -R_2+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la última matriz en forma escalonada reducida implica que el sistema original de tres ecuaciones con tres incógnitas equivale realmente a dos ecuaciones en cuanto a las incógnitas. Puesto que solamente x_3 es común a ambas ecuaciones (los renglones diferentes de cero), podemos asignar sus valores de forma arbitraria. Si dejamos que $x_3 = t$, donde t representa cualquier número real, entonces se puede observar que el sistema tiene un infinito número de soluciones: $x_1 = 2 - t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = t$. Geométricamente, estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la línea de intersección de los planos $x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$ y $0x_1 + x_2 - x_3 = -3$. ≡

EJEMPLO 7 Sistema inconsistente

Resuelva

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 &= -6 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Solución En el proceso de aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema, nos detenemos en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 4 & -1 & | & -6 \\ 2 & -3 & | & 8 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 16 \end{pmatrix}.$$

El tercer renglón de la última matriz significa $0x_1 + 0x_2 = 16$ (o $0 = 16$). Puesto que ningún valor de x_1 y x_2 puede satisfacer esta ecuación, es posible concluir que el sistema no tiene solución. ≡

Los sistemas inconsistentes de m ecuaciones lineales con n incógnitas siempre generarán la situación que se ilustra en el ejemplo 7; esto es, en la forma escalonada reducida de la matriz aumentada habrá un renglón en el que los primeros n elementos son cero y el elemento $(n + 1)$ es diferente de cero.

◀ Vale la pena recordar.

Redes Las corrientes que circulan por las ramas de una red eléctrica pueden determinarse utilizando las leyes de nodos y de mallas de Kirchhoff:

Ley de nodos: La suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo en un circuito es 0.

Ley de mallas: En una malla, la suma algebraica de las diferencias de potencial en cada elemento suyo es 0.

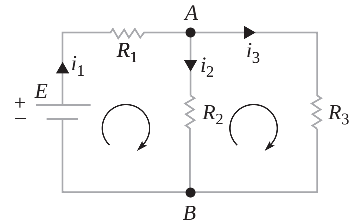


FIGURA 7.2.2 Red eléctrica

Cuando se recorre una malla en una dirección específica (en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido opuesto), se considera que la fem es *positiva* cuando va de $-$ a $+$ y *negativa* cuando va de $+$ a $-$. El producto iR se considera *positivo* si la dirección seleccionada por el resistor es opuesta a la de la corriente que se supuso, y es *negativo* si la dirección seleccionada es igual a la supuesta.

En la FIGURA 7.2.2, los puntos de las ramas de la red se identifican como A y B, las mallas como L_1 y L_2, y la dirección seleccionada en cada malla va en el sentido de las manecillas del reloj. Ahora, aplicando las leyes anteriores a la red, obtenemos el sistema no homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ E - i_1R_1 - i_2R_2 &= 0 \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1R_1 + i_2R_2 &= E \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

EJEMPLO 8 Corrientes en una red

Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema (3) cuando $R_1 = 10$ ohms, $R_2 = 20$ ohms, $R_3 = 10$ ohms y $E = 12$ volts.

Solución El sistema a resolver es

$$\begin{aligned} i_1 - \quad i_2 - \quad i_3 &= 0 \\ 10i_1 + 20i_2 \qquad &= 12 \\ 20i_2 - 10i_3 &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 12 \\ 0 & 20 & -10 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\text{operaciones con renglones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{25} \end{array}\right).$$

Por lo tanto, vemos que las corrientes en los tres circuitos son $i_1 = \frac{18}{25} = 0.72$ amperes, $i_2 = \frac{6}{25} = 0.24$ amperes e $i_3 = \frac{12}{25} = 0.48$ amperes. ≡

Sistemas homogéneos Todos los sistemas de los ejemplos anteriores son no homogéneos. Como hemos observado, un sistema no homogéneo puede ser consistente o inconsistente. Por el contrario, un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

siempre es consistente, puesto que $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ satisfarán cada una de las ecuaciones del sistema. Una solución donde todos los valores son iguales a cero se llama **solución trivial**. Sin embargo, es natural que estemos interesados en conocer si un sistema de la forma (4) tiene cualesquiera soluciones para las que *algunas* de las x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son diferentes de cero. Una solución de este tipo se denomina **solución no trivial**. Un sistema homogéneo tiene ya sea solamente la solución trivial o la solución trivial junto con un número infinito de soluciones no triviales. El teorema siguiente, enunciado sin demostración, nos proporciona una condición que es suficiente para justificar la existencia de soluciones no triviales.

Teorema 7.2.1 Existencia de soluciones no triviales

Un sistema homogéneo de la forma (4) tiene soluciones no triviales si el número m de ecuaciones es menor que el número n de incógnitas ($m < n$).

EJEMPLO 9 Resolución de un sistema homogéneo

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + \quad x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Solución Puesto que el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas sabemos, a partir del teorema 7.2.1, que el sistema dado tiene soluciones no triviales. Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan encontramos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{R_{12}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{6}R_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \end{array}\right) \overset{-R_2+R_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \end{array}\right).$$

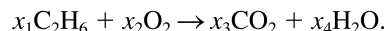
Como en el ejemplo 6, si $x_3 = t$, entonces la solución del sistema es $x_1 = \frac{5}{6}t$, $x_2 = \frac{7}{6}t$, $x_3 = t$. Observe que al seleccionar $t = 0$ obtenemos la solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ para este sistema. Para $t \neq 0$ se obtienen soluciones no triviales. Por ejemplo, las soluciones correspondientes a $t = 6$, $t = -12$ y $t = 3$ son, a su vez, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 6$; $x_1 = -10$, $x_2 = -14$, $x_3 = -12$, y $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 3$. ≡

■ **Ecuaciones químicas** El ejemplo siguiente proporciona una aplicación de sistemas no homogéneos en la química.

EJEMPLO 10 Balanceo de una ecuación química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Solución Deseamos encontrar enteros positivos x_1, x_2, x_3 y x_4 de tal forma que



$$x_1C_2H_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3CO_2 + x_4H_2O.$$

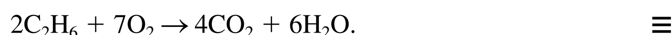
Debido a que el número de átomos de cada elemento debe ser el mismo en cada miembro de la última ecuación, tenemos:

$$\begin{array}{llcl}
\text{carbono (C):} & 2x_1 = x_3 & & 2x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 = 0 \\
\text{hidrógeno (H):} & 6x_1 = 2x_4 & \text{o} & 6x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\
\text{oxígeno (O):} & 2x_2 = 2x_3 + x_4 & & 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0.
\end{array}$$

El método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\text{operaciones con renglones}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

por lo que $x_1 = \frac{1}{3}t$, $x_2 = \frac{7}{6}t$, $x_3 = \frac{2}{3}t$, $x_4 = t$. En este caso t debe ser un entero positivo seleccionado de tal forma que x_1, x_2 y x_3 sean enteros positivos. Para llevar a cabo lo anterior establecemos $t = 6$, lo cual da $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$. La ecuación química balanceada es entonces,



$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O.$$ ≡

■ **Notación** En vista de la multiplicación de matrices y de la igualdad de matrices definidas en la sección 7.1, observe que el sistema lineal (1) puede escribirse de manera compacta como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Como es natural, la matriz $\mathbf{A}$ se denomina matriz de coeficientes. La matriz aumentada de un sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ a menudo se denota como $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Un sistema lineal consistente no homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, comparte una propiedad con las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Si $\mathbf{X}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, y $\mathbf{X}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, entonces la superposición $\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$ es también una solución del sistema no homogéneo. Esto es fácil de comprobar: $\mathbf{A}(\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p) = \mathbf{AX}_h + \mathbf{AX}_p = \mathbf{0} + \mathbf{B} = \mathbf{B}$. Además, de modo análogo a la noción de una solución general de una ecuación diferencial lineal, *cada* solución del sistema no homogéneo puede obtenerse a partir de $\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$.

◀ Una similitud con las ecuaciones diferenciales lineales.

Comentarios

i) Para resolver sistemas de ecuaciones lineales de tamaño grande, es evidente que necesitamos la ayuda de una computadora. Puesto que los dos métodos presentados en esta sección son muy sistemáticos, pueden programarse con facilidad. Sin embargo, el requisito de que cada renglón diferente de cero comience con un uno puede implicar a menudo la división entre un número muy pequeño. Podrían presentarse problemas. Los sistemas de tamaño grande con frecuencia se resuelven de manera indirecta, esto es, mediante una técnica de aproximación tal como la **iteración de Gauss-Seidel**. Consulte la sección 14.1.

ii) Puesto que el método de eliminación de Gauss-Jordan evita la necesidad de sustitución hacia atrás, parecería ser el más eficiente de los dos métodos que hemos considerado. En realidad, éste no es el caso. Se ha demostrado que, en sistemas muy grandes, el método de eliminación de Gauss-Jordan puede requerir aproximadamente un 50% más de operaciones que el gaussiano.

iii) Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas se dice que está **sobredeterminado**, mientras que un sistema con un menor número de ecuaciones que de incógnitas se llama **subdeterminado**. Como regla, un sistema sobredeterminado es generalmente —no siempre— inconsistente. Y un sistema subdeterminado es usualmente —no siempre— consistente. (Consulte los ejemplos 7 y 9.) Debe observarse la imposibilidad de que un sistema subdeterminado consistente tenga una solución única. Para comprender esto, suponga que se tienen m ecuaciones y n incógnitas donde $m < n$. Si se utiliza la eliminación gaussiana para resolver dicho sistema, entonces la forma escalonada para la matriz del sistema contendrá $r \leq m$ renglones diferentes de cero. Por lo tanto, podemos despejar r de las variables en términos de $n - r > 0$ variables. Si el sistema subdeterminado es consistente, entonces las $n - r$ variables restantes pueden seleccionarse arbitrariamente, por lo que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

7.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 20, utilice la eliminación gaussiana o la de Gauss-Jordan para resolver el sistema dado o demostrar que no tiene solución.

1. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 11 \\ 4x_1 + 3x_2 &= -5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 9 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 &= 11 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 16 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 6 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 12x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 21x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 21 y 22, utilice una calculadora para resolver el sistema dado.

21. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4.280 \\ 0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.5x_3 &= -1.978 \\ 4.1x_1 + 0.3x_2 + 0.12x_3 &= 1.686 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 2.5x_1 + 1.4x_2 + 4.5x_3 &= 2.6170 \\ 1.35x_1 + 0.95x_2 + 1.2x_3 &= 0.7545 \\ 2.7x_1 + 3.05x_2 - 1.44x_3 &= -1.4292 \end{aligned}$

En los problemas del 23 al 28, utilice los procedimientos que se ilustran en el ejemplo 10 para balancear la ecuación química dada.

23. $Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$

24. $KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$

25. $Fe_3O_4 + C \rightarrow Fe + CO$

26. $C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

27. $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + H_2O + NO$

28. $Ca_3(PO_4)_2 + H_3PO_4 \rightarrow Ca(H_2PO_4)_2$

En los problemas 29 y 30, establezca y resuelva el sistema de ecuaciones necesario para encontrar las corrientes en los circuitos de la red eléctrica dada.

29.

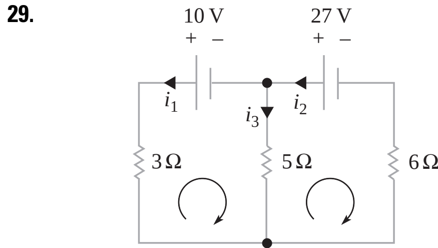


FIGURA 7.2.3 Red para el problema 29

30.

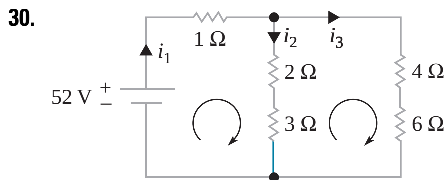


FIGURA 7.2.4 Red para el problema 30

Una **matriz elemental E** se obtiene realizando una sola operación de renglón sobre la matriz identidad **I**. En los problemas del 31 al 34, compruebe que el esquema dado es una matriz elemental.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si una matriz **A** se multiplica previamente por una matriz elemental **E**, el producto **EA** será la matriz que se obtenga a partir de **A** mediante la operación elemental de renglón simbolizada por **E**. En los problemas 35 a 38, calcule el producto dado para una matriz arbitraria **A** de 3 × 3.

35. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$ **36.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\mathbf{A}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$

38. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$

El sistema lineal (1) puede escribirse como la ecuación matricial **AX** = **B**. Suponga que $m = n$. Si la matriz **A** de coeficientes $n \times n$ presente en el sistema tiene una factorización LU **A** = **LU**, entonces el sistema **AX** = **B**, o **LUX** = **B**, puede resolverse de forma eficiente en dos etapas *sin* eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan:

i) Primero, sea **Y** = **UX** y despeje **Y** en **LY** = **B** por sustitución directa.

ii) Después, despeje **X** en la expresión **UX** = **Y** utilizando sustitución hacia atrás.

En los problemas del 39 al 42, utilice los resultados del problema 46 dado en los ejercicios 7.1 para resolver el sistema que se muestra.

39. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas del 43 al 46, utilice un CAS para resolver el sistema dado.

43. $\begin{aligned} 1.567x_1 - 3.48x_2 + 5.22x_3 &= 1.045 \\ 3.56x_1 + 4.118x_2 + 1.57x_3 &= -1.625 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 14x_2 - 13x_3 &= 0 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 1.2x_1 + 3.5x_2 - 4.4x_3 + 3.1x_4 &= 1.8 \\ 0.2x_1 - 6.1x_2 - 2.3x_3 + 5.4x_4 &= -0.6 \\ 3.3x_1 - 3.5x_2 - 2.4x_3 - 0.1x_4 &= 2.5 \\ 5.2x_1 + 8.5x_2 - 4.4x_3 - 2.9x_4 &= 0 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5 \\ 6x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 17x_4 - x_5 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$

7.3 Rango de una matriz

■ **Introducción** En una matriz general de $m \times n$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a los renglones

$$\mathbf{u}_1 = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}), \quad \mathbf{u}_2 = (a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n}), \quad \ldots, \quad \mathbf{u}_m = (a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn})$$

y a las columnas

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

se les llama **vectores renglón** de **A** y **vectores columna** de **A**, respectivamente.

Una definición Como vectores, el conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ puede ser linealmente independiente o linealmente dependiente. Tenemos la definición siguiente.

Definición 7.3.1 Rango de una matriz

El rango de una matriz **A** de $m \times n$, representado mediante rango(**A**), es el número máximo de vectores renglón linealmente independientes de **A**.

EJEMPLO 1 Rango de una matriz de 3 × 4

Considere la matriz de 3 × 4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Con $\mathbf{u}_1 = (-1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2 \;\; -2 \;\; 6 \;\; 8)$ y $\mathbf{u}_3 = (3 \;\; 5 \;\; -7 \;\; 8)$, podemos observar que $4\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. En vista del análisis que le sigue, concluimos que el conjunto $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ es linealmente dependiente. Por otro lado, puesto que ni $\mathbf{u}_1$ ni $\mathbf{u}_2$ pueden considerarse múltiplos constantes entre sí, el conjunto de vectores renglón $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ es linealmente independiente. De aquí que, por la definición 7.3.1, rango(**A**) = 2. ≡

Consulte la sección 18.6.

Espacio de renglón De acuerdo con la terminología propia del trabajo con vectores, los vectores renglón $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ de la matriz (1) son un conjunto de vectores en el *espacio vectorial* R^4. Puesto que $R_A = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ (el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) es un subespacio de R^4, se justifica denominar a $R_\mathbf{A}$ como el **espacio renglón** de la matriz **A**. Ahora el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ es linealmente independiente y también abarca a $R_\mathbf{A}$; en otras palabras, el conjunto $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ es una *base* para $R_\mathbf{A}$. La dimensión (el número de vectores presentes en la base) del espacio renglón $R_\mathbf{A}$ es 2, el cual constituye el rango(**A**).

Rango por reducción de renglones No obstante el ejemplo 1, en general no es fácil determinar por inspección el rango de una matriz. Aunque existen varias formas mecánicas de encontrar rango(**A**), examinamos una forma que utiliza las operaciones elementales con renglones presentadas en la sección anterior. *Específicamente, el rango de* **A** *puede encontrarse escribiendo la matriz* **A** *como la matriz escalonada reducida* **B**. Para comprender esto, recuerde primero que una matriz **B** de $m \times n$ es equivalente en renglones a una matriz **A** de $m \times n$ si los renglones de **B** se obtuvieron a partir de los renglones de **A** mediante la aplicación de las operaciones elementales en los renglones. Si únicamente intercambiamos dos renglones en **A** para obtener **B**, entonces el espacio renglón $R_\mathbf{A}$ de **A** y el espacio renglón $R_\mathbf{B}$ de **B** son iguales debido a que los vectores renglón de **A** y **B** son los mismos. Cuando los vectores renglón de **B** son combinaciones lineales de los renglones de **A**, se deduce que los vectores renglón de **B** están en el espacio renglón $R_\mathbf{A}$, y por lo tanto $R_\mathbf{B}$ es un subconjunto de $R_\mathbf{A}$ (escrito como $R_\mathbf{B} \subseteq R_\mathbf{A}$). De forma contraria, **A** es equivalente en renglones a **B** puesto que podemos obtener **A** aplicando operaciones en los renglones en **B**. De aquí que los renglones de **A** sean combinaciones lineales de los renglones de **B**, y así puede deducirse que $R_\mathbf{A}$ es un subconjunto de $R_\mathbf{B}$ ($R_\mathbf{A} \subseteq R_\mathbf{B}$). A partir de $R_\mathbf{B} \subseteq R_\mathbf{A}$ y $R_\mathbf{A} \subseteq R_\mathbf{B}$, podemos concluir que $R_\mathbf{A} = R_\mathbf{B}$. Por último, si escribimos la matriz **A** como una matriz **B** en forma escalonada

reducida, entonces los renglones de **B** diferentes de cero son linealmente independientes. (¿Por qué?) Los renglones de **B** diferentes de cero forman la base del espacio de renglones $R_{\mathbf{A}}$, por lo cual tenemos el resultado de que rango(**A**) = dimensión de $R_{\mathbf{A}}$.

En el teorema siguiente se resumen estas conclusiones.

Teorema 7.3.1 Rango de una matriz mediante reducción de renglones

Si una matriz **A** es equivalente a una matriz escalonada **B**, entonces

i) el espacio de renglones de **A** = el espacio de renglones de **B**,
ii) los renglones de **B** diferentes de cero forman una base para el espacio de renglones de **A** y
iii) rango(**A**) = al número de renglones de **B** diferentes de cero.

EJEMPLO 2 Rango mediante reducción de renglones: vuelta al ejemplo 1

Reducimos una matriz **A** a una matriz escalonada **B** exactamente de la misma forma que reducimos en renglones la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales a una forma escalonada al usar el método de eliminación gaussiana. Utilizando la matriz (1) en el ejemplo 1, las operaciones elementales de renglones nos dan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}R_2+R_3 \\ -\frac{1}{4}R_2}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la última matriz está en la forma escalonada, y debido a que la última matriz tiene dos renglones diferentes de cero, a partir del inciso *iii*) del teorema 7.3.1 podemos concluir que rango(**A**) = 2. ≡

EJEMPLO 3 Independencia y dependencia lineales

Determine si el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 1, 1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 0, 3, 0\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, 1, 2\rangle$, en R^3 es linealmente dependiente o linealmente independiente.

Solución A partir del análisis anterior, debe ser claro que si formamos una matriz **A** con los vectores dados como renglones, y si reducimos por renglones la matriz **A** a una matriz escalonada **B** con rango 3, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente. Si rango(**A**) < 3, entonces el conjunto de vectores es linealmente dependiente. En este caso, resulta sencillo convertir la reducción de renglones hasta una forma escalonada reducida por renglones:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, rango(**A**) = 3 y el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ es linealmente independiente. ≡

Como se mencionó anteriormente, los vectores de una matriz escalonada **A** pueden servir como base para el espacio de renglones de la matriz **A**. En el ejemplo 3 podemos observar que una base para el espacio de renglones de **A** es la base estándar $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1, 0\rangle$, $\langle 0, 0, 1\rangle$ de R^3.

■ Rango y sistemas lineales El concepto de rango puede asociarse con la resolución de sistemas lineales de ecuaciones algebraicas. Suponga que **AX** = **B** es un sistema lineal y que $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ representa la matriz aumentada del sistema. En el ejemplo 7 de la sección 7.2 observamos que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 &= -6 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

era inconsistente. La inconsistencia del sistema se puede observar en el hecho de que, después de escribir la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ en forma escalonada reducida,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (2)$$

el último renglón es diferente de cero. Desde luego, esta reducción muestra que rango$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. Sin embargo, observe también que el resultado en (2) indica el rango$(\mathbf{A}) = 2$ debido a que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya hemos ilustrado un caso especial del teorema siguiente.

Teorema 7.3.2 Consistencia de AX = B

Un sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es el mismo que el de la matriz aumentada del sistema $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

En el ejemplo 6 de la sección 7.2 pudimos observar que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 19 \end{aligned} \quad (3)$$

era consistente y tenía una número infinito de soluciones. Despejamos dos de las incógnitas, x_1 y x_2, en términos de la incógnita x_3 restante, la cual nombramos como el parámetro t. En una solución de un sistema, el número de parámetros está relacionado con el rango de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Teorema 7.3.3 Número de parámetros en una solución

Suponga que un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ con m ecuaciones y n incógnitas es consistente. Si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es de rango r, entonces la solución del sistema contiene $n - r$ parámetros.

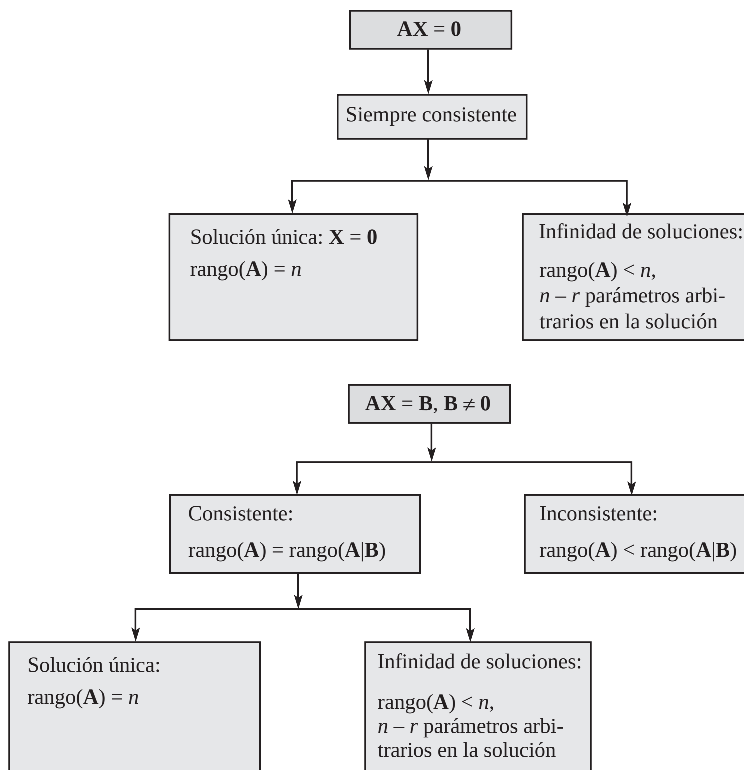
Para el sistema (3), a partir de la reducción de renglones podemos observar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que rango$(\mathbf{A})$ = rango$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$, y por ende el sistema es consistente de acuerdo con el teorema 7.3.2. Con $n = 3$ vemos que a partir del teorema 7.3.3 el número de parámetros presentes en la solución es $3 - 2 = 1$.

El diagrama siguiente expresa la conexión que hay entre el concepto de rango de una matriz y la solución de un sistema lineal.

Para m ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.
Dos casos: $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Sea rango$(\mathbf{A}) = r$.



Comentarios

No hemos mencionado la conexión que hay entre las columnas de una matriz **A** y el rango de **A**. Resulta que el número máximo de columnas independientes que una matriz **A** puede tener debe ser igual al número máximo de renglones independientes. En la terminología de los espacios vectoriales, el espacio de renglones $R_{\mathbf{A}}$ de la matriz **A** tiene la misma dimensión que su espacio de columnas $C_{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, si tomamos la transpuesta de la matriz dada en (1) y la escribimos en la forma escalonada:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & -7 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos observar que el número máximo de renglones de $\mathbf{A}^T$ es 2, y por lo tanto el número máximo de columnas linealmente independientes de **A** es 2.

7.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas del 1 al 10, utilice el inciso *iii*) del teorema 7.3.1 para encontrar el rango de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & -1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas del 11 al 14, determine si el conjunto de vectores dados es linealmente dependiente o linealmente independiente.

11. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1, -1, 5\rangle$
12. $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 6, 3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, -1, 4\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, 2, 1\rangle$, $\mathbf{u}_4 = \langle 2, 5, 4\rangle$
13. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, -1, 3, -1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, -1, 4, 2\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1, -1, 5, 7\rangle$
14. $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 1, 1, 5\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 2, 2, 1, 1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, -1, 6, 1\rangle$, $\mathbf{u}_4 = \langle 1, 1, 1, -1\rangle$
15. Suponga que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente y que $\mathbf{A}$ es una matriz de 5×8 y rango($\mathbf{A}$) $= 3$. ¿Cuántos parámetros tiene la solución del sistema?
16. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de 4×6 diferente de cero.
    a) ¿Cuál es el rango máximo que $\mathbf{A}$ puede tener?
    b) Si el rango($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) $= 2$, ¿entonces para qué valor(es) del rango($\mathbf{A}$) el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, es inconsistente? ¿Y consistente?
    c) Si rango($\mathbf{A}$) $= 3$, ¿entonces cuántos parámetros tiene la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$?
17. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ los vectores columna primero, segundo y tercero, respectivamente, de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

¿Qué podemos concluir acerca de rango($\mathbf{A}$) a partir de la observación $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$? [*Sugerencia:* Consulte los *Comentarios* incluidos al final de esta sección.]

≡ Problemas de análisis

18. Suponga que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente y que $\mathbf{A}$ es una matriz de 6×3. Suponga también que el número máximo de renglones linealmente independientes en $\mathbf{A}$ es 3. Analice: ¿la solución del sistema es única?
19. Suponga que deseamos determinar si el conjunto de vectores columna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es linealmente dependiente o linealmente independiente. Por medio de la definición 18.6.3, si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0} \tag{4}$$

solamente para $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente; de otra forma, el conjunto es linealmente dependiente. Sin embargo, (4) es equivalente al sistema lineal

$$\begin{aligned} 4c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4 + c_5 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 + 3c_4 + 7c_5 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 + 4c_4 - 5c_5 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 0. \end{aligned}$$

Sin llevar a cabo ninguna tarea adicional, explique por qué ahora podemos concluir que el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

20. Un CAS puede utilizarse para obtener una matriz en su forma escalonada. Utilice un CAS para determinar los rangos de la matriz aumentada ($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) y la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ para

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 &= 3 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + 6x_6 &= 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 \qquad &= 5. \end{aligned}$$

¿El sistema es consistente o inconsistente? Si es consistente, resuélvalo.

7.4 Determinantes

Introducción Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. Relacionado con $\mathbf{A}$ existe un *número* llamado el **determinante de A**, y se expresa como det $\mathbf{A}$. De manera simbólica, una matriz $\mathbf{A}$ se distingue del determinante de $\mathbf{A}$ mediante el reemplazo de los paréntesis por barras verticales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se dice que el determinante de una matriz de $n \times n$ es un **determinante de orden n**. Comenzaremos definiendo los determinantes de matrices 1×1, 2×2 y 3×3.

Una definición Para una matriz $\mathbf{A} = (a)$ de 1×1, tenemos que $\det \mathbf{A} = |a| = a$. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = (-5)$, entonces $\det \mathbf{A} = |-5| = -5$. En este caso, las barras verticales $||$ colocadas a ambos lados del número *no* significan el valor absoluto del número.

Definición 7.4.1 Determinante de una matriz de 2×2

El determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es el número

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

Tal como en el método mnemotécnico, se piensa de un determinante de orden 2 como el producto de los elementos de la diagonal principal de **A** menos el producto de los elementos de la otra diagonal:

multiplicar multiplicar restar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 6(9) - (-3)(5) = 69$.

Definición 7.4.2 Determinante de una matriz de 3×3

El determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es el número

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3}$$

La expresión mostrada en (3) puede escribirse en una forma más manejable. Mediante factorización tenemos

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Sin embargo, considerando (1), cada término entre paréntesis se reconoce como el determinante de una matriz de 2×2:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Observe que cada determinante mostrado en (4) es un determinante de una *submatriz* de la matriz **A** y corresponde a su coeficiente de la forma siguiente: a_{11} es el coeficiente del determinante de una submatriz obtenida mediante la eliminación del *primer renglón y la primera columna* de **A**; a_{12} es el coeficiente del negativo del determinante de la submatriz obtenida eliminando el *primer renglón y la segunda columna* de **A**; y, por último, a_{13} es el coeficiente del determinante de la submatriz que se obtuvo eliminando el *primer renglón y la tercera columna* de **A**. En otras palabras, los coeficientes de (4) son simplemente los elementos del primer renglón de **A**. Decimos que det **A** ha sido **expandido por cofactores con respecto al primer renglón**, los cofactores son a_{11}, a_{12} y a_{13} los determinantes

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, (4) es

$$\det \mathbf{A} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}. \tag{5}$$

En general, el **cofactor de a_{ij}** es el determinante

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{6}$$

donde M_{ij} es el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $\mathbf{A}$. El determinante M_{ij} se llama **menor**. Un cofactor es un determinante menor *con signo*; esto es, $C_{ij} = M_{ij}$ cuando $i + j$ es par y $C_{ij} = -M_{ij}$ cuando $i + j$ es impar.

Una matriz de 3 × 3 tiene nueve cofactores:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = M_{11} & C_{12} = -M_{12} & C_{13} = M_{13} \\ C_{21} = -M_{21} & C_{22} = M_{22} & C_{23} = -M_{23} \\ C_{31} = M_{31} & C_{32} = -M_{32} & C_{33} = M_{33}. \end{array}$$

La inspección del arreglo anterior muestra que el factor con signo $+1$ o -1 asociado con un cofactor puede obtenerse a partir del patrón de verificación:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array} \tag{7}$$

matriz de 3 × 3

Ahora observe que (3) puede agruparse y factorizarse de nuevo como

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}, \end{aligned} \tag{8}$$

lo cual es la expansión por cofactores de det $\mathbf{A}$ a lo largo de la segunda columna. Se deja como ejercicio para el lector la demostración a partir de (3) de que det $\mathbf{A}$ puede expandirse también por cofactores a lo largo del tercer renglón:

$$\det \mathbf{A} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}. \tag{9}$$

Desde luego, en las ecuaciones (5), (8) y (9) estamos sugiriendo el resultado general siguiente:

El determinante de una matriz de 3 × 3 *puede evaluarse expandiendo por cofactores* det $\mathbf{A}$ *a lo largo de cualquier renglón o columna.*

EJEMPLO 1 Expansión por cofactores a lo largo del primer renglón

Evalúe el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución Al utilizar la expansión por cofactores a lo largo del primer renglón se obtiene

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2C_{11} + 4C_{12} + 7C_{13}.$$

Ahora, los cofactores de los elementos del primer renglón de **A** son

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix},$$

donde las líneas en gris indican el renglón y la columna que se deben eliminar. Así,

$$\det \mathbf{A} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[0(3) - 3(5)] - 4[6(3) - 3(1)] + 7[6(5) - 0(1)] = 120. \qquad \equiv$$

Si una matriz tiene un renglón (o una columna) que contenga muchos elementos en cero, entonces el sentido común nos dice que evaluemos el determinante de la matriz utilizando la expansión por cofactores a lo largo de dicho renglón (o columna). Por lo tanto, en el ejemplo 1, si expandimos el determinante de **A** utilizando cofactores a lo largo de, digamos, el segundo renglón, entonces

$$\det \mathbf{A} = 6C_{21} + 0C_{22} + 3C_{23} = 6C_{21} + 3C_{23}$$

$$= 6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -6(-23) - 3(6) = 120.$$

EJEMPLO 2 Expansión por cofactores a lo largo de la tercera columna

Evaluar el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que existen dos ceros en la tercera columna, expandimos por cofactores a lo largo de esa columna:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0C_{13} + (-7)C_{23} + 0C_{33}$$

$$= (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 7[6(4) - 5(-2)] = 238. \qquad \equiv$$

Llevemos las ideas anteriores un paso más adelante, de manera que podamos evaluar el determinante de una matriz de 4×4 multiplicando los elementos de un renglón (o columna) por sus cofactores correspondientes y sumando los productos. En este caso, cada cofactor es

un menor con el signo de una submatriz de 3 × 3 apropiada. El teorema siguiente, enunciado sin comprobación, establece que el determinante de cualquier matriz **A** de $n \times n$ puede evaluarse mediante cofactores.

Teorema 7.4.1 Expansión de un determinante empleando cofactores

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz de $n \times n$. Para cada $1 \le i \le n$, **la expansión por cofactores de det A a lo largo del *i*-ésimo renglón** es

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Para cada $1 \le j \le n$, **la expansión por cofactores de det A a lo largo de la *j*-ésima columna** es

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

El patrón de verificación de signos del factor para los cofactores, que se mostró en (7), se extiende a las matrices de orden superior a 3:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

matriz de 4 × 4 **matriz de *n* × *n***

EJEMPLO 3 Expansión por cofactores a lo largo del cuarto renglón

Evalúe el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución Puesto que la matriz tiene dos elementos iguales a cero en su cuarto renglón, optamos por expandir por cofactores det **A** a lo largo de ese renglón:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)C_{41} + 0C_{42} + 0C_{43} + (-4)C_{44}, \tag{10}$$

donde $C_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ y $C_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

En seguida expandimos por cofactores estos determinantes a lo largo del segundo renglón:

$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\left(0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 18$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4.$$

Por lo tanto, (10) se convierte en

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(18) + (-4)(-4) = 34.$$

Usted puede comprobar este resultado expandiendo por cofactores det **A** a lo largo de la segunda columna. ≡

Comentarios

En cursos previos sobre matemáticas, seguramente usted estudió el dispositivo de memoria siguiente, análogo a (2), para evaluar un determinante de orden 3:

multiplicar multiplicar

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad (11)$$

i) Sume los productos de los elementos correspondientes a las flechas que van de izquierda a derecha.
ii) Reste del número obtenido en *i*) la suma de los productos de los elementos correspondientes a las flechas que van de derecha a izquierda.

Es conveniente hacer aquí una advertencia. El dispositivo de memoria que se da en la ecuación (11), aunque se adapta fácilmente a las matrices mayores a 3 × 3, no proporciona los resultados correctos. No existen dispositivos mnemotécnicos para evaluar los determinantes de orden 4 o mayores.

Nota: El método ilustrado en la ecuación (11) no es válido para los determinantes de orden $n > 3$.

7.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas del 1 al 4, suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los siguientes menores o cofactores.

1. M_{12} **2.** M_{32} **3.** C_{13} **4.** C_{22}

En los problemas del 5 al 8, suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los siguientes menores o cofactores.

5. M_{33} **6.** M_{41} **7.** C_{34} **8.** C_{23}

En los problemas del 9 al 14, evalúe el determinante de la matriz dada.

9. (-7)

10. (2)

11. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -3-\lambda & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

En los problemas del 15 al 28, evalúe el determinante de la matriz dada mediante la expansión por cofactores.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 6 & 0 \\ \frac{1}{3} & 8 & 0 \\ \frac{1}{2} & 9 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2+x & 3+y & 4+z \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 29 y 30, encuentre los valores de λ que satisfagan la ecuación dada.

29. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

30. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

7.5 Propiedades de los determinantes

Introducción En esta sección vamos a considerar algunas de las muchas propiedades de los determinantes. El objetivo de nuestro estudio es emplear estas propiedades para desarrollar medios de evaluación de un determinante como una alternativa para la expansión por cofactores.

Propiedades La primera propiedad establece que el determinante de una matriz de $n \times n$ y su transpuesta son iguales.

Teorema 7.5.1 Determinante de una transpuesta

Si $\mathbf{A}^T$ es la transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, entonces det $\mathbf{A}^T =$ det $\mathbf{A}$.

Por ejemplo, para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, se tiene $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. Observe que

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -41 \quad \text{y} \quad \det \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -41.$$

Puesto que la transposición de una matriz tiene el efecto de intercambiar sus renglones y columnas, el significado del teorema 7.5.1 es que los enunciados que tienen que ver con determinantes y con los renglones de una matriz también son válidos cuando la palabra "renglón" se reemplaza por la palabra "columna".

Teorema 7.5.2 Dos renglones idénticos

Si cualesquiera dos renglones (columnas) de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son iguales, entonces det $\mathbf{A} = 0$.

EJEMPLO 1 Matriz con dos renglones idénticos

Puesto que la segunda y la tercera columnas de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ son iguales, a partir del teorema 7.5.2 se puede deducir que

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Usted deberá verificar lo anterior expandiendo por cofactores el determinante. 

Teorema 7.5.3 Renglón o columna con ceros

Si todos los elementos presentes en un renglón (columna) de una matriz **A** de $n \times n$ son cero, entonces det **A** = 0.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que el i-ésimo renglón de **A** está constituido por ceros. De aquí que, en la expansión por cofactores de det **A** a lo largo del i-ésimo renglón, todos los productos sean cero y, en consecuencia, det **A** = 0. ≡

Por ejemplo, del teorema 7.5.3 se puede deducir inmediatamente que

columna cero ↓

$$\text{renglón cero} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 7.5.4 Intercambio de renglones

Si **B** es la matriz que se obtiene al intercambiar cualquier par de renglones (columnas) de una matriz **A** de $n \times n$, entonces det **B** = −det **A**.

Por ejemplo, si **B** es la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones primero y tercero de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces, a partir del teorema 7.5.4 tenemos

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\det \mathbf{A}.$$

Usted puede comprobar lo anterior calculando ambos determinantes.

Teorema 7.5.5 Constante múltiple de un renglón

Si **B** es la matriz que se obtiene a partir de una matriz **A** de $n \times n$ multiplicando un renglón (columna) por un número k real diferente de cero, entonces det **B** = k det **A**.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que los elementos presentes en el i-ésimo renglón de **A** se multiplican por el número k. Llamemos **B** a la matriz resultante. Al expandir por cofactores la matriz **B** a lo largo del i-ésimo renglón nos da

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= ka_{i1}C_{i1} + ka_{i2}C_{i2} + \cdots + ka_{in}C_{in} \\ &= k\underbrace{(a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in})}_{\text{expansión por cofactores de det } \mathbf{A} \text{ a lo largo del } i\text{-ésimo renglón}} = k \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 2 Teoremas 7.5.5 y 7.5.2

de la primera columna ↓ — de la segunda columna ↓ — del segundo renglón ↓

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 20 & 16 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 80(1 - 2) = -80$$

$$\textit{b)}\quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{de la segunda columna}}{\overset{\downarrow}{=}} (-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{del teorema 7.5.2}}{\overset{\downarrow}{=}} (-2)\cdot 0 = 0$$ ≡

Teorema 7.5.6 Determinante de un producto de matrices

Si tanto **A** como **B** son matrices de $n \times n$, entonces det **AB** = det **A** · det **B**.

En otras palabras, el determinante de un producto de dos matrices de $n \times n$ es igual al producto de los determinantes de tales matrices.

EJEMPLO 3 Determinante de un producto de matrices

Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -12 & 22 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$. Ahora det **AB** = −24, det **A** = −8, det **B** = 3, y así podemos observar que

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (-8)(3) = -24 = \det \mathbf{AB}.$$ ≡

Teorema 7.5.7 Determinante inalterado

Suponga que **B** es la matriz obtenida a partir de una matriz **A** de $n \times n$ multiplicando los elementos de un renglón (columna) por un número real k diferente de cero, y sumando luego el resultado a los elementos correspondientes de otro renglón (columna). Entonces det **B** = det **A**.

EJEMPLO 4 Un múltiplo de un renglón sumado a otro

Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y que la matriz **B** está definida como la matriz que se obtiene a partir de **A** mediante la operación elemental de renglones,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{-3R_1+R_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -11 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Al expandir por cofactores a lo largo de, digamos, la segunda columna, encontramos que det **A** = 45 y det **B** = 45. Usted deberá comprobar este resultado. ≡

Teorema 7.5.8 Determinante de una matriz triangular

Suponga que **A** es una matriz triangular de $n \times n$ (superior o inferior). Entonces

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

donde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son los elementos de la diagonal principal de **A**.

COMPROBACIÓN

Demostremos el resultado de una matriz triangular inferior de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Al expandir det **A** por cofactores a lo largo del primer renglón nos da

$$\det\ \mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - 0 \cdot a_{32}) = a_{11}a_{22}a_{33}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 5 Determinante de una matriz triangular

***a*)** El determinante de la matriz triangular inferior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es

$$\det\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2) = 144.$$

***b*)** El determinante de la matriz diagonal $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 \cdot 4 = -72. \qquad \equiv$$

Reducción de renglones Evaluar el determinante de una matriz de $n \times n$ empleando el método de expansión por cofactores requiere de un esfuerzo colosal cuando la matriz es de orden superior. Para expandir el determinante de, digamos, una matriz de 5×5 con elementos diferentes de cero se requiere la evaluación de cinco cofactores que son los determinantes de submatrices de 4×4; cada una de éstas, a su vez, requiere de cuatro cofactores adicionales que son los determinantes de submatrices de 3×3, etc. Existe un método más práctico (y programable) para evaluar el determinante de una matriz. Este método se basa en la **reducción** de una matriz a una forma triangular, mediante operaciones de renglón, y en el hecho de que los determinantes de las matrices triangulares son fáciles de evaluar (consulte el teorema 7.5.8).

EJEMPLO 6 Reducción de un determinante a su forma triangular

Evalúe el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{2 es un factor común en el tercer renglón: teorema 7.5.5}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{intercambio de los renglones primero y tercero: teorema 7.5.4}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{4 veces el primer renglón sumado al segundo: teorema 7.5.7}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -10 & -17 \end{vmatrix} \quad \leftarrow -6 \text{ veces el primer renglón sumado al tercero: teorema 7.5.7}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{2 veces el segundo renglón sumado al tercero: teorema 7.5.7}$$

$$= (-2)(1)(5)(19) = -190 \quad \leftarrow \text{teorema 7.5.8}$$ ≡

Nuestro teorema final tiene que ver con los cofactores. En la sección 7.4 estudiamos que un determinante det **A** de una matriz **A** de $n \times n$ podría ser evaluado mediante la expansión de cofactores a lo largo de cualquier renglón (columna). Esto significa que los n elementos a_{ij} de un renglón (columna) se multiplican por los cofactores correspondientes C_{ij} y que los n productos se suman. Sin embargo, si los elementos a_{ij} de un renglón (a_{ij} de una columna) de **A** se multiplican por los cofactores correspondientes C_{kj} de un renglón diferente (C_{ik} de una columna diferente), la suma de los n productos es igual a cero.

Teorema 7.5.9 Una propiedad de los cofactores

Suponga que **A** es una matriz de $n \times n$. Si $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ son los elementos presentes en el renglón i-ésimo y $C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn}$ son los cofactores de los elementos ubicados en el k-ésimo renglón, entonces

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = 0 \quad \text{para } i \neq k.$$

Si $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ son los elementos de la columna j-ésima y $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$ son los cofactores de los elementos de la k-ésima columna, entonces

$$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} = 0 \quad \text{para } j \neq k.$$

DEMOSTRACIÓN

Se demostrarán los resultados por renglones. Sea **B** la matriz que se obtiene a partir de **A** permitiendo que los elementos del i-ésimo renglón de **A** sean los mismos que hay en el k-ésimo renglón, es decir, $a_{i1} = a_{k1}, a_{i2} = a_{k2}, \ldots, a_{in} = a_{kn}$. Puesto que **B** tiene dos renglones iguales, a partir del teorema 7.5.2 se puede deducir que det **B** = 0. La expansión por cofactores a lo largo del k-ésimo renglón proporciona entonces el resultado deseado:

$$0 = \det \mathbf{B} = a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn}$$
$$= a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn}.$$ ≡

EJEMPLO 7 Cofactores del tercer renglón y elementos del primer renglón

Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Ahora suponga que multiplicamos los elementos del primer renglón por los cofactores del tercero y sumamos los resultados; esto es,

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 6\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right) + 7\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 6(25) + 2(-40) + 7(-10) = 0.$$ ≡

7.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 10, establezca el o los teoremas apropiados de esta sección que justifiquen la igualdad dada. No expanda por cofactores los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 0$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

En los problemas del 11 al 14, evalúe el determinante de la matriz dada usando el resultado,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5.$$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ **12.** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 & a_3 \\ 6b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 2c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

En los problemas del 15 al 18, evalúe el determinante de la matriz dada sin expandir por cofactores.

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & \frac{2}{3} & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **18.** $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En los problemas 19 y 20, verifique si det $\mathbf{A}$ = det $\mathbf{A}^T$ para la matriz $\mathbf{A}$ que se proporciona.

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **20.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

21. Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique si det $\mathbf{AB}$ = det $\mathbf{A}$ det $\mathbf{B}$.

22. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$. Demuestre que det $\mathbf{A} = \pm 1$.

23. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{pmatrix}.$$

Sin utilizar expansión, evalúe det $\mathbf{A}$.

24. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}.$$

Sin utilizar expansión, demuestre que det $\mathbf{A} = 0$.

En los problemas del 25 al 32, utilice el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 6 para evaluar el determinante de la matriz que se proporciona.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -8 & 1 \\ 3 & -11 & 12 & 2 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 20 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

33. Proceda como en el ejemplo 6, y demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

34. Evalúe $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$. [*Sugerencia:* Consulte el problema 33.]

En los problemas 35 y 36, verifique el teorema 7.5.9 mediante la evaluación de $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13}$ y $a_{13}C_{12} + a_{23}C_{22} + a_{33}C_{32}$ en la matriz dada.

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **36.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

37. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Verifique si $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$.

38. Suponga que **A** es una matriz de 5×5 para la que $\det \mathbf{A} = -7$. ¿Cuál es el valor de $\det(2\mathbf{A})$?

39. Se dice que una matriz **A** de $n \times n$ es **antisimétrica** si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Si **A** es una matriz antisimétrica de 5×5, demuestre que $\det \mathbf{A} = 0$.

40. Toma alrededor de $n!$ multiplicaciones evaluar el determinante de una matriz de $n \times n$ utilizando la expansión por cofactores, mientras que por el método de reducción de renglones, ilustrado en el ejemplo 6, se requiere de sólo $n^3/3$ operaciones aritméticas. Compare el número de operaciones necesarias para ambos métodos utilizando una matriz de 25×25.

7.6 Inversa de una matriz

Introducción El concepto del determinante de una matriz cuadrada de $n \times n$ tendrá un papel importante en esta sección y en la siguiente.

7.6.1 Cálculo de la inversa

En el sistema de los números reales, si a es un número diferente de cero, entonces existe un número b tal que $ab = ba = 1$. El número b se llama inverso multiplicativo de a y se denota mediante a^{-1}. En una matriz cuadrada **A** también es importante saber si podemos calcular otra matriz cuadrada **B** del mismo orden tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Tenemos la definición siguiente.

Definición 7.6.1 Inversa de una matriz

Sea **A** una matriz de $n \times n$. Si existe una matriz **B** de $n \times n$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{1}$$

donde **I** es la matriz identidad de $n \times n$, entonces se dice que la matriz **A** es **no singular** o **invertible**. Se afirma que la matriz **B** es la **inversa** de **A**.

Por ejemplo, la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es no singular o invertible ya que la matriz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es su inversa. Para comprobar esto, observe que

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

A diferencia del sistema de los números reales, donde *cada* número a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo, no toda matriz **A** de $n \times n$ diferente de cero tiene una inversa.

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La inspección de este resultado muestra que es posible obtener la matriz identidad **I** de 2×2, puesto que no hay forma de seleccionar b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} para obtener 1 como el elemento presente en el segundo renglón y la segunda columna. Hemos demostrado que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Una matriz de $n \times n$ que no tiene inversa se denomina matriz **singular**. Si **A** es no singular, su inversa se expresa como $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Observe que en la notación $\mathbf{A}^{-1}$ el símbolo -1 no es un exponente; en otras palabras, $\mathbf{A}^{-1}$ no es un recíproco. Asimismo, si **A** es no singular, su inversa es única. ◀ Importante

Propiedades El teorema siguiente relaciona algunas propiedades de la inversa de una matriz.

Teorema 7.6.1 Propiedades de la inversa

Sean **A** y **B** matrices no singulares.

i) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
ii) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
iii) $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$

DEMOSTRACIÓN DE *i*)

Esta parte del teorema establece que si **A** es no singular, entonces su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ también es no singular y *su* inversa es **A**. Para demostrar que $\mathbf{A}^{-1}$ es no singular, debemos demostrar que puede encontrarse una matriz **B** tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{I}$. Sin embargo, como suponemos que **A** es no singular, a partir de (1) sabemos que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y, de manera equivalente, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. La última ecuación matricial indica que la matriz requerida, la inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, es $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Como consecuencia, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. ≡

El teorema 7.6.1*ii*) se puede hacer extensivo a cualquier número finito de matrices no singulares:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1};$$

esto es, la inversa de un producto de matrices no singulares es el producto de las inversas en sentido contrario.

En el estudio que sigue vamos a considerar dos maneras diferentes de encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ para una matriz no singular **A**. El primer método utiliza determinantes, mientras que el segundo emplea las operaciones elementales de renglones estudiadas en la sección 7.2.

Método de la adjunta Recuerde que en la expresión (6) dada en la sección 7.4 mostramos que el cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} de una matriz **A** de $n \times n$ es $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor de a_{ij}; esto es, el determinante de la submatriz $(n - 1) \times (n - 1)$ que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de **A**.

Definición 7.6.2 Matriz adjunta

Sea **A** una matriz de $n \times n$. La matriz que representa a la transpuesta de la matriz de cofactores correspondientes a los elementos de **A**:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como la **adjunta** de **A** y se representa como adj **A**.

El teorema siguiente proporciona una fórmula breve de la inversa de una matriz no singular en términos de la adjunta de la matriz. Sin embargo, debido a los determinantes involucrados, este método es poco manejable para $n \geq 4$.

Teorema 7.6.2 Cálculo de la inversa

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. Si el det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right) \text{adj } \mathbf{A}. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN

Para efectos de brevedad, demostramos el caso cuando $n = 3$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

puesto que det $\mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$, para $i = 1, 2, 3$ son las expansiones por cofactores de det $\mathbf{A}$ a lo largo de los renglones primero, segundo y tercero, y

$$\begin{aligned} a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} &= 0 \qquad & a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} &= 0 \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13} &= 0 \qquad & a_{21}C_{31} + a_{22}C_{32} + a_{23}C_{33} &= 0 \\ a_{31}C_{11} + a_{32}C_{12} + a_{33}C_{13} &= 0 \qquad & a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} &= 0 \end{aligned}$$

en vista del teorema 7.5.9. Por lo tanto, (3) es lo mismo que

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$$

o $\mathbf{A}(1/\det \mathbf{A})$ adj $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. De manera similar, es posible demostrar exactamente de igual manera que ((1/det $\mathbf{A}$) adj $\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Así, por definición, $\mathbf{A}^{-1} = (1/\det \mathbf{A})$adj $\mathbf{A}$. ≡

Para alguna referencia futura, observemos en el caso de una matriz no singular de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

que los cofactores son $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = -a_{21}$, $C_{21} = -a_{12}$ y $C_{22} = a_{11}$. En este caso,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

A partir de (2) se puede deducir que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para una matriz no singular de 3×3,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Después de que se ha formado la adjunta de **A**, (2) da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que $\det \mathbf{A} = 10 - 8 = 2$, se puede deducir a partir de (4) que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4 & -2 + 2 \\ 10 - 10 & -4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4 & 20 - 20 \\ -1 + 1 & -4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \equiv$$

EJEMPLO 2 Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que $\det \mathbf{A} = 12$, podemos calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de (5). Los cofactores correspondientes a los elementos presentes en **A** son

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

A partir de (5) obtenemos entonces,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se invita al lector a comprobar que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. $\equiv$

Ahora ya estamos en la posición de poder demostrar una condición necesaria y suficiente para que una matriz **A** de $n \times n$ tenga una inversa.

Teorema 7.6.3 Matrices no singulares y det A

Una matriz **A** de $n \times n$ es no singular si, y sólo si, det $\mathbf{A} \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Demostraremos primero la suficiencia. Suponga que det $\mathbf{A} \neq 0$. Entonces **A** es no singular, ya que $\mathbf{A}^{-1}$ puede encontrarse a partir del teorema 7.6.2.

Para demostrar la necesidad, debemos suponer que **A** es no singular y demostrar que det $\mathbf{A} \neq 0$. Ahora, a partir del teorema 7.5.6, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ implica

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A}^{-1})(\det \mathbf{A}) = \det \mathbf{I}.$$

Sin embargo, puesto que det $\mathbf{I} = 1$ (¿por qué?), el producto $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = 1 \neq 0$ demuestra que debemos tener det $\mathbf{A} \neq 0$. ≡

EJEMPLO 3 Una matriz singular

La matriz de 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa; esto es, **A** es singular, ya que det $\mathbf{A} = 6 - 6 = 0$. ≡

Debido al número de determinantes que deben evaluarse, el anterior procedimiento para calcular la inversa de una matriz resulta muy tedioso cuando el orden de la matriz es grande. En el caso de matrices de 3×3 o mayores, el siguiente método es una manera particularmente eficiente de encontrar $\mathbf{A}^{-1}$.

■ **Método de las operaciones en renglones** A pesar de que estaría más allá del alcance de este libro demostrarlos, utilizaremos los resultados siguientes:

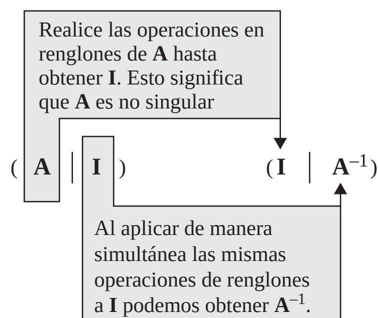
Teorema 7.6.4 Cálculo de la inversa

Si una matriz **A** de $n \times n$ puede transformarse en una matriz identidad **I** de $n \times n$ mediante una secuencia de operaciones elementales en renglones, entonces **A** es no singular. La misma secuencia de operaciones que transforma a la matriz **A** en la matriz identidad **I** transformará **I** en $\mathbf{A}^{-1}$.

Es conveniente llevar a cabo estas operaciones en renglones en las matrices **A** e **I** de manera simultánea mediante una matriz de $n \times 2n$ obtenida aumentando **A** con la identidad **I**, tal como se ilustra en seguida:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

El procedimiento para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ se muestra en el diagrama siguiente:



EJEMPLO 4 Obtención de la inversa mediante operaciones elementales de renglones

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución Utilizaremos la misma notación que en la sección 7.2, cuando redujimos la matriz aumentada a la forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2R_1+R_2 \\ 5R_1+R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{3}R_2 \\ \frac{1}{5}R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{30R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ -\frac{5}{3}R_3+R_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right).$$

Puesto que **I** aparece a la izquierda de la línea vertical, podemos concluir que la matriz ubicada a la derecha de la línea es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

Si la reducción de renglones de $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ nos lleva a la situación

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \overset{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}}{\Longrightarrow} (\mathbf{B}|\mathbf{C}),$$

donde la matriz **B** contiene un renglón de ceros, entonces **A** es necesariamente singular. Ya que reducir más **B** siempre nos da otra matriz con un renglón de ceros, nunca podremos transformar **A** en **I**.

EJEMPLO 5 Una matriz singular

La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa, ya que

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-6R_1+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Puesto que la matriz ubicada a la izquierda de la barra vertical tiene un renglón de ceros, podemos detenernos en este punto y concluir que **A** es singular. ≡

7.6.2 Utilización de la inversa para resolver sistemas

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6}$$

puede escribirse de manera breve como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

■ **Caso especial** Suponga que $m = n$ en (6), de tal forma que la matriz de coeficientes **A** es de $n \times n$. En particular, si **A** es no singular, entonces el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ puede resolverse multiplicando ambas ecuaciones por $\mathbf{A}^{-1}$. A partir de $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, obtenemos $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Debido a que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$, tenemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Uso de la ecuación (7) para resolver un sistema

Utilice la inversa de la matriz de coeficientes para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 9x_2 &= 15 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 16. \end{aligned}$$

Solución El sistema dado puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Debido a que $\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$, la matriz de coeficientes es no singular. Como consecuencia, a partir de (4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Al utilizar (7) podemos deducir que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 234 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto, $x_1 = 6$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$. ≡

EJEMPLO 7 Uso de la ecuación (7) para resolver un sistema

Utilice la inversa de la matriz de coeficientes para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + \phantom{5x_2 + {}} x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Solución Ya calculamos la inversa de la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

en el ejemplo 4. Por lo tanto, (7) nos da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 62 \\ -36 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, $x_1 = 19$, $x_2 = 62$ y $x_3 = -36$. ≡

Unicidad Cuando det $\mathbf{A} \neq 0$ la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es única. Suponga que no es así, es decir, que det $\mathbf{A} \neq 0$ y que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son dos vectores solución *diferentes*. Entonces, $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{AX}_2 = \mathbf{B}$ implican que $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{AX}_2$. Puesto que $\mathbf{A}$ es no singular, $\mathbf{A}^{-1}$ existe, por lo que $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_1) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_2)$ y $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}_1 = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}_2$. Esto nos genera $\mathbf{IX}_1 = \mathbf{IX}_2$ o $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, lo cual contradice nuestro supuesto de que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ eran vectores solución diferentes.

Sistemas homogéneos Un sistema de ecuaciones homogéneo puede escribirse como $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Recuerde que un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y posiblemente un número infinito de soluciones. En el teorema siguiente podremos observar que los sistemas homogéneos de n ecuaciones con n incógnitas *solamente* tienen la solución trivial cuando $\mathbf{A}$ es no singular.

Teorema 7.6.5 Solamente la solución trivial

Un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es no singular.

DEMOSTRACIÓN

Comprobemos el inciso de suficiencia del teorema. Suponga que $\mathbf{A}$ es no singular. Entonces, mediante (7), obtenemos la solución única $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ≡

El teorema siguiente responderá la pregunta: ¿cuándo un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial? Recuerde que si un sistema homogéneo tiene una solución no trivial, debe poseer un número infinito de soluciones.

Teorema 7.6.6 Existencia de soluciones no triviales

Un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es singular.

En vista del teorema 7.6.6 podemos concluir que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene

- solamente la solución trivial si, y sólo si, det $\mathbf{A} \neq 0$, y
- una solución no trivial si, y sólo si, det $\mathbf{A} = 0$.

El último resultado se utilizará en la sección 7.8.

Comentarios

i) Como una forma práctica de resolver n ecuaciones lineales con n incógnitas, el uso de una matriz inversa brinda algunas ventajas sobre el método presentado en la sección 7.2. Sin embargo, en algunas aplicaciones, a menudo necesitamos resolver un sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ varias veces; esto es, necesitamos analizar las soluciones del sistema correspondientes a la misma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ pero con vectores de entrada $\mathbf{B}$ diferentes. En este caso, el simple cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ permite obtener estas soluciones de manera rápida mediante la multiplicación de matrices $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

ii) En la definición 7.6.1 estudiamos que si **A** es una matriz de $n \times n$ y existe otra matriz **B** de $n \times n$ que se puede intercambiar con **A**, de tal forma que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{8}$$

entonces **B** es la inversa de **A**. Aunque la multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa, la condición dada en (8) de alguna forma es menos estricta en este sentido: si calculamos una matriz **B** de $n \times n$ para la que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces puede demostrarse que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ también, y que **B** es la inversa de **A**. Como consecuencia de este resultado, si en secciones subsecuentes de este capítulo deseáramos demostrar que cierta matriz **B** es la inversa de una matriz **A** dada, será suficiente probar sólo que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. No necesitamos demostrar que **B** se puede intercambiar con **A** para dar **I**.

7.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

7.6.1 Encontrar la inversa

En los problemas 1 y 2, compruebe que la matriz **B** es la inversa de la matriz **A**.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

En los problemas del 3 al 14, aplique el teorema 7.6.3 para determinar si la matriz dada es singular o no singular. Si es no singular, utilice el teorema 7.6.2 para encontrar la inversa.

3. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & \pi \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & 14 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas del 15 al 26, utilice el teorema 7.6.4 para encontrar la inversa de la matriz dada o para demostrar que no existe.

15. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 27 y 28, utilice las matrices dadas para encontrar $(\mathbf{AB})^{-1}$.

27. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

28. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

29. Si $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor de **A**?

30. Si **A** es no singular, entonces $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$. Compruebe lo anterior para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

31. Encuentre un valor de x tal que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & -4 \end{pmatrix}$ sea su propia inversa.

32. Calcule la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

33. Se dice que una matriz no singular **A** es **ortogonal** si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

a) Demuestre que la matriz del problema 32 es ortogonal.

b) Demuestre que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

34. Demuestre que si **A** es una matriz ortogonal (consulte el problema 33), entonces det **A** = ±1.

35. Si **A** y **B** son matrices no singulares de $n \times n$, utilice el teorema 7.6.3 para demostrar que **AB** es no singular.

36. Suponga que **A** y **B** son matrices de $n \times n$. Demuestre que si **A** o **B** son singulares, entonces **AB** es singular.

37. Demuestre que si **A** es una matriz no singular, entonces det $\mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

38. Demuestre que si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, entonces tanto $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ como **A** es singular.

39. Suponga que **A** y **B** son matrices de $n \times n$ y que **A** es no singular. Demuestre que si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

40. Suponga que **A** y **B** son matrices de $n \times n$ y que **A** es no singular. Demuestre que si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

41. Si **A** y **B** son matrices no singulares de $n \times n$, ¿necesariamente $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es no singular?

42. Considere la matriz diagonal de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Determine las condiciones necesarias para que **A** sea no singular. Si **A** es no singular, encuentre $\mathbf{A}^{-1}$. Generalice sus resultados a una matriz diagonal de $n \times n$.

7.6.2 Utilización de la matriz inversa en la resolución de sistemas

En los problemas del 43 al 50, utilice la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones dado.

43. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 14 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -5 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= -3 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 &= 6 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$

En los problemas 51 y 52, escriba el sistema en la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Utilice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para resolver el sistema para cada matriz **B**.

51. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2, \end{aligned}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

52. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_3, \end{aligned}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En los problemas del 53 al 56, determine, sin resolverlo, si el sistema de ecuaciones homogéneo que se proporciona tiene solamente la solución trivial o una solución no trivial.

53. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

54. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

55. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

56. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

57. El sistema de ecuaciones de las corrientes i_1, i_2 e i_3 de la red que se muestra en la **FIGURA 7.6.1** es

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 &= E_2 - E_1 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 &= E_3 - E_2 \end{aligned}$$

donde R_k y E_k, $k = 1, 2, 3$, son constantes.

a) Exprese el sistema como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

b) Demuestre que la matriz de coeficientes **A** es no singular.

c) Utilice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para encontrar las corrientes.

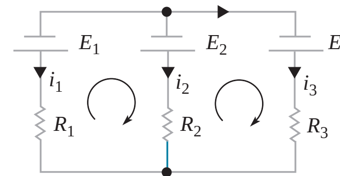


FIGURA 7.6.1 Red para el problema 57

58. Considere la placa cuadrada que se muestra en la **FIGURA 7.6.2**, con las temperaturas que se indican en cada uno de los lados. Bajo ciertas circunstancias se puede demostrar que las temperaturas aproximadas u_1, u_2, u_3 y u_4 localizadas en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, respectivamente, están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_2 + u_4 + 100 + 100}{4} \\ u_2 &= \frac{200 + u_3 + u_1 + 100}{4} \\ u_3 &= \frac{200 + 100 + u_4 + u_2}{4} \\ u_4 &= \frac{u_3 + 100 + 100 + u_1}{4}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que el sistema anterior puede escribirse como la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -300 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix}.$$

b) Resuelva el sistema del inciso *a*) encontrando la inversa de la matriz de coeficientes.

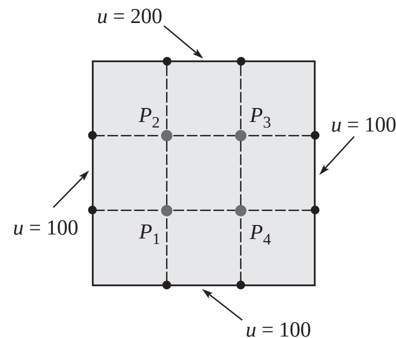


FIGURA 7.6.2 Placa del problema 58

7.7 Regla de Cramer

Introducción Al final de la sección anterior pudimos observar que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene precisamente una solución cuando det $\mathbf{A} \neq 0$. Esta solución, como se verá ahora, puede expresarse en términos de determinantes. Por ejemplo, el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

tiene la solución

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

siempre y cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Puede reconocerse que los numeradores y denominadores mostrados en (2) son determinantes. Esto es, el sistema (1) tiene una única solución,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. En esta sección generalizamos el resultado que se muestra en (2).

Utilización de determinantes para resolver sistemas En un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{4}$$

es conveniente definir una matriz especial,

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(k-ésima columna ↓ señala la columna de las b)

En otras palabras, $\mathbf{A}_k$ es la misma matriz $\mathbf{A}$ excepto que la columna k-ésima de $\mathbf{A}$ se ha reemplazado por elementos de la matriz columna

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La generalización de (3), conocida como **regla de Cramer**, está dada en el teorema siguiente.

Teorema 7.7.1 Regla de Cramer

Sea **A** la matriz de coeficientes del sistema (4). Si det **A** $\neq 0$, entonces la solución de (4) está dada por

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, ..., n$ está definida en (5).

DEMOSTRACIÓN

En primera instancia, escribimos el sistema (4) como $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Puesto que det $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A}^{-1}$ existe, por lo que

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ahora el elemento del renglón k-ésimo de la última matriz es

$$x_k = \frac{b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}}{\det \mathbf{A}}. \tag{7}$$

Sin embargo, $b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}$ es la expansión por cofactores de det $\mathbf{A}_k$, donde $\mathbf{A}_k$ es la matriz dada en (5) junto con la k-ésima columna. De esta manera, tenemos que $x_k = \det \mathbf{A}_k / \det \mathbf{A}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. ≡

EJEMPLO 1 Utilización de la regla de Cramer para resolver un sistema

Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Solución La solución requiere que se evalúen los cuatro determinantes:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 13, \qquad \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -39,$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 78, \qquad \det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52.$$

Por lo tanto, (3) da

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = -3, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = 6, \quad x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = 4.$$ ≡

Comentarios

Igual que en el método de la sección anterior, la regla de Cramer no es una forma muy práctica de resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Para $n \geq 4$, el trabajo que se requiere para evaluar los determinantes se vuelve enorme. Sin embargo, en la sección 3.5, la regla de Cramer se utiliza *algunas veces* y resulta importante desde el punto de vista teórico.

Al aplicar la regla de Cramer se pueden tomar algunos atajos. En el ejemplo 1, digamos, en realidad no tuvimos que calcular det $\mathbf{A}_3$ puesto que una vez encontrados los valores de x_1 y x_2 el valor de x_3 puede encontrarse utilizando una de las ecuaciones del sistema.

7.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 10, resuelva el sistema de ecuaciones dado mediante la regla de Cramer.

1. $-3x_1 + x_2 = 3$
$2x_1 - 4x_2 = -6$

2. $x_1 + x_2 = 4$
$2x_1 - x_2 = 2$

3. $0.1x_1 - 0.4x_2 = 0.13$
$x_1 - x_2 = 0.4$

4. $0.21x_1 + 0.57x_2 = 0.369$
$0.1x_1 + 0.2\ x_2 = 0.135$

5. $2x + y = 1$
$3x + 2y = -2$

6. $5r + 4s = -1$
$10r - 6s = 5$

7. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3$
$x_1 + x_2 - x_3 = 5$
$3x_1 + 2x_2 = -4$

8. $x_1 - x_2 + 6x_3 = -2$
$-x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 = \frac{1}{2}$

9. $u + 2v + w = 8$
$2u - 2v + 2w = 7$
$u - 4v + 3w = 1$

10. $4x + 3y + 2z = 8$
$-x + 2z = 12$
$3x + 2y + z = 3$

11. Utilice la regla de Cramer para determinar la solución del sistema

$$(2 - k)x_1 + kx_2 = 4$$
$$kx_1 + (3 - k)x_2 = 3.$$

¿Para qué valor(es) de k el sistema es inconsistente?

12. Considere el sistema

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + \varepsilon x_2 = 2.$$

Cuando el valor de ε es muy cercano a 1, las líneas que forman el sistema son casi paralelas.

a) Utilice la regla de Cramer para demostrar que una solución del sistema es

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon - 1}, x_2 = \frac{1}{\varepsilon - 1}.$$

b) Se dice que el sistema está en **condición anormal** puesto que pequeños cambios en los datos de entrada (por ejemplo, los coeficientes) provocan un cambio grande o significativo en la salida o solución. Compruebe lo anterior encontrando la solución del sistema para $\varepsilon = 1.01$ y, después, para $\varepsilon = 0.99$.

13. Las magnitudes de T_1 y T_2 de la tensión presente en los cables de soporte que se muestran en la **FIGURA 7.7.1** satisfacen las ecuaciones

$$(\cos 25°)T_1 - (\cos 15°)T_2 = 0$$
$$(\text{sen } 25°)T_1 + (\text{sen } 15°)T_2 = 300.$$

Utilice la regla de Cramer para obtener T_1 y T_2.

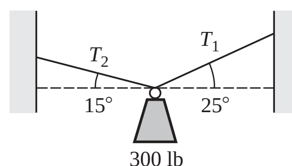


FIGURA 7.7.1 Cables de soporte del problema 13

14. El bloque de 400 libras que se muestra en la **FIGURA 7.7.2** se mantiene sin resbalar a lo largo del plano inclinado gracias a la fricción y a una fuerza F de magnitud más pequeña. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es de 0.5, entonces la magnitud de la fuerza de fricción es de $0.5N$, donde N es la magnitud de la fuerza perpendicular ejercida por el plano sobre el bloque. Utilice el hecho de que el sistema se encuentra en equilibrio para establecer un sistema de ecuaciones y encontrar F y N. Aplique la regla de Cramer para calcular F y N.

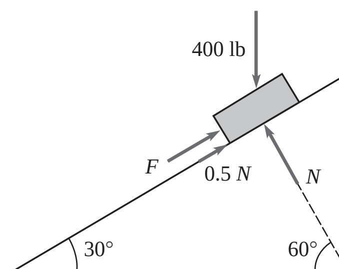


FIGURA 7.7.2 Plano inclinado del problema 14

15. Como se muestra en la **FIGURA 7.7.3**, un circuito consta de dos baterías con resistencias internas r_1 y r_2 conectadas en paralelo con un resistor. Utilice la regla de Cramer para demostrar que la corriente i que pasa por la resistencia está dada por

$$i = \frac{r_1E_2 + r_2E_1}{r_1R + r_2R + r_1r_2}.$$

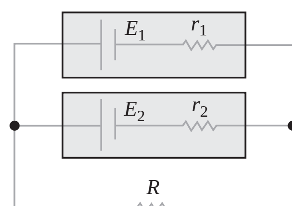


FIGURA 7.7.3 Circuito para el problema 15

7.8 El problema del valor propio

Introducción Si **A** es una matriz de $n \times n$ y **K** una matriz de $n \times 1$ (vector columna), entonces el producto **AK** está definido y es otra matriz de $n \times 1$. En muchas aplicaciones, es importante determinar si existen matrices **K** de $n \times 1$ diferentes de cero tales que el vector producto **AK** sea un múltiplo de una constante λ con la propia **K**. A la situación que plantea resolver $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ para vectores **K** diferentes de cero se le llama el **problema del valor propio** de la matriz **A**.

Una definición Los comentarios introductorios anteriores se resumen en la definición siguiente.

Definición 7.8.1 Valores propios o eigenvalores y vectores propios o eigenvectores

Sea **A** una matriz de $n \times n$. Se dice que un número λ es un **valor propio** de **A** si existe un vector solución **K** diferente de cero del sistema lineal

$$\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}. \tag{1}$$

Se dice que el vector solución **K** es un **vector propio** que corresponde al valor propio λ.

La palabra "eigenvalor" es una combinación de términos en alemán e inglés adaptados a partir de la palabra alemana *eigenwert* que, traducida literalmente, significa "valor apropiado". A los valores y vectores propios se les conoce también como **valores característicos** y **vectores característicos**, respectivamente.

El método de eliminación de Gauss-Jordan que se presentó en la sección 7.2 puede utilizarse para encontrar los vectores propios de una matriz cuadrada **A**.

EJEMPLO 1 Verificación de un vector propio

Compruebe que $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución Realizando la multiplicación **AK** podemos observar que

$$\mathbf{AK} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\underset{\text{valor propio}}{-2})\mathbf{K}.$$

Podemos observar, a partir de la línea anterior y la definición 7.8.1, que $\lambda = -2$ es un valor propio de **A**. ≡

Al utilizar las propiedades del álgebra matricial, podemos escribir (1) en la forma alterna

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

donde **I** es la identidad multiplicativa. Si hacemos

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

entonces (2) es lo mismo que

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0\\
a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0\\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots\\
a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

A pesar de que la solución obvia de (3) es $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$, estamos buscando solamente soluciones no triviales. Sabemos que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y sólo si, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Por lo tanto, para encontrar una solución **K** diferente de cero para (2), debemos tener que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{4}$$

La inspección de (4) muestra que la expansión por cofactores de $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ da como resultado un polinomio de grado n en λ. La ecuación (4) se llama **ecuación característica** de **A**. Por lo tanto, *los valores propios de* **A** *son las raíces de la ecuación característica*. Para encontrar el vector propio correspondiente a un valor propio λ, simplemente resolvemos el sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ aplicando el método de eliminación Gauss-Jordan a la matriz aumentada $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$.

EJEMPLO 2 Cálculo de valores y vectores propios

Encuentre los valores y vectores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución Para expandir el determinante a su ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1\\ 6 & -1-\lambda & 0\\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

utilizamos los cofactores del segundo renglón. Se puede deducir que la ecuación característica es

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0.$$

De aquí que los valores propios sean $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 3$. Para calcular los vectores propios, debemos reducir $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$ tres veces correspondientes a los tres valores propios distintos.

Para $\lambda_1 = 0$, tenemos

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0\\ 6 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1+R_3]{-6R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -13 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{13} & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Desde luego, k_3 podría seleccionarse como cualquier valor diferente de cero. En otras palabras, una constante diferente de cero que sea múltiplo de un vector propio es también un vector propio.

Por lo tanto, podemos observar que $k_1 = -\frac{1}{13}k_3$ y $k_2 = -\frac{6}{13}k_3$. Seleccionando $k_3 = -13$ nos da el vector propio

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 6\\ -13 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-R_3 \\ R_{13}}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-6R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-\frac{1}{9}R_2 \\ -\frac{1}{8}R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2R_2+R_1 \\ -2R_2+R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = -k_3$ y $k_2 = 2k_3$. Seleccionamos $k_3 = 1$ y entonces resulta un segundo vector propio

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, para $\lambda_3 = 3$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y así $k_1 = -k_3$ y $k_2 = -\frac{3}{2}k_3$. La elección de que $k_3 = -2$ da como resultado un tercer vector propio,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$ ≡

Cuando una matriz **A** de $n \times n$ tiene n distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se puede demostrar que es posible calcular un conjunto de n vectores propios lineales independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$. Sin embargo, cuando la ecuación característica tenga raíces repetidas, puede que no sea posible calcular n vectores propios lineales independientes para **A**.

EJEMPLO 3 Cálculo de valores y vectores propios

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Solución A partir de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 = 0,$$

podemos observar que $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ es un valor propio de multiplicidad 2. En el caso de una matriz de 2×2, no es necesario utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan. Para encontrar el o los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 5$, recurrimos al sistema $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0})$ en su forma equivalente

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Es evidente, a partir de este sistema, que $k_1 = 2k_2$. Por lo tanto, si seleccionamos $k_2 = 1$, encontraremos un solo vector propio $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ≡

EJEMPLO 4 Cálculo de valores y vectores propios

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 11)(\lambda - 8)^2 = 0$$

muestra que $\lambda_1 = 11$ y que $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ es un valor propio de multiplicidad 2.

Para $\lambda_1 = 11$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - 11\mathbf{I} \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operaciones de renglón}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De aquí que $k_1 = k_3$ y $k_2 = k_3$. Si $k_3 = 1$, entonces

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para $\lambda_2 = 8$ tenemos

$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I} \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operaciones de renglón}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En la ecuación $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ podemos seleccionar libremente dos de las variables de forma arbitraria. Por un lado, seleccionando $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ y, por el otro, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$, obtenemos dos vectores propios lineales independientes:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que corresponden a un solo valor propio. ≡

■ **Valores propios complejos** Una matriz **A** puede tener **valores propios complejos**.

Teorema 7.8.1 Valores y vectores propios complejos

Sea **A** una matriz cuadrada con elementos reales. Si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, es un valor propio complejo de **A**, entonces su conjugado $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es un valor propio de **A**. Si **K** es el vector propio correspondiente a λ, entonces su conjugado $\overline{\mathbf{K}}$ es un vector propio correspondiente a $\bar{\lambda}$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que **A** es una matriz de elementos reales, la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ es una ecuación polinomial con coeficientes reales. A partir del álgebra sabemos que las raíces complejas de dichas ecuaciones se presentan en pares conjugados. En otras palabras,

si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz, entonces $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo es también. Ahora dejemos que **K** sea un vector propio de **A** correspondiente a λ. Por definición, $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. Calculando los conjugados complejos de la última ecuación tenemos

$$\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}} \quad \text{o} \quad \mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}},$$

puesto que **A** es una matriz real. La última ecuación muestra que $\overline{\mathbf{K}}$ es un vector propio correspondiente a $\bar{\lambda}$. ≡

EJEMPLO 5 Valores propios y vectores propios complejos

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

A partir de la fórmula cuadrática, encontramos que $\lambda_1 = 5 + 2i$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 5 - 2i$.

Ahora, para $\lambda_1 = 5 + 2i$, debemos resolver

$$\begin{aligned} (1-2i)k_1 - \qquad k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1+2i)k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que $k_2 = (1 - 2i)k_1$,* se puede deducir que, después de seleccionar $k_1 = 1$, ese vector propio es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

Del teorema 7.8.1, podemos observar que un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 5 - 2i$ es

$$\mathbf{K}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$ ≡

Nuestro último teorema se deduce inmediatamente a partir del hecho de que el determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior o diagonal, es el producto de los elementos de la diagonal.

Teorema 7.8.2 Matrices triangular y diagonal

Los valores propios de una matriz triangular superior, triangular inferior o diagonal son los elementos de la diagonal principal.

* Observe que la segunda ecuación es simplemente $1 + 2i$ veces la primera.

7.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 6, determine cuáles de los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz **A** dada. Proporcione los valores propios correspondientes.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

En los problemas del 7 al 22, calcule los valores y vectores propios de la matriz dada.

7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los valores propios de $\mathbf{A}^{-1}$ son los recíprocos de los valores propios de una matriz **A** no singular. Además, los vectores propios de **A** y $\mathbf{A}^{-1}$ son iguales. En los problemas 23 y 24, compruebe estos hechos para la matriz dada.

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Una matriz **A** es singular si, y sólo si $\lambda = 0$ es un valor propio. En los problemas 25 y 26, compruebe que una matriz **A** dada es singular. Calcule la ecuación característica de **A** y demuestre que $\lambda = 0$ es un valor propio.

25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \\ 7 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Tareas para el laboratorio de cómputo

27. Se dice que una matriz cuadrada **A** es una **matriz estocástica** si ninguno de sus elementos es negativo y la suma de los elementos de cada renglón (o la suma de los elementos de cada columna) da como resultado máximo un 1. Las matrices estocásticas son de gran importancia en la teoría de la probabilidad.

a) Compruebe que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1,$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

son matrices estocásticas.

b) Utilice un programa de cómputo para álgebra lineal o un sistema asistido por computadora para encontrar los valores y vectores propios de la matriz **A** de 3×3 del inciso *a*). Forme al menos seis matrices estocásticas más de diferentes tamaños, 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5. Calcule los valores y vectores propios de cada matriz. Si encuentra un patrón, formule una conjetura y después trate de demostrarla.

c) En la matriz **A** de 3×3 del inciso *a*), utilice un programa de cómputo para calcular $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, ... Repita el proceso en las matrices que usted formó en *b*). Si encuentra un patrón, formule una conjetura y después trate de demostrarla.

7.9 Potencias de las matrices

Introducción En algunas ocasiones es importante poder calcular de manera rápida una potencia de $\mathbf{A}^m$, siendo m un entero positivo, de una matriz **A** de $n \times n$:

$$\mathbf{A}^m = \underbrace{\mathbf{AAA} \ldots \mathbf{A}}_{m \text{ número de factores}}.$$

Desde luego, el cálculo de $\mathbf{A}^m$ podría hacerse con un programa de cómputo apropiado o escribiendo un programa corto; sin embargo, aún así, usted debe estar consciente de que no

resulta eficiente utilizar la fuerza bruta para realizar multiplicaciones sucesivas: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{AA}^2$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{AAAA} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^3) = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$, y así por el estilo.

Cálculo de $\mathbf{A}^m$ Vamos a esquematizar un método alterno para efectuar el cálculo de $\mathbf{A}^m$ mediante el teorema siguiente, el cual se conoce como teorema Cayley-Hamilton.

Teorema 7.9.1 Teorema Cayley-Hamilton

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica.

Si $(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ es la ecuación característica de $\mathbf{A}$, entonces el teorema 7.9.1 establece que,

$$(-1)^n\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Matrices de orden 2 La ecuación característica de la matriz de 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, y los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. El teorema 7.9.1 implica que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, o, despejando el valor más elevado de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}. \tag{2}$$

Ahora, si multiplicamos (2) por $\mathbf{A}$, obtenemos $\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$, y si utilizamos otra vez (2) para eliminar $\mathbf{A}^2$ en el lado derecho de esta nueva ecuación, entonces

$$\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} + (2\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{A}.$$

Al continuar de esta manera —en otras palabras, multiplicando el último resultado por $\mathbf{A}$ y utilizando (2) para eliminar $\mathbf{A}^2$— obtenemos la sucesión de potencias de $\mathbf{A}$ expresada solamente en términos de la matriz identidad $\mathbf{I}$ y $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^4 &= 6\mathbf{I} + 5\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^5 &= 10\mathbf{I} + 11\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^6 &= 22\mathbf{I} + 21\mathbf{A} \end{aligned} \tag{3}$$

y así sucesivamente (compruébelo). Así, por ejemplo,

$$\mathbf{A}^6 = 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 21\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 84 \\ -21 & 85 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ahora podemos determinar c_k sin efectuar en realidad las multiplicaciones y sustituciones sucesivas como hicimos en (3). En primera instancia, observe que debido a que la ecuación característica de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ puede escribirse como $\lambda^2 = 2 + \lambda$, resultados similares a (3) deben ser válidos para los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, esto es, $\lambda^3 = 2 + 3\lambda$, $\lambda^4 = 6 + 5\lambda$, $\lambda^5 = 10 + 11\lambda$, $\lambda^6 = 22 + 21\lambda, \ldots$ Se puede deducir entonces que las ecuaciones

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} \quad \text{y} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda \tag{5}$$

son válidas *para el mismo par de constantes* c_0 y c_1. Podemos determinar las constantes c_0 y c_1 fijando simplemente los valores $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ en la última ecuación de (5) y resolviendo el sistema resultante de dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución del sistema

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 + c_1(-1) \\ 2^m &= c_0 + c_1(2) \end{aligned}$$

es $c_0 = \frac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m]$, $c_1 = \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m]$. Ahora, sustituyendo estos coeficientes en la primera ecuación de (5), sumando las dos matrices y simplificando cada elemento, obtenemos

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[-2^m + 4(-1)^m] & \frac{4}{3}[2^m - (-1)^m] \\ -\frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^{m+2} - (-1)^m] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Usted deberá comprobar el resultado de (4) estableciendo el valor $m = 6$ en (6). Observe que (5) y (6) son válidas para $m \geq 0$ ya que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$.

Matrices de orden *n* Si la matriz **A** fuera de 3×3, entonces la ecuación característica (1) sería una ecuación polinomial cúbica y la analogía de (2) nos permitiría expresar $\mathbf{A}^3$ en términos de **I**, **A** y $\mathbf{A}^2$. Podemos proceder como se acaba de ilustrar y escribir cualquier potencia de $\mathbf{A}^m$ en términos de **I**, **A** y $\mathbf{A}^2$. En general, para una matriz **A** de $n \times n$, podemos escribir

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1},$$

donde cada uno de los coeficientes c_k, $k = 0, 1, ..., n - 1$, depende del valor de m.

EJEMPLO 1 $\mathbf{A}^m$ para una matriz de 3×3

Calcule $\mathbf{A}^m$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica de **A** es $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ o $\lambda^3 = -2 + \lambda + 2\lambda^2$, y los valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. A partir del análisis anterior, sabemos que los mismos coeficientes son válidos en las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 \quad \text{y} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2. \tag{7}$$

A su vez, asignar $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ en la última ecuación genera tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 - c_1 + c_2 \\ 1 &= c_0 + c_1 + c_2 \\ 2^m &= c_0 + 2c_1 + 4c_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Resolver (8) nos da

$$c_0 = \tfrac{1}{3}[3 + (-1)^m - 2^m],$$

$$c_1 = 2[1 - (-1)^m],$$

$$c_2 = \tfrac{1}{6}[-3 + (-1)^m + 2^{m+1}].$$

Después de calcular $\mathbf{A}^2$ sustituimos estos coeficientes en la primera ecuación de (7) y simplificamos los elementos de la matriz resultante. El resultado es

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}[9 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-9 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \\ 1 - 2^m & 2^m & 2^m - 1 \\ \frac{1}{6}[3 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-3 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, con $m = 10$,

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} -340 & 341 & 341 \\ -1\,023 & 1\,024 & 1\,023 \\ -341 & 341 & 342 \end{pmatrix}.$$

≡

Cálculo de la inversa Suponga que **A** es una matriz no singular. El que **A** satisfaga su propia ecuación característica puede utilizarse para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ como una combinación lineal de potencias de **A**. Por ejemplo, acabamos de ver que la matriz no singular $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ satisface $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$. Despejando la matriz identidad obtenemos $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{A}$. Multiplicando el último resultado por $\mathbf{A}^{-1}$, encontramos que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}$. En otras palabras,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Comentarios

Existen algunos problemas evidentes al usar el método recién mostrado para calcular $\mathbf{A}^m$. Si, por ejemplo, la matriz del ejemplo 1 tuviera un valor propio de multiplicidad dos, entonces tendríamos, en lugar de tres ecuaciones y tres incógnitas como en (8), solamente dos ecuaciones con tres incógnitas. ¿Cómo calculamos los coeficientes *únicos* c_0, c_1 y c_2? Consulte los problemas 11 al 14 de los ejercicios 7.9. También, en el caso de matrices de tamaños grandes que tienen valores propios diferentes, el cálculo de $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ es muy tedioso de hacer a mano.

7.9 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 y 2, demuestre que la matriz dada satisface su propia ecuación característica.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas del 3 al 10, utilice el método presentado en esta sección para calcular $\mathbf{A}^m$. Aplique el resultado así obtenido y encuentre el valor de la potencia indicada de la matriz **A**.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $m = 3$ **4.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $m = 4$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $m = 5$ **6.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $m = 6$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $m = 10$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $m = 6$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $m = 10$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$; $m = 8$

En los problemas 11 y 12, demuestre que la matriz dada tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad dos. Como consecuencia, las ecuaciones $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda$ (problema 11) y $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2$ (problema 12) no proporcionan las suficientes ecuaciones independientes como para formar un sistema y determinar los coeficientes c_i. Utilice la derivada (con respecto a λ) para cada una de estas ecuaciones evaluada en λ_1 como la ecuación extra necesaria para formar un sistema. Calcule $\mathbf{A}^m$ y utilice este resultado para calcular la potencia indicada de la matriz **A**.

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $m = 6$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $m = 5$

13. Demuestre que $\lambda = 0$ es un valor propio de cada matriz. En este caso, el coeficiente c_0 de la ecuación característica (1) es 0. Calcule $\mathbf{A}^m$ en cada caso. En los incisos *a*) y *b*), explique por qué no es necesario despejar en ningún sistema los coeficientes c_i para determinar $\mathbf{A}^m$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

14. En su obra *Liber Abbaci*, publicada en 1202, Leonardo Fibonacci de Pisa realizó especulaciones acerca de la reproducción de los conejos:

¿Cuántos pares de conejos se tendrán en un año si, comenzando con un solo par, cada mes un par engendra un nuevo par que a su vez puede procrear a partir del segundo mes en adelante?

La respuesta a esta pregunta está contenida en una secuencia conocida como serie de Fibonacci.

Después de cada mes													
Inicio $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pares adultos	1	1	2	3	5	8	13	21	…				
Pares bebés	0	1	1	2	3	5	8	13	…				
Pares totales	1	2	3	5	8	13	21	34	…				

Cada uno de los tres renglones que describen a los pares de conejos es una serie de Fibonacci y puede definirse recursivamente empleando una **ecuación diferencial de segundo orden** $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ donde x_0 y x_1 dependen del renglón. Por ejemplo, para el primer renglón que designa pares adultos de conejos, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

a) Si dejamos que $y_{n-1} = x_{n-2}$, entonces $y_n = x_{n-1}$, y la ecuación de diferencia puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

$$y_n = x_{n-1}.$$

Escriba este sistema en la forma matricial $\mathbf{X}_n = \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

b) Demuestre que

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2\lambda_1^m - \lambda_1\lambda_2^m + \lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \dfrac{\lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_2\lambda_1^m - \lambda_1\lambda_2^m}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}$$

o

$$\mathbf{A}^m = \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{5}}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1} & 2(1+\sqrt{5})^m - 2(1-\sqrt{5})^m \\ 2(1+\sqrt{5})^m - 2(1-\sqrt{5})^m & (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^m \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ son los valores propios distintos de $\mathbf{A}$.

c) Utilice el resultado obtenido en el inciso *a)* para demostrar que $\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}_1$. Aplique el último resultado y el del inciso *b)* para calcular el número de pares adultos, de pares bebés y de pares totales de conejos después del duodécimo mes.

En los problemas 15 y 16, utilice el procedimiento que se ilustra en (9) para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ diferente de cero es **nilpotente de índice** m si m es el entero positivo más pequeño para el que $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$. ¿Qué matrices de las incluidas a continuación son nilpotentes? Si alguna es nilpotente, ¿cuál es su índice?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. ***a)*** Explique por qué cualquier matriz nilpotente $\mathbf{A}$ es singular. [*Sugerencia:* Revise la sección 7.5.] ***b)*** Demuestre que todos los valores propios de una matriz nilpotente $\mathbf{A}$ son cero. [*Sugerencia:* Utilice la expresión (1) presentada en la sección 7.8.]

7.10 Matrices ortogonales

Introducción En esta sección vamos a utilizar algunas propiedades elementales de los **números complejos**. Suponga que $z = a + ib$ denota un número complejo, donde a y b son números reales y el símbolo i está definido por $i^2 = -1$. Si $\bar{z} = a - ib$ es el **conjugado** de z, entonces la igualdad $z = \bar{z}$ o $a + ib = a - ib$ implica que $b = 0$. En otras palabras, si $z = \bar{z}$, entonces z es un número real. Además, se comprueba fácilmente que el producto de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ es un número real: $z\bar{z} = a^2 + b^2$. La **magnitud** de z se define como el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La magnitud de z puede expresarse en términos del producto $z\bar{z}$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z\bar{z}|$, o $|z|^2 = z\bar{z}$. En la sección 15.1 puede encontrarse un análisis detallado de los números complejos.

Existen muchos tipos de matrices especiales, pero son dos los que se presentan con mucha frecuencia en las aplicaciones: matrices simétricas y matrices ortogonales. En esta sección vamos a estudiar ambos tipos con más detalle.

Matrices simétricas Comencemos recordando la definición formal de una matriz simétrica.

Definición 7.10.1 Matriz simétrica

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **simétrica** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, donde $\mathbf{A}^T$ es la transpuesta de $\mathbf{A}$.

La demostración del teorema siguiente está en función de las propiedades de los números complejos estudiadas en el repaso incluido al comienzo de esta sección.

Teorema 7.10.1 Valores propios reales

Sea **A** una matriz simétrica con elementos reales. Por lo tanto, los valores propios de **A** son reales.

DEMOSTRACIÓN

Si **K** es un vector propio correspondiente a un valor propio λ de **A**, entonces $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. El conjugado de la última ecuación es

$$\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}. \tag{1}$$

Puesto que los elementos de **A** son reales, tenemos $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$, y entonces (1) es

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}. \tag{2}$$

En seguida calculamos la transpuesta de (2), aprovechamos que **A** es simétrica y multiplicamos la ecuación resultante en el lado derecho por **K**:

$$\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{AK} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{3}$$

Sin embargo, cuando multiplicamos el miembro derecho de $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ por $\overline{\mathbf{K}}^T$, obtenemos

$$\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{AK} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{4}$$

Restar (4) de (3) nos da

$$0 = (\overline{\lambda} - \lambda)\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{5}$$

Ahora $\overline{\mathbf{K}}^T$ es una matriz de $1 \times n$ y **K** es una matriz de $n \times 1$, por lo que el producto $\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}$ es la matriz $\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K} = (|k_1|^2 + |k_2|^2 + \cdots + |k_n|^2)$ de 1×1. Ya que por definición, $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, la última expresión es una cantidad positiva. Por lo tanto, a partir de (5) podemos concluir que $\overline{\lambda} - \lambda = 0$ o $\overline{\lambda} = \lambda$. Esto implica que λ es un número real. ≡

Producto interno En R^n el **producto interno** o **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{6}$$

Ahora, si **X** y **Y** son vectores columna de $n \times 1$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces la matriz análoga de (6) es

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n).^* \tag{7}$$

Desde luego, para los vectores columna dados, $\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$. La **norma** de un vector columna **X** está dada por

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{X}^T\mathbf{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

---

* Puesto que una matriz de 1×1 es simplemente un escalar, de aquí en adelante eliminaremos los paréntesis y escribiremos $\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Teorema 7.10.2 Vectores propios ortogonales

Sea **A** una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces los vectores propios correspondientes a los distintos (diferentes) valores propios son ortogonales.

DEMOSTRACIÓN

Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios distintos de **A** correspondientes a los vectores propios $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, respectivamente. Deseamos demostrar que $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = 0$.

Ahora, por definición, debemos tener

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2. \tag{8}$$

Calculamos la transpuesta de la primera de estas ecuaciones, utilizamos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, y después multiplicamos el resultado de la derecha por $\mathbf{K}_2$:

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{AK}_2 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2. \tag{9}$$

La segunda ecuación incluida en (8) está multiplicada en su primer miembro por $\mathbf{K}_1^T$:

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2. \tag{10}$$

Restar (10) de (9) nos da

$$0 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 - \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 \quad \text{o} \quad 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2.$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se puede deducir que $\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = 0$. ≡

EJEMPLO 1 Vectores propios ortogonales

Los valores propios de una matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -2$. A su vez, los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que todos los valores propios son diferentes, tenemos del teorema 7.10.2 que

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_3 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_3 = (-1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0.$$ ≡

En el ejemplo 3 de la sección 7.8 pudimos observar que probablemente no se puedan encontrar n vectores propios linealmente independientes para una matriz **A** de $n \times n$ cuando algunos de los valores propios están repetidos. Sin embargo, una matriz simétrica es la excep-

ción. Es demostrable que un conjunto de n vectores propios linealmente independientes puede calcularse siempre para una matriz simétrica **A** de $n \times n$ aun cuando existan algunos valores propios repetidos. (Consulte el ejemplo 4 de la sección 7.8.)

Podemos deducir que un conjunto de vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ en R^n es **ortonormal** si cada par de vectores diferentes es ortogonal y cada vector presente en el conjunto es un vector unitario. En términos del producto interno de vectores, el conjunto es ortonormal si

Véase la expresión (2) de la sección 18.6, para la definición del producto interno en R^n.

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La última condición establece simplemente que $\|\mathbf{x}_i\| = \sqrt{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i} = 1$, $i = 1, 2, ..., n$.

Matriz ortogonal El concepto de un conjunto ortonormal de vectores juega un papel importante en la consideración del siguiente tipo de matriz.

Definición 7.10.2 Matriz ortogonal

Una matriz **A** no singular de $n \times n$ es **ortogonal** si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

En otras palabras, **A** es ortogonal si $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

EJEMPLO 2 Matrices ortogonales

***a*)** La matriz identidad **I** de $n \times n$ es una matriz ortogonal. Por ejemplo, en el caso de la identidad de 3×3

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se puede observar fácilmente que $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ e $\mathbf{I}^T\mathbf{I} = \mathbf{II} = \mathbf{I}$.

***b*)** La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Para poder apreciar lo anterior, solamente necesitamos comprobar que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

Teorema 7.10.3 Criterio para la existencia de una matriz ortogonal

Una matriz **A** de $n \times n$ es ortogonal si, y sólo si, sus columnas $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ forman un conjunto ortonormal.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Supongamos que **A** es una matriz ortogonal de $n \times n$ con columnas $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$. De aquí que los renglones de $\mathbf{A}^T$ sean $\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T$. Sin embargo, puesto que **A** es ortogonal, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$; esto es,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_n \\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede deducir, a partir de la definición de igualdad de matrices, que

$$\mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esto significa que las columnas de la matriz ortogonal forman un conjunto ortonormal de n vectores. ≡

Si escribimos las columnas de la matriz del inciso *b*) del ejemplo 2 como

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

entonces los vectores son ortogonales:

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 = \left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad -\tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_3 = \left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad -\tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_3 = \left(-\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

y son vectores unitarios:

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 = \left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad -\tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 = \left(-\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$\mathbf{X}_3^T\mathbf{X}_3 = \left(\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1.$$

Construcción de una matriz ortogonal Si una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a partir del teorema 7.10.2 se puede deducir que los vectores propios $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ son mutuamente ortogonales. Multiplicando cada vector por el recíproco de su normal, obtenemos un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales, esto es, un conjunto ortonormal. Por lo tanto, podemos construir una matriz ortogonal elaborando una matriz $\mathbf{P}$ de $n \times n$ cuyas columnas sean esos vectores propios normalizados de $\mathbf{A}$.

EJEMPLO 3 Construcción de una matriz ortogonal

En el ejemplo 1 se comprobó que los vectores propios

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de la matriz simétrica $\mathbf{A}$ dada son ortogonales. Ahora, las normas de los vectores propios son

$$\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_1} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_2} = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{K}_3\| = \sqrt{\mathbf{K}_3^T\mathbf{K}_3} = \sqrt{6}.$$

Por ende, un conjunto ortonormal de vectores es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Se utilizan estos vectores como columnas para obtener la matriz ortogonal

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Usted debe comprobar que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. ≡

En la sección siguiente se utilizará la técnica de construcción de una matriz ortogonal a partir de los vectores propios de una matriz simétrica.

No malinterprete el teorema 7.10.2. Siempre es posible calcular n vectores propios linealmente independientes para una matriz simétrica real $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Sin embargo, el teorema no establece que *todos* los vectores propios sean mutuamente ortogonales. El conjunto de vectores propios correspondientes a los distintos valores propios son ortogonales; sin embargo, los diferentes vectores propios correspondientes a un valor propio repetido pueden no ser ortogonales. Considere la matriz simétrica del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Utilización del proceso de Gram-Schmidt

En la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

se encontró que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$, y $\lambda_3 = 9$. Procediendo como en la sección 7.8, para $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$, encontramos que

$$(\mathbf{A} + 9\mathbf{I}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A partir de la última matriz observamos que $k_1 = -\frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{4}k_3$. Los parámetros $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ seguidos de $k_2 = -4$, $k_3 = 0$ nos dan, a su vez, los distintos vectores propios

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para $\lambda_1 = 9$,

$$(\mathbf{A} - 9\mathbf{I}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & -17 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -17 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

indica que $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un tercer vector propio.

Observe que, de acuerdo con el teorema 7.10.2, el vector $\mathbf{K}_3$ es ortogonal con respecto a $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$; sin embargo $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, vectores propios correspondientes al valor propio repetido $\lambda_1 = -9$, no son ortogonales ya que $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 = -4 \neq 0$.

Utilizamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para transformar el conjunto $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ en un conjunto ortogonal. Sea $\mathbf{V}_1 = \mathbf{K}_1$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}_2 - \left(\frac{\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1}\right)\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El conjunto $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$ es un conjunto ortogonal de vectores (compruébelo). Además, el conjunto $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{K}_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores propios. Utilizando las normales $\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{V}_2\| = 3$ y $\|\mathbf{K}_3\| = 3\sqrt{2}$, obtenemos un conjunto de vectores ortonormales

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

por lo que la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es ortogonal. ≡

Comentarios

Para una matriz simétrica real de $n \times n$ con valores propios repetidos, siempre es posible *calcular*, más que *construir*, un conjunto de n vectores propios mutuamente ortogonales. En otras palabras, el proceso de Gram-Schmidt no necesariamente tiene que utilizarse. Consulte el problema 23 dado en la sección de ejercicios 7.10.

7.10 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas del 1 al 4, ***a)*** compruebe que los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz simétrica dada, ***b)*** identifique los valores propios correspondientes y ***c)*** compruebe que los vectores columna son ortogonales.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 \\ 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En los problemas del 5 al 10, determine si la matriz dada es ortogonal.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{17} & 0 & -\frac{15}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$

En los problemas del 11 al 18, proceda como en el ejemplo 3 para construir una matriz ortogonal a partir de los vectores propios de la matriz simétrica dada. (Las respuestas no son únicas.)

11. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 8 & -4 & 10 \\ -2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$

En los problemas 19 y 20, utilice el teorema 7.10.3 para calcular los valores de a y b de tal forma que la matriz dada sea ortogonal.

19. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & a \\ \frac{4}{5} & b \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & b \\ a & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

En los problemas 21 y 22, ***a)*** compruebe que los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz simétrica dada. ***b)*** Identifique los valores propios correspondientes. ***c)*** Proceda como en el ejemplo 4 y utilice el proceso de Gram-Schmidt para construir una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ a partir de los vectores propios.

21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

23. En el ejemplo 4, utilice la ecuación $k_1 = -\frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{4}k_3$ y seleccione dos diferentes conjuntos de valores para k_2 y k_3 en tal forma que los vectores propios $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ sean ortogonales.

24. Construya una matriz ortogonal a partir de los vectores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Demuestre que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces $\mathbf{AB}$ es ortogonal.

7.11 Aproximación de valores propios

Introducción Recuerde que para calcular los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ debemos encontrar las raíces de la ecuación polinomial $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de tamaño grande, los cálculos para obtener esta ecuación característica podrían volverse una pesadilla. Además, aunque pudiésemos calcular la ecuación característica exacta, es probable que tuviéramos que utilizar un procedimiento numérico para aproximar sus raíces. Existen procedimientos numéricos alternos para aproximar valores propios y los correspondientes vectores propios. El procedimiento que consideraremos en esta sección tiene que ver con matrices que poseen un **valor propio dominante**.

Una definición Un valor propio dominante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es uno cuyo valor absoluto es mayor que el valor absoluto de cada uno de los valores propios restantes. En la definición siguiente, enunciamos de modo formal este último enunciado.

Definición 7.11.1 Valor propio dominante

Hagamos que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ..., \lambda_n$ expresen los valores propios de una matriz **A** de $n \times n$. Se dice que el valor propio λ_k es el **valor propio dominante** de **A** si

$$|\lambda_k| > \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{pero } i \neq k.$$

Se llama **vector propio dominante** de **A** a un valor propio correspondiente a λ_k.

En el ejemplo 2 de la sección 7.8 observamos que los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 3$. Puesto que $|-4| > 0$ y $|-4| > 3$, podemos observar que $\lambda_2 = -4$ es el valor propio dominante de **A**.

EJEMPLO 1 Matrices sin ningún valor propio dominante

a) La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$. Puesto que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2$ se puede deducir que no existe valor propio dominante.

b) Los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$. De nuevo, la matriz no tiene valor propio dominante. ≡

■ **Método de las potencias** Supongamos que la matriz **A** de $n \times n$ tiene un valor propio dominante λ_1. La técnica iterativa para aproximar un vector propio dominante correspondiente se debe al matemático alemán Richard von Mises (1883-1953) y se llama **método de las potencias**. La idea básica de este procedimiento es calcular, en primera instancia, una aproximación a un vector propio dominante empleando la secuencia

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

donde $\mathbf{X}_0$ representa un vector de $n \times 1$ diferente de cero que es un primer intento o aproximación del vector propio buscado. Iterando (1) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{X}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_m &= \mathbf{A}\mathbf{X}_{m-1} = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Bajo ciertas circunstancias, para valores grandes de m el vector definido como $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación de un vector propio dominante. Para conceptualizar mejor lo anterior, formulemos algunos supuestos adicionales acerca de la matriz **A**. Supongamos que los valores propios de **A** son tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

y que los n vectores propios correspondientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ son linealmente independientes. Debido a este último supuesto, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ puede servir como base para R^n (consulte la sección 18.6). Por lo tanto, para cualquier vector $\mathbf{X}_0$ de $n \times 1$ diferente de cero, se pueden calcular constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{X}_0 = c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\mathbf{K}_n. \tag{3}$$

También supondremos que $\mathbf{X}_0$ se selecciona de tal forma que $c_1 \neq 0$. Multiplicando (3) por $\mathbf{A}$ obtenemos

$$\mathbf{AX}_0 = c_1\mathbf{AK}_1 + c_2\mathbf{AK}_2 + \cdots + c_n\mathbf{AK}_n.$$

Puesto que $\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1$, $\mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{AK}_n = \lambda_n\mathbf{K}_n$, la última línea puede expresarse como

$$\mathbf{AX}_0 = c_1\lambda_1\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{AK}_n. \tag{4}$$

Multiplicamos (4) por $\mathbf{A}$ y resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2\mathbf{X}_0 &= c_1\lambda_1\mathbf{AK}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{AK}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{AK}_n \\ &= c_1\lambda_1^2\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2^2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2\mathbf{K}_n.\end{aligned}$$

Continuamos de esta forma y encontramos que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{X}_0 = c_1\lambda_1^m\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^m\mathbf{K}_n \tag{5}$$

$$= \lambda_1^m\left(c_1\mathbf{K}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m\mathbf{K}_n\right). \tag{6}$$

Puesto que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para $i = 2, 3, \ldots, n$, tenemos $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ y, como consecuencia, $\lim_{m\to\infty} (\lambda_i/\lambda_1)^m = 0$. Por lo tanto, conforme $m \to \infty$, podemos observar a partir de (6) que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{X}_0 \approx \lambda_1^m c_1\mathbf{K}_1. \tag{7}$$

Puesto que un múltiplo constante diferente de cero de un vector propio es otro vector propio, podemos deducir a partir de (7) que para valores grandes de m, y tomando en cuenta todas las suposiciones formuladas, la matriz de $n \times 1$ $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación a un vector propio dominante asociado con el valor propio dominante λ_1. La rapidez con la que este método converge depende del cociente λ_2/λ_1: si $|\lambda_2/\lambda_1|$ es muy pequeño, entonces la convergencia es rápida, mientras que si $|\lambda_2/\lambda_1|$ tiene un valor cercano a la unidad, la convergencia es lenta. Desde luego, esta información no es tan útil como parece debido a que, en general, no conocemos con antelación los valores propios.

Falta, entonces, aproximar el valor propio dominante en sí mismo. Lo anterior se puede llevar a cabo mediante el producto interno. Si $\mathbf{K}$ es un vector propio de una matriz $\mathbf{A}$ correspondiente al valor propio λ, tenemos $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$, y así tenemos que $\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K} = \lambda\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$. Como $\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K}$ y $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$ son escalares, podemos despejar λ en esta última ecuación:

$$\lambda = \frac{\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K}}{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}}.$$

De aquí que, si $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación de un vector propio dominante obtenido por iteración de (1), entonces el valor propio λ_1 dominante puede aproximarse por medio del cociente

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{AX}_m \cdot \mathbf{X}_m}{\mathbf{X}_m \cdot \mathbf{X}_m}. \tag{8}$$

El cociente presentado en (8) es conocido como **cociente de Rayleigh**.

EJEMPLO 2 Utilización del método de las potencias

Utilice el método de las potencias para aproximar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio dominante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que no conocemos los valores propios y los vectores propios, podemos emplear $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los primeros dos términos de la secuencia de vectores definida por (1) son

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Los cinco vectores restantes obtenidos de esta forma se proporcionan en la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 144 \\ 68 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 712 \\ 364 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\,576 \\ 1\,772 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17\,848 \\ 8\,956 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 89\,304 \\ 44\,588 \end{pmatrix}$

A estas alturas, aparentemente no hemos llegado a ningún lado, ya que los elementos de los vectores de la tabla parecen estar aumentando sin límites. Sin embargo, tenga en cuenta que (7) indica que estamos obteniendo una constante múltiple de un vector. Si el método de las potencias converge entonces, por factorización del elemento con valor absoluto más grande de $\mathbf{X}_m$ (para un valor de m grande), obtendremos una aproximación razonable de un vector propio dominante. A partir de la tabla,

$$\mathbf{X}_7 = 89\,304\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4933 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Parece que los vectores se aproximan a los múltiplos escalares de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Ahora utilizamos (8) para aproximar el valor propio dominante λ_1. Primero tenemos

$$\mathbf{AX}_7 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9986 \\ 2.5007 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX}_7 \cdot \mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 4.9986 \\ 2.5007 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = 6.2472$$

$$\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = 1.2493.$$

Por último, tenemos

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{AX}_7 \cdot \mathbf{X}_7}{\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7} = \frac{6.2472}{1.2493} = 5.0006.$$

El lector deberá utilizar el procedimiento de la sección 7.7 para verificar que los valores propios y los correspondientes vectores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. ≡

■ **Escalamiento** Tal como acabamos de ver, la iteración de (1) a menudo resulta en vectores cuyos elementos se vuelven muy grandes en valor absoluto. Desde luego, los números grandes pueden causar problemas si se utiliza una computadora para realizar un gran número de iteraciones. El resultado en (9) sugiere que una forma de evitar esta dificultad es mediante el uso de un vector de **escalamiento** en cada etapa de la iteración. Para efectuar el escalamiento, simplemente multiplicamos el vector $\mathbf{AX}_0$ por el recíproco del elemento que tenga el valor absoluto más grande. Es decir, multiplicamos

$$\mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{por} \quad \frac{1}{\text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}}.$$

A esta matriz resultante, cuyos elementos son ahora menores o iguales a la unidad, la llamamos $\mathbf{X}_1$. Repetimos el proceso con el vector $\mathbf{AX}_1$ para obtener el vector escalado $\mathbf{X}_2$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3 Vuelta al ejemplo 2

Repita las iteraciones del ejemplo 2 utilizando los vectores escalados.

Solución A partir de $\mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ definimos

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3333 \end{pmatrix}.$$

A partir de $\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.3333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6666 \\ 2.6667 \end{pmatrix}$ definimos

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{4.6666}\begin{pmatrix} 4.6666 \\ 2.6667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5714 \end{pmatrix}.$$

Proseguimos de esta manera hasta construir la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4722 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4955 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5018 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix}$

En contraste con la tabla del ejemplo 2, a partir de esta tabla resulta evidente que los vectores se aproximan a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. ≡

Método de la deflación Después de que hemos encontrado el valor propio dominante λ_1 de una matriz **A**, podría aún ser necesario calcular los valores propios no dominantes. El procedimiento que se analizará a continuación es una modificación del método de potencias y se denomina **método de deflación**. Limitaremos el análisis al caso donde **A** es una matriz *simétrica*.

Suponga que λ_1 y $\mathbf{K}_1$ son, respectivamente, el valor propio dominante y un vector propio *normalizado* correspondiente* (es decir, $\|\mathbf{K}_1\| = 1$) de una matriz simétrica **A**. Además, suponga que los valores propios de **A** son tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Puede demostrarse que la matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{K}_1\mathbf{K}_1^T \tag{10}$$

tiene valores propios $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ y que los vectores propios de **B** son también los vectores propios de **A**. Observe que λ_2 es ahora el valor propio dominante de **B**. Aplicamos el método de las potencias a **B** para aproximar λ_2 y un vector propio correspondiente.

EJEMPLO 4 Empleo del método de deflación

Utilice el método de deflación para aproximar los valores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución Comenzamos utilizando el método de las potencias con escalamiento a fin de encontrar el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de **A**. Seleccionando $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, podemos observar que

* Consulte el ejemplo 3 de la sección 7.10.

$$\mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{por lo que} \qquad \mathbf{X}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{por lo que} \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{2.5}\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores escalados $\mathbf{X}_3$ a $\mathbf{X}_{10}$ aparecen en la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ -0.0667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.8837 \\ 0.0698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9134 \\ 1 \\ -0.0394 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9440 \\ 0.0293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9614 \\ 1 \\ -0.0188 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9744 \\ 0.0129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9828 \\ 1 \\ -0.0086 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9885 \\ 0.0058 \end{pmatrix}$

Utilizamos $\mathbf{X}_{10}$ y (8) para encontrar que

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{AX}_{10} \cdot \mathbf{X}_{10}}{\mathbf{X}_{10} \cdot \mathbf{X}_{10}} = 2.9997.$$

Al parecer el valor propio dominante y un vector propio correspondiente son $\lambda_1 = 3$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Nuestra siguiente tarea es construir la matriz $\mathbf{B}$ definida por (10). Con $\|\mathbf{K}\| = \sqrt{2}$, el vector propio normalizado es $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizaremos el método de las potencias con escalamiento para calcular el valor propio dominante de $\mathbf{B}$. Con $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de nuevo, los resultados se despliegan en la tabla siguiente:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.6667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8333 \\ -0.8333 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.9091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9545 \\ -0.9545 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.9767 \end{pmatrix}$

Utilizamos $\mathbf{X}_7$ y (8), y encontramos

$$\lambda_2 \approx \frac{\mathbf{AX}_7 \cdot \mathbf{X}_7}{\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7} = -1.9996.$$

A partir de estos cálculos, parece evidente que el valor propio dominante **B** y un vector propio correspondiente son $\lambda_2 = -2$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular el último valor propio de **A**, repetimos el proceso de deflación para encontrar el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de la matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \lambda_2\mathbf{K}_2\mathbf{K}_2^T = \begin{pmatrix} 0.1667 & -0.1667 & -0.3333 \\ -0.1667 & 0.1667 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

donde hemos utilizado $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Se invita al estudiante a comprobar que $\lambda_3 = 1$. ≡

De alguna forma, el ejemplo 5 es artificial puesto que los valores propios de una matriz no necesitan ser números "agradables" como 3, -2 y 1. Además, utilizamos los valores exactos de los valores propios dominantes λ_1 y λ_2 en la formación de las matrices **B** y **C**. Desde luego, en la práctica, debemos conformarnos con trabajar con aproximaciones del valor propio dominante λ_1 y un vector propio correspondiente $\mathbf{K}_1$ dominante normalizado de **A**. Si estas aproximaciones se utilizan en (10) se genera un error en el cálculo de la matriz **B**, por lo que más errores pueden generarse en el cálculo de su valor propio dominante λ_2 y el vector propio dominante $\mathbf{K}_2$. Si λ_2 y $\mathbf{K}_2$ se utilizan para construir la matriz **C**, parece razonable concluir que los errores se están agravando. En otras palabras, el método de deflación puede volverse demasiado impreciso a medida que se calculen más valores propios.

Método de la potencia inversa En algunos problemas sobre aplicaciones, estamos más interesados en aproximar el valor propio de una matriz **A** con un valor absoluto más pequeño que el valor propio dominante. Si **A** es no singular, entonces los valores propios de **A** son diferentes de cero (demuestre esto), y si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de **A**, entonces $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, ..., 1/\lambda_n$ son los valores propios de $\mathbf{A}^{-1}$. Esto último puede observarse multiplicando la ecuación $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$, $\lambda \neq 0$, por $\mathbf{A}^{-1}$ y $1/\lambda$ para obtener $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K} = (1/\lambda)\mathbf{K}$. Ahora, si los valores propios de **A** pudieran agruparse en el orden

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|,$$

entonces podemos observar que $1/\lambda_n$ es el valor propio dominante de $\mathbf{A}^{-1}$. Aplicando el método de las potencias a $\mathbf{A}^{-1}$, aproximamos el valor propio de magnitud más grande y, tomando su recíproco, calculamos el valor propio de **A** de menor magnitud. A esto se le conoce como el **método de la potencia inversa**. Consulte los problemas del 11 al 13 dados en la sección de ejercicios 7.11.

7.11 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

***Para el profesor y el estudiante*:** En la resolución de los problemas siguientes sería de utilidad emplear una calculadora con capacidad para trabajar con matrices o un sistema asistido por computadora (CAS).

Cada matriz de los problemas 1 a 10 tiene un valor propio dominante.

En los problemas 1 y 2, utilice el método de las potencias ilustrado en el ejemplo 3 para encontrar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio dominante de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

En los problemas del 3 al 6, utilice el método de las potencias con escalamiento para encontrar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio de la matriz dada.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas del 7 al 10, utilice el método de deflación para calcular los valores propios de la matriz dada.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 y 12, aplique el método de la potencia inversa para calcular el valor propio de menor magnitud de la matriz dada.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.4 & -0.1 \end{pmatrix}$

13. En el ejemplo 3 de la sección 3.9 estudiamos que la curva de deflexión de una columna delgada que se encuentra bajo una carga aplicada P está definida por el problema de valor en la frontera

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

En este problema demostramos cómo aplicar las técnicas matriciales para calcular la carga crítica más pequeña.

Dividamos el intervalo $[0, L]$ en n subintervalos de longitud $h = L/n$, y sea $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Para valores pequeños de h, se puede deducir de (6) de la sección 6.5 que

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

donde $y_i = y(x_i)$.

a) Demuestre que la ecuación diferencial puede reemplazarse por la ecuación en diferencias

$$EI(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + Ph^2y_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

b) Demuestre que para $n = 4$ la ecuación en diferencias del inciso *a*) da como resultado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{16EI}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Observe que este sistema tiene la forma del problema del valor propio $\mathbf{AY} = \lambda\mathbf{Y}$, donde $\lambda = PL^2/16EI$.

c) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

d) Utilice el método de la potencia inversa para calcular, aproximado a dos decimales, el valor propio de **A** de menor magnitud.

e) Con el resultado del inciso *d*), encuentre la carga crítica menor aproximada. Compare su respuesta con la proporcionada en la sección 3.9.

14. Suponga que la columna del problema 13 se hace más estrecha por lo que el momento de inercia de una sección transversal I varía linealmente desde $I(0) = I_0 = 0.002$ hasta $I(L) = I_L = 0.001$.

a) Utilice la ecuación en diferencias del inciso *a*) del problema 13 con $n = 4$ para establecer un sistema de ecuaciones análogo al que se propuso en el inciso *b*).

b) Proceda igual que en el problema 13 para calcular una aproximación a la carga crítica más pequeña.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

15. En la sección 7.9 estudiamos cómo calcular una potencia $\mathbf{A}^m$ de una matriz **A** de $n \times n$. Consulte la documentación del sistema asistido por computadora que tenga a la mano para encontrar el comando que calcula la potencia $\mathbf{A}^m$. (En *Mathematica*, el comando es **MatrixPower[A, m]**.) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene un valor propio dominante.

a) Utilice un CAS para calcular $\mathbf{A}^{10}$.

b) Ahora utilice (2), $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$, con $m = 10$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para calcular $\mathbf{X}_{10}$. Calcule igual para $\mathbf{X}_{12}$. Después proceda igual que en (9) para calcular el vector propio dominante aproximado **K**.

c) Si **K** es un vector propio de **A**, entonces $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. Utilice esta definición junto con el resultado del inciso *b*) para encontrar el valor propio dominante.

7.12 Diagonalización

Introducción En el capítulo 8 observaremos que los valores propios, vectores propios, matrices ortogonales y el tema de esta sección, diagonalización, representan herramientas importantes para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La pregunta fundamental que consideraremos en esta sección es:

Para una matriz **A** *de* $n \times n$*, ¿podemos calcular una matriz no singular* **P** *de* $n \times n$ *tal que* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ *sea una matriz diagonal?*

Una notación especial Comenzamos con una notación abreviada para representar el producto de dos matrices de $n \times n$. Esta notación será de gran utilidad para demostrar el teorema principal de esta sección. Para efectos ilustrativos, suponga que **A** y **B** son matrices de 2×2. Por lo tanto,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

columna 1 columna 2

Si escribimos las columnas de la matriz **B** como los vectores $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$, entonces las columnas 1 y 2 del producto (1) pueden expresarse mediante los productos $\mathbf{AX}_1$ y $\mathbf{AX}_2$. Esto es,

$$\mathbf{AB} = (\underset{\text{columna 1}}{\mathbf{AX}_1} \quad \underset{\text{columna 2}}{\mathbf{AX}_2}).$$

En general, para dos matrices de $n \times n$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2 \ldots\ \mathbf{X}_n) = (\mathbf{AX}_1\ \mathbf{AX}_2 \ldots\ \mathbf{AX}_n), \tag{2}$$

donde $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, son las columnas de **B**.

Matriz diagonalizable Si pudiera encontrarse una matriz **P** no singular de $n \times n$ de tal forma que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ fuese una matriz diagonal, entonces podríamos decir que la matriz **A** de $n \times n$ puede ser **diagonalizada**, o que es **diagonalizable**, y que **P diagonaliza a A**.

Para descubrir cómo diagonalizar una matriz supongamos, con propósitos de estudio, que **A** es una matriz diagonalizable de 3×3. Entonces existe una matriz **P** no singular de 3×3 tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ o $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, donde **D** es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ expresan las columnas de **P**, entonces puede deducirse que a partir de (2) la ecuación $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ es la misma que

$$(\mathbf{AP}_1\ \ \mathbf{AP}_2\ \ \mathbf{AP}_3) = (d_{11}\mathbf{P}_1\ \ d_{22}\mathbf{P}_2\ \ d_{33}\mathbf{P}_3)$$

o

$$\mathbf{AP}_1 = d_{11}\mathbf{P}_1, \qquad \mathbf{AP}_2 = d_{22}\mathbf{P}_2, \qquad \mathbf{AP}_3 = d_{33}\mathbf{P}_3.$$

Sin embargo, en la definición 7.8.1 observamos que d_{11}, d_{22} y d_{33} son valores propios de **A** asociados con los vectores propios $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Estos vectores propios son linealmente independientes, puesto que supusimos una **P** no singular.

Ya hemos descubierto, en un caso particular, que si **A** es diagonalizable, entonces las columnas de la matriz **P** diagonalizadora constan de vectores propios linealmente independientes de **A**. Puesto que queremos diagonalizar una matriz, realmente nos interesa lo que respecta a la validez de la conversión del último enunciado. En otras palabras, si pudiéramos encontrar n vectores propios linealmente independientes de una matriz **A** de $n \times n$ y formar una matriz **P** de $n \times n$ cuyas columnas consistieran en estos vectores propios, entonces ¿**P** diagonalizaría a **A**? La respuesta es sí, y se demostrará con ayuda del teorema siguiente.

Teorema 7.12.1 Condición suficiente para la diagonalización

Si una matriz **A** de $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$, entonces **A** es diagonalizable.

DEMOSTRACIÓN

Demostraremos el teorema para el caso en que **A** es una matriz de 3×3. Sean $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ vectores propios linealmente independientes correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3; esto es,

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1, \qquad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{AK}_3 = \lambda_3\mathbf{K}_3. \tag{3}$$

En seguida construya la matriz **P** de 3×3 con los vectores columna $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$: $\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3)$. **P** es no singular ya que, por hipótesis, los vectores propios son linealmente independientes. A continuación, utilizando (2) y (3), podemos escribir el producto **AP** como

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= (\mathbf{AK}_1\ \mathbf{AK}_2\ \mathbf{AK}_3) = (\lambda_1\mathbf{K}_1\ \lambda_2\mathbf{K}_2\ \lambda_3\mathbf{K}_3)\\ &= (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \mathbf{PD}.\end{aligned}$$

Al multiplicar la última ecuación del lado izquierdo por $\mathbf{P}^{-1}$ nos da $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$. ≡

En la demostración del teorema 7.12.1 observe con mucho cuidado que los elementos de la matriz diagonalizada son los valores propios de **A**, y que el orden en que aparecen estos números en la diagonal de **D** corresponde al orden en que los vectores propios se utilizan como columnas de la matriz **P**.

En vista de la motivante discusión que precedió al teorema 7.12.1 podemos enunciar el resultado general:

Teorema 7.12.2 Criterio para la diagonalización

Una matriz **A** de $n \times n$ es diagonalizable si, y sólo si, **A** tiene n vectores propios linealmente independientes.

En la sección 7.8 pudimos observar que una matriz **A** de $n \times n$ tendrá n vectores propios linealmente independientes siempre que contenga n valores propios distintos.

Teorema 7.12.3 Condición suficiente para la diagonalización

Si una matriz **A** de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, es diagonalizable.

EJEMPLO 1 Diagonalización de una matriz

Si es posible, diagonalice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}$.

Solución Antes que nada, calculamos los valores propios de **A**. La ecuación característica es $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}-5-\lambda & 9\\ -6 & 10-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Puesto que los valores propios son diferentes, sabemos a partir del teorema 7.12.3 que **A** es diagonalizable.

Luego los vectores propios de **A** correspondientes a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ son, respectivamente,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Si utilizamos estos vectores como columnas, encontramos que la matriz no singular **P** que diagonaliza a **A** es

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2) = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Ahora

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix},$$

por lo que llevando a cabo las multiplicaciones obtenemos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$ ≡

En el ejemplo 1, si hubiéramos invertido las columnas de **P**, es decir, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, entonces la matriz diagonal hubiera sido $\mathbf{D} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 Diagonalización de una matriz

Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos en el ejemplo 2 de la sección 7.8 que los valores propios y los correspondientes vectores propios son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Debido a que los valores propios son diferentes, **A** es diagonalizable. Construimos la matriz

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\,\mathbf{K}_2\,\mathbf{K}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al igualar los valores propios con el orden en que aparecen los vectores propios en **P**, sabemos que la matriz diagonal será

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A partir de cualquiera de los métodos de la sección 7.6 encontramos que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

≡

La condición de que una matriz **A** de $n \times n$ tenga n valores propios distintos es suficiente, esto es, una garantía para que **A** sea diagonalizable. La condición de que haya n valores propios distintos no es una condición necesaria para la diagonalización de **A**. En otras palabras, si la matriz **A** no tiene n valores propios distintos, entonces podrá o no ser diagonalizable.

Una matriz con valores propios repetidos podría ser diagonalizable.

EJEMPLO 3 Una matriz que no es diagonalizable

En el ejemplo 3 de la sección 7.8 observamos que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ tiene un valor propio repetido $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Asimismo, pudimos calcular un *solo* vector propio $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Concluimos a partir del teorema 7.12.2 que **A** no es diagonalizable. ≡

EJEMPLO 4 Valores propios repetidos pero diagonalizables

Los valores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Para $\lambda_1 = -1$ obtenemos $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para el valor propio repetido $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{\text{operaciones con renglones}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la última matriz podemos observar que $k_1 - k_2 = 0$. Puesto que k_3 no se puede determinar a partir de la última matriz, podemos seleccionar un valor arbitrario. La alternativa $k_2 = 1$ nos da $k_1 = 1$. Si después seleccionamos $k_3 = 0$ obtenemos el vector propio

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La elección alternativa $k_2 = 0$ nos da $k_1 = 0$. Si $k_3 = 1$ obtenemos otro vector propio correspondiente a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que los vectores propios $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ son linealmente independientes, una matriz que diagonaliza a **A** es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igualar los valores propios con los vectores propios en **P**, tenemos que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

■ **Matrices simétricas** Una matriz simétrica **A** de $n \times n$ con elementos reales siempre se puede diagonalizar. Lo anterior es una consecuencia del hecho de que siempre podremos calcular n vectores propios linealmente independientes de dicha matriz. Además, puesto que podemos calcular n vectores propios mutuamente ortogonales, es posible usar una matriz ortogonal **P** para diagonalizar **A**. Se dice que una matriz simétrica es **diagonalizable ortogonalmente**.

Teorema 7.12.4 Criterio para la diagonalización ortogonal

Una matriz **A** de $n \times n$ puede ser diagonalizada ortogonalmente si, y sólo si, **A** es simétrica.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Se demostrará el inciso necesario (es decir, el inciso "sólo si") del teorema. Supongamos que una matriz **A** de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente. Entonces existe una matriz ortogonal **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ o $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Puesto que **P** es ortogonal, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ y, en consecuencia, $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$. Sin embargo, a partir de *i*) y *iii*) del teorema 7.1.2 y de que la matriz diagonal es simétrica, tenemos

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{PDP}^T)^T = (\mathbf{P}^T)^T\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{PDP}^T = \mathbf{A}.$$

Por lo tanto, **A** es simétrica. $\equiv$

EJEMPLO 5 Diagonalización de una matriz simétrica

Considere la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 4 de la sección 7.8 estudiamos que los valores propios y los correspondientes vectores propios son

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 8, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ son linealmente independientes; sin embargo, observe que no son mutuamente ortogonales ya que $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$, los vectores propios correspondientes al valor propio repetido $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$, no son ortogonales. Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ podemos calcular los vectores propios a partir del método de eliminación de Gauss-Jordan como

Consulte los *Comentarios* de esta sección.

$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones con renglones}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el cual implica que $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Debido a que las variables son arbitrarias, seleccionamos $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ para obtener $\mathbf{K}_2$, y $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ para obtener $\mathbf{K}_3$. De haber seleccionado $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ y, después, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$, obtendríamos, respectivamente, dos vectores propios ortogonales totalmente diferentes.

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, un nuevo conjunto de vectores propios mutuamente ortogonales es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos estos vectores, a su vez, por el recíproco de las normales $\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\mathrm{K}_2\| = \sqrt{6}$, y $\|\mathrm{K}_3\| = \sqrt{2}$, y obtenemos el conjunto ortonormal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

En seguida utilizamos estos vectores como columnas para construir una matriz ortogonal que diagonalice a $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de $\mathbf{A}$ correspondientes al orden en que aparecen los vectores propios en $\mathbf{P}$ es entonces

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior se demuestra a partir de

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

≡

Formas cuadráticas Se dice que una expresión algebraica de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 \tag{4}$$

está en **forma cuadrática**. Si permitimos que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces (4) puede escribirse como la matriz producto

$$\mathbf{X}^T\mathbf{AX} = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Observe que la matriz $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ es simétrica.

Es probable que en la materia de cálculo usted haya estudiado que una adecuada rotación de ejes nos permite eliminar el término xy de la ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Como lo ilustra el ejemplo siguiente, podemos eliminar el término xy mediante una matriz ortogonal y la diagonalización más que a través del uso de la trigonometría.

EJEMPLO 6 Identificación de una sección cónica

Identificar la sección cónica cuya ecuación es $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$.

Solución A partir de (5) podemos escribir la ecuación dada como

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{o} \quad \mathbf{X}^T\mathbf{AX} = 1, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Se demuestra que los valores propios y los correspondientes vectores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son ortogonales. Además, $\|K_1\| = \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{5}$, por lo que los vectores

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

son ortonormales. De aquí que la matriz,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. Si definimos el cambio de variables $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ donde $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ entonces la forma cuadrática $2x^2 + 4xy - y^2$ puede escribirse como

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' = (\mathbf{X}')^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{X}'.$$

Puesto que **P** diagonaliza ortogonalmente a la matriz simétrica **A**, la última ecuación es igual a

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{D}\mathbf{X}'. \tag{7}$$

Utilizamos (7) para observar que (6) se convierte en

$$(X \quad Y)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{o} \quad -2X^2 + 3Y^2 = 1.$$

Esta última ecuación se conoce como la forma estándar de una hipérbola. Las coordenadas xy de los vectores propios son $(1, -2)$ y $(2, 1)$. Utilizando la sustitución $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ en la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{P}^T\mathbf{X}$, encontramos que las coordenadas XY de estos dos puntos son $(\sqrt{5}, 0)$ y $(0, \sqrt{5})$, respectivamente. A partir de lo anterior, concluimos que los ejes X y Y son como se muestra en la **FIGURA 7.12.1**. Los vectores propios, en color negro en la figura, se muestran a lo largo de los nuevos ejes. Los ejes X y Y se llaman **ejes principales** de la cónica. ≡

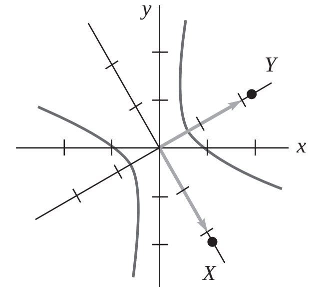


FIGURA 7.12.1 Ejes X y Y del ejemplo 6

Comentarios

La matriz **A** del ejemplo 5 es simétrica y, como tal, los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios son ortogonales. En la tercera línea del ejemplo, observe que $\mathbf{K}_1$, un vector propio para $\lambda_1 = 11$, es ortogonal a $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$. Los vectores propios $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondientes a $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ no son ortogonales. Como alternativa en la búsqueda de vectores propios ortogonales para este valor propio repetido mediante la aplicación, por segunda vez, del método de eliminación de Gauss-Jordan, podemos simplemente aplicar el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt y transformar el conjunto $\{\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3\}$ en un conjunto ortogonal. Consulte el ejemplo 4 de la sección 7.10.

7.12 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas del 1 al 20, determine si la matriz **A** dada es diagonalizable. Si es así, encuentre la matriz **P** que diagonaliza a **A** y la matriz diagonal **D** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -8 & -10 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas del 21 al 30, la matriz dada **A** es simétrica. Encuentre una matriz ortogonal **P** que diagonalice a **A** y la matriz diagonal **D** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T\mathbf{AP}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 8 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas del 31 al 34, utilice el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 6 para identificar la sección cónica dada. Grafique.

31. $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 24$
32. $13x^2 - 10xy + 13y^2 = 288$
33. $-3x^2 + 8xy + 3y^2 = 20$
34. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 3x + 4y = 0$

35. Encuentre una matriz **A** de 2×2 que tenga valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ y vectores propios correspondientes

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

36. Encuentre una matriz simétrica de 3×3 que tenga los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$ y vectores propios correspondientes

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

37. Si **A** es una matriz diagonalizable de $n \times n$, entonces $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, donde **D** es una matriz diagonal. Demuestre que si m es un entero positivo, entonces $\mathbf{A}^m = \mathbf{PD}^m\mathbf{P}^{-1}$.

38. La m-ésima potencia de una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es $$\mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} a_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^m \end{pmatrix}.$$

Utilice este resultado para calcular

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^4.$$

En los problemas 39 y 40, utilice los resultados de los problemas 37 y 38 para calcular la potencia indicada de la matriz que se proporciona.

39. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^5$

40. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{10}$

7.13 Criptografía

Introducción La palabra *criptografía* es una combinación de dos palabras griegas: *crypto*, que significa "oculto" o "secreto", y *grapho*, "escritura". La criptografía es entonces el estudio de la elaboración de "escritos secretos" o **códigos**.

En esta sección se considerará un sistema de codificación y descifrado de mensajes el cual requiere que tanto el emisor como el receptor del mensaje sepan:

- una regla de correspondencia específica entre un conjunto de símbolos (tales como letras del alfabeto y signos de puntuación a partir de los cuales se forman los mensajes) y un conjunto de enteros; y
- una matriz **A** *no singular* específica.

Codificación y descifrado Una correspondencia natural entre los primeros veintisiete números enteros no negativos y las letras del alfabeto y un espacio (para separar las palabras) está dada por

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
espacio	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

(1)

A partir de (1), el equivalente numérico del mensaje

SEND THE DOCUMENT TODAY

es 19 5 14 4 0 20 8 5 0 4 15 3 21 13 5 14 20 0 20 15 4 1 25. (2)

El emisor **codificará** el mensaje mediante la matriz no singular **A** y, como veremos más adelante, el receptor del mensaje codificado **descifrará** el mensaje por medio de la matriz (única) $\mathbf{A}^{-1}$. El mensaje numérico (2) está escrito ahora como una matriz. Puesto que hay 23 símbolos en el mensaje, necesitamos una matriz que pueda aceptar al menos 24 elementos (una matriz de $m \times n$ tiene mn elementos). Optamos por escribir (2) como la matriz de 3×8

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Observe que el último elemento (a_{38}) presente en la matriz **M** del mensaje simplemente se ha llenado con un espacio representado por el número 0. Desde luego, pudimos haber escrito (2) como una matriz de 6×4 o de 4×6; sin embargo, esto requeriría una gran matriz de codificación. Una matriz de 3×8 nos permite codificar el mensaje mediante una matriz de 3×3. El tamaño de las matrices utilizadas interesa cuando la codificación y el descifrado se efectúan a mano en lugar de hacerse por computadora.

Se selecciona la matriz de codificación **A**, o más bien se construye, de tal forma que

- **A** es no singular,
- **A** tiene solamente elementos enteros y
- $\mathbf{A}^{-1}$ tiene solamente elementos enteros.

El último criterio no es particularmente difícil de cumplir. Solamente necesitamos seleccionar los elementos enteros de **A** en tal forma que det $\mathbf{A} = \pm 1$. Para una matriz de 2×2 o de 3×3 podemos calcular entonces $\mathbf{A}^{-1}$ mediante las fórmulas (4) y (5) de la sección 7.6. Si **A** tiene elementos enteros, entonces todos los cofactores C_{11}, C_{12}, etc., son también enteros. A partir de este análisis seleccionamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Usted deberá comprobar que det $\mathbf{A} = -1$.

El mensaje original se codifica premultiplicando la matriz **M** del mensaje por **A**; es decir, el mensaje se envía como la matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{AM} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

El lector se podrá imaginar la dificultad que implica descifrar (5) sin conocer **A**. Sin embargo, el receptor del mensaje codificado **B** conoce **A** y a su inversa, por lo que el descifrado es el cálculo directo de la premultiplicación de **B** por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{AM} = \mathbf{B} \quad \text{implica} \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Para la matriz (4) calculamos a partir de la expresión (5) dada en la sección 7.5 que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el mensaje descifrado es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

o

$$19\ 5\ 14\ 4\ 0\ 20\ 8\ 5\ 0\ 4\ 15\ 3\ 21\ 13\ 5\ 14\ 20\ 0\ 20\ 15\ 4\ 1\ 25\ 0.$$

Sin embargo, también mediante el conocimiento de la correspondencia original (1), el receptor traduce los números en

SEND_THE_DOCUMENT_TODAY

donde hemos indicado los espacios en blanco mediante líneas.

Vale la pena hacer algunas observaciones. La correspondencia o mapeo (1) es una de las muchas correspondencias que pueden establecerse entre las letras del alfabeto (incluso podríamos incluir los símbolos de puntuación como el punto y la coma) y los números enteros. Mediante la utilización de las 26 letras del alfabeto y el espacio en blanco, ¡podemos establecer 27! de estas correspondencias. (¿Por qué?) Además, pudimos haber usado una matriz de 2×2 para codificar (2). El tamaño de la matriz **M** del mensaje habría sido entonces de al menos 2×12 con la finalidad de poder contener los 23 elementos del mensaje. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{AM} = \begin{pmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al utilizar $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenemos como antes

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}.$$

No existe una razón en particular por la que el mensaje numérico (2) tenga que fragmentarse en renglones (1×8 vectores) como en la matriz (3). De manera alterna, (2) podría haberse fragmentado en columnas (vectores de 3×1) como se muestra en la matriz

$$\begin{pmatrix} 19 & 4 & 8 & 4 & 21 & 14 & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & 13 & 20 & 15 & 25 \\ 14 & 20 & 0 & 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, sería recomendable enviar el mensaje codificado en forma de letras del alfabeto más que como números. En el problema 13 de los ejercicios 7.13 estudiaremos la forma de transmitir el mensaje SEND THE DOCUMENT TODAY codificado como

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

7.13 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas del 1 al 6, utilice la matriz **A** y la correspondencia (1) para codificar el mensaje dado. Verifique su trabajo descifrando el mensaje codificado.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; SEND HELP

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; THE MONEY IS HERE

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; PHONE HOME

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; MADAME X HAS THE PLANS

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; GO NORTH ON MAIN ST

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; DR JOHN IS THE SPY

En los problemas del 7 al 10, utilice la matriz **A** y la correspondencia (1) para descifrar el mensaje dado.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 152 & 184 & 171 & 86 & 212 \\ 95 & 116 & 107 & 56 & 133 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 46 & -7 & -13 & 22 & -18 & 1 & 10 \\ 23 & -15 & -14 & 2 & -18 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 31 & 21 & 21 & 22 & 20 & 9 \\ 19 & 0 & 9 & 13 & 16 & 15 \\ 13 & 1 & 20 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 36 & 32 & 28 & 61 & 26 & 56 & 10 & 12 \\ -9 & -2 & -18 & -1 & -18 & -25 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 23 & 41 & 26 & 43 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

11. Utilicemos la correspondencia (1) para codificar el mensaje siguiente empleando una matriz de 2×2:

$$\begin{pmatrix} 17 & 16 & 18 & 5 & 34 & 0 & 34 & 20 & 9 & 5 & 25 \\ -30 & -31 & -32 & -10 & -59 & 0 & -54 & -35 & -13 & -6 & -50 \end{pmatrix}$$

Descifre el mensaje si las dos primeras letras son DA y las dos últimas son AY.

12. ***a***) Utilizando la correspondencia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
j	k	l	n	m	s	t	u	w	x	g	h	i	o	p	q	r	v	y	z	a	b	c	d	e	f	espacio

encuentre el valor numérico del mensaje

BUY ALL AVAILABLE STOCK AT MARKET

b) Codifique el mensaje *posmultiplicando* la matriz **M** del mensaje por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Verifique su trabajo descifrando el mensaje codificado en el inciso *b*).

13. Con relación a las matrices **A** y **B** que se definieron en (4) y (5), respectivamente.

a) Reescriba **B** como **B′** utilizando enteros módulo 27.*

b) Compruebe que el mensaje codificado que se vaya a enviar como letras sea

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL

c) Descifre el mensaje codificado calculando $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}'$ y reescribiendo el resultado mediante el uso de enteros módulo 27.

---

* Para los enteros a y b, escribimos $a = b$ (mod 27) si b es el residuo ($0 \le b < 27$) cuando a se divide entre 27. Por ejemplo, $33 = 6$ (mod 27), $28 = 1$ (mod 27), y así por el estilo. Los enteros negativos se manejan de la manera siguiente. Si $27 = 0$ (mod 27), entonces, por ejemplo, $25 + 2 = 0$ (mod 27) de tal forma que $-25 = 2$ (mod 27) y $-2 = 25$ (mod 27). Asimismo, $-30 = 24$ (mod 27), puesto que $30 + 24$ ($= 54$) $= 0$ (mod 27).

7.14 Código corrector de errores

Introducción En contraste con la sección anterior, no existe ninguna connotación de hermetismo en la palabra "código" tal como se utiliza en esta sección. Vamos a estudiar brevemente el concepto de comunicaciones digitales, esto es, las comunicaciones que hay entre un satélite y una computadora. Como consecuencia, solamente trataremos con matrices cuyos elementos sean dígitos binarios, es decir, ceros y unos. Al sumar o multiplicar dichas matrices, utilizaremos **aritmética módulo 2**. Esta aritmética está definida mediante las tablas de suma y multiplicación

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Propiedades fundamentales como la conmutativa y la asociativa son válidas para este sistema. La única excepción significativa en este caso es que $1 + 1 = 0$.

Secuencias binarias En las comunicaciones digitales, los **mensajes** o **palabras** están compuestos por *n*-uplas binarias, es decir, *n*-uplas constituidas únicamente por ceros y unos, o **bits**. Se dice que una palabra de *n* bits es una **secuencia** binaria de **longitud *n***.

EJEMPLO 1 Secuencias binarias

a) Las cuádruplas ordenadas (0, 1, 0, 1) constituyen una palabra de 4 bits, o una secuencia de longitud cuatro.

b) La representación binaria (es decir, en base 2) del número 39 es 1 0 0 1 1 1, o como séxtuplas (1, 0, 0, 1, 1, 1).

c) La palabra ASCII* correspondiente a la letra Z es la secuencia de longitud 8: (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0). ≡

Por conveniencia, una palabra de longitud *n* se escribirá como una matriz de $1 \times n$, esto es, como un vector renglón. Por ejemplo, la palabra de 4 bits del ejemplo 1 se escribiría como la matriz de 1×4, $\mathbf{W} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$.

Códigos Con la frase **codificar** un mensaje queremos explicitar el proceso mediante el cual transformamos una palabra **W** de longitud *n* en otra palabra **C** de longitud $n + m$ agregando *m* bits a **W**, llamados **bits de verificación de paridad**. Se dice que una palabra codificada es una **palabra código**. Mediante el **descifrado** de un mensaje recibido queremos explicitar otro proceso que proporciona ya sea otro mensaje descifrado o una indicación de que ha ocurrido un error durante la transmisión. Se le llama **código** a un esquema de codificación y descifrado.

Uno de los códigos más sencillos que existen es el código de verificación de paridad, en el cual una palabra se codifica de acuerdo con la regla:

Si el número de unos localizados en la palabra es
- par: Agregue un 0 a la palabra.
- impar: Agregue un 1 a la palabra. (1)

La palabra *paridad* se refiere a si el número de unos que hay en una palabra es par o impar. La regla de codificación proporcionada en (1) permite que la paridad de la palabra código sea siempre par.

EJEMPLO 2 Codificación de palabras

Utilice el código de verificación de paridad para codificar las palabras
a) $\mathbf{W} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$ y ***b***) $\mathbf{W} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$.

Solución ***a***) Puesto que en **W** el número de unos es impar, agregamos el bit extra 1 al final de la palabra **W**. La palabra código es entonces $\mathbf{C} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$. ***b***) En este caso, el número de unos es par, por lo que el bit extra agregado a la palabra es 0. La palabra codificada es $\mathbf{C} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$. ≡

* Siglas de American Standard Code for Information Interchange (Código Estadounidense Estándar para Intercambio de Información).

En las comunicaciones digitales la palabra codificada **C** es la que se transmite. Sin embargo, debido a la presencia de algún tipo de interferencia o ruido en el canal de transmisión, pueden modificarse uno o más bits de **C**. Por lo tanto, el mensaje transmitido no siempre es el que se recibe. Consulte la **FIGURA 7.14.1**.

El código de verificación de paridad permite que al descifrar se detecten errores simples. Suponga que **R** es el mensaje recibido. Un error simple en **R** significa que un bit se ha modificado; ya sea que un cero se haya convertido en uno o viceversa. En cualquier caso, la paridad de la palabra **R** es impar.

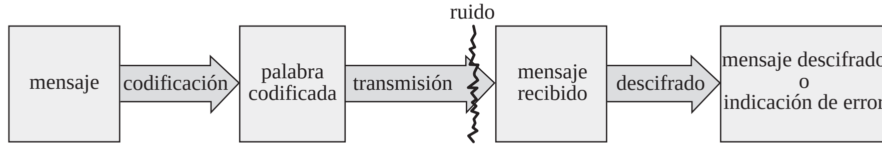


FIGURA 7.14.1 Los bits de una palabra codificada pueden sufrir modificaciones debido a interferencias

EJEMPLO 3 Descifrado de palabras

Utilice el código de verificación de paridad para descifrar las palabras
a) **R** = (1 1 0 0 1 0 1) y ***b***) **R** = (1 0 1 1 0 0 0).

Solución ***a***) La paridad de **R** es par. Eliminamos el último bit y hacemos que el mensaje descifrado sea (1 1 0 0 1 0). ***b***) La paridad de **R** es impar. El descifrado es simple: un error de paridad. ≡

Para algunos tipos de comunicación digital, como la comunicación interna con una computadora, se recomienda el código de verificación de paridad. Sin embargo, el ejemplo 2 indica claramente una desventaja importante de este código: si se presenta un error, no sabremos cómo corregirlo ya que no sabemos cuál es el bit incorrecto. Además, se pueden presentar múltiples errores en la transmisión. Si, digamos, dos unos fueron cambiados por ceros durante la transmisión, el mensaje recibido mantendría paridad par y el descifrado se efectuaría eliminando el último bit. En este caso, al menos uno de los bits del mensaje descifrado es erróneo.

Códigos Hamming El código de verificación de paridad es un ejemplo de un código de *detección de errores*, pero no de *corrección de errores*. En lo que resta de este estudio se considerará un código detector y corrector de errores que se llama **código Hamming (7, 4)**. Este código, uno de los códigos más ampliamente utilizados, fue inventado por el matemático Richard W. Hamming, de los Laboratorios Bell, en la década de 1950 y es un esquema de codificación y descifrado capaz de detectar la presencia de un solo error en un mensaje recibido, además puede proporcionar información acerca de qué bit debe corregirse. En el código (7, 4) el proceso de codificación consiste en transformar una palabra de 4 bits $\mathbf{W} = (w_1 \ \ w_2 \ \ w_3 \ \ w_4)$ en una palabra codificada de 7 bits

$$\mathbf{C} = (c_1 \quad c_2 \quad w_1 \quad c_3 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4),$$

donde c_1, c_2 y c_3 denotan los bits de paridad. (Las palabras mayores a cuatro bits pueden fragmentarse en secuencias de palabras de cuatro bits.)

Codificación En el código Hamming (7, 4) los bits de verificación de paridad c_1, c_2 y c_3 están definidos en términos de los bits de información w_1, w_2, w_3 y w_4:

$$\begin{aligned} c_1 &= w_1 + w_2 + w_4 \\ c_2 &= w_1 + w_3 + w_4 \\ c_3 &= w_2 + w_3 + w_4, \end{aligned} \tag{2}$$

donde la aritmética se lleva a cabo en módulo 2. Utilizando matrices podemos escribir (2) como el producto

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

EJEMPLO 4 Codificación de una palabra

Codifique la palabra $\mathbf{W} = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$.

Solución A partir de (3) tenemos, con $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ y $w_4 = 1$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, por lo que la palabra codificada correspondiente es $\mathbf{C} = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$. ≡

Antes de entrar en los detalles acerca de cómo descifrar un mensaje, necesitamos presentar una matriz especial. Primero observamos que en la aritmética módulo 2 no existen números negativos; el inverso aditivo de 1 es 1 no -1. Teniendo esto presente, podemos escribir el sistema (2) en la forma equivalente

$$\begin{aligned} c_3 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_2 + w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_1 + w_1 + w_2 + w_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

A estas expresiones se les llama **ecuaciones para la verificación de paridad**. Esto significa que cada c_i es una verificación de paridad de tres de los dígitos de la palabra original. Por ejemplo, si el número de unos ubicados en los tres dígitos w_2, w_3 y w_4 es impar, entonces, de la misma forma que con el código de verificación de paridad estudiado antes, podríamos considerar $c_1 = 1$, y así sucesivamente. Como una matriz producto, (4) puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ w_1 \\ c_3 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La matriz de 3×7 en (5),

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de verificación de paridad**. Hemos demostrado en (5) que los dígitos binarios de una palabra código $\mathbf{C} = (c_1 \quad c_2 \quad w_1 \quad c_3 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4)$ satisfacen la ecuación matricial

$$\mathbf{HC}^T = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Una inspección más detallada de **H** muestra algo sorprendente: las columnas de **H**, de izquierda a derecha, son los números 1 a 7 escritos en binario. Por ejemplo, escribiendo la columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como 1 1 0, podemos reconocer la representación binaria del número 6.

Sea **R** una matriz de 1×7 que representa el mensaje recibido. Puesto que **H** es una matriz de 3×7 y $\mathbf{R}^T$ es una matriz de 7×1, el producto

$$\mathbf{S} = \mathbf{HR}^T \tag{7}$$

es una matriz de 3×1 llamada **síndrome** de **R**.

■ **Descifrado** Si el síndrome del mensaje recibido **R** es

$$\mathbf{S} = \mathbf{HR}^T = \mathbf{0},$$

entonces, en vista del resultado en (6), podemos concluir que **R** es una palabra código, y se supone que la transmisión es correcta con **R** igual al mensaje original codificado **C**. El descifrado del mensaje se logra eliminando simplemente los tres bits de verificación en **R**.

EJEMPLO 5 Síndromes

Calcule el síndrome de

a) $\mathbf{R} = (1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1)$ y ***b)*** $\mathbf{R} = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)$.

Solución ***a)*** A partir de (7) tenemos,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que **R** es la palabra código. Eliminando los bits de verificación en color de $(1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$, obtenemos el mensaje descifrado $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$.

b) A partir de (7), $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Puesto que $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, el mensaje recibido **R** no es la palabra código. ≡

Como se mencionó antes, el código Hamming (7, 4) nos permite detectar y también corregir un solo error en el mensaje **R**. Sea **C** una palabra código y sea $\mathbf{E} = (e_1 \, e_2 \, e_3 \, e_4 \, e_5 \, e_6 \, e_7)$ una palabra de ruido con un solo error que se suma a **C** durante su transmisión. Los elementos de **E** están definidos como

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{si el ruido cambia el } i\text{-ésimo bit} \\ 0, & \text{si el ruido no cambia el } i\text{-ésimo bit.} \end{cases}$$

El mensaje recibido es entonces $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{E}$. A partir de la propiedad $\mathbf{R}^T = \mathbf{C}^T + \mathbf{E}^T$ y de la ley distributiva, observamos que el síndrome de **R** es el mismo que el de **E**:

$$\mathbf{HR}^T = \mathbf{H}(\mathbf{C}^T + \mathbf{E}^T) = \mathbf{HC}^T + \mathbf{HE}^T = \mathbf{0} + \mathbf{HE}^T = \mathbf{HE}^T.$$

A partir de la definición de matriz suma, la expresión anterior representa un procedimiento directo para comprobar que el síndrome de **E**

$$\mathbf{HE}^T = \begin{pmatrix} e_4 + e_5 + e_6 + e_7 \\ e_2 + e_3 + e_6 + e_7 \\ e_1 + e_3 + e_5 + e_7 \end{pmatrix}$$

puede escribirse como la suma de vectores columna de **H** con los coeficientes de los símbolos que denotan los bits donde puede presentarse el error:

$$\mathbf{HE}^T = e_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + e_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + e_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + e_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + e_5\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + e_6\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + e_7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ahora considere el conjunto de vectores columna de 3×1 cuyos elementos son dígitos binarios. Puesto que sólo existen dos formas de seleccionar cada uno de los tres elementos, tenemos $2^3 = 8$ de tales vectores. Los siete vectores *diferentes de cero* son las columnas de **H** o los vectores columna desplegados en (8). El síndrome **S** del mensaje recibido **R** es un vector columna de 3×1 con elementos binarios; de aquí que, si $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, entonces **S** debe ser una de las columnas de **H**. Si **R** contiene un solo error, entonces $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ y, puesto que todos los elementos de **E** son cero excepto un elemento, podemos observar a partir de (8) que, en sí mismo, el síndrome indica qué bit es el erróneo. En la práctica no es necesario escribir (8); sólo calcule el síndrome **S** del mensaje recibido **R**. **S** es una columna de **H** y, en consecuencia, es el número binario de ese bit erróneo.

EJEMPLO 6 Descifrado de una palabra

En el inciso *b*) del ejemplo 5 pudimos observar que el síndrome del mensaje $\mathbf{R} = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$ fue $\mathbf{S} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Esto es la tercera columna de **H** (o la representación binaria del número 3) y así concluimos que el tercer bit de **R** es erróneo. Cambiando el cero por un uno obtenemos la palabra código $\mathbf{C} = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$. De modo que eliminando de **C** los bits primero, segundo y cuarto encontremos el mensaje descifrado $(1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$. ≡

En estas breves descripciones de criptografía y teoría de la codificación todavía ni siquiera hemos comenzado a rascar en la superficie de estos temas tan interesantes. Nuestro objetivo fue muy modesto: mostrar cómo la teoría de matrices es una herramienta de trabajo natural en varias áreas de las matemáticas y de las ciencias de la computación.

Comentarios

El código Hamming (7, 4) puede detectar sin corregir cualquier par de errores. Los alumnos interesados en saber cómo se lleva a cabo esto o en detalles adicionales de la teoría de la codificación deberán consultar su biblioteca para poder acceder a textos más especializados.

7.14 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 6, codifique la palabra dada utilizando el código de verificación de paridad.

1. (0 1 1) **2.** (1 1 1)
3. (0 0 0 1) **4.** (1 0 1 0)
5. (1 0 1 0 1 0 0) **6.** (0 1 1 0 1 0 1)

En los problemas 7 a 12, descifre el mensaje dado utilizando el código de verificación de paridad.

7. (1 0 0 1) **8.** (0 0 1 1)
9. (1 1 1 0 0) **10.** (1 0 1 0 0)
11. (1 0 0 1 1 1) **12.** (1 0 0 1 0 1)

En los problemas 13 a 18, codifique la palabra dada utilizando el código Hamming (7, 4).

13. (1 1 1 0) **14.** (0 0 1 1)
15. (0 1 0 1) **16.** (0 0 0 1)
17. (0 1 1 0) **18.** (1 1 0 0)

En los problemas 19 a 28, determine si el mensaje dado es una palabra código cifrada en código Hamming (7, 4). Si es así, descífrelo; de lo contrario, corrija el único error y descifre el mensaje corregido.

19. (0 0 0 0 0 0 0) **20.** (1 1 0 0 0 0 0)
21. (1 1 0 1 1 0 1) **22.** (0 1 0 1 0 1 0)
23. (1 1 1 1 1 1 1) **24.** (1 1 0 0 1 1 0)
25. (0 1 1 1 0 0 1) **26.** (1 0 0 1 0 0 1)
27. (1 0 1 1 0 1 1) **28.** (0 0 1 0 0 1 1)

29. ***a***) Determine el número total de séptuplas con elementos binarios.
b) ¿Cuántas palabras código de séptuplas hay en el código Hamming (7, 4)?
c) Elabore una lista de todas las palabras código incluidas en el código Hamming (7, 4).

30. ***a***) En el código Hamming (8, 4) una palabra

$$\mathbf{W} = (w_1\ w_2\ w_3\ w_4)$$

de longitud 4 se transforma en una palabra código de longitud 8:

$$\mathbf{C} = (c_1\ c_2\ c_3\ w_1\ c_4\ w_2\ w_3\ w_4),$$

donde las ecuaciones de verificación de paridad son

$$\begin{aligned} c_4 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_3 + w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_2 + w_1 + w_2 + w_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + w_1 + c_4 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0. \end{aligned}$$

Codifique la palabra (0 1 1 0).

b) A partir del sistema dado en el inciso *a*), determine la matriz de verificación de paridad **H**.

c) Utilizando la matriz **H** en el inciso *b*), calcule el síndrome **S** del mensaje recibido

$$\mathbf{R} = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0).$$

7.15 Método de los mínimos cuadrados

Introducción En la realización de experimentos, a menudo tabulamos datos en la forma de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde cada x_i es diferente. Dados los datos, frecuentemente deseamos poder extrapolar o predecir y a partir de x calculando un modelo matemático, es decir, una función que se aproxime o "ajuste" a los datos. En otras palabras, queremos encontrar una función $f(x)$ tal que,

$$f(x_1) \approx y_1, \quad f(x_2) \approx y_2, \quad \ldots, \quad f(x_n) \approx y_n.$$

Sin embargo, es natural que no solamente deseemos *cualquier* función, sino una función que se ajuste a los datos tanto como sea posible.

En el análisis presentado en seguida, concentraremos nuestra atención sobre el problema de encontrar un polinomio lineal $f(x) = ax + b$ o línea recta que "se ajuste de la mejor manera" a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$. El procedimiento para calcular esta función lineal se conoce como el **método de los mínimos cuadrados**.

Comencemos con un ejemplo.

EJEMPLO 1 Línea de mejor ajuste

Considere los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la **FIGURA 7.15.1*a***). De manera visual, y por el hecho de que la línea $y = x + 1$, mostrada en la figura 7.15.1*b*), pasa a través de dos de los puntos de datos, podemos considerar esta línea como la que mejor se ajusta a los datos. ≡

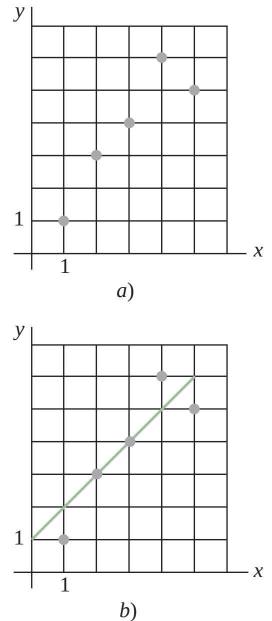


FIGURA 7.15.1 Datos y línea en el ejemplo 1

Es evidente que necesitamos algo mejor que la estimación visual para determinar la función lineal $y = f(x)$, como se hizo en el último ejemplo. Necesitamos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como a menudo se conoce, "la bondad del ajuste".

Si tratamos de comparar los puntos de datos con la función $f(x) = ax + b$, entonces queremos encontrar los valores de a y b que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= ax_n + b \end{aligned} \tag{1}$$

o

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} \quad \text{donde} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Por desgracia, (1) es un sistema sobredeterminado y, al menos que los puntos de datos estén en la misma línea, no tiene solución. Por lo tanto, debemos conformarnos con encontrar un vector $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de tal manera que el lado derecho **AX** se encuentre en la proximidad del lado izquierdo **Y**.

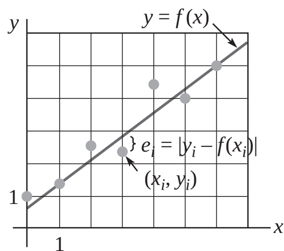


FIGURA 7.15.2 e_i es el error producido al aproximar y_i a $f(x_i)$

Línea de los mínimos cuadrados Si los puntos de datos son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, entonces una manera de determinar qué tan bien se ajusta la función lineal $f(x) = ax + b$ a los datos es medir las distancias verticales que hay entre los puntos y las gráficas de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos pensar de cada e_i como el error producido al aproximar el valor del dato y_i mediante el valor funcional $f(x_i)$. Observe la **FIGURA 7.15.2**. De manera intuitiva, sabemos que la función f se ajustará bien a los datos si la suma de todos los valores e_i es mínima. En realidad, un método más adecuado para resolver el problema es encontrar una función lineal f de tal forma que la suma de los *cuadrados* de todos los valores e_i sea mínima. Definamos que la solución del sistema (1) sean aquellos coeficientes a y b que minimicen la expresión $E = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$, es decir,

$$\begin{aligned} E &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \end{aligned}$$

o

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]^2. \tag{3}$$

La expresión E se llama **suma de los errores cuadrados**. La línea $y = ax + b$ que minimiza la suma de los errores cuadrados (3) es, por definición, la **línea de mejor ajuste** y se denomina **línea de los mínimos cuadrados** de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

El problema aún prevalece: ¿cómo encontramos los valores de a y b de tal forma que el valor de (3) sea mínimo? La respuesta puede encontrarse en el cálculo. Si pensamos en (3) como una función de dos variables a y b, entonces para encontrar el valor mínimo de E establecemos la primera derivada parcial como igual a cero:

La derivación parcial se revisa en la sección 19.5.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

A su vez, las últimas dos condiciones nos dan,

$$\begin{aligned} -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - ax_i - b] &= 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b] &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Expandimos las sumas y utilizamos $\sum_{i=1}^{n} b = nb$, para encontrar que el sistema (4) es igual a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + \qquad nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Aunque no se darán los detalles, los valores de a y b que satisfacen el sistema (5) nos dan el valor mínimo de E.

En términos de matrices, es posible demostrar que (5) es equivalente a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{X}$ se encuentran definidos en (2). Puesto que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times 2$ y $\mathbf{A}^T$ es una matriz de $2 \times n$, la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es de 2×2. Además, a menos que todos los puntos de datos se encuentren sobre la misma línea vertical, la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es no singular. Por lo tanto, (6) tiene la solución única

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}. \tag{7}$$

Decimos que $\mathbf{X}$ es la solución por mínimos cuadrados del sistema sobredeterminado (1).

EJEMPLO 2 Línea de mínimos cuadrados

Encuentre la línea de mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 1. Determine la suma de los errores cuadrados E para esta línea y para la expresada por medio de $y = x + 1$.

Solución Para la función $f(x) = ax + b$, los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) nos llevan al sistema sobredeterminado,

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 3 \\ 3a + b &= 4 \\ 4a + b &= 6 \\ 5a + b &= 5. \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, identificando

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo que (7) nos da

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución por mínimos cuadrados de (8) es $a = 1.1$ y $b = 0.5$, y la línea de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para esta línea, la suma de los errores cuadrados es

$$\begin{aligned} E &= [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2 \\ &= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7. \end{aligned}$$

Para la línea $y = x + 1$ estimada y que también pasa por dos de los puntos de datos, encontramos que $E = 3.0$.

Mediante comparación, la **FIGURA 7.15.3** muestra los puntos de datos, la línea $y = x + 1$, y la línea de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$. ≡

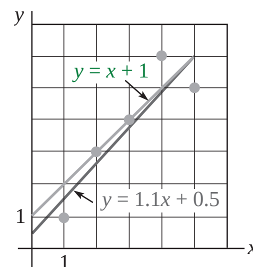


FIGURA 7.15.3 Línea de los mínimos cuadrados (inferior) del ejemplo 2

7.15 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 6, encuentre la línea de mínimos cuadrados para los datos que se proporcionan.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)

7. En un experimento, se encontró la correspondencia siguiente entre la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática v (en centistokes) de un aceite con cierto aditivo:

T	20	40	60	80	100	120
v	220	200	180	170	150	135

Encuentre la línea de mínimos cuadrados $v = aT + b$. Utilice esta línea para calcular la viscosidad del aceite a $T = 140$ y $T = 160$.

8. En un experimento se encontró la correspondencia siguiente entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en MΩ):

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

Encuentre la línea de mínimos cuadrados $R = aT + b$. Utilice esta línea para calcular la resistencia a $T = 700$.

7.16 Modelos discretos de compartimiento

Introducción La construcción de un modelo matemático que describe el número de libras de sal que hay en dos tanques conectados donde fluye salmuera hacia dentro y fuera de los tanques es un ejemplo de **análisis compartimental**. Es posible comprobar mediante el análisis, que el modelo compartimental es un sistema de ecuaciones diferenciales. En esta sección presentamos la noción de un modelo matemático discreto.

El modelo general de dos compartimientos Suponga que fluye material entre dos tanques con volúmenes V_1 y V_2. En el diagrama que se muestra en la **FIGURA 7.16.1**, F_{01}, F_{12}, F_{21}, F_{10} y F_{20} representan velocidades de flujo. Observe que el símbolo con doble subíndice F_{ij} representa la velocidad de flujo desde el tanque i al tanque j. Después, suponga que una segunda sustancia, llamada **rastreador**, se inyecta al compartimiento 1 a una velocidad $I(t)$ conocida. Supondremos que el rastreador está perfectamente mezclado en ambos compartimientos en todo momento t. Si $x(t)$ expresa la cantidad de rastreador que hay en el compartimiento 1 y $y(t)$ es la cantidad correspondiente en el compartimiento 2, entonces las concentraciones son $c_1(t) = x(t)/V_1$ y $c_2(t) = y(t)/V_2$, respectivamente. Se puede concluir que el modelo general de dos compartimientos es

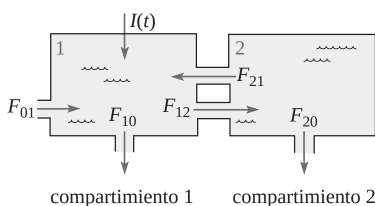


FIGURA 7.16.1 Material que fluye entre dos compartimientos a velocidades específicas

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(F_{12} + F_{10})c_1(t) + F_{21}c_2(t) + I(t)\\ \frac{dy}{dt} &= F_{21}c_1(t) - (F_{21} + F_{20})c_2(t).\end{aligned} \tag{1}$$

El modelo presentado en (1) mantiene un registro de la cantidad de rastreador que fluye entre los compartimientos. El material consiste en, digamos, un fluido y un rastreador que se *intercambian de manera continua*. Presentamos a continuación un modelo que mantiene un registro del contenido de los compartimientos cada Δt unidades de tiempo y supone que el sistema cambia solamente en los tiempos $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t, \ldots$ Desde luego, seleccionando un valor para Δt muy pequeño, podemos aproximar el caso continuo.

Modelos discretos compartimentales En la construcción de un modelo compartimental de un sistema físico, conceptualmente separamos el sistema en un número diferente de pequeños componentes entre los cuales se transporta material. No es necesario que los compartimientos sean diferentes espacialmente, sino que se puedan distinguir con respecto a algún criterio. A continuación se muestran algunos ejemplos:

- Lluvia ácida (que contenga estroncio 90, por ejemplo) está depositada sobre pastizales. Los compartimientos pueden ser pastos, suelo, corrientes y basura.
- Al estudiar el flujo de energía que fluye a través de un ecosistema acuático, podemos separar el sistema en fitoplancton, zooplancton, depredadores de plancton, algas marinas, pequeños carnívoros, grandes carnívoros y organismos en descomposición.
- Un rastreador se inyecta en el torrente sanguíneo y se pierde en el cuerpo gracias al metabolismo de un órgano en particular y por excreción. Los compartimientos apropiados podrían ser sangre arterial, sangre venosa, el órgano en cuestión y la orina.

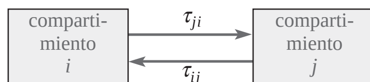


FIGURA 7.16.2 Intercambio de material entre compartimientos

Suponga que un sistema está dividido en n compartimientos y que, después de cada Δt unidades de tiempo, se intercambia el material entre los compartimientos. Se supondrá que una fracción fija τ_{ij} del contenido del compartimiento j se transfiere al compartimiento i cada Δt unidades de tiempo, como se muestra en la **FIGURA 7.16.2**. Este supuesto se conoce como **hipótesis lineal controlada por donantes**.

Dejemos que los elementos x_i de la matriz **X** de $n \times 1$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

representen las cantidades de rastreador que hay en el compartimiento i. Decimos que **X** especifica el **estado del sistema**. La matriz **Y** de $n \times 1$ es el estado del sistema Δt unidades de tiempo después. Demostraremos que **X** y **Y** están relacionados por la ecuación matricial $\mathbf{Y} = \mathbf{TX}$, donde **T** es una matriz de $n \times n$ determinada mediante los **coeficientes de transferencia** τ_{ij}. Para encontrar **T** observe, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + (\text{cantidad de rastreador que ingresa a 1}) - (\text{cantidad de rastreador que abandona 1}) \\ &= x_1 + (\tau_{12}x_2 + \tau_{13}x_3 + \cdots + \tau_{1n}x_n) - (\tau_{21} + \tau_{31} + \cdots + \tau_{n1})x_1 \\ &= (1 - \tau_{21} - \tau_{31} - \cdots - \tau_{n1})x_1 + \tau_{12}x_2 + \cdots + \tau_{1n}x_n. \end{aligned}$$

Si permitimos que $\tau_{11} = 1 - \tau_{21} - \tau_{31} - \cdots - \tau_{n1}$, entonces τ_{11} es justamente la fracción del contenido del compartimiento 1 que permanece en 1.

Al permitir que $\tau_{ii} = 1 - \Sigma_{j \neq i}\tau_{ji}$ tenemos, en general,

$$\begin{aligned} y_1 &= \tau_{11}x_1 + \tau_{12}x_2 + \cdots + \tau_{1n}x_n \\ y_2 &= \tau_{21}x_1 + \tau_{22}x_2 + \cdots + \tau_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= \tau_{n1}x_1 + \tau_{n2}x_2 + \cdots + \tau_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La ecuación matricial (3) es la ecuación deseada $\mathbf{Y} = \mathbf{TX}$. La matriz $\mathbf{T} = (\tau_{ij})_{n \times n}$ se denomina **matriz de transferencia**. Observe que la suma de los elementos de cualquier columna, coeficientes de transferencia, es igual a 1.

Nota: Una matriz de transferencia es un ejemplo de matriz estocástica. Consulte el problema 27 de los ejercicios 7.8.

Modelos discretos compartimentales se muestran en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Matriz de transferencia

Las tres cajas de la **FIGURA 7.16.3** representan tres compartimientos. El contenido de cada compartimiento en el tiempo t se indica en cada caja. Los coeficientes de transferencia se muestran al lado de las flechas que conectan los compartimientos.

a) Encuentre la matriz de transferencia **T**.

b) Suponga que $\Delta t = 1$ día. Encuentre el estado del sistema **Y** un día después.

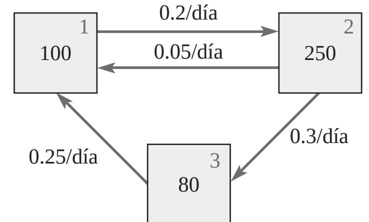


FIGURA 7.16.3 Compartimientos y coeficientes de transferencia del ejemplo 1

Solución ***a)*** El estado del sistema en el tiempo $t = 0$ es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Recuerde que τ_{ij} especifica la velocidad de transferencia del compartimiento j al i. De aquí tenemos que $\tau_{21} = 0.2$, $\tau_{12} = 0.05$, $\tau_{32} = 0.3$, $\tau_{23} = 0$, $\tau_{13} = 0.25$ y $\tau_{31} = 0$. A partir de estas cantidades podemos observar que la matriz **T** es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \text{—} & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & \text{—} & 0 \\ 0 & 0.3 & \text{—} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Sin embargo, puesto que los elementos de las columnas deben sumar 1, podemos llenar los espacios en (4):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.75 \end{pmatrix}$$

b) El estado del sistema un día después es, por lo tanto,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TX} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 182.5 \\ 135 \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

Si $\mathbf{X}_0$ expresa el estado inicial del sistema y $\mathbf{X}_n$ es el estado después de $n(\Delta t)$ unidades de tiempo, entonces

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{TX}_0, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{TX}_1, \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{TX}_2, \ldots, \quad \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{TX}_n.$$

Ya que $\qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{T}(\mathbf{TX}_0) = \mathbf{T}^2\mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{T}(\mathbf{T}^2\mathbf{X}_0) = \mathbf{T}^3\mathbf{X}_0, \ldots,$

tenemos en general que $\qquad \mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (5)$

Por supuesto, pudimos haber utilizado el método que se mostró en la sección 7.9 para calcular $\mathbf{T}^n$; sin embargo, con ayuda de una calculadora o un sistema asistido por computadora resulta muy sencillo utilizar la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{TX}_n$ permitiendo que $n = 0, 1, \ldots$

EJEMPLO 2 Estados de un ecosistema

Se deposita estroncio 90 sobre los pastizales debido a la lluvia. Para estudiar cómo se transporta este material a través del ecosistema, fragmentamos el sistema en los compartimientos que se muestran en la **FIGURA 7.16.4**. Suponga que $\Delta t = 1$ mes y los coeficientes de transferencia (estimados de manera experimental) que se muestran en la figura se miden en fracción/mes. (Ignoraremos que se pierde parte del estroncio 90 debido a la disminución de la radiactividad.) Suponga que la lluvia deposita el estroncio 90 en los compartimientos por lo cual $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$. (Las unidades deben ser gramos por hectárea.) Determine los estados del ecosistema para los siguientes 12 meses.

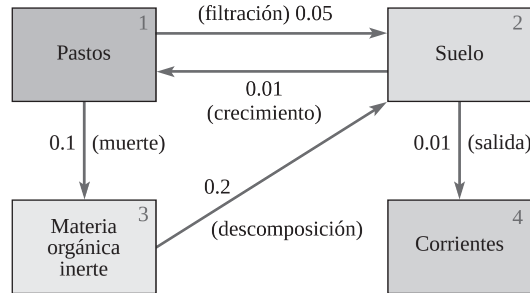


FIGURA 7.16.4 Ecosistema del ejemplo 2

Solución A partir de los datos de la figura 7.16.4 podemos observar que la matriz de transferencia $\mathbf{T}$ es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.98 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Debemos calcular $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{12}$. El estado del ecosistema después del primer mes es

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{TX}_0 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.98 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.6 \\ 62.8 \\ 14.0 \\ 20.6 \end{pmatrix}.$$

Los estados restantes se calcularon con ayuda de un sistema asistido por computadora y la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{TX}_n$ donde $n = 1, 2, \ldots, 11$, y se proporcionan en la **TABLA 7.16.1**. $\equiv$

TABLA 7.16.1

Mes	Pastos	Suelo	Materia orgánica inerte	Corrientes
0	20.00	60.00	15.00	20.00
1	17.60	62.80	14.00	20.60
2	15.59	65.22	12.96	21.23
3	13.90	67.29	11.93	21.88
4	12.49	69.03	10.93	22.55
5	11.31	70.46	9.99	23.24
6	10.32	71.61	9.13	23.95
7	9.48	72.52	8.33	24.66
8	8.79	73.21	7.61	25.39
9	8.20	73.71	6.97	26.12
10	7.71	74.04	6.40	26.86
11	7.29	74.22	5.89	27.60
12	6.94	74.28	5.44	28.34

7.16 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

1. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimentos de la **FIGURA 7.16.5** para determinar la matriz de transferencia **T** apropiada y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

b) Encuentre el estado del sistema después de un día y de dos días.

c) De un momento a otro el sistema alcanzará el estado de equilibrio $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$. Calcule $\hat{\mathbf{X}}$. [*Sugerencia:* $x_1 + x_2 = 150$.]

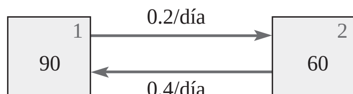


FIGURA 7.16.5 Compartimientos del problema 1

2. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimentos de la **FIGURA 7.16.6** para determinar la matriz de transferencia apropiada **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

b) Calcule el estado del sistema después de un día y de dos días.

c) Encuentre el estado de equilibrio $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$. [*Sugerencia:* ¿Cuál es el análogo de la sugerencia del inciso *c*) del problema 1?]

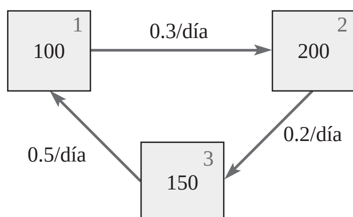


FIGURA 7.16.6 Compartimientos del problema 2

3. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimentos de la **FIGURA 7.16.7** para determinar la matriz de transferencia apropiada **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

b) Calcule el estado del sistema después de un día y de dos días.

c) Encuentre el estado de equilibrio $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$.

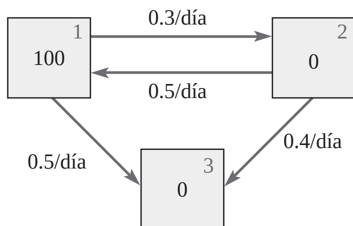


FIGURA 7.16.7 Compartimientos del problema 3

4. Un campo ha quedado totalmente destrozado por efecto del fuego. Comenzarán a crecer primero dos tipos de vegetación, pastos y pequeños arbustos; sin embargo, los arbustos pequeños pueden ocupar solamente cierta área si están precedidos por pastos. En la **FIGURA 7.16.8**, el coeficiente de transferencia de 0.3 indica que, al final del verano, el 30% de lo que antes era terreno desocupado en el campo será ocupado por pastos.

a) Encuentre la matriz de transferencia **T**.

b) Suponga que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que el área se mide en acres. Utilice la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}_n$, así como una calculadora o un CAS para determinar el terreno que estará cubierto en cada uno de los siguientes seis años.

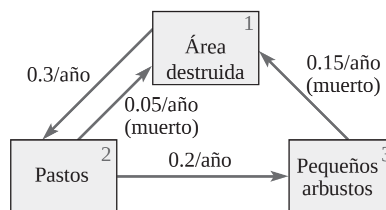


FIGURA 7.16.8 Compartimientos del problema 4

≡ Problema de análisis

5. Caracterice el vector $\hat{\mathbf{X}}$ del inciso *c*) de los problemas 1 a 3 en términos de uno de los conceptos principales de la sección 7.8.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

6. Se utilizan radioisótopos (como el fósforo 32 y el carbono 14) para estudiar la transferencia de nutrientes en las cadenas alimenticias. La **FIGURA 7.16.9** es una representación compartimental de una cadena alimenticia marina simple. Cien unidades (de microcuries, por ejemplo) de rastreador se disuelven en agua de un acuario que contiene una especie de fitoplancton y otra de zooplancton.

a) Encuentre la matriz de transferencia **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

b) En lugar de la fórmula recursiva, utilice $\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0$, $n = 1, 2, \ldots, 12$, para predecir el estado del sistema en las 12 horas siguientes. Use un sistema asistido por computadora (CAS) y el comando para calcular potencias de matrices (en *Mathematica* es el comando **MatrixPower [T, n]**) para encontrar $\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3, \ldots, \mathbf{T}^{12}$.

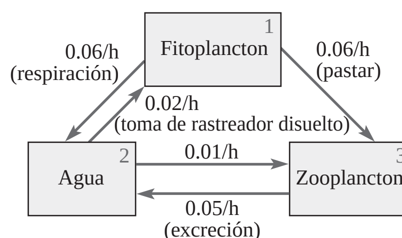


FIGURA 7.16.9 Cadena alimenticia marina del problema 6

7 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco o responda verdadero o falso.

1. Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i + j$ está dada por _____.

2. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de 4×7 y $\mathbf{B}$ es de 7×3, entonces el tamaño de $\mathbf{AB}$ es ______.

3. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = (3 \quad 4)$, entonces $\mathbf{AB} =$ _____ y $\mathbf{BA} =$ _____.

4. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^{-1} =$ _____.

5. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices no singulares de $n \times n$, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es necesariamente no singular. _____

6. Si $\mathbf{A}$ es una matriz no singular para la que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. _____

7. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de 3×3 tal que $\mathbf{A} = 5$, entonces $\det(\frac{1}{2}\mathbf{A})$ $=$ _____ y $\det(-\mathbf{A}^T) =$_____.

8. Si $\det \mathbf{A} = 6$ y $\det \mathbf{B} = 2$, entonces $\det \mathbf{AB}^{-1} =$ _____.

9. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $n \times n$ cuyos elementos correspondientes a la tercera columna son iguales, entonces $\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}) =$ _____.

10. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de 3×3 tal que $\det \mathbf{A} = 2$. Si $\mathbf{B} = 10\mathbf{A}$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{B}^{-1}$, entonces $\det \mathbf{C} =$ _____.

11. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. Los valores propios de $\mathbf{A}$ son las soluciones diferentes de cero de $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. _____

12. Un múltiplo escalar diferente de cero de un vector propio es también un vector propio correspondiente al mismo valor propio. _____

13. Un vector columna $\mathbf{K}$ de $n \times 1$ con todos sus elementos iguales a cero nunca es un vector propio de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. _____

14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$ con elementos reales. Si λ es un valor propio complejo, entonces $\bar{\lambda}$ es también un valor propio de $\mathbf{A}$. _____

15. Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ siempre tiene n vectores propios lineales independientes.

16. La matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ está en forma escalonada reducida. _____

17. Si una matriz $\mathbf{A}$ de 3×3 es diagonalizable, entonces tiene tres vectores propios lineales independientes. _____

18. Las únicas matrices diagonalizables ortogonalmente son las matrices simétricas. _____

19. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal puesto que sus columnas son vectores ortogonales. _____

20. Los valores propios de una matriz simétrica con elementos reales son siempre números reales. _____

21. Una matriz $\mathbf{B}$ de $n \times n$ es simétrica si $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, y una matriz $\mathbf{C}$ de $n \times n$ es oblicua-simétrica si $\mathbf{C}^T = -\mathbf{C}$. Observando la identidad $2\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$, demuestre que cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz oblicua-simétrica.

22. Demuestre que no existe una matriz de 2×2 con elementos reales tales que $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **nilpotente** si, para un entero positivo m, $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$. Determine una matriz nilpotente de 2×2, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

24. ***a***) Se dice que dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$ son **antiintercambiables** si $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$. Demuestre que cada una de las **matrices de giro de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $i^2 = -1$, son antiintercambiables entre sí. Las matrices de giro de Pauli se utilizan en mecánica cuántica.

b) Se dice que la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ es la **intercambiadora** de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$. Encuentre las matrices intercambiables de σ_x y σ_y, σ_y y σ_z, y σ_z y σ_x.

En los problemas 25 y 26, resuelva el sistema dado mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

25. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}$

26. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

27. Sin expandir, demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0.$

28. Demuestre que $\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ es la ecuación de una parábola que pasa por los tres puntos (1, 2), (2, 3) y (3, 5).

En los problemas 29 y 30, evalúe, por inspección, el determinante de la matriz dada.

29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 31 y 32, sin resolverlos, defina si los sistemas homogéneos dados tienen solamente la solución trivial o si tienen un número infinito de soluciones.

31. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

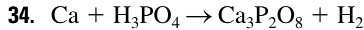
32. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 33 y 34, realice el balanceo de la ecuación química dada.

33. $I_2 + HNO_3 \rightarrow HIO_3 + NO_2 + H_2O$



34. $Ca + H_3PO_4 \rightarrow Ca_3P_2O_8 + H_2$



En los problemas 35 y 36, resuelva el sistema dado mediante la regla de Cramer.

35. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} x_1 + \qquad x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

37. Utilice la regla de Cramer para despejar x y y en el sistema

$$X = x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$
$$Y = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$$

38. ***a)*** Establezca el sistema de ecuaciones para encontrar las corrientes que circulan en las ramas de la red que se muestra en la **FIGURA 7.R.1**.

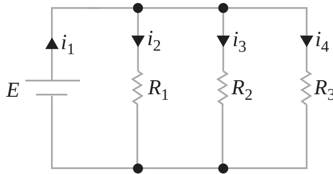


FIGURA 7.R.1 Red del problema 38

b) Use la regla de Cramer para demostrar que

$$i_1 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

39. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 \qquad &= -3 \\ -2x_1 + \qquad x_3 &= 9 \end{aligned}$$

escribiéndolo como una ecuación matricial y calculando la inversa de la matriz de coeficientes.

40. Utilice la inversa de la matriz **A** para resolver el sistema **AX** = **B**, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el vector **B** está dado por *a)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y *b)* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En los problemas 41 a 46, determine los valores propios y los vectores propios correspondientes de la matriz dada.

41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

47. Determine los valores de la primera columna de tal manera que la matriz resulte ortogonal:

$$\begin{pmatrix} \square & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \square & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \square & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

48. Considere la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determine las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^{-1}$ que diagonalicen ortogonalmente a la matriz **A**.

b) Determine la matriz diagonal **D** realizando la multiplicación $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

49. Identifique la sección cónica $x^2 + 3xy + y^2 = 1$.

50. Considere los datos de población siguientes:

Año	**1890**	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**
Población (en millones)	63	76	92	106	123

La población real en 1940 era de 132 millones de personas. Compare dicha cantidad con la población pronosticada a partir de la línea de los mínimos cuadrados de los datos proporcionados.

En los problemas 51 y 52, utilice la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ para codificar el mensaje dado. Use la correspondencia de (1) de la sección 7.13.

51. SATELLITE LAUNCHED ON FRI

52. SEC AGNT ARRVS TUES AM

En los problemas 53 y 54, utilice la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ para determinar el mensaje dado. Use la correspondencia (1) de la sección 7.13.

53. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 15 & 14 & 0 & 20 \\ 35 & 10 & 27 & 53 & 1 & 54 \\ 5 & 15 & -3 & 48 & 2 & 39 \end{pmatrix}$

54. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 21 \\ 27 & 17 & 40 \\ 21 & 13 & -2 \end{pmatrix}$

55. Descifre los mensajes siguientes utilizando el código de verificación de paridad.

a) (1 1 0 0 1 1) ***b)*** (0 1 1 0 1 1 1 0)

56. Descifre la palabra (1 0 0 1) utilizando el código de Hamming (7, 4).



Un convertidor de energía de olas Pelamis

Parte 3

Sistemas de ecuaciones diferenciales

8 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Estructura del capítulo

En la sección 2.9 estudiamos por primera vez en este libro los sistemas de ecuaciones diferenciales, y en las secciones 3.12 y 4.6 pudimos resolver algunos de estos sistemas. En el presente capítulo vamos a concentrarnos únicamente en **sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**. Mientras la mayor parte de los sistemas considerados pudieron resolverse por medio de eliminación (sección 3.12) o de la transformada de Laplace (sección 4.6), aquí vamos a desarrollar una teoría general para tal tipo de sistemas y, para el caso de sistemas con coeficientes constantes, un método de solución que utiliza algunos conceptos básicos del álgebra de matrices. Advertiremos que esta teoría general y el procedimiento de solución son similares a los de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior que se estudiaron en las secciones 3.1 a la 3.5. El material también resulta fundamental para efectuar el análisis de sistemas de ecuaciones no lineales de primer orden (capítulo 9).

En este capítulo suponemos que usted está familiarizado con las notaciones matriciales, las propiedades de las matrices y los valores propios y los vectores propios de una matriz elevada al cuadrado. Si no es así, le recomendamos que revise el capítulo 7, con especial énfasis en la sección 7.8).

8.1 Teoría de sistemas lineales

Introducción Recuerde que en la sección 3.12 ilustramos cómo resolver sistemas de n ecuaciones diferenciales en n incógnitas de la forma

$$\begin{aligned} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \cdots + P_{1n}(D)x_n &= b_1(t) \\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \cdots + P_{2n}(D)x_n &= b_2(t) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n &= b_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

donde P_{ij} eran polinomios de diferentes grados del operador diferencial D. En este capítulo concentraremos nuestro estudio en las ecuaciones diferenciales de primer orden que representan casos especiales de sistemas que tienen la formulación normal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Un sistema de n ecuaciones de primer orden tal como (2) se denomina **sistema de primer orden**.

Sistemas lineales Cuando cada una de las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n$ incluidas en (2) es lineal en las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obtenemos la **forma normal** de un sistema de primer orden de las ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{3}$$

A un sistema de la forma presentada en (3) le llamamos simplemente **sistema lineal**. Suponemos que tanto los coeficientes $a_{ij}(t)$ como las funciones $f_i(t)$ son continuos en un intervalo común I. Cuando $f_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que el sistema lineal es **homogéneo**; de lo contrario será **no homogéneo**.

Forma matricial de un sistema lineal Si $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ denotan las matrices respectivas

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (3) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o simplemente

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}. \tag{4}$$

Si el sistema es homogéneo, su forma matricial es entonces

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Sistemas escritos en notación matricial

a) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y \end{aligned} \qquad \text{es} \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x + y + z + t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x + 7y - z + 10t \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 9y - z + 6t \end{aligned} \qquad \text{es} \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

≡

Definición 8.1.1 Vector solución

En un intervalo I, un **vector solución** es cualquier matriz columna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen el sistema (4) en el intervalo.

Desde luego, un vector solución de (4) es equivalente a n ecuaciones escalares $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, …, $x_n = \phi_n(t)$, y se puede interpretar de manera geométrica como un sistema de ecuaciones paramétricas de una curva espacial. En los casos $n = 2$ y $n = 3$, las ecuaciones $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, y $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, $x_3 = \phi_3(t)$ representan curvas en los espacios bidimensional y tridimensional, respectivamente. Solemos denominar a tal curva solución como **trayectoria**. El plano también se denomina **plano de fase**. Ilustraremos estos conceptos en la sección siguiente, así como en el capítulo 9.

EJEMPLO 2 Verificación de soluciones

Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{6}$$

Solución A partir de $\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ vemos que

$$\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1'$$

y

$$\mathbf{AX}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'.$$

≡

Gran parte de la teoría de sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es similar a la de las ecuaciones diferenciales lineales de n-ésimo orden.

Problema de valor inicial Si t_0 denota un punto en un intervalo I y

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

donde γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son las constantes dadas. Entonces el problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver}: && \mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ &\textit{Sujeto a}: && \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{aligned} \tag{7}$$

es un **problema de valor inicial** en el intervalo.

Teorema 8.1.1 Existencia de una solución única

Sean las entradas de las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ funciones continuas en un intervalo común I que contienen el punto t_0. Por lo tanto, existe una solución única para el problema de valor inicial (7) en el intervalo.

Sistemas homogéneos En las siguientes definiciones y teoremas nos enfocaremos sólo en los sistemas homogéneos. Aunque no se indique, siempre supondremos que a_{ij} y f_i son funciones continuas de t en algún intervalo común I.

Principio de superposición El siguiente resultado es un **principio de superposición** para soluciones de sistemas lineales.

Teorema 8.1.2 Principio de superposición

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces, la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k,$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

Del teorema 8.1.2 se desprende que una constante múltiple de cualquier vector solución de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es también una solución.

EJEMPLO 3 Uso del principio de superposición

Compruebe que los dos vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\, t \\ -\cos t - \text{sen}\, t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{8}$$

Mediante el principio de superposición, teorema 8.1.2, la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\, t \\ -\cos t - \text{sen}\, t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

es aún otra solución del sistema. ≡

■ **Dependencia lineal e independencia lineal** Estamos interesados principalmente en las soluciones del sistema homogéneo (5) que sean linealmente independientes.

Definición 8.1.2 Dependencia lineal e independencia lineal

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un sistema de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Decimos que este conjunto es **linealmente dependiente** en el intervalo si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, que no son todas cero, de tal forma que

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k = \mathbf{0}$$

para toda t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

El caso $k = 2$ tiene que aclararse; dos vectores solución $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente dependientes si uno es un múltiplo constante del otro, y viceversa. Para $k > 2$, un conjunto de vectores solución es linealmente dependiente si podemos expresar al menos un vector solución como una combinación lineal de los vectores restantes.

■ **Wronskiano** En una consideración previa relacionada con la teoría de una sola ecuación diferencial ordinaria, pudimos introducir el concepto del determinante **wronskiano** como una prueba de la independencia lineal. Establecemos el teorema siguiente sin probarlo.

Teorema 8.1.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces el sistema de vectores solución es linealmente independiente en I si, y sólo si, el **wronskiano**

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

para toda t incluida en el intervalo.

Es posible demostrar que si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ son vectores solución de (5), entonces para toda t en I, bien $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) \neq 0$ o $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = 0$. Por lo tanto, si podemos demostrar que $W \neq 0$ para alguna t_0 en I, entonces $W \neq 0$ para toda t, de manera que el conjunto de soluciones es linealmente independiente en el intervalo.

Observe que, a diferencia de la definición del wronskiano dada en la sección 3.1, aquí la definición del determinante (9) no requiere diferenciación.

EJEMPLO 4 Soluciones linealmente independientes

En el ejemplo 2 vimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones del sistema (6). Resulta evidente que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$ ya que ningún vector es un múltiplo constante del otro. Además, tenemos

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t. ≡

Definición 8.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Todo conjunto $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ de n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo (5) en un intervalo I se denomina **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

Teorema 8.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo (5) en un intervalo I.

Los dos teoremas siguientes son los equivalentes del sistema lineal examinado en los teoremas 3.1.5 y 3.1.6.

Teorema 8.1.5 Solución general: sistemas homogéneos

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Por lo tanto, la **solución general** del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 5 Solución general del sistema (6)

A partir del ejemplo 2 sabemos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones de (6) linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. La solución general del sistema en el intervalo es entonces

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}. \tag{10}$$ ≡

EJEMPLO 6 Solución general del sistema (8)

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^{t} & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} = e^{t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t. Concluimos que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, en el intervalo, la solución general del sistema es la combinación lineal $\mathbf{X} = c\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$, es decir,

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$$ ≡

■ **Sistemas no homogéneos** Para los sistemas no homogéneos, una **solución particular** $\mathbf{X}_p$ en un intervalo I es cualquier vector, libre de parámetros arbitrarios, cuyos elementos son funciones que satisfacen el sistema (4).

Teorema 8.1.6 Solución general: sistemas no homogéneos

Sean $\mathbf{X}_p$ una solución dada del sistema no homogéneo (4) en un intervalo I, y

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$$

denote la solución general en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado (5). Luego, la **solución general** del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

La solución general $\mathbf{X}_c$ del sistema homogéneo asociado (5) se denomina **función complementaria** del sistema no homogéneo (4).

EJEMPLO 7 Solución general: sistema no homogéneo

El vector $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (Verifique esto.) La función complementaria de (11) en el mismo intervalo, o la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, se estudió en la expresión (10) del ejemplo 5 como $\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}$. Por lo tanto, en virtud del teorema 8.1.6

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

es la solución general de (11) en $(-\infty, \infty)$. ≡

8.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas del 1 al 6, exprese el sistema lineal en forma matricial.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x + 8y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 7y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 9z$

$\dfrac{dy}{dt} = 6x - y$

$\dfrac{dz}{dt} = 10x + 4y + 3z$

4. $\dfrac{dx}{dt} = x - y$

$\dfrac{dy}{dt} = x + 2z$

$\dfrac{dz}{dt} = -x + z$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1$

$\dfrac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2$

$\dfrac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2$

6. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 9z + 4e^{-t}\cos 2t$

$\dfrac{dz}{dt} = y + 6z - e^{-t}$

En los problemas del 7 al 10, escriba el sistema dado sin el uso de matrices.

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

9. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}t$

10. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} t - 4 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}e^{4t}$

En los problemas del 11 al 16, compruebe que el vector **X** es una solución del sistema dado.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-5t}$

12. $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y$

$\dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^{t}$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-3t/2}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}te^{t}$

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$

En los problemas del 17 al 20, los vectores dados son soluciones de un sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Determine si los vectores forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$.

17. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t}, \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-6t}$

18. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}, \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}te^{t}$

19. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$

$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-4t}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}e^{3t}$

En los problemas del 21 al 24, verifique si el vector $\mathbf{X}_p$ es una solución particular del sistema dado.

21. $\dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 2t - 7$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y - 4t - 18; \ \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}e^{t};$

$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t}$

24. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 3t;$

$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}$

25. Demuestre que la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}.$$

26. Demuestre que la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{\sqrt{2}t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-\sqrt{2}t}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.2 Sistemas lineales homogéneos

Introducción En el ejemplo 5 de la sección 8.1, vimos que la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ es $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}$. Puesto que ambos vectores solución tienen la forma $\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$, donde k_1, k_2, λ_1, y λ_2 son

constantes, nos vemos impulsados a preguntar si siempre es posible encontrar una solución de la forma

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K}e^{\lambda t} \tag{1}$$

para el sistema general homogéneo de primer orden

Analizaremos sólo sistemas lineales con coeficientes constantes.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}, \tag{2}$$

donde la matriz de coeficientes **A** es una matriz de constantes de orden $n \times n$.

Valores propios y vectores propios Si (1) ha de ser un vector solución del sistema, entonces $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$ de manera que (2) se convierta en $\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{AK}e^{\lambda t}$. Después de dividir $e^{\lambda t}$ y reordenar, obtenemos $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ o $\mathbf{AK} - \lambda\mathbf{K} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{K} = \mathbf{IK}$, la última ecuación es lo mismo que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

La ecuación matricial (3) es equivalente a las ecuaciones algebraicas simultáneas

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0 \\
a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para encontrar una solución no trivial **X** de (2) debemos encontrar primero una solución no trivial del sistema citado; en otras palabras, primero tenemos que determinar un vector no trivial **K** que satisfaga (3). Pero con el fin de que (3) tenga soluciones distintas de la solución evidente $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, necesitamos tener

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se denomina **ecuación característica** de la matriz **A**; sus soluciones son los **valores propios** de **A**. Una solución $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ de (3) correspondiente a un valor propio λ se denomina **vector propio** de **A**. Una solución del sistema homogéneo (2) es entonces $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$.

En el siguiente análisis examinaremos tres casos: todos los valores propios son reales y distintos (es decir, no hay dos valores propios iguales), valores propios repetidos, y por último, valores propios complejos.

8.2.1 Valores propios reales distintos

Cuando la matriz **A** de orden $n \times n$ posee n valores propios reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces siempre se podrá encontrar un conjunto de n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ y

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (2) en $(-\infty, \infty)$.

Teorema 8.2.1 Solución general: sistemas homogéneos

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n valores propios reales distintos de la matriz de coeficientes **A** del sistema homogéneo (2), y sean $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ los vectores propios correspondientes. Entonces, la **solución general** de (2) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}.$$

EJEMPLO 1 Valores propios distintos

Resuelva

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\
\frac{dy}{dt} &= 2x + y.
\end{aligned} \tag{4}$$

Solución Primero encontramos los valores propios y los vectores propios de la matriz de coeficientes.

A partir de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$.

Ahora para $\lambda_1 = -1$, (3) es equivalente a

$$\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $k_1 = -k_2$. Cuando $k_2 = -1$, el vector propio relacionado es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 4$, tenemos
$$\begin{aligned} -2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 0 \end{aligned}$$

de manera que $k_1 = \frac{3}{2}k_2$, y por lo tanto, con $k_2 = 2$, el vector propio correspondiente es

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz de coeficientes **A** es una matriz de 2×2, y como hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes de (4),

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

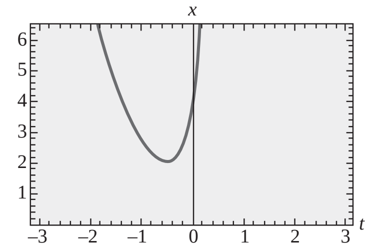
concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}. \tag{5}$$

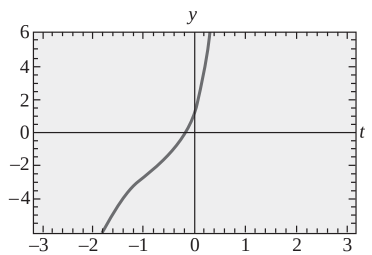
Con fines de repaso, se debe tener muy presente que una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, cuando la expresamos en términos matriciales, simplemente es una alternativa al método empleado en la sección 3.12, es decir, listar las funciones individuales y las relaciones entre las constantes. Si sumamos los vectores incluidos en el lado derecho de (5) y después igualamos los elementos con los correspondientes del vector de la izquierda, obtenemos la expresión más conocida

$$x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}, \qquad y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}.$$

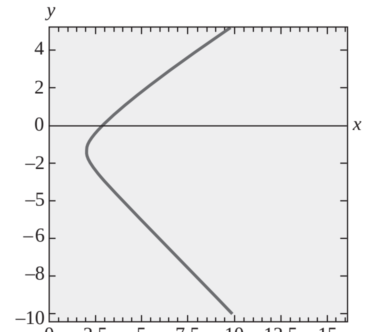
Tal como fue señalado en la sección 8.1, podemos interpretar estas ecuaciones como ecuaciones paramétricas de una curva o **trayectoria** en el plano xy o **plano de fase**. Las tres gráficas se muestran en la **FIGURA 8.2.1**: $x(t)$ en el plano tx, $y(t)$ en el plano ty y la trayectoria en el plano de fase correspondiente a la elección de constantes $c_1 = c_2 = 1$ en la solución. Un conjunto de trayectorias presentes en el plano de fase, como lo muestra la **FIGURA 8.2.2**, es un **retrato de fase** del sistema lineal dado. Lo que en la figura 8.2.2 parecen ser dos líneas negras, en realidad son cuatro medias líneas definidas de manera paramétrica en el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes mediante las soluciones $\mathbf{X}_2$, $-\mathbf{X}_1$, $-\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_1$, respectivamente. Por ejemplo, las ecuaciones cartesianas $y = \frac{2}{3}x$, $x > 0$, y $y = -x$, $x > 0$, de las medias líneas incluidas en el primero y cuarto cuadrantes se obtuvieron al eliminar el parámetro t en las soluciones $x = 3e^{4t}$, $y = 2e^{4t}$, y $x = e^{-t}$, $y = -e^{-t}$, respectivamente. Además, cada vector propio se puede visualizar como un vector bidimensional tendido a lo largo de estas medias líneas. El vector propio $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ descansa a lo largo de $y = \frac{2}{3}x$ en el primer cuadrante y $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a lo largo de $y = -x$ en el cuarto cuadrante; cada vector comienza en el origen con $\mathbf{K}_2$ que termina en el punto (2, 3) y $\mathbf{K}_1$ que termina en (1, −1).



a) Gráfica de $x = e^{-t} + 3e^{4t}$



b) Gráfica de $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$



c) Trayectoria definida por $x = e^{-t} + 3e^{4t}$, $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$ en el plano fase

FIGURA 8.2.1 Una solución particular de (5) produce tres curvas diferentes en tres distintos planos coordenados

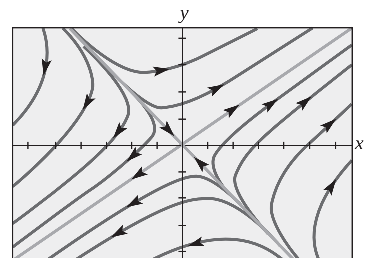


FIGURA 8.2.2 Retrato de fase del sistema (4)

El origen no sólo es una solución constante, $x = 0$, $y = 0$, para todo sistema lineal homogéneo 2×2 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ sino que también es un punto importante en el estudio cualitativo de tales sistemas. Si pensamos en términos físicos, las puntas de flecha marcadas en las trayectorias de la figura 8.2.2 indican la dirección en que se movería una partícula con coordenadas $(x(t), y(t))$ en una trayectoria en el tiempo t a medida que se presente un incremento en el tiempo. Observe que las puntas de flecha, salvo las de las medias líneas trazadas en el segundo y cuarto cuadrantes, indican que una partícula se alejaría de su origen conforme aumentara el tiempo t. Si imaginamos que el tiempo varía desde $-\infty$ hasta ∞, entonces el análisis de la solución $x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$, $y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, muestra que una trayectoria, o partícula móvil, "comienza" por ser asintótica en relación con una de las medias líneas definidas mediante $\mathbf{X}_1$ o $-\mathbf{X}_1$ (ya que e^{4t} es insignificante para $t \to -\infty$) y "termina" siendo asintótica respecto a una de las medias líneas definidas por $\mathbf{X}_2$ y $-\mathbf{X}_2$ (puesto que e^{-t} es insignificante para $t \to \infty$).

Dicho sea de paso, la figura 8.2.2 representa un retrato de fase que es característico de *todos* los sistemas lineales homogéneos $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de 2×2 con valores propios reales de signos opuestos. Vea el problema 17 en los ejercicios 8.2. Además, si los valores propios reales distintos tienen el mismo signo algebraico, los retratos de fase serán aquellos característicos de todos los sistemas lineales de 2×2 de este tipo; la única diferencia sería que las puntas de flecha indicarían que una partícula se aleja del origen en cualquier trayectoria conforme $t \to \infty$ cuando λ_1 y λ_2 son positivos, y que se acerca al origen en cualquier trayectoria cuando tanto λ_1 como λ_2 son negativos. En consecuencia, resulta muy común denominar al origen como **repulsor** en el caso $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, y como **atractor** en el caso $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Vea el problema 18 en los ejercicios 8.2. En la figura 8.2.2, el origen no es ni un repulsor ni un atractor. La investigación sobre el caso restante, cuando $\lambda = 0$ sea un valor propio de un sistema lineal homogéneo de 2×2, se deja como ejercicio para el lector. Vea el problema 48 en los ejercicios 8.2.

EJEMPLO 2 Valores propios distintos

Resuelva
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z. \end{aligned} \tag{6}$$

Solución Mediante los cofactores del tercer renglón, encontramos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0,$$

y, por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -3$, la eliminación de Gauss-Jordan produce

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones entre renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, $k_1 = k_3$ y $k_2 = 0$. La alternativa $k_3 = 1$ produce un vector propio y el correspondiente vector solución

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \tag{7}$$

De manera similar, para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones entre renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = 10k_3$ y $k_2 = -k_3$. Al elegir $k_3 = 1$, obtenemos un segundo vector propio y su vector solución

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{8}$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, las matrices aumentadas

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{renglones}}{\overset{\text{operaciones entre}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

producen

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}. \tag{9}$$

La solución general de (6) es una combinación lineal de los vectores solución dados en (7), (8) y (9):

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

≡

■ **Uso de computadoras** Los paquetes de cómputo como MATLAB, *Mathematica* y *Maple* pueden ahorrarnos mucho tiempo cuando se trata de encontrar valores propios y vectores propios de una matriz. Por ejemplo, para encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz de coeficientes dada en (6) mediante *Mathematica*, primero ingresamos la definición de matriz por renglones:

m = { {−4, 1, 1}, { 1, 5, −1}, { 0, 1, −3} }.

Los comandos **Eigenvalues[m]** y **Eigenvectors[m]** dados en secuencia generan

$$\{-4, -3, 5\} \quad \text{y} \quad \{ \{ 10, -1, 1\}, \{ 1, 0, 1\}, \{ 1, 8, 1\} \},$$

respectivamente. En *Mathematica*, los valores propios y los vectores propios también se pueden obtener al mismo tiempo mediante **Eigensystem[m]**.

8.2.2 Valores propios repetidos

Desde luego, no todos los n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ deben ser diferentes, es decir, algunos de los valores propios pueden estar repetidos. Por ejemplo, puede advertirse fácilmente que la ecuación característica de la matriz de coeficientes en el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\mathbf{X} \tag{10}$$

es $(\lambda + 3)^2 = 0$, y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ es una raíz de *multiplicidad dos*. Para este valor encontramos el vector propio único

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{de manera que} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \tag{11}$$

es una solución de (10). Pero como estamos interesados en formar la solución general del sistema, debemos concentrarnos en encontrar una segunda solución.

En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica pero $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ no es un factor, entonces se dice que λ_1 es un **valor propio de multiplicidad *m***. Los tres ejemplos presentados a continuación ilustran los siguientes casos:

i) Para ciertas matrices $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ puede ser posible encontrar m vectores propios linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$ correspondientes a un valor propio λ_1 de multiplicidad $m \leq n$. En este caso, la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\mathbf{K}_me^{\lambda_1 t}.$$

ii) Si hay sólo un vector propio correspondiente al valor propio λ_1 de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \mathbf{K}_{11}e^{\lambda_1 t} \\
\mathbf{X}_2 &= \mathbf{K}_{21}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{22}e^{\lambda_1 t} \\
&\vdots \\
\mathbf{X}_m &= \mathbf{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbf{K}_{mm}e^{\lambda_1 t},
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{K}_{ij}$ son vectores columna.

Valor propio de multiplicidad dos Iniciemos considerando los valores propios de multiplicidad dos. En el primer ejemplo ilustramos una matriz para la cual podemos encontrar dos vectores propios que corresponden a un valor propio doble.

EJEMPLO 3 Valores propios repetidos

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Solución Si se amplía la determinante en la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se produce $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$. Vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, la eliminación de Gauss-Jordan inmediatamente da como resultado

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones entre renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El primer renglón de la última matriz comprende $k_1 - k_2 + k_3 = 0$ o $k_1 = k_2 - k_3$. Las elecciones $k_2 = 1, k_3 = 0$ y $k_2 = 1, k_3 = 1$ producen, a su vez, $k_1 = 1$ y $k_1 = 0$. Por lo tanto, dos vectores propios que corresponden a $\lambda_1 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que ningún vector propio es múltiplo constante del otro, hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes, correspondientes al mismo valor propio

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Por último, para $\lambda_3 = 5$, la reducción

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones entre renglones}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica $k_1 = k_3$ y $k_2 = -k_3$. Al elegir $k_3 = 1$ se tiene $k_1 = 1, k_2 = -1$, y por lo tanto un tercer vector propio es

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{5t}. \qquad \equiv$$

La matriz de coeficientes **A** dada en el ejemplo 3 es una clase especial de matriz conocida como matriz simétrica. Se dice que una matriz **A** de orden $n \times n$ es **simétrica** cuando su matriz transpuesta $\mathbf{A}^T$ (donde las columnas y los renglones están intercambiados) es la misma que **A**, es decir, si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Es posible demostrar que si en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ la matriz **A** es simétrica y tiene elementos reales, entonces siempre podremos encontrar n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$, y la solución general de tal sistema es como la presentada en el teorema 8.2.1. Tal como se ilustró en el ejemplo 3, este resultado también es válido cuando algunos de los valores propios están repetidos.

Segunda solución Ahora suponga que λ_1 es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un vector propio asociado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución expresada en la siguiente forma

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}, \tag{12}$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}.$$

Para ver esto sustituimos (12) en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ y simplificamos:

$$(\mathbf{AK} - \lambda_1\mathbf{K})te^{\lambda_1 t} + (\mathbf{AP} - \lambda_1\mathbf{P} - \mathbf{K})e^{\lambda_1 t} = 0.$$

puesto que esta última ecuación es aplicable a todos los valores de t, debemos tener

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{13}$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}. \tag{14}$$

La ecuación (13) indica simplemente que **K** debe ser un vector propio de **A** asociado con λ_1. Cuando resolvemos (13), encontramos una solución $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$. Para encontrar la segunda solución $\mathbf{X}_2$ sólo necesitamos resolver el sistema adicional (14) para el vector **P**.

EJEMPLO 4 Valores propios repetidos

Encuentre la solución general del sistema dado en (10).

Solución A partir de (11) sabemos que $\lambda_1 = -3$ y que una solución es $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$. Cuando identificamos $\mathbf{K} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$, con base en la expresión (14) encontramos que ahora debemos resolver

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 6p_1 - 18p_2 &= 3 \\ 2p_1 - \ \ 6p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Puesto que este sistema evidentemente equivale a una ecuación, tenemos un número infinito de elecciones para p_1 y p_2. Por ejemplo, si elegimos $p_1 = 1$ obtenemos $p_2 = \frac{1}{6}$. No obstante, en aras de la simplicidad, elegiremos $p_1 = \frac{1}{2}$ de manera que $p_2 = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. Así que a partir de (12) encontramos

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}.$$

Entonces la solución general de (10) es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}\right]. \qquad \equiv$$

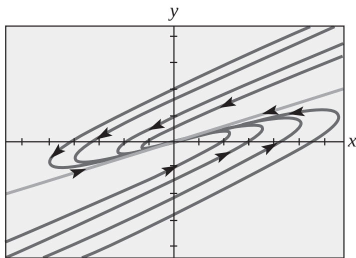


FIGURA 8.2.3 Retrato de fase del sistema (10)

Si en la solución del ejemplo 4 asignamos diferentes valores a c_1 y c_2, podremos trazar trayectorias del sistema dado en (10). En la **FIGURA 8.2.3** se muestra un retrato de fase de (10). Las soluciones $\mathbf{X}_1$ y $-\mathbf{X}_1$ determinan dos semirrectas $y = \frac{1}{3}x$, $x > 0$ y $y = \frac{1}{3}x$, $x < 0$, respectivamente, las cuales se muestran en la figura 8.2.3. Como el valor propio único es negativo y $e^{-3t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ en *cada* trayectoria, tenemos que $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ cuando $t \to \infty$. Esto es porque las puntas de flecha de la figura 8.2.3 indican que una partícula situada en cualquier trayectoria se mueve hacia el origen a medida que el tiempo aumenta y porque, en este caso, el origen es un atractor. Además, una partícula móvil ubicada en una trayectoria $x = 3c_1e^{-3t} + c_2(te^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-3t})$, $y = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}$, $c_2 \neq 0$, se acerca tangencialmente (0, 0) a una de las medias líneas conforme $t \to \infty$. En contraste, cuando el valor propio repetido es positivo, la situación se invierte y el origen es un repulsor. Vea el problema 21 en los ejercicios 8.2. Parecida a la figura 8.2.2, la figura 8.2.3 es característica de todos los sistemas lineales homogéneos de 2×2 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ que tienen dos valores propios negativos repetidos. Vea el problema 32 en los ejercicios 8.2.

Valor propio de multiplicidad tres Cuando la matriz de coeficientes **A** tiene un solo vector propio asociado a un valor propio λ_1 de multiplicidad tres, podemos encontrar una solución de la forma (12) y una tercera solución de la forma

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}, \tag{15}$$

donde
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Al sustituir (15) en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, encontramos que los vectores columna **K**, **P** y **Q** deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{16}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \tag{17}$$
y
$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}. \tag{18}$$

Por supuesto, las soluciones de (16) y (17) se pueden usar en la formación de las soluciones $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$.

EJEMPLO 5 Valores propios repetidos

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Solución La ecuación característica $(\lambda - 2)^3 = 0$ muestra que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio de multiplicidad tres. Al resolver $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ encontramos el vector propio único

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Después resolvemos en sucesión los sistemas $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$ y $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ y encontramos que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

A partir de (12) y (15), vemos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{2t}\right]. \equiv$$

Comentarios

Cuando un valor propio λ_1 tiene multiplicidad m, entonces podemos encontrar m vectores propios linealmente independientes o el número de vectores propios correspondientes es menor que m. Por lo tanto, los dos casos previstos en las páginas 407 y 408 no representan todas las posibilidades de que ocurra un valor propio repetido. Podría suceder, digamos, que una matriz de 5×5 tenga un valor propio de multiplicidad 5, y que existan tres vectores propios linealmente independientes correspondientes. Vea los problemas 31 y 49 en los ejercicios 8.2.

8.2.3 Valores propios complejos

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = -1$, son valores propios complejos de la matriz de coeficientes **A**, sin lugar a dudas podemos esperar que sus correspondientes vectores propios también tengan elementos complejos.*

Por ejemplo, la ecuación característica del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y \end{aligned} \tag{19}$$

es
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

A partir de la fórmula cuadrática encontramos que $\lambda_1 = 5 + 2i$, $\lambda_2 = 5 - 2i$.

Ahora para $\lambda_1 = 5 + 2i$ debemos resolver

$$\begin{aligned} (1-2i)k_1 - \qquad\quad k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1+2i)k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como $k_2 = (1 - 2i)k_1$,† la elección $k_1 = 1$ produce el siguiente vector propio y un vector solución:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}.$$

De manera similar, para $\lambda_2 = 5 - 2i$ tenemos

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Mediante el wronskiano podemos comprobar que estos vectores solución son linealmente independientes, y por lo tanto la solución general de (19) es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}. \tag{20}$$

Observe que los elementos de $\mathbf{K}_2$ correspondientes a λ_2 son los conjugados de los elementos de $\mathbf{K}_1$ correspondientes a λ_1. El conjugado de λ_1 es, por supuesto, λ_2. Expresamos esto como $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $\mathbf{K}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1$. Hemos ilustrado el siguiente resultado general.

Teorema 8.2.2 Soluciones correspondientes a un valor propio complejo

Sea **A** la matriz de coeficientes que tiene elementos reales del sistema homogéneo (2), y sea $\mathbf{K}_1$ un vector propio correspondiente al valor propio complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, α y β son reales. Entonces

$$\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$$

son soluciones de (2).

---

* Cuando la ecuación característica tiene coeficientes reales, los valores propios complejos siempre se presentan en pares conjugados.

† Observe que la segunda ecuación es simplemente la primera multiplicada por $(1 + 2i)$.

Es conveniente y relativamente fácil escribir de nuevo una solución como (20) en términos de funciones reales. Con este fin utilizamos primero la fórmula de Euler para escribir

$$e^{(5+2i)t} = e^{5t}e^{2ti} = e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$$

$$e^{(5-2i)t} = e^{5t}e^{-2ti} = e^{5t}(\cos 2t - i \operatorname{sen} 2t).$$

Luego, después de multiplicar los números complejos, recabar términos y reemplazar $c_1 + c_2$ por C_1, y $(c_1 - c_2)i$ por C_2, (20) se convierte en

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2, \tag{21}$$

donde $$\mathbf{X}_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{5t}$$

y $$\mathbf{X}_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{5t}.$$

Ahora es importante darnos cuenta de que los dos vectores $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ presentados en (21) son en sí mismos soluciones *reales* linealmente independientes. En consecuencia, ignorar la relación entre C_1, C_2 y c_1, c_2 está justificado, y podemos considerar C_1 y C_2 como completamente arbitrarios y reales. En otras palabras, la combinación lineal (21) es una solución general alternativa de (19).

El proceso descrito se puede generalizar. Sea $\mathbf{K}_1$ un vector propio de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (con elementos reales) correspondiente al valor propio complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Entonces los dos vectores solución presentados en el teorema 8.2.2 se pueden expresar como

$$\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} = \mathbf{K}_1e^{\alpha t}e^{i\beta t} = \mathbf{K}_1e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

$$\overline{\mathbf{K}}_1e^{\overline{\lambda}_1 t} = \overline{\mathbf{K}}_1e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = \overline{\mathbf{K}}_1e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t).$$

Con base en el principio de superposición, teorema 8.1.2, los siguientes vectores también son soluciones:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1e^{\overline{\lambda}_1 t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t - \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1e^{\overline{\lambda}_1 t}) = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\operatorname{sen} \beta t.$$

Para *todo* número complejo $z = a + ib$, tanto $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a$ como $\frac{i}{2}(-z + \bar{z}) = b$ son números *reales*. Por lo tanto, los elementos incluidos en los vectores columna $\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ e $\frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ son números reales. Al definir

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1), \tag{22}$$

se llega al teorema siguiente.

Teorema 8.2.3 Soluciones reales correspondientes a un valor propio complejo

Sea $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ un valor propio complejo de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en el sistema homogéneo (2), y $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ denotan los vectores columna definidos en (22). Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= [\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} \beta t]e^{\alpha t}\\ \mathbf{X}_2 &= [\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \operatorname{sen} \beta t]e^{\alpha t}\end{aligned} \tag{23}$$

son soluciones linealmente independientes de (2) en $(-\infty, \infty)$.

Las matrices $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ dadas en (22) a menudo se representan mediante

$$\mathbf{B}_1 = \text{Re}(\mathbf{K}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \text{Im}(\mathbf{K}_1) \tag{24}$$

puesto que estos vectores son, respectivamente, las partes *reales* e *imaginarias* del vector propio $\mathbf{K}_1$. Por ejemplo, (21) se deduce de (23) con

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \text{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \text{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 6 Valores propios complejos

Resuelva el problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Solución Primero obtenemos los valores propios de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$. Para λ_1 el sistema

$$\begin{aligned} (2 - 2i)k_1 + \qquad\quad 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2 - 2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

da $k_1 = -(2 + 2i)k_2$. Si establecemos $k_2 = -1$ obtenemos

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, con base en la expresión (24), formamos

$$\mathbf{B}_1 = \text{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \text{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\alpha = 0$, de (23) se deduce que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\text{sen } 2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\text{sen } 2t\right] \\ &= c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\,\text{sen } 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\,\text{sen } 2t \\ -\text{sen } 2t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26}$$

Algunas gráficas de las curvas o trayectorias definidas por la solución (26) del sistema se ilustran en el retrato de fase de la **FIGURA 8.2.4**. Ahora la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, o, de manera similar, $x(0) = 2$ y $y(0) = -1$ producen el sistema algebraico $2c_1 + 2c_2 = 2$, $-c_1 = -1$ cuya solución es $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Por lo tanto, la solución al problema es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\,\text{sen } 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$. La trayectoria específica definida en forma paramétrica mediante la solución particular $x = 2\cos 2t - 2\,\text{sen } 2t$, $y = -\cos 2t$ es la curva de la figura 8.2.4. Observe que esta curva pasa por $(2, -1)$. ≡

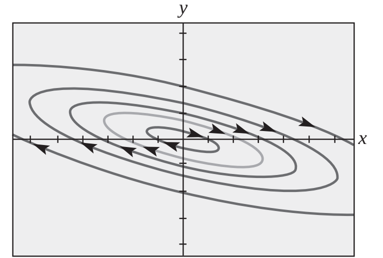


FIGURA 8.2.4 Retrato de fase del sistema (25) en el ejemplo 6

8.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

8.2.1 Valores propios reales distintos

En los problemas del 1 al 12, encuentre la solución general del sistema dado.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = x + 3y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = \frac{3}{4}x - 2y$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - z$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$, $\dfrac{dz}{dt} = y - z$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 7y$, $\dfrac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z$, $\dfrac{dz}{dt} = 5y + 2z$

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas 13 y 14, resuelva el PVI dado.

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 15 y 16, utilice un CAS o un programa de cómputo de álgebra lineal como apoyo para encontrar la solución general del sistema dado.

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0.9 & 2.1 & 3.2 \\ 0.7 & 6.5 & 4.2 \\ 1.1 & 1.7 & 3.4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1.8 & 0 \\ 0 & 5.1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3.1 & 4 & 0 \\ -2.8 & 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

17. *a*) Use un programa de cómputo para obtener el retrato de fase del sistema dado en el problema 5. Si fuera posible, incluya las puntas de flecha como en la figura 8.2.2. También incluya cuatro medias líneas en su retrato de fase.

b) Obtenga las ecuaciones cartesianas de cada una de las cuatro medias líneas incluidas en el inciso *a*).

c) Trace los vectores propios en su retrato de fase del sistema.

18. Encuentre los retratos de fase para los sistemas dados en los problemas 2 y 4. Para cada sistema, encuentre todas las trayectorias de media línea e incluya estas líneas en su retrato de fase.

8.2.2 Valores propios repetidos

En los problemas del 19 al 28, encuentre la solución general del sistema dado.

19. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y$

20. $\dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y$, $\dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y$

21. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y - z$, $\dfrac{dy}{dt} = x + y - z$, $\dfrac{dz}{dt} = x - y + z$

24. $\dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4z$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x + 2z$, $\dfrac{dz}{dt} = 4x + 2y + 3z$

25. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

26. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

27. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

28. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los ejercicios 29 y 30, resuelva el problema de valor inicial dado.

29. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

31. Demuestre que la matriz de 5×5

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad 5. Demuestre que se pueden encontrar tres vectores propios linealmente independientes correspondientes a λ_1.

Tareas para el laboratorio de cómputo

32. Encuentre los retratos de fase para los sistemas de los problemas 20 y 21. Para cada sistema, encuentre cualquier trayectoria de media línea e incluya estas líneas en su retrato de fase.

8.2.3 Valores propios complejos

En los problemas del 33 al 44, encuentre la solución general para el sistema dado.

33. $\dfrac{dx}{dt} = 6x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y$

34. $\dfrac{dx}{dt} = x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x - y$

35. $\dfrac{dx}{dt} = 5x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y$

36. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y$

37. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

38. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

39. $\dfrac{dx}{dt} = z$, $\dfrac{dy}{dt} = -z$, $\dfrac{dz}{dt} = y$

40. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2z$, $\dfrac{dy}{dt} = 3x + 6z$, $\dfrac{dz}{dt} = -4x - 3z$

41. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

42. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

43. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

44. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los ejercicios 45 y 46, resuelva el problema de valor inicial dado.

45. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

46. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Tareas para el laboratorio de cómputo

47. Encuentre los retratos de fase para los sistemas dados en los problemas 36 al 38.

48. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas lineales.

a) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Encuentre un retrato de fase de cada sistema. ¿Cuál es el significado geométrico de la línea $y = -x$ en cada retrato?

Problemas de análisis

49. Considere la matriz de 5×5 dada en el problema 31. Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ sin ayuda de métodos matriciales, pero exprese la solución general mediante notación matricial. Utilice la solución general como base para su análisis sobre cómo se puede resolver el sistema con los métodos matriciales explicados en esta sección. Desarrolle sus ideas.

50. Obtenga una ecuación cartesiana de la curva definida paramétricamente mediante la solución del sistema lineal del ejemplo 6. Identifique la curva que atraviesa $(2, -1)$ en la figura 8.2.4. [*Sugerencia:* Calcule x^2, y^2 y xy.]

51. Examine sus retratos de fase del problema 47. ¿En qué condiciones el retrato de fase de un sistema lineal homogéneo de 2×2 con valores propios complejos estará compuesto por una familia de curvas cerradas?, ¿por una familia de espirales? ¿En qué condiciones el origen (0, 0) es un repulsor?, ¿un atractor?

52. El sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{27}$$

describe el movimiento de dos sistemas acoplados resorte-masa (vea la figura 3.12.2). Ya hemos resuelto un caso especial de este sistema en las secciones 3.12 y 4.6. En este problema describimos aun otro método para resolver el sistema.

a) Demuestre que (27) se puede expresar como la ecuación matricial $\mathbf{X}'' = \mathbf{AX}$, donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

b) Si se supone que una solución es de la forma $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\omega t}$, demuestre que $\mathbf{X}'' = \mathbf{AX}$ produce

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \quad \text{donde} \quad \lambda = \omega^2.$$

c) Demuestre que si $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, una solución del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{it} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-it} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{\sqrt{6}it} + c_4\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-\sqrt{6}it}.$$

d) Demuestre que la solución del inciso *c)* puede escribirse como

$$\mathbf{X} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos t + b_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t + b_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\sqrt{6}t + b_4\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\operatorname{sen}\sqrt{6}t.$$

8.3 Solución mediante diagonalización

Introducción En esta sección consideraremos un método alternativo para resolver un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Este método es aplicable a un sistema como $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ siempre que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ sea diagonalizable.

Sistemas acoplados Un sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

en el cual cada x_1' se expresa como una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se dice que está **acoplado**. Si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces el sistema se puede **desacoplar** en cada x_1' únicamente en términos de x_i.

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n vectores propios linealmente independientes entonces, con base en el teorema 7.12.2, sabemos que podemos encontrar una matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Si sustituimos $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, entonces

$$\mathbf{PY}' = \mathbf{APY} \quad \text{o} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APY} \quad \text{o} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{DY}. \tag{2}$$

La última ecuación dada en (2) es lo mismo que

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Como $\mathbf{D}$ es diagonal, una inspección de (3) revela que este nuevo sistema no está acoplado: cada ecuación diferencial presente en el sistema es de la forma $y_i' = \lambda_i y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La solución de cada una de esas ecuaciones lineales es $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, la solución general de (3) se puede escribir como el vector columna

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Puesto que ahora conocemos $\mathbf{Y}$, y como la matriz $\mathbf{P}$ se puede construir a partir de los vectores propios de $\mathbf{A}$, la solución general del sistema original $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ se obtiene a partir de $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$.

EJEMPLO 1 Desacoplamiento de un sistema lineal

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ mediante diagonalización.

Solución Comenzaremos por encontrar los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz de coeficientes.

A partir de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 5)$, obtenemos $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 5$. Ya que los valores propios son distintos, los vectores propios son linealmente independientes. Cuando se resuelve $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2$ y 3 se obtiene, respectivamente,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Por lo tanto, una matriz que diagonaliza la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los elementos en la diagonal principal de **D** son los valores propios de **A** correspondientes al orden en que aparecen los vectores propios en **P**:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tal como ilustramos antes, la sustitución de $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ en $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ produce el sistema desacoplado $\mathbf{Y}' = \mathbf{DY}$. La solución general de este último sistema es inmediata:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución del sistema dado es

$$\mathbf{X} = \mathbf{PY} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ 2c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \end{pmatrix}. \qquad (6) \equiv$$

Observe que (6) puede escribirse en la forma acostumbrada mediante la expresión de la última matriz como una suma de matrices columna:

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

La solución mediante diagonalización funcionará siempre a condición de que podamos encontrar n vectores propios linealmente independientes de la matriz **A** de orden $n \times n$; los valores propios de **A** pueden ser reales y distintos, complejos o repetidos. El método fracasa cuando **A** tiene valores repetidos y los n vectores propios linealmente independientes no se pueden encontrar. Desde luego, en esta última situación **A** no es diagonalizable.

Puesto que hemos encontrado valores propios y vectores propios de **A**, este método equivale básicamente al procedimiento presentado en la sección previa.

En la sección siguiente veremos que la diagonalización también se puede usar para resolver sistemas lineales no homogéneos del tipo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$.

8.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas del 1 al 10, utilice la diagonalización para resolver el sistema dado.

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

2. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

4. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

11. En la figura 3.12.2 ilustramos cómo resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que

describe el movimiento de un sistema acoplado resorte-masa,

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{7}$$

en tres formas diferentes (vea el ejemplo 4 en la sección 3.12, el problema 52 en los ejercicios 8.2, y el ejemplo 1 en la sección 4.6). En este problema se conduce al lector a través de todos los pasos relacionados con la manera de resolver (7) mediante diagonalización.

a) Exprese (7) en la forma $\mathbf{MX}'' + \mathbf{KX} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Identifique las matrices **M** y **K** de 2 × 2. Explique por qué la matriz **M** tiene un inverso.

b) Exprese el sistema del inciso *a*) como

$$\mathbf{X}'' + \mathbf{BX} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Identifique la matriz **B**.

c) Resuelva el sistema (7) en el caso especial en que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$ mediante la resolución de (8) usando el método de diagonalización. En otras palabras, establezca $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$, donde **P** es una matriz cuyas columnas son vectores propios de **B**.

d) Demuestre que su solución **X** del inciso *c*) es la misma que la dada en el inciso *d*) del problema 52 en los ejercicios 8.2.

8.4 Sistemas lineales no homogéneos

Introducción Los métodos de **coeficientes indeterminados** y de **variación de parámetros** que se utilizaron en el capítulo 3 para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas pueden adaptarse a la resolución de sistemas lineales no homogéneos. De estos dos métodos, la variación de parámetros es la técnica más eficaz. No obstante, hay casos donde el método de coeficientes indeterminados ofrece un medio rápido para encontrar una solución particular.

En la sección 8.1, vimos que la solución general de un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ en un intervalo I es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ donde $\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$ es la función complementaria o solución general del sistema lineal homogéneo asociado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ y $\mathbf{X}_p$ es cualquier solución particular del sistema no homogéneo. Acabamos de ver en la sección 8.2 cómo obtener $\mathbf{X}_c$ cuando **A** era una matriz de constantes de orden $n \times n$; ahora consideraremos tres métodos para obtener $\mathbf{X}_p$.

8.4.1 Coeficientes indeterminados

Los supuestos Tal como vimos en la sección 3.4, el **método de coeficientes indeterminados** consiste en establecer conjeturas informadas acerca de la forma de un vector de solución particular $\mathbf{X}_p$; la conjetura está basada en los tipos de funciones que comprenden las entradas de la matriz columna $\mathbf{F}(t)$. No sorprende que la versión matricial de coeficientes indeterminados sea sólo aplicable a $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ cuando los elementos de **A** son constantes y los de $\mathbf{F}(t)$ son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos, o sumas finitas y productos de estas funciones.

EJEMPLO 1 Coeficientes indeterminados

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$] en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes **A**,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

produce los valores propios complejos $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$. Mediante los procedimientos de la sección pasada, encontramos

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Como ahora $\mathbf{F}(t)$ es un vector constante, suponemos un vector solución particular constante $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. Si sustituimos este último supuesto en el sistema original e igualamos los elementos obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -a_1 + 2b_1 - 8 \\ 0 &= -a_1 + \ \ b_1 + 3. \end{aligned}$$

Cuando resolvemos este sistema algebraico obtenemos $a_1 = 14$ y $b_1 = 11$, y por lo tanto la solución particular es $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$. La solución general del sistema original de ecuaciones diferenciales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 2 Coeficientes indeterminados

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución Los valores propios y los correspondientes vectores propios del sistema homogéneo asociado $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ se encuentran como $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la función complementaria es

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}.$$

Ahora, como $\mathbf{F}(t)$ se puede escribir como $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ intentaremos encontrar una solución particular del sistema que posea la *misma* forma:

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir este último supuesto en el sistema dado se tiene

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

o bien
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix}.$$

A partir de la última identidad, obtenemos cuatro ecuaciones algebraicas en cuatro incógnitas

$$\begin{aligned} 6a_2 + \ \ b_2 + \ \ 6 &= 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 6a_1 + \ \ b_1 - a_2 \qquad &= 0 \\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Cuando resolvemos las dos primeras ecuaciones de manera simultánea se produce $a_2 = -2$ y $b_2 = 6$. Entonces sustituimos estos valores en las últimas dos ecuaciones y resolvemos para a_1 y b_1. Los resultados son $a_1 = -\frac{4}{7}$, $b_1 = \frac{10}{7}$. Por lo tanto, de aquí se deduce que un vector solución particular es

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema en $(-\infty, \infty)$ es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 3 Forma de $\mathbf{X}_p$

Determinar la forma de un vector solución particular $\mathbf{X}_p$ para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7.$$

Solución Ya que $\mathbf{F}(t)$ se puede escribir en términos matriciales como

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

un supuesto natural para una solución particular sería

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

≡

Comentarios

El método de coeficientes indeterminados para sistemas lineales no es tan sencillo como parecen indicar los últimos tres ejemplos. En la sección 3.4, la forma de una solución particular y_p se basó en el conocimiento previo de la función complementaria y_c. Esto mismo resulta ser el caso para la formación de $\mathbf{X}_p$. Sin embargo, hay todavía más dificultades; las reglas especiales que rigen la forma de y_p en la sección 4.4 no llevan *completamente* a la formación de $\mathbf{X}_p$. Por ejemplo, si $\mathbf{F}(t)$ es un vector constante como en el ejemplo 1 y $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad uno, entonces $\mathbf{X}_c$ contiene un vector constante. Según la "regla de la multiplicación" dada en la página 124, por lo general intentaríamos encontrar una solución particular de la forma $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t$. Éste no es el supuesto adecuado para sistemas lineales; debe ser $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. Asimismo, en el ejemplo 3, si reemplazamos e^{-t} en $\mathbf{F}(t)$ por e^{2t} ($\lambda = 2$ es un valor propio), entonces la forma correcta del vector solución particular es

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Detendremos aquí el análisis de estas dificultades, y nos concentraremos en el método de variación de parámetros.

8.4.2 Variación de parámetros

Matriz fundamental Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en un intervalo I, entonces su solución general en el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$, o

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La última matriz incluida en (1) se reconoce como el producto de una matriz de orden $n \times n$ y una matriz de $n \times 1$. En otras palabras, la solución general (1) se puede escribir como el producto

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{C}$ es el vector columna $n \times 1$ de constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$, y la matriz de orden $n \times n$, cuyas columnas consisten en los elementos de los vectores solución del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

se denomina **matriz fundamental** del sistema en el intervalo.

En el siguiente análisis, debemos usar dos propiedades de una matriz fundamental:

- Una matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular.
- Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, entonces

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A\Phi}(t). \tag{3}$$

Un nuevo análisis de la expresión (9) del teorema 8.1.3 muestra que $\mathbf{\Phi}(t)$ es el mismo que el wronskiano $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Por lo tanto, la independencia lineal de las columnas de $\mathbf{\Phi}(t)$ en el intervalo I garantiza que $\mathbf{\Phi}(t) \neq 0$ para toda t en el intervalo. Como $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular, el inverso multiplicativo $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ existe para toda t incluida en el intervalo. El resultado dado en (3) se deduce directamente del hecho de que toda columna de $\mathbf{\Phi}(t)$ es un vector solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

■ Variación de parámetros De manera similar al procedimiento de la sección 3.5, nos preguntamos si es posible reemplazar la matriz de constantes $\mathbf{C}$ en (2) por una matriz columna de funciones

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{de manera que} \qquad \mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t) \tag{4}$$

es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t). \tag{5}$$

En virtud de la regla del producto, la derivada de la última expresión incluida en (4) es

$$\mathbf{X}_p' = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{U}(t). \tag{6}$$

Observe que en (6) el orden de los productos es muy importante. Como $\mathbf{U}(t)$ es una matriz columna, los productos $\mathbf{U}'(t)\mathbf{\Phi}(t)$ y $\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}'(t)$ no están definidos. Al sustituir (4) y (6) en (5) se tiene

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{7}$$

Ahora, si utilizamos (3) para reemplazar $\mathbf{\Phi}'(t)$, (7) se convierte en

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t)$$

o

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t). \tag{8}$$

Cuando ambos lados de la ecuación (8) se multiplican por $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ se tiene

$$\mathbf{U}'(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad \text{y, por lo tanto,} \quad \mathbf{U}(t) = \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt.$$

Como $\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t)$, concluimos que una solución particular de (5) es

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt. \tag{9}$$

Para calcular la integral indefinida de la matriz columna $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$ en (9), integramos cada elemento. Por lo tanto, la solución general del sistema (5) es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt. \tag{10}$$

EJEMPLO 4 Variación de parámetros

Encuentre la solución general del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución Primero resolvemos el sistema homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{12}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0,$$

de manera que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. Aplicando el método acostumbrado, encontramos que los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2 son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores solución del sistema homogéneo (12) son entonces

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Los elementos presentes en $\mathbf{X}_1$ forman la primera columna de $\mathbf{\Phi}(t)$, y los elementos incluidos en $\mathbf{X}_2$ forman la segunda columna de $\mathbf{\Phi}(t)$. Por lo tanto,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

De la expresión (9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de (10), la solución general de (11) en el intervalo es

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{-t}.
\end{aligned}$$

≡

Problema de valor inicial La solución general del sistema no homogéneo (5) en un intervalo se puede escribir de una forma alternativa

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\, ds, \tag{13}$$

donde t y t_0 son los puntos en el intervalo. La última forma resulta útil para la solución de (5) sujeta a una condición inicial $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, porque los límites de integración se eligen de manera que la solución particular desaparezca en $t = t_0$. Cuando se sustituye $t = t_0$ en (13) resulta $\mathbf{X}_0 = \mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{C}$, de la cual obtenemos $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0$. Si sustituimos este último resultado en (13) resulta la siguiente solución del problema de valor inicial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\,\mathbf{X}_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\, ds. \tag{14}$$

8.4.3 Diagonalización

Los supuestos Al igual que en la sección 8.3, si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ posee n vectores propios linealmente independientes, entonces podemos utilizar la diagonalización para desacoplar el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$. Suponga que $\mathbf{P}$ es una matriz tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Por sustitución de $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ en el sistema no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ se tiene

$$\mathbf{PY}' = \mathbf{APY} + \mathbf{F} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APY} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{DY} + \mathbf{G}. \tag{15}$$

En la última ecuación presentada en (15), $\mathbf{G} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}$ es un vector columna. De manera que cada ecuación diferencial incluida en este nuevo sistema tiene la forma $y_i' = \lambda_i y_i + g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero observe que, a diferencia del procedimiento utilizado para resolver un sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, ahora se nos pide calcular el inverso de la matriz $\mathbf{P}$.

EJEMPLO 2 Diagonalización

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ mediante diagonalización.

Solución Los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz de coeficientes son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, encontramos $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Mediante la sustitución $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t \\ \frac{7}{5}e^t \end{pmatrix}$$

el sistema desacoplado es

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{Y} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t \\ \frac{7}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales

$$y_1' = \tfrac{1}{5}e^t \qquad \text{y} \qquad y_2' = 5y_2 + \tfrac{7}{5}e^t$$

son $y_1 = \frac{1}{5}e^t + c_1$ y $y_2 = -\frac{7}{20}e^t + c_2e^{5t}$ respectivamente. Por lo tanto, la solución del sistema original es

$$\mathbf{X} = \mathbf{PY} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t + c_1 \\ -\frac{7}{20}e^t + c_2e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t + c_1 + 2c_2e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t - 2c_1 + c_2e^{5t} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Escrito de la manera acostumbrada mediante vectores columna, (16) es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}e^t.$$ ≡

8.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

8.4.1 Coeficientes indeterminados

En los problemas del 1 al 8, utilice el método de coeficientes indeterminados para resolver el sistema dado.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y - 7$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 5$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 9y + 2$, $\dfrac{dy}{dt} = -x + 11y + 6$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t + 5 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4t + 9e^{6t} \\ -t + e^{6t} \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}e^t$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix}$

9. Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sujeto a $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10. ***a***) El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ presentes en la red eléctrica mostrada en la **FIGURA 8.4.1** es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/L_1 & -R_1/L_1 \\ -R_1/L_2 & -(R_1 + R_2)/L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_1 \\ E/L_2 \end{pmatrix}.$$

Utilice el método de coeficientes indeterminados para resolver el sistema si $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E = 60$ V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

b) Determine la corriente $i_1(t)$.

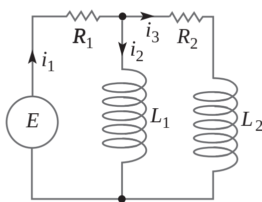


FIGURA 8.4.1 Red para el problema 10

8.4.2 Variación de parámetros

En los problemas del 11 al 30, utilice la variación de parámetros para resolver el sistema dado.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4t$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t/2}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}e^{2t}$

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}t$

18. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}e^t$

23. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^t$

24. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\dfrac{e^{-2t}}{t}$

25. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \tan t \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ \cot t \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}e^t$

28. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \tan t \\ 1 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^t \end{pmatrix}$

En los problemas 31 y 32, utilice (14) para resolver el problema de valor inicial dado.

31. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

32. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{X}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

33. El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ presentes en la red eléctrica de la **FIGURA 8.4.2** es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilice variación de parámetros para resolver el sistema si $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E(t) = 100$ sen t V, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

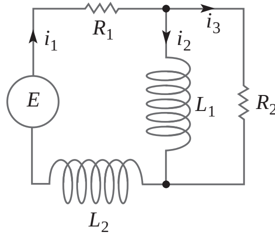


FIGURA 8.4.2 Red para el problema 33

Tareas para el laboratorio de cómputo

34. Resuelva un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ mediante variación de parámetros cuando $\mathbf{A}$ es una matriz de 3×3 (o mayor) es una tarea casi imposible de realizar a mano. Considere el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} te^t \\ e^{-t} \\ e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Utilice un CAS o algún programa computacional de álgebra lineal para encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz de coeficientes.

b) Forme una matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ y utilice la computadora para encontrar $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

c) Utilice la computadora para realizar los cálculos de $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$, $\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, $\mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ y $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, donde $\mathbf{C}$ es una matriz columna de constantes c_1, c_2, c_3 y c_4.

d) Vuelva a escribir el resultado de la computadora para la solución general del sistema en la forma $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$, donde $\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_4$.

8.4.3 Diagonalización

En los problemas del 35 al 38, utilice la diagonalización para resolver el sistema dado.

35. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 21 & -8 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

37. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2t \\ 8 \end{pmatrix}$

38. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8e^{-2t} \end{pmatrix}$

8.5 Matriz exponencial

Introducción Las matrices pueden utilizarse en una forma enteramente distinta para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Recuerde que la simple ecuación diferencial lineal de primer orden $x' = ax$, donde a es una constante, tiene la solución general $x = ce^{at}$. Por lo tanto, parece natural preguntar si podemos definir una matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de constantes, de manera que $e^{\mathbf{A}t}$ sea una solución del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

Sistemas homogéneos Ahora veremos que es posible definir una **matriz exponencial** $e^{\mathbf{A}t}$ de manera que el sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de constantes y de orden $n \times n$, tenga una solución

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}. \tag{1}$$

Como $\mathbf{C}$ ha de ser una matriz columna $n \times 1$ de constantes arbitrarias, queremos que $e^{\mathbf{A}t}$ sea una matriz de orden $n \times n$. A pesar de que el desarrollo completo del significado y de la teoría de la matriz exponencial requeriría un conocimiento detallado de álgebra matricial, una forma de definir $e^{\mathbf{A}t}$ está inspirada en la representación en series de potencias de la función escalar e^{at}:

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k\frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\frac{t^k}{k!}. \tag{2}$$

La serie presentada en (2) converge para toda t. Mediante estas series, con 1 reemplazado por la identidad $\mathbf{I}$ y la constante a reemplazada por una matriz $\mathbf{A}$ de constantes y de orden $n \times n$, llegamos a la definición para la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ de orden $n \times n$.

Definición 8.5.1 Matriz exponencial

Para toda matriz **A** de orden $n \times n$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}. \tag{3}$$

Es posible demostrar que las series dadas en (3) convergen en una matriz de orden $n \times n$ para todo valor de t. También, en (3), $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)$, y así sucesivamente.

■ **Derivada de $e^{\mathbf{A}t}$** La derivada de la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ es análoga a la del exponencial escalar, es decir, $d/dt\, e^{at} = ae^{at}$. Para justificar

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \tag{4}$$

diferenciamos (3) término por término:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} + \cdots\right] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 + \cdots$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

En virtud de (4), es posible demostrar ahora que (1) es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ para todo vector **C** de $n \times 1$ constantes:

$$\mathbf{X}' = \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}) = \mathbf{AX}. \tag{5}$$

■ **$e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental** Si denotamos la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ mediante el símbolo $\mathbf{\Psi}(t)$, entonces (4) es equivalente a la ecuación matricial diferencial $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A\Psi}$ (vea la expresión (3) de la sección 8.4). Además, a partir de la definición 8.5.1 se deduce inmediatamente que $\mathbf{\Psi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$ y, por lo tanto, $\mathbf{\Psi}(0) \neq 0$. Resulta que estas dos propiedades son suficientes para poder concluir que $\mathbf{\Psi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

■ **Sistemas no homogéneos** Hemos visto en la expresión (4) de la sección 2.3 que la solución general de la única ecuación diferencial lineal de primer orden $x' = ax + f(t)$, donde a es una constante, se puede expresar como

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-as} f(s)\, ds.$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es posible demostrar que la solución general de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$, donde **A** es una matriz de constantes de orden $n \times n$, es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\, \mathbf{F}(s)\, ds. \tag{6}$$

Puesto que la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental, siempre es no singular y $e^{-\mathbf{A}s} = (e^{\mathbf{A}s})^{-1}$. Observe que $e^{-\mathbf{A}s}$ se puede obtener de $e^{\mathbf{A}t}$ si t se reemplaza por $-s$.

■ **Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$** La definición de $e^{\mathbf{A}t}$ dada en (3) puede, desde luego, usarse siempre para efectuar su cálculo. No obstante, la utilidad práctica de (3) está limitada por el hecho de que los elementos presentes en $e^{\mathbf{A}t}$ son series de potencias en t. Con el deseo natural de trabajar con cosas simples y conocidas, intentaremos reconocer si estas series definen una función de forma cerrada. Vea los problemas del 1 al 4 en los ejercicios 8.5. Por fortuna, hay muchas formas alternativas para calcular $e^{\mathbf{A}t}$. En el análisis siguiente delineamos dos de estos métodos.

Uso de la transformada de Laplace Vimos en (5) que $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. De hecho, como $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}, \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}. \tag{7}$$

Si $\mathbf{x}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{X}(t)\} = \mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$, entonces la transformada de Laplace de (7) es

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) \quad \text{o} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{I}.$$

Cuando multiplicamos la última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ resulta que $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. En otras palabras, $\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ o

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}. \tag{8}$$

EJEMPLO 1 Matriz exponencial

Use la transformada de Laplace para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución Primero calculamos la matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ y después su inversa:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+2}{s(s+1)} & \dfrac{-1}{s(s+1)} \\ \dfrac{2}{s(s+1)} & \dfrac{s-1}{s(s+1)} \end{pmatrix}.$$

Entonces descomponemos los elementos de la última matriz en fracciones parciales:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s} - \dfrac{2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Cuando se calcula la transformada inversa de Laplace de (9) se obtiene el resultado deseado,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 2 - e^{-t} & -1 + e^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} & -1 + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

≡

Uso de potencias $\mathbf{A}^m$ En la sección 7.9 desarrollamos un método para calcular una potencia arbitraria $\mathbf{A}^k$, k es un entero no negativo, de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$. Recuerde de la sección 7.9 que podemos escribir

$$\mathbf{A}^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{A}^j \qquad \text{y} \qquad \lambda^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \lambda^j, \tag{10}$$

donde los coeficientes c_j son los mismos en cada expresión y que la última es válida para los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{A}$. Suponemos aquí que los valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos. Si determinamos que $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en la segunda expresión dada en (10), estaremos en condiciones de encontrar c_j en la primera expresión al resolver n ecuaciones en n incógnitas. En el siguiente desarrollo será conveniente enfatizar el hecho de que los coeficientes c_j en (10) dependen de la potencia k reemplazando c_j por $c_j(k)$. Con base en (3) y (2), tenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \qquad \text{y} \qquad e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!}. \tag{11}$$

Después usamos (10) en (11) para reemplazar $\mathbf{A}^k$ y λ^k como sumas finitas seguidas por un intercambio en el orden de las sumas

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(k)\mathbf{A}^j\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}c_j(k)\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}^j b_j(t) \tag{12}$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(k)\lambda^j\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}c_j(k)\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j b_j(t), \tag{13}$$

donde $b_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(t^k/k!)c_j(k)$. Similar a la forma en que usamos los valores propios de $\mathbf{A}$ en (10) para determinar c_j, aplicamos una vez más los valores propios, pero esta vez en la suma finita (13) para determinar un sistema de ecuaciones que determine b_j; estos coeficientes, a su vez, se utilizan en (12) para establecer $e^{\mathbf{A}t}$.

EJEMPLO 2 Matriz exponencial

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución Ya vimos la matriz $\mathbf{A}$ en la sección 7.9, y encontramos que sus valores propios eran $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. Ahora, como $\mathbf{A}$ es una matriz de 2×2, a partir de (12) y (13) deducimos que

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad e^{\lambda t} = b_0 + b_1\lambda. \tag{14}$$

Si establecemos $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ en la segunda ecuación de (14), obtenemos dos ecuaciones en las dos incógnitas b_0 y b_1. Cuando se resuelve el sistema

$$e^{-t} = b_0 - b_1$$
$$e^{2t} = b_0 + 2b_1$$

produce $b_0 = \frac{1}{3}[e^{2t} + 2e^{-t}]$, $b_1 = \frac{1}{3}[e^{2t} - e^{-t}]$. Al sustituir estos valores en la primera ecuación de (14) y simplificar los elementos resulta

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t} & \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{15}$$ ≡

En los problemas del 25 al 28 de los ejercicios 8.5 mostramos cómo calcular la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ cuando la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable (vea la sección 7.12).

Uso de la computadora Para aquellos que estén dispuestos a cambiar la comprensión en aras de la velocidad de encontrar una solución, $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse en una forma automática con ayuda de un programa de cómputo; por ejemplo, en *Mathematica*, la función **MatrixExp[A t]** determina la matriz exponencial para una matriz elevada al cuadrado **At**; en *Maple*, el comando es **exponential(A, t)**; en MATLAB la función es `expm(At)`. Vea los problemas 27 y 28 en los ejercicios 8.5.

8.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas 1 y 2, utilice (3) para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ y $e^{-\mathbf{A}t}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 3 y 4, utilice (3) para calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas del 5 al 8, utilice (1) y los resultados obtenidos en los problemas del 1 al 4 para encontrar la solución general del sistema dado.

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **6.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **8.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas del 9 al 12, utilice (6) para encontrar la solución general del sistema dado.

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **10.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix}$

13. Resuelva el sistema del problema 7 sujeto a la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

14. Resuelva el sistema del problema 9 sujeto a la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En los problemas del 15 al 18, utilice el método del ejemplo 1 para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para la matriz de coeficientes. Utilice (1) para encontrar la solución general del sistema dado.

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **16.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

17. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **18.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas del 19 al 22, utilice el método del ejemplo 2 para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para la matriz de coeficientes. Use (1) para encontrar la solución general del sistema dado.

19. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **20.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

21. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **22.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\mathbf{X}$

23. Si la matriz $\mathbf{A}$ se puede diagonalizar, entonces $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ o $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Utilice este último resultado y (3) para demostrar que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$.

24. Utilice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ y (3) para demostrar que

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 25 y 26, use los resultados de los problemas 23 y 24 para resolver el sistema dado.

25. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **26.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Tareas para el laboratorio de cómputo

27. ***a)*** Aplique (1) para encontrar la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Use un CAS para encontrar $e^{\mathbf{A}t}$ y después la computadora para determinar los valores propios y los vectores propios de la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y la forma de la solución general del tipo mostrado en la sección 8.2. Por último, haga coincidir las dos formas de la solución general del sistema.

b) Utilice (1) para encontrar la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Mediante un CAS, encuentre $e^{\mathbf{A}t}$. En el caso de obtener un resultado complejo, utilice un programa computacional para hacer la simplificación; por ejemplo en *Mathematica*, si **m=MatrixExp[A t]** tiene elementos complejos, intente entonces con el comando **Simplify[Complex Expand[m]]**.

28. Utilice (1) para encontrar la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Mediante un CAS, encuentre $e^{\mathbf{A}t}$.

Problemas de análisis

29. Lea nuevamente el análisis que condujo al resultado dado en (8). ¿La matriz $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ tiene siempre un inverso? Analice este planteamiento.

30. En los ejercicios 7.9 vimos que una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ y distinta de cero es una matriz **nilpotente** si m es el entero positivo más pequeño tal que $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$. Compruebe que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es nilpotente. Analice por qué resulta relativamente fácil calcular $e^{\mathbf{A}t}$ cuando $\mathbf{A}$ es nilpotente. Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ para la matriz dada y después use (2) para resolver el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

8 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas 1 y 2, llene los espacios en blanco.

1. El vector $\mathbf{X} = k\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema lineal de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $k =$ _____.

2. El vector $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-9t} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}e^{7t}$ es una solución del problema de valor inicial $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ para $c_1 =$ _____ y $c_2 =$ _____.

3. Considere el sistema lineal $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Sin intentar resolver el sistema, ¿cuál de los siguientes vectores,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

es un vector propio de la matriz de coeficientes? ¿Cuál es la solución del sistema correspondiente a este vector propio?

4. Considere el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de dos ecuaciones diferenciales donde $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes real. ¿Cuál es la solución general del sistema si se sabe que $\lambda_1 = 1 + 2i$ es un valor propio y $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente?

En los problemas del 5 al 14, resuelva el sistema lineal dado mediante los métodos de este capítulo.

5. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$

$\dfrac{dy}{dt} = -x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y$

$\dfrac{dy}{dt} = 2x - 4y$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 16t \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \tan t \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ \cot t \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

15. *a*) Considere el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de estas tres ecuaciones diferenciales de primer orden donde la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix},$$

y se sabe que $\lambda = 2$ es un valor propio de multiplicidad dos. Encuentre dos soluciones diferentes del sistema correspondientes a este valor propio sin utilizar ninguna fórmula especial [tal como (12) de la sección 8.2].

b) Aplique el procedimiento usado en el inciso *a*) para resolver

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

16. Compruebe que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}e^t$ es una solución del sistema lineal $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ para las constantes arbitrarias c_1 y c_2. A mano, trace un retrato de fase del sistema.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

9

Estructura del capítulo

En el capítulo 8 nos enfocamos en el estudio de las técnicas apropiadas para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$. Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal, normalmente no se pueden encontrar soluciones en términos de funciones elementales. En el presente capítulo estudiaremos que se puede obtener información muy valiosa acerca de la naturaleza geométrica de las soluciones analizando en primera instancia las soluciones constantes especiales llamadas **puntos críticos** y, después, buscando las soluciones periódicas denominadas **ciclos límite**. Se presentará el importante concepto de **estabilidad** y se ilustrará con ejemplos de los campos de la física y la biología.

9.1 Sistemas autónomos

Introducción En la sección 2.1 presentamos las nociones acerca de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, los puntos críticos de una ecuación diferencial autónoma, y la estabilidad de un punto crítico. Este estudio anticipado de la estabilidad se mantuvo a propósito a nivel muy intuitivo; ya es tiempo de proporcionar una definición precisa de este concepto. Para tal efecto, necesitamos examinar los *sistemas* autónomos de ecuaciones diferenciales de primer orden. En esta sección definimos los puntos críticos de sistemas autónomos de dos ecuaciones diferenciales de primer orden; los sistemas autónomos pueden ser lineales o no lineales.

Sistemas autónomos A un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se le llama **autónomo** cuando puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \quad &\qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que la variable independiente t no se muestra en forma explícita en el segundo miembro de cada ecuación diferencial. Compare (1) con el sistema general proporcionado en la expresión (2) de la sección 8.1.

EJEMPLO 1 Un sistema no autónomo

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden

dependencia de t

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 3x_2 + t^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= t\, x_1 (\operatorname{sen} x_2 t) \end{aligned}$$

dependencia de t

es *no* autónomo debido a la presencia de t en el segundo miembro de ambas ecuaciones diferenciales. ≡

Cuando $n = 1$ en (1), una sola ecuación diferencial de primer orden toma la forma $dx/dt = g(x)$. Esta última ecuación es equivalente a la ecuación (1) de la sección 2.1, donde los símbolos x y t hacen las veces de y y x, respectivamente. Es posible construir soluciones explícitas, ya que la ecuación diferencial $dx/dt = g(x)$ es separable, y utilizaremos tal característica para presentar los conceptos de este capítulo.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden como un sistema Cualquier ecuación diferencial de segundo orden $x'' = g(x, x')$ puede escribirse como un sistema autónomo. Tal como se hizo en la sección 3.7, si establecemos $y = x'$ entonces $x'' = g(x, x')$ se convierte en $y' = g(x, y)$. Por lo tanto, la ecuación diferencial de segundo orden se convierte en el sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 La ecuación diferencial del péndulo como sistema autónomo

En la ecuación (6) de la sección 3.11 demostramos que el ángulo de desplazamiento θ de un péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0.$$

Si establecemos $x = \theta$ y $y = \theta'$, esta segunda ecuación diferencial de segundo orden puede reescribirse como el sistema autónomo

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x. \end{aligned}$$

≡

Si $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ expresan los vectores columna respectivos

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema autónomo (1) puede escribirse en la compacta **forma de vector columna** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. El sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ estudiado en la sección 8.2 es un caso especial importante.

Asimismo, en este capítulo es conveniente escribir (1) utilizando vectores renglón. Si establecemos

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

entonces el sistema autónomo (1) también puede escribirse en la compacta **forma de vector renglón** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. Debe quedar claro, a partir del contexto, si estamos utilizando la forma de vector columna o la forma de vector renglón y, por lo tanto, no haremos distinción alguna entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}^T$, la transpuesta de $\mathbf{X}$. En particular, cuando $n = 2$, resulta conveniente utilizar la forma de vector renglón y escribir una condición inicial como $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$.

Cuando la variable t se interpreta como tiempo, podemos referirnos al sistema de ecuaciones diferenciales (1) como un **sistema dinámico** y a una solución $\mathbf{X}(t)$ como el **estado del sistema** o la **respuesta del sistema** en el tiempo t. Con esta terminología, un sistema dinámico es autónomo cuando la velocidad $\mathbf{X}'(t)$ a la que el sistema varía depende sólo del estado presente $\mathbf{X}(t)$ del sistema. El sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ estudiado en el capítulo 8 es entonces autónomo cuando $\mathbf{F}(t)$ es constante. Cuando $n = 2$ o $n = 3$, a la solución se le llama **trayectoria** o **ruta**, ya que podemos pensar en $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$, $z = x_3(t)$ como si fueran las ecuaciones paramétricas de una curva.

■ **Interpretación del campo vectorial** Cuando $n = 2$, el sistema (1) se denomina **sistema autónomo plano** y se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned}$$

El vector $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ define un **campo vectorial** en una región del plano, y una solución del sistema puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula a medida que se desplaza por la región. Para ser más específicos, expresemos $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ como la velocidad de una corriente en la posición (x, y), y supongamos que una pequeña partícula (tal como un corcho) se libera en la posición (x_0, y_0) de la corriente. Si $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ expresa la posición de la partícula en el tiempo t, entonces $\mathbf{X}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es el vector velocidad $\mathbf{v}$. Cuando no están presentes fuerzas externas y se ignoran las fuerzas

de fricción, la velocidad de la partícula en el tiempo t es la velocidad de la corriente en la posición $\mathbf{X}(t)$; esto es, $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t))$, o

$$\frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t))$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)).$$

Por lo tanto, la trayectoria de la partícula es una solución del sistema que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$. A menudo haremos referencia a esta sencilla interpretación de un sistema autónomo plano para ilustrar nuevos conceptos.

EJEMPLO 3 Sistema autónomo plano de un campo vectorial

Un campo vectorial para el flujo en estado estable de un fluido alrededor de un cilindro de radio 1 está dado por,

$$\mathbf{V}(x, y) = V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right),$$

donde V_0 es la velocidad del fluido en la parte más lejana al cilindro. Si se coloca un pequeño corcho en $(-3, 1)$, la trayectoria $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ del corcho satisface el sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = V_0\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

sujeto a la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (-3, 1)$. Véase la **FIGURA 9.1.1**. ≡

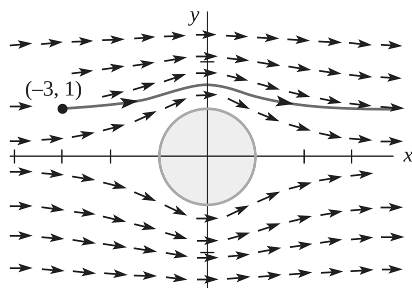


FIGURA 9.1.1 Campo vectorial del flujo de un fluido alrededor de un cilindro del ejemplo 3

■ **Tipos de soluciones** Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$, y las derivadas parciales de primer orden $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ y $\partial Q/\partial y$ son continuas en una región R del plano, entonces una solución del sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ es única y constituye uno de los tres tipos básicos:

i) Una **solución constante** $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (o $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$ para toda t). Una solución constante se llama **punto crítico** o **punto estacionario**. Cuando una partícula se coloca en un punto crítico $\mathbf{X}_0$ (esto es, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$), permanece ahí indefinidamente. Por esta razón, una solución constante se conoce también como **solución de equilibrio**. Observe esto: debido a que $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{0}$, un punto crítico es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas

$$P(x, y) = 0$$
$$Q(x, y) = 0.$$

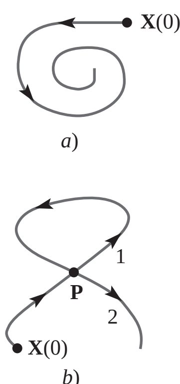


FIGURA 9.1.2 La curva mostrada en *a*) se llama arco

ii) Una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define un **arco**: una curva plana que *no* se cruza a sí misma. Por lo tanto, la curva de la **FIGURA 9.1.2*a*)** puede ser una solución de un sistema autónomo plano, mientras que la curva de la figura 9.1.2*b*) no puede ser una solución. Habría *dos soluciones* que comenzarían a partir del punto **P** de la intersección.

iii) Una **solución periódica** $x = x(t)$, $y = y(t)$. Se le llama **ciclo** a una solución periódica. Si p es el periodo de la solución, entonces $\mathbf{X}(t + p) = \mathbf{X}(t)$, y una partícula colocada sobre la curva en $\mathbf{X}_0$ viajará por la curva y regresará a $\mathbf{X}_0$ en p unidades de tiempo. Consulte la **FIGURA 9.1.3**.

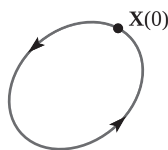


FIGURA 9.1.3 Solución periódica o un ciclo

EJEMPLO 4 Búsqueda de los puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos de los sistemas autónomos planos siguientes.

a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$

b) $x' = x^2 + y^2 - 6$, $y' = x^2 - y$

c) $x' = 0.01x(100 - x - y)$, $y' = 0.05y(60 - y - 0.2x)$

Solución Encuentre los puntos críticos igualando a cero el segundo miembro de ambas ecuaciones diferenciales.

***a*)** La solución del sistema

$$-x + y = 0$$
$$x - y = 0$$

está formada por todos los puntos ubicados sobre la línea $y = x$. Por lo tanto, existe un número infinito de puntos críticos.

***b*)** Para resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - 6 = 0$$
$$x^2 - y = 0$$

sustituimos la segunda ecuación, $x^2 = y$, en la primera para obtener $y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2) = 0$. Si $y = -3$, entonces $x^2 = -3$, por lo que no existen soluciones reales. Si $y = 2$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$, y así los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$.

***c*)** Para encontrar los puntos críticos se requiere de una cuidadosa consideración de los casos. La ecuación $0.01x(100 - x - y) = 0$ implica que $x = 0$ o $x + y = 100$.

Si $x = 0$, entonces al sustituir en $0.05y(60 - y - 0.2x) = 0$ tenemos $y(60 - y) = 0$. Por lo tanto, $y = 0$ o 60, y de este modo (0, 0) y (0, 60) son los puntos críticos.

Si $x + y = 100$, entonces $0 = y(60 - y - 0.2(100 - y)) = y(40 - 0.8y)$. De aquí se deduce que $y = 0$ o 50, y así (100, 0) y (50, 50) son los puntos críticos. ≡

Cuando el sistema autónomo plano es lineal, podemos utilizar los métodos del capítulo 8 para investigar las soluciones.

EJEMPLO 5 Búsqueda de las soluciones periódicas

Determine si el sistema dinámico lineal dado tiene una solución periódica.

***a*)** $x' = 2x + 8y$, $y' = -x - 2y$ ***b*)** $x' = x + 2y$, $y' = -\frac{1}{2}x + y$

En cada caso, trace la gráfica de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$.

Solución

***a*)** En el ejemplo 6 de la sección 8.2, utilizamos el método del valor propio-vector propio para demostrar que

$$x = c_1(2 \cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t) + c_2(2 \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t)$$
$$y = c_1(-\cos 2t) - c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Por lo tanto, toda solución es periódica con periodo $p = \pi$. La solución que satisface $\mathbf{X(0)} = (2, 0)$ es

$$x = 2 \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t, \quad y = -\operatorname{sen} 2t.$$

Esta solución genera la elipse que se muestra en la **FIGURA 9.1.4*a*)**.

***b*)** Utilizamos el método de valores y vectores propios para demostrar que

$$x = c_1(2e^t \cos t) + c_2(2e^t \operatorname{sen} t), \quad y = c_1(-e^t \operatorname{sen} t) + c_2(e^t \cos t).$$

Debido a la presencia de e^t en la solución general, no existen soluciones periódicas (esto es, ciclos). La solución que satisface $\mathbf{X(0)} = (2, 0)$ es

$$x = 2e^t \cos t, \quad y = -e^t \operatorname{sen} t,$$

y la curva resultante se muestra en la figura 9.1.4*b*). ≡

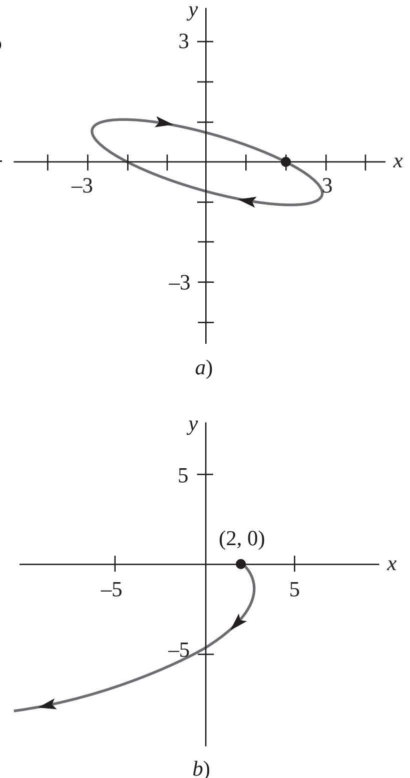


FIGURA 9.1.4 Curvas solución del ejemplo 5

■ Conversión a coordenadas polares Excepto para el caso de soluciones constantes, en general no es posible encontrar expresiones explícitas para las soluciones de un sistema autónomo *no lineal*. Sin embargo, podemos solucionar algunos sistemas no lineales convirtiéndolos a coordenadas polares. A partir de las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right). \tag{2}$$

A veces podemos utilizar (2) para convertir un sistema autónomo plano dado en coordenadas rectangulares a un sistema más simple en coordenadas polares.

EJEMPLO 6 Conversión a coordenadas polares

Encuentre la solución del sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$.

Solución Al sustituir dx/dt y dy/dt en las expresiones para dr/dt y $d\theta/dt$ en (2), se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}[x(-y - xr) + y(x - yr)] = -r^2$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}[-y(-y - xr) + x(x - yr)] = 1.$$

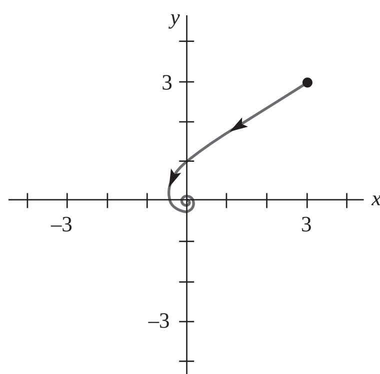


FIGURA 9.1.5 Curva solución del ejemplo 6

Puesto que (3, 3) es $(3\sqrt{2}, \pi/4)$ en coordenadas polares, la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$ se convierte en $r(0) = \sqrt{2}$ y $\theta(0) = \pi/4$. Utilizando la separación de variables podemos observar que la solución del sistema es

$$r = \frac{1}{t + c_1}, \quad \theta = t + c_2,$$

para $r \neq 0$. (¡Compruebe esto!) Aplicando las condiciones iniciales, se obtiene

$$r = \frac{1}{t + \sqrt{2}/6}, \quad \theta = t + \frac{\pi}{4}.$$

La espiral $r = \dfrac{1}{\theta + \sqrt{2}/6 - \pi/4}$ se muestra en la **FIGURA 9.1.5**. ≡

EJEMPLO 7 Soluciones en coordenadas polares

Cuando se expresa en coordenadas polares, un sistema autónomo plano es de la forma

$$\frac{dr}{dt} = 0.5(3 - r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Encuentre y trace las soluciones que satisfacen $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$ en coordenadas rectangulares.

Solución Se aplica el método de separación de variables a $dr/dt = 0.5(3 - r)$ y se integra $d\theta/dt$ para llegar a la solución

$$r = 3 + c_1e^{-0.5t}, \qquad \theta = t + c_2.$$

Si $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$, entonces $r(0) = 1$ y $\theta(0) = \pi/2$, por lo que $c_1 = -2$ y $c_2 = \pi/2$. La curva solución es la espiral $r = 3 - 2e^{-0.5(\theta - \pi/2)}$. Observe que conforme $t \to \infty$, θ aumenta sin límite y r se aproxima a 3.

Si $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$, entonces $r(0) = 3$ y $\theta(0) = 0$. Se puede deducir que $c_1 = c_2 = 0$, y así $r = 3$ y $\theta = t$. Por lo tanto $x = r\cos\theta = 3\cos t$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta = 3\,\text{sen}\,t$, de modo que la solución es periódica. La solución genera un círculo de radio 3 respecto a (0, 0). Ambas soluciones se muestran en la **FIGURA 9.1.6**. ≡

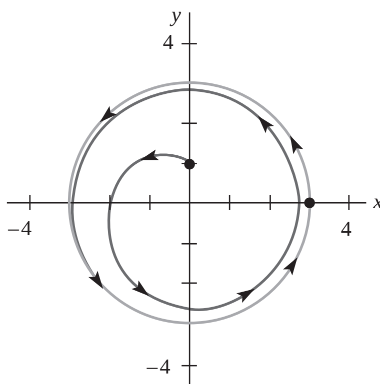


FIGURA 9.1.6 Curvas solución del ejemplo 7

9.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas del 1 al 6, escriba la ecuación diferencial no lineal de segundo orden como un sistema autónomo plano. Encuentre todos los puntos críticos del sistema resultante.

1. $x'' + 9 \text{ sen } x = 0$

2. $x'' + (x')^2 + 2x = 0$

3. $x'' + x'(1 - x^3) - x^2 = 0$

4. $x'' + 4\dfrac{x}{1 + x^2} + 2x' = 0$

5. $x'' + x = \epsilon x^3$ para $\epsilon > 0$

6. $x'' + x - \epsilon x|x| = 0$ para $\epsilon > 0$

En los problemas 7 a 16, encuentre los puntos críticos del sistema autónomo plano dado.

7. $x' = x + xy$
$y' = -y - xy$

8. $x' = y^2 - x$
$y' = x^2 - y$

9. $x' = 3x^2 - 4y$
$y' = x - y$

10. $x' = x^3 - y$
$y' = x - y^3$

11. $x' = x(10 - x - \frac{1}{2}y)$
$y' = y(16 - y - x)$

12. $x' = -2x + y + 10$
$y' = 2x - y - 15\dfrac{y}{y + 5}$

13. $x' = x^2 e^y$
$y' = y(e^x - 1)$

14. $x' = \text{sen } y$
$y' = e^{x-y} - 1$

15. $x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$
$y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$

16. $x' = -x(4 - y^2)$
$y' = 4y(1 - x^2)$

En los problemas del 17 al 22, para el sistema dinámico lineal dado (tomado de los ejercicios 8.2)

a) encuentre la solución general y determine si existen soluciones periódicas,

b) encuentre la solución que satisface la condición inicial dada

c) con ayuda de una herramienta para hacer gráficas, trace la solución del inciso *b*) e indique la dirección en que es atravesada la curva.

17. $x' = x + 2y$
$y' = 4x + 3y$, $\mathbf{X}(0) = (2, -2)$ (problema 1, ejercicios 8.2)

18. $x' = -6x + 2y$
$y' = -3x + y$, $\mathbf{X}(0) = (3, 4)$ (problema 6, ejercicios 8.2)

19. $x' = 4x - 5y$
$y' = 5x - 4y$, $\mathbf{X}(0) = (4, 5)$ (problema 37, ejercicios 8.2)

20. $x' = x + y$
$y' = -2x - y$, $\mathbf{X}(0) = (-2, 2)$ (problema 34, ejercicios 8.2)

21. $x' = 5x + y$
$y' = -2x + 3y$, $\mathbf{X}(0) = (-1, 2)$ (problema 35, ejercicios 8.2)

22. $x' = x - 8y$
$y' = x - 3y$, $\mathbf{X}(0) = (2, 1)$ (problema 38, ejercicios 8.2)

En los problemas del 23 al 26, resuelva el sistema autónomo plano no lineal dado, convirtiéndolo a coordenadas polares. Describa el comportamiento geométrico de la solución que satisface la condición o condiciones iniciales dadas.

23. $x' = -y - x(x^2 + y^2)^2$
$y' = x - y(x^2 + y^2)^2$, $\mathbf{X}(0) = (4, 0)$

24. $x' = y + x(x^2 + y^2)$
$y' = -x + y(x^2 + y^2)$, $\mathbf{X}(0) = (4, 0)$

25. $x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$
$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$, $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$; $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$

[*Sugerencia:* La ecuación diferencial que resulta para r es una ecuación diferencial de Bernoulli. Consulte la sección 2.5.]

26. $x' = y - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(4 - x^2 - y^2)$
$y' = -x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(4 - x^2 - y^2)$,
$\mathbf{X}(0) = (1, 0)$; $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$

[*Sugerencia:* Consulte el ejemplo 3 de la sección 2.2.]

Si un sistema autónomo plano tiene una solución periódica, entonces debe haber al menos un punto crítico dentro de la curva que genera la solución. En los problemas del 27 al 30, utilice este hecho junto con un método numérico para investigar la posibilidad de encontrar soluciones periódicas.

27. $x' = -x + 6y$
$y' = xy + 12$

28. $x' = -x + 6xy$
$y' = -8xy + 2y$

29. $x' = y$
$y' = y(1 - 3x^2 - 2y^2) - x$

30. $x' = xy$
$y' = -1 - x^2 - y^2$

31. Si $z = f(x, y)$ es una función con primeras derivadas parciales continuas en la región R, entonces un flujo $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ en R puede definirse haciendo que $P(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ y $Q(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Demuestre que si $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ es una solución del sistema autónomo plano

$$x' = P(x, y)$$
$$y' = Q(x, y),$$

entonces $f(x(t), y(t)) = c$ para alguna constante c. Por lo tanto, la curva solución cae sobre las curvas de nivel de f. [*Sugerencia:* Utilice la regla de la cadena para calcular $\dfrac{d}{dt}f(x(t), y(t))$.]

9.2 Estabilidad de los sistemas lineales

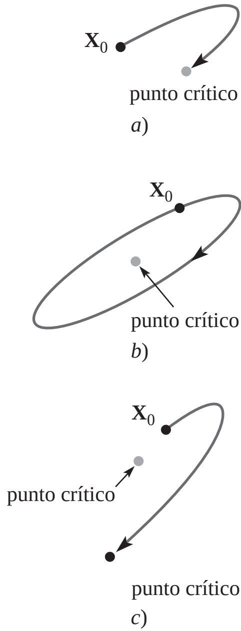


FIGURE 9.2.1 Puntos críticos

Introducción Hemos podido observar que el sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

genera un campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, y que una solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ del sistema puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula que se coloca inicialmente en la posición $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Si $\mathbf{X}_0$ es un punto crítico del sistema, entonces la partícula permanece en estado estacionario. En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones cuando el valor de $\mathbf{X}_0$ se selecciona muy *cercano* a un punto crítico del sistema.

Algunas preguntas fundamentales Suponga que $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico de un sistema autónomo plano y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Si la solución se interpreta como la trayectoria de una partícula en movimiento, nos interesa conocer las respuestas a las preguntas siguientes cuando $\mathbf{X}_0$ se coloca cerca de $\mathbf{X}_1$:

i) ¿Regresará la partícula al punto crítico? De manera más precisa, si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, ¿es $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$?

ii) Si la partícula *no* regresa al punto crítico, ¿se mantendrá cercana al punto crítico o se alejará de éste? Por ejemplo, es concebible que la partícula se mueva formando círculos alrededor del punto crítico, o que regrese a un punto crítico diferente o a ninguno. Consulte la **FIGURA 9.2.1**.

Si en las cercanías del punto crítico se presenta *siempre* el caso *a*) o el *b*) de la figura 9.2.1, nos referimos al punto crítico como **estable localmente**. Sin embargo, si el valor inicial $\mathbf{X}_0$ que genera un comportamiento similar a *c*) puede encontrarse en *cualquier* punto dado en las cercanías, nos referimos a ese punto crítico como **inestable**. Estos conceptos se clarificarán en la sección 9.3, donde se estudiarán las preguntas *i*) y *ii*) para el caso de sistemas no lineales.

Análisis de estabilidad Se investigará en primera instancia estas dos preguntas de estabilidad para sistemas *lineales* autónomos planos y se sentarán las bases de la sección 9.3. Los métodos de solución del capítulo 8 nos permitirán proporcionar un análisis geométrico detallado de las soluciones a

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \tag{1}$$

en términos de los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En esta fórmula, a, b, c y d son constantes. Para asegurarnos de que $\mathbf{X}_0 = (0, 0)$ es el único punto crítico, supondremos que el determinante $\Delta = ad - bc \neq 0$. Si $\tau = a + d$ es la traza* de la matriz $\mathbf{A}$, entonces la ecuación característica $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ puede reescribirse como

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0.$$

Por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda = (\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})/2$, y los tres casos comunes para estas raíces se presentan en función de si el valor de $\tau^2 - 4\Delta$ es positivo, negativo o cero. En el ejemplo siguiente se utiliza un método numérico para encontrar la naturaleza de las soluciones correspondientes a estos casos.

---

* En general, si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, la **traza** de $\mathbf{A}$ es la suma de los elementos de la diagonal principal.

EJEMPLO 1 Valores propios y la forma de las soluciones

Encuentre los valores propios del sistema lineal

$$x' = -x + y$$
$$y' = cx - y$$

en términos de c, y utilice un método numérico para encontrar las formas de las soluciones correspondientes a los casos $c = \frac{1}{4}$, 4, 0 y -9.

Solución La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ tiene una traza $\tau = -2$ y un determinante $\Delta = 1 - c$, por lo que los valores propios son

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - c)}}{2} = -1 \pm \sqrt{c}.$$

La naturaleza de los valores propios, por lo tanto, está determinada por el signo de c.

Si $c = \frac{1}{4}$, entonces los valores propios son negativos y diferentes, $\lambda = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$. En la **FIGURA 9.2.2*a*)** hemos utilizado un método numérico para generar las curvas solución o trayectorias que corresponden a las diferentes condiciones iniciales. Observe que, excepto las trayectorias trazadas en la figura, todas las trayectorias parecen aproximarse a **0** a partir de una dirección fija. Del capítulo 8, recuerde que una colección de trayectorias en el plano *xy* o **plano de fase** se llama **retrato de fase** del sistema.

Cuando $c = 4$, los valores propios tienen signos contrarios, $\lambda = 1$ y -3, y se presenta un fenómeno interesante. Todas las trayectorias se alejan del origen en una dirección fija, excepto las soluciones que comienzan sobre la línea trazada en la figura 9.2.2*b*). Ya estudiamos un comportamiento como éste en el retrato de fase de la figura 8.2.2. Realice experimentos con métodos numéricos y compruebe estas observaciones.

La selección $c = 0$ nos lleva a un solo valor propio real $\lambda = -1$. Este caso es muy parecido al caso $c = \frac{1}{4}$ salvo una significativa excepción. Todas las curvas solución de la figura 9.2.2*c*) parecen aproximarse a **0** a partir de una dirección fija a medida que t aumenta.

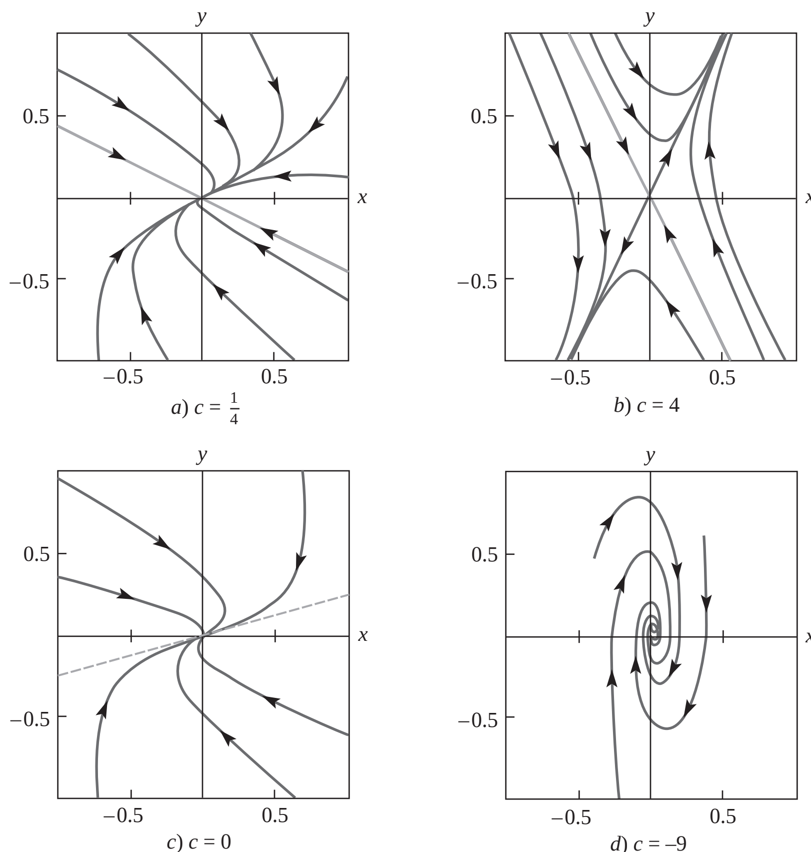


FIGURA 9.2.2 Retratos de fase para el sistema lineal del ejemplo 1

Por último, cuando $c = -9$, $\lambda = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i$. Por lo tanto, los valores propios son números complejos conjugados con la parte real negativa -1. La figura 9.2.2*d*) muestra que las curvas solución se mueven en espiral hacia el origen **0** a medida que t aumenta. ≡

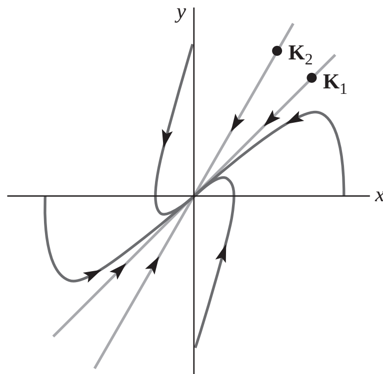


FIGURA 9.2.3 Nodo estable

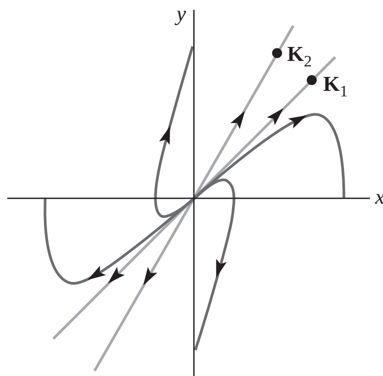


FIGURA 9.2.4 Nodo inestable

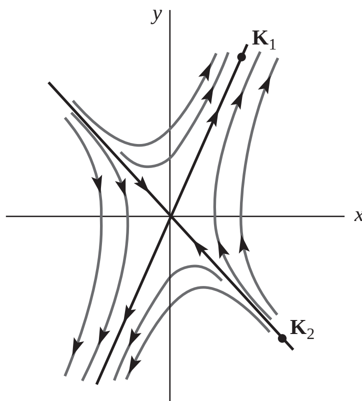


FIGURA 9.2.5 Punto silla

El comportamiento de las trayectorias que se observan en los retratos de cuatro fases de la figura 9.2.2 del ejemplo 1 puede explicarse utilizando los resultados de la solución de valores y vectores propios del capítulo 8.

Caso I: *Valores propios reales diferentes* ($\tau^2 - 4\Delta > 0$)
De acuerdo con el teorema 8.2.1 de la sección 8.2, la solución general de (1) está dada por,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}, \tag{2}$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios y $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son los vectores propios correspondientes. Observe que $\mathbf{X}(t)$ puede escribirse también como

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t}[c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}]. \tag{3}$$

a) *Ambos valores propios negativos* ($\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$)
Nodo estable ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$): Puesto que ambos valores propios son negativos, a partir de (2) se puede deducir que $\lim_{t\to\infty}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$. Si suponemos que $\lambda_2 < \lambda_1$, entonces $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, por lo que $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ es una función de decaimiento exponencial. Por lo tanto, podemos concluir de (3) que $\mathbf{X}(t) \approx c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t}$ para valores grandes de t. Cuando $c_1 \neq 0$, $\mathbf{X}(t)$ se aproximará a **0** desde una de las dos direcciones determinadas por el vector propio $\mathbf{K}_1$ correspondiente a λ_1. Si $c_1 = 0$, $\mathbf{X}(t) = c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$ y $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a **0** a lo largo de la línea determinada por el vector propio $\mathbf{K}_2$. La **FIGURA 9.2.3** muestra un conjunto de curvas solución alrededor del origen. Un punto crítico se conoce como **nodo estable** cuando ambos valores propios son negativos.

b) *Ambos valores propios positivos* ($\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ y $\Delta > 0$)
Nodo inestable ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$): El análisis de este caso es parecido a *a*). De nuevo, a partir de (2), $\mathbf{X}(t)$ sale de los límites conforme t aumenta. Además, suponiendo de nuevo que $\lambda_2 < \lambda_1$ y usando (3), podemos observar que $\mathbf{X}(t)$ se sale de los límites en una de las direcciones determinadas por el vector propio $\mathbf{K}_1$ (cuando $c_1 \neq 0$) o a lo largo de la línea determinada por el vector propio $\mathbf{K}_2$ (cuando $c_1 = 0$). La **FIGURA 9.2.4** muestra un conjunto típico de curvas solución. Este tipo de punto crítico, correspondiente al caso en que ambos valores propios son positivos, se llama **nodo inestable**.

c) *Valores propios con signos opuestos* ($\tau^2 - 4\Delta > 0$ y $\Delta < 0$)
Punto silla ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$): El análisis de las soluciones es idéntico que en *b*), salvo por una excepción. Cuando $c_1 = 0$, $\mathbf{X}(t) = c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$ y, puesto que $\lambda_2 < 0$, $\mathbf{X}(t)$ se acercará a **0** a lo largo de la línea determinada por el vector propio $\mathbf{K}_2$. Si $\mathbf{X}(0)$ no cae sobre la línea determinada por $\mathbf{K}_2$, la línea determinada por $\mathbf{K}_1$ sirve como asíntota de $\mathbf{X}(t)$. Por lo tanto, el punto crítico es inestable a pesar de que algunas soluciones se aproximan a **0** conforme aumenta t. Este punto crítico inestable se llama **punto silla**. Consulte la **FIGURA 9.2.5**.

EJEMPLO 2 Valores propios reales diferentes

Clasifique el punto crítico (0, 0) en cada uno de los sistemas lineales siguientes $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ como nodo estable, nodo inestable o punto silla.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 15 & -19 \end{pmatrix}$

En cada caso analice la naturaleza de las soluciones en las cercanías de (0, 0).

Solución ***a)*** Puesto que la traza $\tau = 3$ y el determinante $\Delta = -4$, los valores propios son

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1.$$

Los valores propios tienen signos contrarios, por lo que (0, 0) es un punto silla. No es difícil demostrar (véase el ejemplo 1 de la sección 8.2) que los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ cae sobre la línea $y = -x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $\mathbf{0}$. Para cualquier otra condición inicial, $\mathbf{X}(t)$ se volverá ilimitada en las direcciones determinadas por $\mathbf{K}_1$. En otras palabras, la línea $y = \frac{2}{3}x$ sirve como asíntota para todas estas curvas solución. Consulte la **FIGURA 9.2.6**.

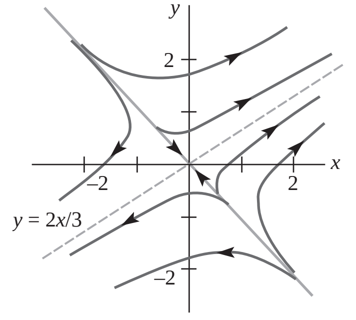


FIGURA 9.2.6 Punto silla

b) A partir de $\tau = -29$ y $\Delta = 100$ se deduce que los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -25$. Ambos valores propios son negativos, por lo que (0, 0) representa, en este caso, un nodo estable. Puesto que los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -25$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

respectivamente, se puede deducir que todas las soluciones se aproximan a $\mathbf{0}$ en la dirección definida por $\mathbf{K}_1$, excepto aquellas soluciones para las que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ cae sobre la línea $y = -\frac{5}{2}x$ determinada por $\mathbf{K}_2$. Estas soluciones se aproximan a $\mathbf{0}$ a lo largo de $y = -\frac{5}{2}x$. Véase la **FIGURA 9.2.7**. ≡

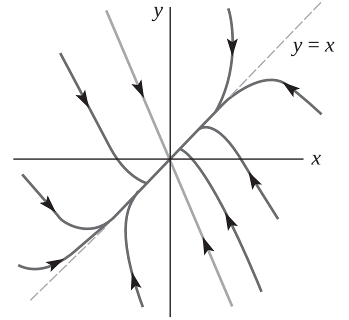


FIGURA 9.2.7 Nodo estable

Caso II: *Un valor propio real repetido* ($\tau^2 - 4\Delta = 0$)

Nodos degenerados: De la sección 8.2, recuerde que la solución general toma una de dos formas diferentes, dependiendo de si es posible encontrar uno o dos vectores propios linealmente independientes para el valor propio repetido λ_1.

a) *Dos vectores propios linealmente independientes*

Si $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son dos vectores propios linealmente independientes correspondientes a λ_1, entonces la solución general está dada por

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_1 t} = (c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2)e^{\lambda_1 t}.$$

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $\mathbf{0}$ a lo largo de la línea determinada por el vector $c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2$ y el punto crítico se llama **nodo degenerado estable** (véase la **FIGURA 9.2.8*a***)). En la figura 9.2.8*a*), la flecha aparece invertida cuando $\lambda_1 > 0$, y tenemos un **nodo degenerado inestable**.

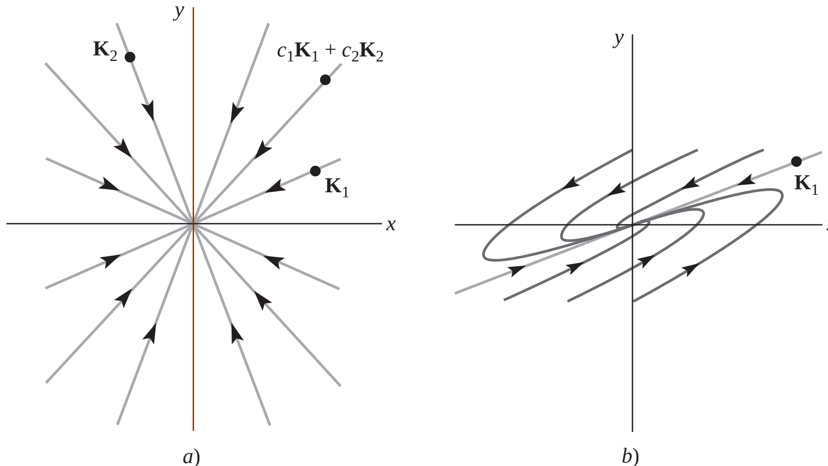


FIGURA 9.2.8 Nodos degenerados estables

b) *Un solo vector propio linealmente independiente*
Cuando únicamente existe un solo vector propio $\mathbf{K}_1$ linealmente independiente, la solución general está dada por

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(\mathbf{K}_1 t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}),$$

donde $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}_1$ (véase la sección 8.2, (12) a (14)), y la solución puede escribirse de nuevo como

$$\mathbf{X}(t) = te^{\lambda_1 t}\left[c_2\mathbf{K}_1 + \frac{c_1}{t}\mathbf{K}_1 + \frac{c_2}{t}\mathbf{P}\right].$$

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} t\, e^{\lambda_1 t} = 0$ y se deduce que $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $\mathbf{0}$ en una de las direcciones determinadas por el vector $\mathbf{K}_1$ (consulte la figura 9.2.8*b*)). De nuevo, el punto crítico se llama **nodo degenerado estable**. Cuando $\lambda_1 > 0$, las soluciones se parecen a las de la figura 9.2.8*b*) con las flechas invertidas. La línea determinada por $\mathbf{K}_1$ es una asíntota en *todas* las soluciones. Otra vez, el punto crítico se llama **nodo degenerado inestable**.

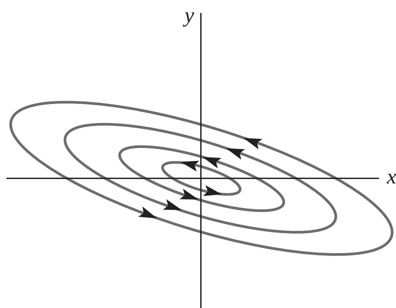


FIGURA 9.2.9 Centro

Caso III: *Valores propios complejos* $(\tau^2 - 4\Delta < 0)$
Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ son los valores propios complejos y $\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ es un vector propio complejo correspondiente a λ_1, la solución general puede escribirse como $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t)$, donde

$$\mathbf{X}_1(t) = (\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2(t) = (\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t}.$$

Consulte las ecuaciones (23) y (24) de la sección 8.2. Por lo tanto, una solución puede escribirse en la forma

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_{11} \cos \beta t + c_{12} \operatorname{sen} \beta t), \quad y(t) = e^{\alpha t}(c_{21} \cos \beta t + c_{22} \operatorname{sen} \beta t), \tag{4}$$

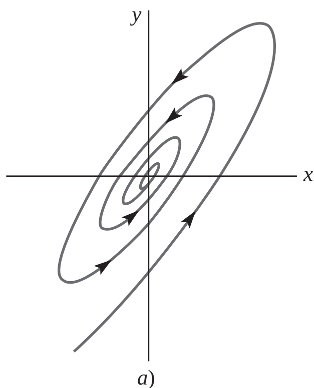
y cuando $\alpha = 0$ tenemos

$$x(t) = c_{11} \cos \beta t + c_{12} \operatorname{sen} \beta t, \quad y(t) = c_{21} \cos \beta t + c_{22} \operatorname{sen} \beta t. \tag{5}$$

a) *Raíces imaginarias puras* $(\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau = 0)$
Centro: Cuando $\alpha = 0$, los valores propios son imaginarios puros y, a partir de (5), todas las soluciones son periódicas con periodo $p = 2\pi/\beta$. Observe que si tanto c_{12} como c_{21} llegaran a ser 0, entonces (5) se reduciría a

$$x(t) = c_{11} \cos \beta t, \quad y(t) = c_{22} \operatorname{sen} \beta t,$$

la cual es una representación paramétrica estándar de la elipse $x^2/c_{11}^2 + y^2/c_{22}^2 = 1$. Despejando βt y sen βt del sistema de ecuaciones (4) y utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 \beta t + \cos^2 \beta t = 1$, es posible demostrar que *todas las soluciones son elipses* con centro en el origen. El punto crítico (0, 0) se llama **centro** y la **FIGURA 9.2.9** muestra una colección típica de curvas solución. Las elipses son o *todas* transversales en sentido horario o *todas* transversales en sentido antihorario.



b) *Parte real diferente de cero* $(\tau^2 - 4\Delta < 0, \tau \neq 0)$
Puntos espirales: Cuando $\alpha \neq 0$, el efecto del término $e^{\alpha t}$ en (4) es similar al efecto del término exponencial presentado en el análisis del movimiento amortiguado visto en la sección 3.8. Cuando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \to 0$, y las espirales solución de forma elíptica están cada vez más cercanas al origen. El punto crítico se llama **punto espiral estable**. Cuando $\alpha > 0$, el efecto es contrario. Una solución de forma elíptica se aleja cada vez más del origen y el punto crítico se llama, en este caso, **punto espiral inestable**. Véase la **FIGURA 9.2.10**.

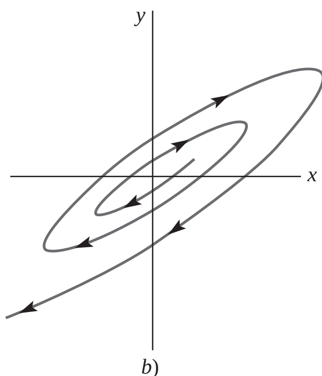


FIGURA 9.2.10 Puntos espirales estables e inestables

EJEMPLO 3 Valores propios repetidos y complejos

Clasifique el punto crítico (0, 0) de cada uno de los sistemas lineales $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ siguientes.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ ***b***) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

En cada caso, analice la naturaleza de la solución que satisfaga $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$. Determine las ecuaciones paramétricas de cada solución.

Solución ***a***) Puesto que $\tau = -6$ y $\Delta = 9$, el polinomio propio es $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, por lo que (0, 0) es un nodo degenerado estable. Para el valor propio repetido $\lambda = -3$, encontramos un solo vector propio $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que la solución $\mathbf{X}(t)$ que satisface a $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$ se aproxima a (0, 0) en la dirección especificada por la línea $y = x/3$.

b) Puesto que $\tau = 0$ y $\Delta = 1$, los valores propios son $\lambda = \pm i$, por lo que (0, 0) es un centro. La solución $\mathbf{X}(t)$ que satisface a $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$ es una elipse que rodea al origen cada 2π unidades de tiempo.

De acuerdo con el ejemplo 4 de la sección 8.2, la solución general del sistema dado en *a*) es

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}e^{-3t}\right].$$

La condición inicial nos da $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$, por lo que

$$x = (6t + 1)e^{-3t}, \qquad y = 2te^{-3t}$$

son ecuaciones paramétricas de la solución.

La solución general del sistema dado en *b*) es

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

La condición inicial nos da $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, por lo que

$$x = \cos t - \operatorname{sen} t, \qquad y = -\operatorname{sen} t$$

son ecuaciones paramétricas de la elipse. Observe que $y < 0$ para pequeños valores positivos de t, y por lo tanto la elipse es transversal en sentido horario.

Las soluciones de *a*) y *b*) se muestran en las **FIGURAS 9.2.11*a*)** y *b*), respectivamente. ≡

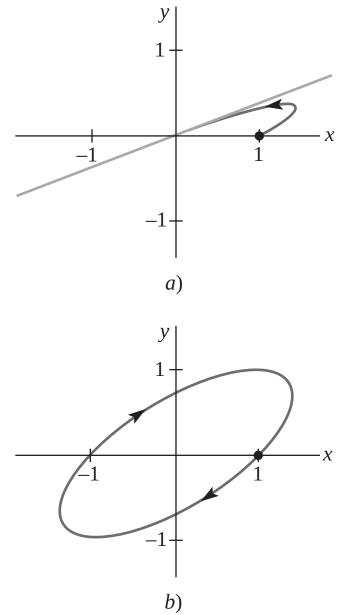


FIGURA 9.2.11 Curvas solución del ejemplo 3

La **FIGURA 9.2.12** muestra un resumen de los resultados de esta sección. La naturaleza geométrica general de las soluciones puede determinarse calculando la traza y el determinante de **A**. En la práctica, las gráficas de las soluciones se obtienen de manera más sencilla *no* construyendo las soluciones explícitas con valores y vectores propios, sino generando las soluciones en forma numérica mediante el uso de un solucionador numérico y un método como el de Runge-Kutta (sección 6.2) para sistemas de primer orden.

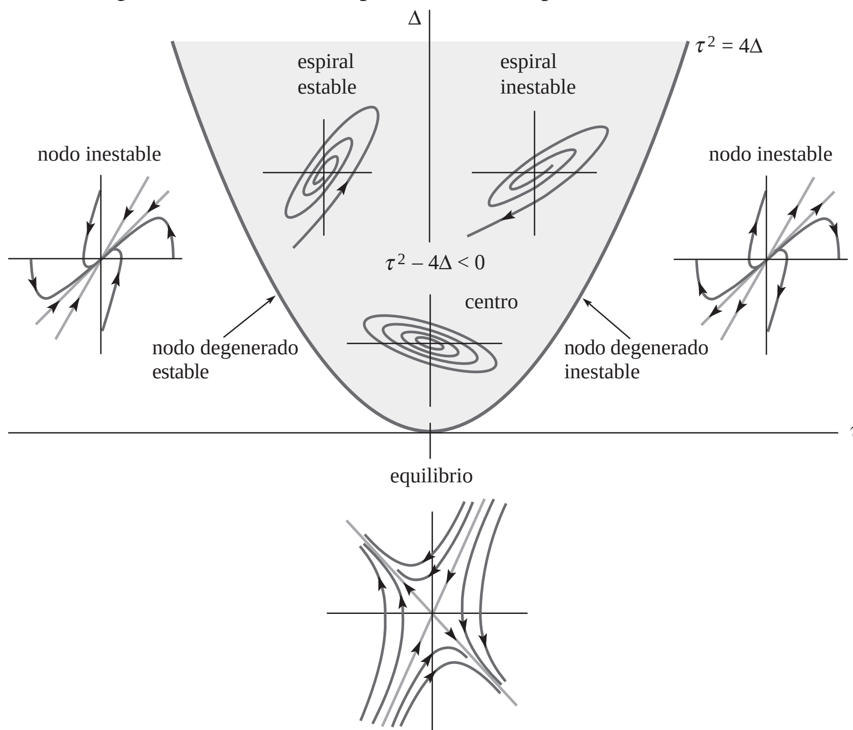


FIGURA 9.2.12 Resumen geométrico de los casos I, II y III

EJEMPLO 4 Clasificación de los puntos críticos

Clasifique el punto crítico (0, 0) de cada sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ siguiente

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & 3.10 \\ -1.10 & -1.02 \end{pmatrix}$ ***b***) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a\hat{x} & -ab\hat{x} \\ -cd\hat{y} & -d\hat{y} \end{pmatrix}$

para las constantes positivas a, b, c, d, $\hat{x}$ y $\hat{y}$.

Solución ***a***) Para esta matriz $\tau = -0.01$, $\Delta = 2.3798$ y $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Utilizando la figura 9.2.12, podemos observar que (0, 0) es un punto espiral estable.

b) Esta matriz surge del modelo de competencia Lotka-Volterra, el cual estudiaremos en la sección 9.4. Puesto que $\tau = -(a\hat{x} + d\hat{y})$ y todas las constantes de la matriz son positivas, $\tau < 0$. El determinante puede escribirse como $\Delta = ad\hat{x}\hat{y}(1 - bc)$. Si $bc > 1$, entonces $\Delta < 0$ y el punto crítico es un punto silla. Si $bc < 1$, entonces $\Delta > 0$ y el punto crítico es un nodo estable, un nodo degenerado estable o un punto espiral estable. En los tres casos $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = 0$. ≡

Ahora podemos proporcionar las respuestas para cada una de las preguntas planteadas al comienzo de esta sección acerca del sistema autónomo plano lineal

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

con $ad - bc \neq 0$. Las respuestas se resumen en el teorema que se muestra a continuación.

Teorema 9.2.1 Criterio de estabilidad de los sistemas lineales

Para un sistema autónomo plano lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ con det $\mathbf{A} \neq 0$, dejemos que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ exprese la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{0}$.

a) $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = 0$ si, y sólo si, los valores propios de $\mathbf{A}$ tienen partes reales negativas. Esto se presenta cuando $\Delta > 0$ y $\tau < 0$.

b) $\mathbf{X}(t)$ es periódica si, y sólo si, los valores propios de $\mathbf{A}$ son puramente imaginarios. Esto se presentará cuando $\Delta > 0$ y $\tau = 0$.

c) En todos los demás casos, dada cualquier cercanía al origen, existe al menos un $\mathbf{X}_0$ en la cercanía para el que $\mathbf{X}(t)$ se vuelve ilimitado a medida que t aumenta.

Comentarios

La terminología utilizada para describir los tipos de puntos críticos varía de libro a libro. La tabla siguiente relaciona un gran número de términos alternos que usted puede encontrarse en la literatura.

Término	**Términos alternos**
punto crítico	punto silla, punto singular, punto estacionario, punto de descanso
punto espiral	foco, punto focal, punto vértice
nodo estable o punto espiral	atractor, destino
nodo inestable o punto espiral	repelente, fuente

9.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas del 1 al 8, se proporciona la solución general del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

a) En cada caso, analice la naturaleza de las soluciones en la cercanía de (0, 0).

b) Con ayuda de una herramienta para hacer gráficas, trace la solución que satisface a X(0) = (1, 1).

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-6t}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}e^{2t}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = e^t\left[c_1\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\right]$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = e^{-t}\left[c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}\right]$$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{-t}\right]$$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}\right]$$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

En los problemas del 9 al 16, clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema lineal que se proporciona calculando la traza τ y el determinante Δ y empleando la figura 9.2.12.

9. $x' = -5x + 3y$
$y' = 2x + 7y$

10. $x' = -5x + 3y$
$y' = 2x - 7y$

11. $x' = -5x + 3y$
$y' = -2x + 5y$

12. $x' = -5x + 3y$
$y' = -7x + 4y$

13. $x' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$
$y' = -x - \frac{1}{2}y$

14. $x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$
$y' = -x + \frac{1}{2}y$

15. $x' = 0.02x - 0.11y$
$y' = 0.10x - 0.05y$

16. $x' = 0.03x + 0.01y$
$y' = -0.01x + 0.05y$

17. Determine las condiciones presentes en la constante real μ de tal forma que (0, 0) sea el centro del sistema lineal

$$x' = -\mu x + y$$
$$y' = -x + \mu y.$$

18. Determine una condición presente en la constante real μ de tal forma que (0, 0) sea un punto espiral estable del sistema lineal

$$x' = y$$
$$y' = -x + \mu y.$$

19. Demuestre que (0, 0) siempre es un punto crítico inestable del sistema lineal

$$x' = \mu x + y$$
$$y' = -x + y,$$

donde μ es una constante real y $\mu \neq -1$. ¿Cuándo (0, 0) es un punto silla inestable? ¿Cuándo (0, 0) es un punto espiral inestable?

20. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la respuesta de un sistema dinámico lineal

$$x' = \alpha x - \beta y$$
$$y' = \beta x + \alpha y$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Determine las condiciones presentes en las constantes reales α y β que asegurarán que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (0, 0)$. ¿Puede (0, 0) ser un nodo o un punto silla?

21. Demuestre que el sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ tiene un punto crítico único $\mathbf{X}_1$ cuando $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$. Concluya que si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema no homogéneo, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$. [*Sugerencia:* $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_c(t) + \mathbf{X}_1$.]

22. En el ejemplo 4*b*), demuestre que (0, 0) es un nodo estable cuando $bc < 1$.

En los problemas del 23 al 26, se proporciona un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$.

***a*)** En cada caso, determine el punto crítico único $\mathbf{X}_1$.
b*)** Utilice un método numérico para determinar la naturaleza de cada punto crítico encontrado en ***a).
***c*)** Investigue la relación que hay entre $\mathbf{X}_1$ y el punto crítico (0, 0) del sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

23. $x' = 2x + 3y - 6$
$y' = -x - 2y + 5$

24. $x' = -5x + 9y + 13$
$y' = -x - 11y - 23$

25. $x' = 0.1x - 0.2y + 0.35$
$y' = 0.1x + 0.1y - 0.25$

26. $x' = 3x - 2y - 1$
$y' = 5x - 3y - 2$

9.3 Linealización y estabilidad local

■ Introducción La idea principal de esta sección es la linealización. Una aproximación lineal local, o **linealización**, de una función diferenciable $f(x)$ en un punto $(x_1, f(x_1))$ es la ecuación de la línea tangente a la gráfica de f en el punto $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Para x cercano a x_1, los puntos sobre la gráfica de $f(x)$ están cerca de los puntos de la línea tangente, por lo que los valores $y(x)$ que se obtienen a partir de esta ecuación pueden utilizarse para aproximar los correspondientes valores de $f(x)$. En esta sección aplicaremos la linealización como una forma de analizar ecuaciones diferenciales no lineales y sistemas no lineales; la idea es efectuar su reemplazo por ecuaciones diferenciales lineales y sistemas lineales.

■ Cuenta deslizante Comenzamos esta sección afinando los conceptos sobre estabilidad presentados en la sección 9.2, de tal forma que también se apliquen a los sistemas autónomos no lineales. A pesar de que el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ tenía solamente un punto crítico cuando $\det \mathbf{A} \neq 0$, en la sección 9.1 observamos que un sistema no lineal puede tener muchos puntos críticos. Por lo tanto, no podemos esperar que una partícula ubicada inicialmente en $\mathbf{X}_0$ permanezca cercana a un punto crítico $\mathbf{X}_1$ dado, a menos que $\mathbf{X}_0$ haya sido colocada lo suficien-

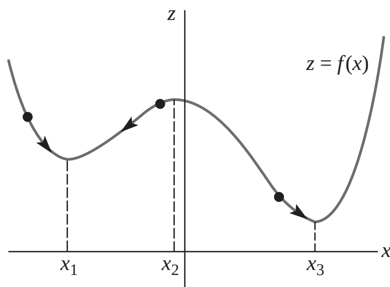


FIGURA 9.3.1 Cuenta deslizándose sobre la gráfica de $z = f(x)$

temente cerca de $\mathbf{X}_1$ para comenzar. La partícula bien podría ser llevada a un segundo punto crítico $\mathbf{X}_2$. Para enfatizar esta idea se considerará el sistema físico ilustrado en la **FIGURA 9.3.1**, donde una cuenta se desplaza a lo largo de la curva $z = f(x)$ bajo la influencia de la gravedad sola. En la sección 9.4 demostraremos que la coordenada x de la cuenta satisface una ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' = g(x, x')$, y por lo tanto, estableciendo $y = x'$ satisface el sistema autónomo no lineal

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

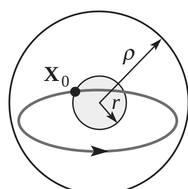
Si la cuenta se ubica en $P = (x, f(x))$ y dada una velocidad inicial de cero, ésta permanecerá en P siempre y cuando $f'(x) = 0$. Si la cuenta se coloca cerca del punto crítico ubicado en $x = x_1$, se mantendrá cerca de $x = x_1$ sólo si su velocidad inicial no la lleva por encima de la "joroba" localizada en $x = x_2$ hacia el punto crítico ubicado en $x = x_3$. Por lo tanto, $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0))$ debe estar cerca de $(x_1, 0)$.

En la definición siguiente expresaremos la distancia que hay entre dos puntos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ mediante $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$. Recuerde que si $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces

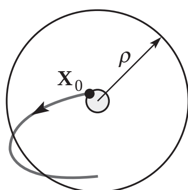
$$|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definición 9.3.1 Puntos críticos estables

Sea $\mathbf{X}_1$ un punto crítico de un sistema autónomo, y dejemos que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ exprese la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Decimos que $\mathbf{X}_1$ es un **punto crítico estable** cuando, dado cualquier radio $\rho > 0$, existe un radio correspondiente $r > 0$ tal que si la posición inicial $\mathbf{X}_0$ satisface $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, entonces la solución correspondiente $\mathbf{X}(t)$ satisface $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| < \rho$ para toda $t > 0$. Si, además, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ siempre que $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, llamamos a $\mathbf{X}_1$ **punto crítico estable asintótico**.



a) estable



b) inestable

FIGURA 9.3.2 Puntos críticos

Esta definición se ilustra en la **FIGURA 9.3.2*a*)**. Dado cualquier disco de radio ρ alrededor del punto crítico $\mathbf{X}_1$, una solución permanecerá dentro del disco siempre y cuando el valor de $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ sea seleccionado lo suficientemente cerca de $\mathbf{X}_1$. *No* es necesario que la solución se acerque al punto crítico para que $\mathbf{X}_1$ sea estable. Los nodos estables, los puntos en espiral estables y los centros son ejemplos de puntos críticos estables de sistemas lineales. Para enfatizar que $\mathbf{X}_0$ debe seleccionarse cercano a $\mathbf{X}_1$, también se utiliza el término **punto crítico estable localmente**.

La definición de punto crítico inestable se obtiene al negar la definición 9.3.1.

Definición 9.3.2 Punto crítico inestable

Sea $\mathbf{X}_1$ el punto crítico de un sistema autónomo y que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ exprese la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Decimos que $\mathbf{X}_1$ es un **punto crítico inestable** si existe un disco de radio $\rho > 0$ con la propiedad de que, para cualquier $r > 0$, existe al menos una posición inicial $\mathbf{X}_0$ que satisface a $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, aun cuando la solución correspondiente $\mathbf{X}(t)$ satisfaga a $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| \geq \rho$ por al menos un $t > 0$.

Si un punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable, sin importar qué tan pequeña sea la cercanía de $\mathbf{X}_1$, siempre se puede encontrar una posición inicial $\mathbf{X}_0$ tal que dé como resultado que la solución abandona algún disco de radio ρ en algún tiempo t ubicado en el futuro. Consulte la figura 9.3.2*b*). Por lo tanto, los nodos inestables, los puntos inestables en espiral y los puntos silla son ejemplos de puntos críticos inestables de sistemas lineales. En la figura 9.3.1, el punto crítico $(x_2, 0)$ es inestable. El ligero desplazamiento, o velocidad inicial, provoca un alejamiento de la cuenta respecto al punto $(x_2, f(x_2))$.

EJEMPLO 1 Punto crítico estable

Demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable del sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

considerado en el ejemplo 6 de la sección 9.1.

Solución En el ejemplo 6 de la sección 9.1, demostramos que en coordenadas polares

$$r = \frac{1}{t + c_1}, \qquad \theta = t + c_2,$$

es la solución del sistema. Si $\mathbf{X}(0) = (r_0, \theta_0)$ es la condición inicial en coordenadas polares, entonces

$$r = \frac{r_0}{r_0 t + 1}, \qquad \theta = t + \theta_0.$$

Observe que $r \leq r_0$ para $t \geq 0$, y r se aproxima a (0, 0) a medida que t aumenta. Por lo tanto, dado $\rho > 0$, una solución que comienza en menos de ρ unidades a partir de (0, 0) permanece dentro de ρ unidades del origen para toda $t \geq 0$. De aquí que el punto crítico (0, 0) sea estable y, de hecho, asintóticamente estable. En la **FIGURA 9.3.3** se muestra una solución típica. ≡

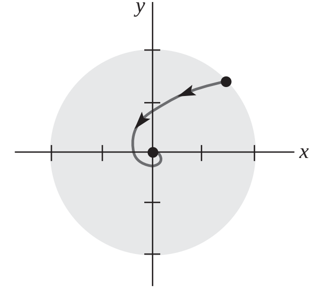


FIGURA 9.3.3 Punto crítico asintóticamente estable del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Punto crítico inestable

Un sistema autónomo plano, cuando se expresa en coordenadas polares, toma la forma

$$\frac{dr}{dt} = 0.05r(3 - r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Demuestre que $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico inestable.

Solución Puesto que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\cos\theta$$
$$\frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\text{sen}\,\theta.$$

A partir de $dr/dt = 0.05r(3 - r)$ observamos que $dr/dt = 0$ cuando $r = 0$, y podemos concluir que $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico si sustituimos $r = 0$ en el nuevo sistema.

La ecuación diferencial $dr/dt = 0.05r(3 - r)$ es una ecuación logística que puede resolverse mediante la separación de variables. Si $r(0) = r_0$ y $r_0 \neq 0$, entonces

$$r = \frac{3}{1 + c_0 e^{-0.15t}},$$

donde $c_0 = (3 - r_0)/r_0$. Puesto que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3}{1 + c_0 e^{-0.15t}} = 3,$$

se puede deducir que sin importar qué tan cerca de (0, 0) empiece una solución, ésta rebasará un disco de radio 1 respecto al origen. Por lo tanto, (0, 0) es un punto crítico inestable. En la **FIGURA 9.3.4** se muestra una solución típica que comienza cerca de (0, 0). ≡

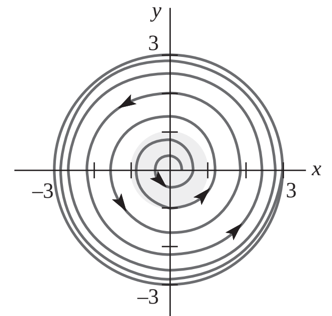


FIGURA 9.3.4 Punto crítico inestable del ejemplo 2

Linealización Rara vez es posible determinar la estabilidad del punto crítico de un sistema no lineal calculando soluciones explícitas, como en los ejemplos 1 y 2. En lugar de hacer esto, reemplazamos el término $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ en el sistema autónomo original $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ por un término lineal $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ que se aproxime lo más posible a $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ en las cercanías de $\mathbf{X}_1$. Este proceso de reemplazo, llamado **linealización**, se mostrará en primera instancia para la ecuación diferencial de primer orden $x' = g(x)$.

Una ecuación de la línea tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = x_1$ es $y = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)$, y si x_1 es un punto crítico de $x' = g(x)$, tenemos

$$x' = g(x) \approx g'(x_1)(x - x_1).$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$x' = g'(x_1)(x - x_1)$$

es $x = x_1 + ce^{\lambda_1 t}$, donde $\lambda_1 = g'(x_1)$. Por lo tanto, $g'(x_1) < 0$, entonces $x(t)$ se aproxima a x_1. El teorema 9.3.1 afirma que se presenta el mismo comportamiento en la ecuación diferencial original siempre y cuando el valor de $x(0) = x_0$ sea seleccionado lo suficientemente cercano al de x_1.

Las ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden se estudiaron en la sección 2.1.

Teorema 9.3.1 Criterio de estabilidad para $x' = g(x)$

Sea x_1 un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma de primer orden $x' = g(x)$, donde g es diferenciable en x_1.

a) Si $g'(x_1) < 0$, entonces x_1 es un punto crítico estable asintóticamente.
b) Si $g'(x_1) > 0$, entonces x_1 es un punto crítico inestable.

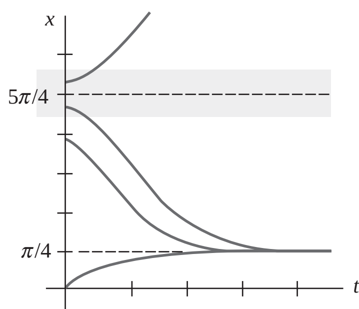


FIGURA 9.3.5 $\pi/4$ es asintóticamente estable; $5\pi/4$ es inestable en el ejemplo 3

EJEMPLO 3 Estabilidad en una ecuación diferencial no lineal de primer orden

Tanto $x = \pi/4$ como $x = 5\pi/4$ son puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma $x' = \cos x - \operatorname{sen} x$. Esta ecuación diferencial es difícil de resolver explícitamente; sin embargo, podemos utilizar el teorema 9.3.1 para predecir el comportamiento de las soluciones en las cercanías de estos dos puntos críticos.

Puesto que $g'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$, $g'(\pi/4) = -\sqrt{2} < 0$ y $g'(5\pi/4) = \sqrt{2} > 0$. Por lo tanto $x = \pi/4$ es un punto crítico estable asintóticamente, pero $x = 5\pi/4$ es inestable. En la **FIGURA 9.3.5** utilizamos un método numérico para investigar las soluciones que comenzaban cerca de $(0, \pi/4)$ y $(0, 5\pi/4)$. Observe que las curvas solución que empiezan cerca de $(0, 5\pi/4)$ se mueven alejándose rápidamente de la línea $x = 5\pi/4$, tal como se había anticipado. ≡

EJEMPLO 4 Análisis de estabilidad de la ecuación diferencial logística

Sin resolverla explícitamente, analice los puntos críticos de la ecuación diferencial logística (véase la sección 2.8) $x' = \dfrac{r}{K}x(K - x)$, donde r y K son constantes positivas.

Solución Los dos puntos críticos son $x = 0$ y $x = K$. Puesto que

$$g'(x) = \frac{r}{K}(K - 2x),$$

$g'(0) = r$ y $g'(K) = -r$. Por lo tanto, podemos concluir que $x = 0$ es un punto crítico inestable y $x = K$ es un punto crítico estable asintóticamente. ≡

■ Matriz jacobiana Se puede llevar a cabo un análisis similar para un sistema autónomo plano. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ en $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es

$$z = g(x_1, y_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1),$$

y $g(x, y)$ puede ser aproximada por su plano tangente en las cercanías de $\mathbf{X}_1$.

Cuando $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico del sistema autónomo plano, $P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) = 0$ y tenemos

$$x' = P(x, y) \approx \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1)$$

$$y' = Q(x, y) \approx \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1).$$

El sistema original $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ puede ser aproximado en las cercanías del punto crítico $\mathbf{X}_1$ mediante el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} & \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)} \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} & \left.\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se conoce con el nombre de **matriz jacobiana** en $\mathbf{X}_1$ y se expresa como $\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$. Si establecemos $\mathbf{H} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1$, entonces el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ se convierte en $\mathbf{H}' = \mathbf{AH}$, que es de la forma del sistema lineal analizado en la sección 9.2. El punto crítico $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ para $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ corresponde ahora al punto crítico $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{H}' = \mathbf{AH}$. Si los valores propios de $\mathbf{A}$ tienen partes reales negativas, entonces, por el teorema 9.2.1, $\mathbf{0}$ es un punto crítico estable asintóticamente para $\mathbf{H}' = \mathbf{AH}$. Si existe un valor propio que tenga parte real positiva, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ es un punto crítico inestable. El teorema 9.3.2 afirma que se puede llegar a la misma conclusión para el punto crítico $\mathbf{X}_1$ del sistema original.

Teorema 9.3.2 Criterio de estabilidad para los sistemas autónomos planos

Sea $\mathbf{X}_1$ un punto crítico del sistema autónomo plano $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$, donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en las cercanías de $\mathbf{X}_1$.

a) Si los valores propios de $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ tienen parte real negativa, entonces $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico estable asintóticamente.

b) Si $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ tiene un valor propio con parte real positiva, entonces $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico inestable.

EJEMPLO 5 Análisis de estabilidad de sistemas no lineales

Clasifique (si es posible) como estables o inestables los puntos críticos de cada uno de los sistemas autónomos planos siguientes.

a) $x' = x^2 + y^2 - 6$, $y' = x^2 - y$

b) $x' = 0.01x(100 - x - y)$, $y' = 0.05y(60 - y - 0.2x)$

Solución Los puntos críticos de cada sistema se determinaron en el ejemplo 4 de la sección 9.1.

a) Los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$, la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((\sqrt{2}, 2)) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((-\sqrt{2}, 2)) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de $\mathbf{A}_1$ es negativo, $\mathbf{A}_1$ tiene un valor propio real positivo. Por lo tanto, $(\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico inestable. La matriz $\mathbf{A}_2$ tiene un determinante y una traza negativa, por lo que ambos valores propios tienen partes reales negativas. Se puede deducir entonces que $(-\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico estable.

b) Los puntos críticos son (0, 0), (0, 60), (100, 0) y (50, 50), la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0.01(100 - 2x - y) & -0.01x \\ -0.01y & 0.05(60 - 2y - 0.2x) \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((0, 60)) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{g}'((100, 0)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_4 = \mathbf{g}'((50, 50)) = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz $\mathbf{A}_1$ tiene un determinante positivo y una traza positiva, ambos valores propios tienen partes reales positivas. Por lo tanto, (0, 0) es un punto crítico inestable. Los determinantes de las matrices $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son negativos, y así, en cada caso, uno de los valores propios es positivo. De este modo, tanto (0, 60) como (100, 0) son puntos críticos inestables. Puesto que la matriz $\mathbf{A}_4$ tiene un determinante positivo y una traza negativa, (50, 50) es un punto crítico estable. ≡

En el ejemplo 5 no calculamos $\tau^2 - 4\Delta$ (como en la sección 9.2) e intentamos clasificar los puntos críticos como nodos estables, puntos espirales estables, puntos silla, etc. Por ejem-

plo, para $\mathbf{X}_1 = (-\sqrt{2}, 2)$ en el ejemplo 4*a*), $\tau^2 - 4\Delta < 0$, y si el sistema fuera lineal, podríamos haber concluido que $\mathbf{X}_1$ era un punto espiral estable. La **FIGURA 9.3.6** muestra varias curvas solución cercanas a $\mathbf{X}_1$ obtenidas mediante un método numérico, y cada solución *parece* crecer en espiral hacia el punto crítico.

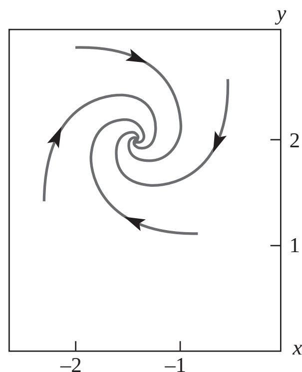


FIGURA 9.3.6 El punto parece ser un punto espiral estable

Clasificación de los puntos críticos Es natural preguntarse si es posible inferir más información geométrica acerca de las soluciones cercanas al punto crítico $\mathbf{X}_1$ de un sistema autónomo no lineal a partir de un análisis del punto crítico del sistema lineal correspondiente. La respuesta se resume en la **FIGURA 9.3.7**; sin embargo, deben atenderse los comentarios siguientes.

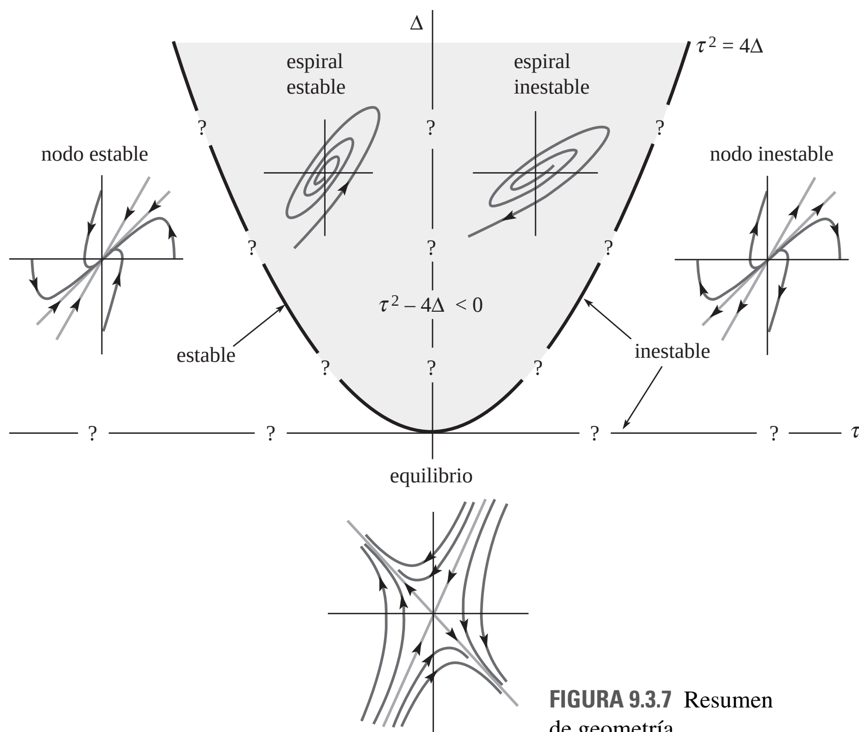


FIGURA 9.3.7 Resumen de geometría

i) En cinco casos distintos (nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable y equilibrio) el punto crítico se puede categorizar como el punto crítico en el sistema lineal correspondiente. Las soluciones tienen las *mismas características geométricas generales* que las soluciones del sistema lineal, y conforme se acercan a las inmediaciones de $\mathbf{X}_1$ el parecido es mayor.

ii) Si $\tau^2 = 4\Delta$ y $\tau > 0$, el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable; sin embargo, para este caso en el límite, *todavía no podemos decidir si* $\mathbf{X}_1$ *es una espiral estable, un nodo inestable o un nodo degenerado inestable.* De manera similar, si $\tau^2 = 4\Delta$ y $\tau < 0$, el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es estable pero puede ser una espiral estable, un nodo estable o un nodo degenerado estable.

iii) Si $\tau = 0$ y $\Delta > 0$, los valores propios de $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X})$ son imaginarios puros, y para este caso en el límite $\mathbf{X}_1$ puede ser una espiral estable, una espiral inestable o un centro. *De este modo, todavía no es posible determinar si* $\mathbf{X}_1$ *es estable o inestable.*

EJEMPLO 6 Clasificación de los puntos críticos de un sistema no lineal

Clasifiquemos cada punto crítico del sistema autónomo plano del ejemplo 5*b*) como nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable o punto silla.

Solución Para la matriz $\mathbf{A}_1$ correspondiente a (0, 0), $\Delta = 3$, $\tau = 4$, y así $\tau^2 - 4\Delta = 4$. Por lo tanto, (0, 0) es un nodo inestable. Los puntos críticos (0, 60) y (100, 0) son equilibrios, ya que $\Delta < 0$ en ambos casos. Para la matriz $\mathbf{A}_4$, $\Delta > 0$, $\tau < 0$ y $\tau^2 - 4\Delta > 0$. Se puede deducir que (50, 50) es un nodo estable. Experimente con un método numérico para comprobar estas conclusiones. ≡

EJEMPLO 7 Análisis de estabilidad de un resorte suave

De la sección 3.11, recuerde que la ecuación diferencial de segundo orden $mx'' + kx + k_1x^3 = 0$, para $k > 0$, representa un modelo general para las oscilaciones libres no amortiguadas de una masa m conectada a un resorte no lineal. Si $k = 1$ y $k_1 = -1$, el resorte se conoce como *suave* y el sistema autónomo plano correspondiente a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + x - x^3 = 0$ es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^3 - x. \end{aligned}$$

Encuentre y clasifique (si es posible) los puntos críticos.

Solución Puesto que $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, los puntos críticos son (0, 0), (1, 0) y (−1, 0). Las matrices jacobianas correspondientes son

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((1, 0)) = \mathbf{g}'((-1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{A}_2 < 0$, los puntos críticos (1, 0) y (−1, 0) son puntos silla. Los valores propios de la matriz $\mathbf{A}_1$ son $\pm i$, y de acuerdo con el comentario *iii*), el estado que guarda el punto crítico en (0, 0) permanece dudoso. Podría ser una espiral estable, una espiral inestable o un centro. ≡

El método del plano fase El método de linealización, cuando tiene éxito, puede proporcionar información útil acerca del comportamiento local de las soluciones cercanas a los puntos críticos. Es de ayuda limitada si estamos interesados en encontrar las soluciones cuya posición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ no sea cercana a un punto crítico o si deseamos obtener una visión global de la familia de curvas solución. El **método del plano fase** se basa en el hecho de que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

y tiene como objeto encontrar y como una función de x utilizando uno de los métodos disponibles para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (capítulo 2). Como se pudo observar en los ejemplos 8 y 9, a menudo el método puede utilizarse para decidir si un punto crítico como (0, 0) en el ejemplo 7 es una espiral estable, una espiral inestable o un centro.

EJEMPLO 8 Método del plano fase

Utilice el método del plano fase para clasificar el único punto crítico (0, 0) del sistema autónomo plano

$$\begin{aligned} x' &= y^2 \\ y' &= x^2. \end{aligned}$$

Solución El determinante de la matriz jacobiana

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

es 0 en (0, 0), por lo que la naturaleza del punto crítico (0, 0) permanece dudosa. Utilizando el método del plano fase, obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx\ dt} = \frac{x^2}{y^2},$$

que puede resolverse fácilmente por separación de variables:

$$\int y^2\, dy = \int x^2\, dx \qquad \text{o} \qquad y^3 = x^3 + c.$$

Si $\mathbf{X}(0) = (0, y_0)$ es posible deducir que $y^3 = x^3 + y_0^3$o $y = \sqrt[3]{x^3 + y_0^3}$. La **FIGURA 9.3.8** muestra un conjunto de curvas solución correspondiente a las diferentes alternativas para y_0, y la naturaleza del punto crítico es evidente. Sin importar qué tan cerca de (0, 0) comience la solución, $\mathbf{X}(t)$ se aleja del origen conforme aumenta t. El punto crítico en (0, 0) es, por lo tanto, inestable. ≡

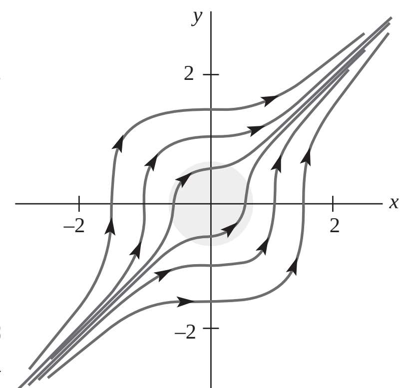


FIGURA 9.3.8 Retrato de fase del sistema no lineal del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Análisis del plano fase de un resorte suave

Utilice el método del plano fase para determinar la naturaleza de las soluciones de $x'' + x - x^3 = 0$ en las cercanías de (0, 0).

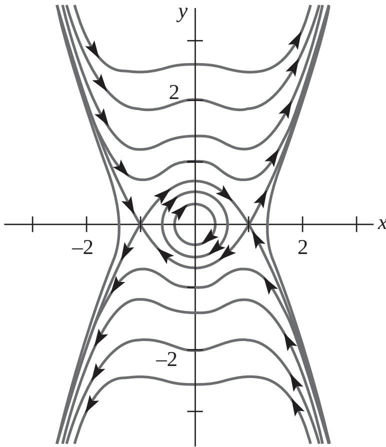


FIGURA 9.3.9 Retrato de fase del sistema no lineal del ejemplo 9

Solución Si establecemos $dx/dt = y$, entonces $dy/dt = x^3 - x$. A partir de lo anterior obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^3 - x}{y},$$

que puede resolverse por separación de variables. Integrando

$$\int y\,dy = \int (x^3 - x)\,dx \quad \text{obtenemos} \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c.$$

Después de completar el cuadrado, podemos escribir la solución como $y^2 = (x^2 - 1)^2/2 + c_0$. Si $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$, donde $0 < x_0 < 1$, entonces $c_0 = -(x_0^2 - 1)^2/2$, y así

$$y^2 = \frac{(x^2 - 1)^2}{2} - \frac{(x_0^2 - 1)^2}{2} = \frac{(2 - x^2 - x_0^2)(x_0^2 - x^2)}{2}.$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -x_0$. Además, el miembro derecho de la ecuación es positivo cuando $-x_0 < x < x_0$, por lo que cada x tiene *dos* valores y correspondientes. La solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ que satisface $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ es, por lo tanto, periódica, y de este modo (0, 0) es un centro.

La **FIGURA 9.3.9** muestra una familia de curvas solución o un retrato de fase del sistema original. Utilizamos el sistema autónomo del plano original para determinar las direcciones indicadas en cada trayectoria. ≡

9.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

1. Demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable asintótico del sistema autónomo no lineal

$$x' = \alpha x - \beta y + y^2$$
$$y' = \beta x + \alpha y - xy$$

cuando $\alpha < 0$ y un punto crítico inestable cuando $\alpha > 0$. [*Sugerencia:* Transforme a coordenadas polares.]

2. Cuando se expresa en coordenadas polares, un sistema plano autónomo toma la forma

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r(5 - r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable asintóticamente si, y sólo si, $\alpha < 0$.

En los problemas del 3 al 10, sin resolver explícitamente, clasifique los puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma de primer orden como asintóticamente estable o inestable. Se supone que todas las constantes son positivas.

3. $\dfrac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$

4. $\dfrac{dx}{dt} = -kx \ln \dfrac{x}{k},\ x > 0$

5. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_0)$

6. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

7. $\dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x),\ \alpha > \beta$

8. $\dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x),\ \alpha > \beta > \gamma$

9. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP)(1 - cP^{-1}),\ P > 0, a < bc$

10. $\dfrac{dA}{dt} = k\sqrt{A}(K - \sqrt{A}),\ A > 0$

En los problemas del 11 al 20, clasifique (si es posible) cada punto crítico del sistema autónomo plano que se proporciona como nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable o punto silla.

11. $x' = 1 - 2xy$, $y' = 2xy - y$

12. $x' = x^2 - y^2 - 1$, $y' = 2y$

13. $x' = y - x^2 + 2$, $y' = x^2 - xy$

14. $x' = 2x - y^2$, $y' = -y + xy$

15. $x' = -3x + y^2 + 2$, $y' = x^2 - y^2$

16. $x' = xy - 3y - 4$, $y' = y^2 - x^2$

17. $x' = -2xy$, $y' = y - x + xy - y^3$

18. $x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$, $y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$

19. $x' = x(10 - x - \frac{1}{2}y)$, $y' = y(16 - y - x)$

20. $x' = -2x + y + 10$, $y' = 2x - y - 15\dfrac{y}{y + 5}$

En los problemas del 21 al 26, clasifique (si es posible) cada punto crítico de la ecuación diferencial de segundo orden dada como nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable o punto silla.

21. $\theta'' = (\cos\theta - 0.5)\,\text{sen}\,\theta,\quad |\theta| < \pi$

22. $x'' + x = (\frac{1}{2} - 3(x')^2)x' - x^2$

23. $x'' + x'(1 - x^3) - x^2 = 0$

24. $x'' + 4\dfrac{x}{1 + x^2} + 2x' = 0$

25. $x'' + x = \epsilon x^3$ para $\epsilon > 0$

26. $x'' + x - \epsilon x|x| = 0$ para $\epsilon > 0$ [*Sugerencia*: $\dfrac{d}{dx}\, x|x| = 2|x|$.]

27. Demuestre que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$(1 + \alpha^2 x^2)x'' + (\beta + \alpha^2(x')^2)x = 0$$

tiene un punto silla en (0, 0) cuando $\beta < 0$.

28. Demuestre que el sistema dinámico

$$x' = -\alpha x + xy$$
$$y' = 1 - \beta y - x^2$$

tiene un punto crítico único cuando $\alpha\beta > 1$, y pruebe que este punto crítico es estable cuando $\beta > 0$.

29. ***a***) Demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = -x + y - x^3$$
$$y' = -x - y + y^2$$

tiene dos puntos críticos; para ello trace las gráficas de $-x + y - x^3 = 0$ y $-x - y + y^2 = 0$. Clasifique el punto crítico en (0, 0).

b) Demuestre que el segundo punto crítico $\mathbf{X}_1 = (0.88054, 1.56327)$ es un punto silla.

30. ***a***) Demuestre que (0, 0) es el único punto crítico de la **ecuación diferencial de Raleigh**

$$x'' + \epsilon(\tfrac{1}{3}(x')^3 - x') + x = 0.$$

b) Demuestre que (0, 0) es inestable cuando $\epsilon > 0$. ¿Cuándo es (0, 0) un punto espiral inestable?

c) Demuestre que (0, 0) es estable cuando $\epsilon < 0$. ¿Cuándo es (0, 0) un punto espiral estable?

d) Demuestre que (0, 0) es un centro cuando $\epsilon = 0$.

31. Utilice el método del plano fase para demostrar que (0, 0) es un centro de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + 2x^3 = 0$.

32. Mediante el método del plano fase, demuestre que la solución a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + 2x - x^2 = 0$ que satisface $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ es periódica.

33. ***a***) Encuentre los puntos críticos del sistema autónomo plano

$$x' = 2xy$$
$$y' = 1 - x^2 + y^2,$$

y demuestre que la linealización no proporciona información acerca de la naturaleza de estos puntos críticos.

b) Utilice el método del plano fase para demostrar que ambos puntos críticos encontrados en *a*) son centros. [*Sugerencia:* Establezca $u = y^2/x$ y demuestre que $(x - c)^2 + y^2 = c^2 - 1$.]

34. El origen es el único punto crítico de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + (x')^2 + x = 0$.

a) Demuestre que el método del plano fase conduce a la ecuación diferencial de Bernoulli $dy/dx = -y - xy^{-1}$.

b) Demuestre que la solución que satisface $x(0) = \frac{1}{2}$ y $x'(0) = 0$ es no periódica.

35. Una solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + x - x^3 = 0$ satisface $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$. Utilice el método del plano fase para determinar cuándo la solución resultante es periódica. [*Sugerencia:* Consulte el ejemplo 9.]

36. La ecuación diferencial no lineal $x'' + x = 1 + \epsilon x^2$ aparece en el análisis del movimiento de los planetas que utiliza la teoría de la relatividad. Clasifique (si es posible) todos los puntos críticos del sistema autónomo plano correspondiente.

37. Cuando en un circuito *LRC* está presente un capacitor no lineal, la caída de voltaje ya no se representa como q/C, sino que puede describirse con mayor precisión mediante $\alpha q + \beta q^3$, donde α y β son constantes y $\alpha > 0$. La ecuación diferencial (34) de la sección 3.8 del circuito libre puede reemplazarse entonces por

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \alpha q + \beta q^3 = 0.$$

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de esta ecuación diferencial no lineal. [*Sugerencia:* En los dos casos, divida $\beta > 0$ y $\beta < 0$.]

38. La ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$mx'' + kx + k_1x^3 = 0,$$

para $k > 0$, representa un modelo general para las oscilaciones no amortiguadas libres de una masa *m* conectada a un resorte. Si $k_1 > 0$, el resorte se llama *duro* (consulte el ejemplo 1 de la sección 3.11). Determine la naturaleza de las soluciones de $x'' + x + x^3 = 0$ en las cercanías de (0, 0).

39. La ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

puede interpretarse como un modelo para cierto péndulo con una función constante de manejo.

a) Demuestre que $(\pi/6, 0)$ y $(5\pi/6, 0)$ son puntos críticos del sistema autónomo plano correspondiente.

b) Clasifique el punto crítico $(5\pi/6, 0)$ mediante linealización.

c) Utilice el método del plano fase para clasificar el punto crítico $(\pi/6, 0)$.

40. ***a***) Demuestre que (0, 0) es un punto crítico aislado del sistema autónomo plano

$$x' = x^4 - 2xy^3$$
$$y' = 2x^3y - y^4$$

sin embargo, esa linealización no proporciona ninguna información útil acerca de la naturaleza de este punto crítico.

b) Utilice el método del plano fase para demostrar que $x^3 + y^3 = 3cxy$. Esta curva clásica se llama *hoja de Descartes*. Las ecuaciones paramétricas de una hoja son

$$x = \frac{3ct}{1 + t^3},\quad y = \frac{3ct^2}{1 + t^3}.$$

[*Sugerencia:* La ecuación diferencial en *x* y *y* es homogénea.]

c) Utilice una herramienta de graficación o un método numérico para obtener las curvas solución. Con ayuda del retrato de fase, ¿podría clasificar usted el punto crítico como estable o inestable? ¿Podría clasificar el punto crítico como un nodo, un punto silla, un centro o un punto espiral? Explique su respuesta.

9.4 Sistemas autónomos como modelos matemáticos

Introducción Muchas aplicaciones de física conducen al planteamiento de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales de segundo orden, esto es, a ecuaciones diferenciales de la forma $x'' = g(x, x')$. Por ejemplo, en el análisis del movimiento libre amortiguado de un sistema resorte-masa visto en la sección 3.8, supusimos que la fuerza de amortiguamiento era proporcional a la velocidad x' y que el modelo resultante $mx'' = -\beta x' - kx$ es una ecuación diferencial lineal. Sin embargo, cuando la magnitud de la fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, la nueva ecuación diferencial $mx'' = -\beta x' |x'| - kx$ es no lineal. Y el sistema autónomo plano correspondiente es no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{\beta}{m} y|y| - \frac{k}{m} x. \end{aligned}$$

En esta sección analizaremos también el péndulo no lineal, el movimiento de una cuenta al desplazarse por una curva, los modelos depredador-presa de Lotka-Volterra y el modelo de competencia de Lotka-Volterra. En estos ejercicios se presentan modelos adicionales.

Péndulo no lineal En la fórmula (6) de la sección 3.11 mostramos que el ángulo de desplazamiento θ de un péndulo simple satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Cuando establecemos $x = \theta$ y $y = \theta'$, esta ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse de nuevo como el sistema dinámico

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

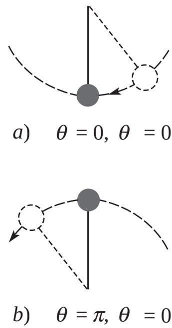


FIGURA 9.4.1 (0, 0) es estable; (π, 0) es inestable

Los puntos críticos son $(\pm k\pi, 0)$, y se demuestra fácilmente que la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'((\pm k\pi, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1}\dfrac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $k = 2n + 1$, $\Delta < 0$, por lo que todos los puntos críticos $(\pm(2n + 1)\pi, 0)$ son puntos silla. En particular, el punto crítico en $(\pi, 0)$ es inestable, tal como se esperaba. Consulte la **FIGURA 9.4.1**. Cuando $k = 2n$, los valores propios son imaginarios puros, por lo que la naturaleza de estos puntos críticos es dudosa. Como hemos supuesto que no existen fuerzas de amortiguamiento actuando sobre el péndulo, esperamos que todos los puntos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$ sean centros. Lo anterior puede comprobarse utilizando el método del plano fase. A partir de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{g}{l}\frac{\operatorname{sen} x}{y}$$

es posible deducir que
$$y^2 = \frac{2g}{l} \cos x + c.$$

Si $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$, entonces
$$y^2 = \frac{2g}{l} (\cos x - \cos x_0).$$

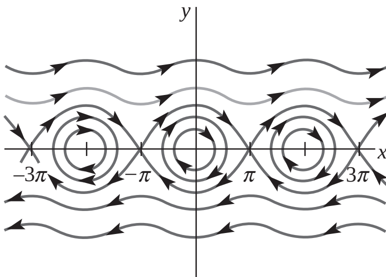


FIGURA 9.4.2 Retrato de fase de un péndulo no lineal

Observe que $y = 0$ cuando $x = -x_0$, y que $(2g/l)(\cos x - \cos x_0) > 0$ para $|x| < |x_0| < \pi$. Por lo tanto, cada x tiene dos valores correspondientes de y, y así la solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ que satisface $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ es periódica. Podemos concluir que (0, 0) es un centro. Observe que $x = \theta$ aumenta para las soluciones, tal como la solución trazada en negro en la **FIGURA 9.4.2**, que corresponden a velocidades iniciales elevadas. En este caso el péndulo gira respecto a su pivote en círculos completos.

EJEMPLO 1 Soluciones periódicas de la ecuación diferencial del péndulo

A un péndulo en posición de equilibrio, con $\theta = 0$, se le proporciona una velocidad angular inicial de ω_0 rad/s. Determine en qué condiciones el movimiento resultante es periódico.

Solución Se requiere examinar la solución del sistema autónomo plano que satisface $\mathbf{X}(0) = (0, \omega_0)$. A partir de $y^2 = (2g/l)\cos x + c$ se puede deducir que

$$y^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos x - 1 + \frac{l}{2g}\omega_0^2\right).$$

Para poder establecer que la solución $\mathbf{X}(t)$ es periódica, basta demostrar que existen dos intersecciones del eje $x = \pm x_0$ entre $-\pi$ y π y que el lado derecho resulta positivo para $|x| < |x_0|$. Por lo tanto, cada x tiene dos valores correspondientes de y.

Si $y = 0$, $\cos x = 1 - (l/2g)\omega_0^2$, y esta ecuación tiene dos soluciones $x = \pm x_0$ entre $-\pi$ y π, siempre y cuando $1 - (l/2g)\omega_0^2 > -1$. Observe que $(2g/l)(\cos x - \cos x_0)$ es entonces positiva para $|x| < |x_0|$. Esta restricción en la velocidad angular inicial puede escribirse como

$$|\omega_0| < 2\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

≡

Oscilaciones no lineales: la cuenta deslizante Suponga, como indica la **FIGURA 9.4.3**, que una cuenta con masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado cuya forma está descrita por la función $z = f(x)$. Una gran variedad de oscilaciones no lineales puede obtenerse cambiando la forma del alambre y realizando diferentes suposiciones acerca de las fuerzas que actúan sobre la cuenta.

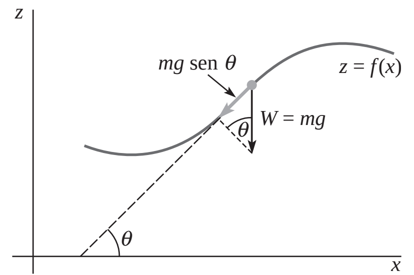


FIGURA 9.4.3 Fuerzas que actúan sobre la cuenta deslizante

La fuerza tangencial **F** debida al peso $W = mg$ tiene magnitud mg sen θ, y por lo tanto la componente x de **F** es $F_x = -mg$ sen $\theta\cos\theta$. Como $\tan\theta = f'(x)$ podemos utilizar las identidades $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ para concluir que

$$F_x = -mg\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = -mg\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2}.$$

Suponemos (como en la sección 3.8) que una fuerza amortiguada **D**, que actúa en dirección opuesta al movimiento, es una constante múltiple de la velocidad de la cuenta. El componente x de **D** es, por lo tanto,

$$D_x = -\beta\frac{dx}{dt}.$$

Si ignoramos la fuerza de fricción entre el alambre y la cuenta y suponemos que no se ejercen fuerzas externas en el sistema, podemos deducir a partir de la segunda ley de Newton que

$$mx'' = -mg\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \beta x',$$

y el sistema autónomo plano correspondiente es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{\beta}{m}y. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es un punto crítico del sistema, $y_1 = 0$ y, por lo tanto, $f'(x_1) = 0$. Entonces, la cuenta debe estar en reposo en algún punto del alambre donde la línea tangente es horizontal. Cuando f es diferenciable dos veces, en $\mathbf{X}_1$ la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf''(x_1) & -\beta/m \end{pmatrix},$$

por lo que $\tau = -\beta/m$, $\Delta = gf''(x_1)$ y $\tau^2 - 4\Delta = \beta^2/m^2 - 4gf''(x_1)$. Utilizando los resultados de la sección 9.3 podemos llegar a las conclusiones siguientes:

i) $f''(x_1) < 0$:
Por lo tanto, un máximo relativo se presenta en $x = x_1$, y puesto que $\Delta < 0$, tenemos un *punto silla inestable* en $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$.

ii) $f''(x_1) > 0$ y $\beta > 0$:

Por lo tanto, se presenta un mínimo relativo en $x = x_1$, y como $\tau < 0$ y $\Delta > 0$, $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ es un *punto crítico estable*. Si $\beta^2 > 4gm^2f''(x_1)$, el sistema es **sobreamortiguado** y el punto crítico es un *nodo estable*. Si $\beta^2 < 4gm^2f''(x_1)$, el sistema es **subamortiguado** y el punto crítico es un *punto espiral estable*. La naturaleza exacta del punto crítico estable es aún dudosa cuando $\beta^2 = 4gm^2f''(x_1)$.

iii) $f''(x_1) > 0$ y el sistema es subamortiguado ($\beta = 0$):

En este caso, los valores propios son imaginarios puros; sin embargo, el método del plano fase puede utilizarse para demostrar que el punto crítico es un *centro*. Por lo tanto, las soluciones con $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0))$ cerca de $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ son periódicas.

EJEMPLO 2 Deslizamiento de cuentas a lo largo de una onda seno

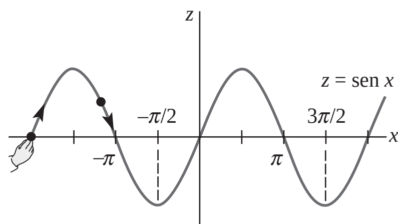


FIGURA 9.4.4 $-\pi/2$ y $3\pi/2$ son estables en el ejemplo 2

Una cuenta de 10 gramos se desplaza a lo largo de la gráfica de $z = \text{sen } x$. De acuerdo con la conclusión *ii*), el mínimo relativo en $x_1 = -\pi/2$ y $3\pi/2$ genera los puntos críticos estables (véase la **FIGURA 9.4.4**). Como $f''(-\pi/2) = f''(3\pi/2) = 1$, el sistema será subamortiguado siempre que $\beta^2 < 4gm^2$. Si utilizamos unidades SI, $m = 0.01$ kg y $g = 9.8$ m/s^2, y así la condición para un sistema subamortiguado se convierte en $\beta^2 < 3.92 \times 10^{-3}$.

Si $\beta = 0.01$ es la constante de amortiguamiento, ambos puntos críticos son puntos espirales estables. Las dos soluciones correspondientes a las condiciones iniciales $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0)) = (-2\pi, 10)$ y $\mathbf{X}(0) = (-2\pi, 15)$, respectivamente, se obtuvieron a partir de un método numérico y aparecen en la **FIGURA 9.4.5**. Cuando $x'(0) = 10$, la cuenta tiene el impulso suficiente como para pasar sobre la cima ubicada en $x = -3\pi/2$ pero no en $x = \pi/2$. La cuenta se acerca entonces al mínimo relativo basado en $x = -\pi/2$. Si $x'(0) = 15$, la cuenta tiene el impulso adecuado como para pasar sobre las dos cimas, pero va y viene en la base del valle situado en $x = 3\pi/2$ y se acerca al punto $(3\pi/2, -1)$ del alambre. Realice sus propios experimentos con otras condiciones iniciales utilizando un método numérico.

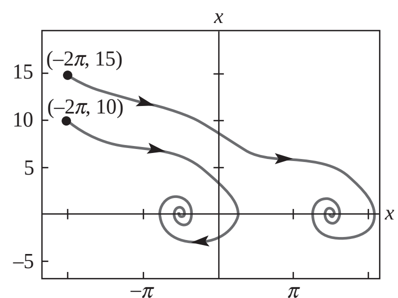


FIGURA 9.4.5 $\beta = 0.01$ en el ejemplo 2

La **FIGURA 9.4.6** muestra una colección de curvas solución obtenidas a partir de un método numérico para el caso subamortiguado. Puesto que $\beta = 0$, los puntos críticos correspondientes a $x_1 = -\pi/2$ y $3\pi/2$ son ahora los centros. Cuando $\mathbf{X}(0) = (-2\pi, 10)$, la cuenta tiene el impulso suficiente como para pasar por *todas* las cimas. La figura también indica que cuando se libera una cuenta desde el punto de reposo hacia un punto del alambre localizado entre $x = -3\pi/2$ y $x = \pi/2$, el movimiento resultante es periódico. ≡

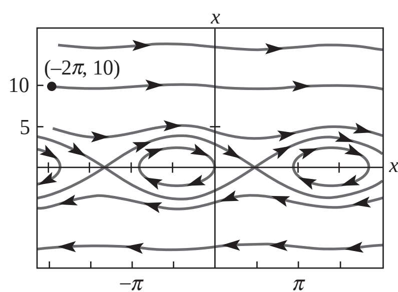


FIGURA 9.4.6 $\beta = 0$ en el ejemplo 2

Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra Una **interacción depredador-presa** entre dos especies se presenta cuando alguna de las especies (el depredador) se alimenta de la segunda especie (la presa). Por ejemplo, la lechuza de nieve se alimenta casi exclusivamente de un roedor muy común en el ártico llamado turón de Noruega, mientras que un turón de Noruega utiliza las plantas de la tundra ártica como su fuente principal de alimento. El interés en el uso de las matemáticas para ayudar a explicar las interacciones entre un depredador y su presa se ha visto estimulado por la observación de los ciclos de población en muchos mamíferos del ártico. En el distrito del río MacKenzie en Canadá, por ejemplo, la presa principal del lince es la liebre, y ambas poblaciones tienen un ciclo de vida de 10 años aproximadamente.

Existen muchos modelos depredador-presa que conducen a sistemas autónomos planos, los cuales tienen al menos una solución periódica. El primero de tales modelos fue construido en forma independiente por los biomatemáticos pioneros A. Lotka (1925) y V. Volterra (1926). Si x expresa el número de depredadores y y el número de presas, entonces el modelo de Lotka-Volterra toma la forma

$$x' = -ax + bxy = x(-a + by)$$
$$y' = -cxy + dy = y(-cx + d),$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

Observe que en ausencia de depredadores ($x = 0$), $y' = dy$, y así el número de presas aumenta en forma exponencial. En ausencia de presas, $x' = -ax$, por lo que la población de depredadores se extingue. El término $-cxy$ representa la tasa de mortandad debida a la depredación. Por lo tanto, el modelo supone que esta tasa es directamente proporcional al *número de encuentros xy posibles* entre un depredador y una presa en un tiempo t en particular, y el término bxy representa la contribución positiva resultante hacia la población de depredadores.

Los puntos críticos de este sistema autónomo plano son (0, 0) y $(d/c, a/b)$, y las matrices jacobianas correspondientes son

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((d/c, a/b)) = \begin{pmatrix} 0 & bd/c \\ -ac/b & 0 \end{pmatrix}.$$

El punto crítico en (0, 0) es un punto silla, y la **FIGURA 9.4.7** muestra un perfil típico de soluciones que se encuentran en el primer cuadrante y cerca de (0, 0).

FIGURA 9.4.7 Soluciones cercanas a (0, 0)

Puesto que la matriz $\mathbf{A}_2$ posee valores propios imaginarios puros $\lambda = \pm\sqrt{ad}\,i$, el punto crítico $(d/c, a/b)$ *puede* ser un centro. Esta posibilidad puede investigarse utilizando el método del plano fase. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)},$$

podemos separar variables y obtener

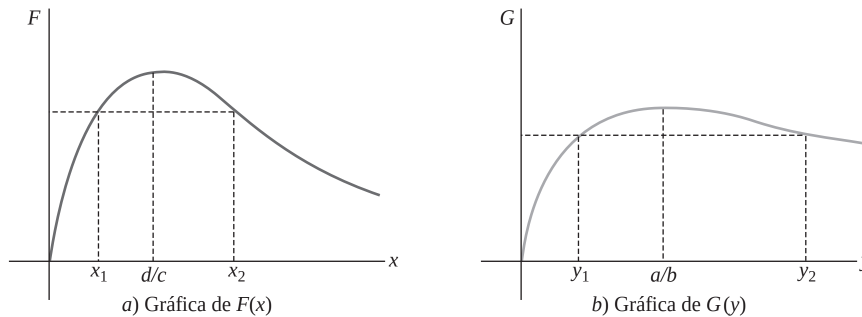
$$\int \frac{-a + by}{y}\,dy = \int \frac{-cx + d}{x}\,dx$$

por lo que

$$-a \ln y + by = -cx + d \ln x + c_1 \quad \text{o} \quad (x^d e^{-cx})(y^a e^{-by}) = c_0.$$

El argumento siguiente establece que todas las curvas solución originadas en el primer cuadrante son periódicas.

En la **FIGURA 9.4.8** se muestran gráficas típicas de las funciones no negativas $F(x) = x^d e^{-cx}$ y $G(y) = y^a e^{-by}$. No es difícil demostrar que $F(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = d/c$, mientras que $G(y)$ tiene un máximo absoluto en $y = a/b$. Observe que, a excepción de 0 y el máximo absoluto, F y G toman todos los valores presentes en su rango precisamente dos veces.



a) Gráfica de $F(x)$ b) Gráfica de $G(y)$

FIGURA 9.4.8 Las gráficas de F y G ayudan a establecer las propiedades 1, 2 y 3

Estas gráficas pueden utilizarse para establecer las siguientes propiedades de una curva solución originada en un punto no crítico (x_0, y_0) en el primer cuadrante.

1. Si $y = a/b$, la ecuación $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones x_m y x_M que satisfacen $x_m < d/c < x_M$.
2. Si $x_m < x_1 < x_M$ y $x = x_1$, entonces $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones y_1 y y_2 que satisfacen $y_1 < a/b < y_2$.
3. Si x se encuentra fuera del intervalo $[x_m, x_M]$, entonces $F(x)G(y) = c_0$ no tiene soluciones.

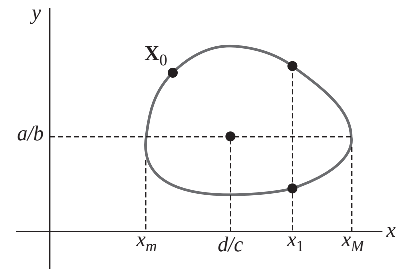


FIGURA 9.4.9 Solución periódica del modelo de Lotka-Volterra

La demostración de 1) y el bosquejo de las partes 2) y 3) se proporcionarán en los ejercicios. Como $(x_0, y_0) \neq (d/c, a/b)$, $F(x_0)G(y_0) < F(d/c)G(a/b)$. Si $y = a/b$, entonces

$$0 < \frac{c_0}{G(a/b)} = \frac{F(x_0)G(y_0)}{G(a/b)} < \frac{F(d/c)G(a/b)}{G(a/b)} = F(d/c).$$

Por lo tanto, $F(x) = c_0/G(a/b)$ tiene precisamente dos soluciones x_m y x_M que satisfacen $x_m < d/c < x_M$. La gráfica de una solución periódica típica se muestra en la **FIGURA 9.4.9**.

EJEMPLO 3 Ciclos poblacionales depredador-presa

Establecemos $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$ en el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra, el punto crítico ubicado en el primer cuadrante es $(d/c, a/b) = (80, 50)$, y sabemos que es un centro. Véase la **FIGURA 9.4.10** en la que hemos utilizado un método numérico para generar estos ciclos. Conforme más cerca esté la condición inicial $\mathbf{X}_0$ de (80, 50), las solu-

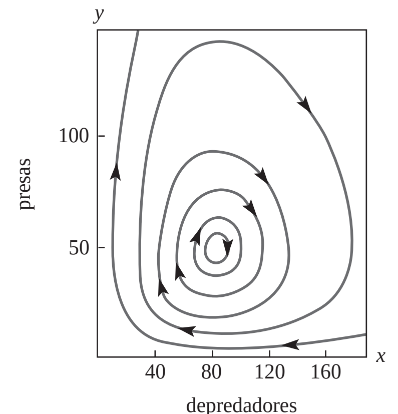
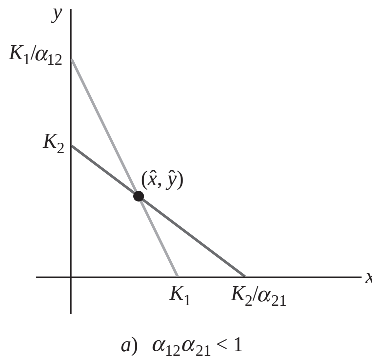
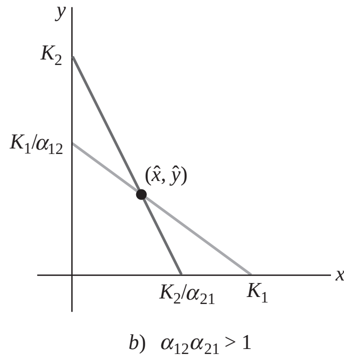


FIGURA 9.4.10 Retrato de fase del modelo de Lotka-Volterra en el ejemplo 3

ciones periódicas serán más parecidas a las soluciones elípticas del sistema lineal correspondiente. Los valores propios de $\mathbf{g}'((80, 50))$ son $\lambda = \pm\sqrt{ad}\,i = \pm(\sqrt{2}/10)i$, por lo que las soluciones cercanas al punto crítico tienen un periodo $p \approx 10\sqrt{2}\pi$, o de alrededor de 44.4. ≡



a) $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$



b) $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$

FIGURA 9.4.11 Dos condiciones cuando el punto crítico está en el primer cuadrante

Modelo de competición de Lotka-Volterra Se presenta una **interacción competitiva** cuando dos o más especies compiten por los recursos de alimento, agua, luz y espacio en un ecosistema. El uso de uno de estos recursos por parte de una población, por lo tanto, inhibe la habilidad de sobrevivir y crecer de la otra. ¿En qué condiciones pueden coexistir dos especies en competencia? Se ha diseñado un gran número de modelos matemáticos que ofrecen ideas en cuanto a las condiciones que permiten la *coexistencia*. Si x expresa el número de la especie I y y expresa el número de la especie II, entonces el modelo de Lotka-Volterra se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r_1}{K_1}x(K_1 - x - \alpha_{12}y) \\ y' &= \frac{r_2}{K_2}y(K_2 - y - \alpha_{21}x). \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que en ausencia de la especie II ($y = 0$), $x' = (r_1/K_1)x(K_1 - x)$, y así la primera población crece logísticamente y se aproxima a la población en estado estable K_1 (véase la sección 2.8 y el ejemplo 4 de la sección 9.3). Un enunciado similar es válido para la especie II que crece en ausencia de la especie I. En la segunda ecuación, el término $-\alpha_{21}xy$ surge a partir del efecto competitivo de la especie I sobre la especie II. Por lo tanto, el modelo supone que esta velocidad de inhibición es directamente proporcional al número de pares xy competitivamente posibles en un tiempo t en particular.

Este sistema autónomo plano tiene puntos críticos en (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$. Cuando $\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, las líneas $K_1 - x - \alpha_{12}y = 0$ y $K_2 - y - \alpha_{21}x = 0$ se intersecan para producir un cuarto punto crítico $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$. La **FIGURA 9.4.11** muestra las dos condiciones en las que $(\hat{x}, \hat{y})$ está en el primer cuadrante.

En $(\hat{x}, \hat{y})$ la traza y el determinante de la matriz jacobiana son, respectivamente,

$$\tau = -\hat{x}\frac{r_1}{K_1} - \hat{y}\frac{r_2}{K_2} \quad \text{y} \quad \Delta = (1 - \alpha_{12}\alpha_{21})\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2}.$$

En el caso *a*), $K_1/\alpha_{12} > K_2$ y $K_2/\alpha_{21} > K_1$. Se puede deducir que $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$. Como

$$\begin{aligned} \tau^2 - 4\Delta &= \left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1} + \hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2 + 4(\alpha_{12}\alpha_{21} - 1)\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} \\ &= \left[\left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1} - \hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2 - 4\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2}\right] + 4\alpha_{12}\alpha_{21}\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} \\ &= \left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1} - \hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2}, \end{aligned}$$

$\tau^2 - 4\Delta > 0$, entonces $(\hat{x}, \hat{y})$ es un nodo estable. Por lo tanto, si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está lo suficientemente cercano a $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}$, y podemos concluir que es posible la coexistencia. La demostración de que el caso *b*) conduce al punto silla y la investigación de la naturaleza de los puntos críticos en (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ se dejan como ejercicios.

Cuando las interacciones de competencia entre dos especies son débiles, ambos coeficientes α_{12} y α_{21} serán pequeños, y así pueden satisfacerse las condiciones $K_1/\alpha_{12} > K_2$ y $K_2/\alpha_{21} > K_1$. Esto puede ocurrir cuando existe un pequeño traslape en los rangos de dos especies depredadoras que van a la caza de una presa común.

EJEMPLO 4 Modelo de competencia de Lotka-Volterra

Una interacción competitiva se describe mediante el modelo de competencia de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} x' &= 0.004x(50 - x - 0.75y) \\ y' &= 0.001y(100 - y - 3.0x). \end{aligned}$$

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos del sistema.

Solución Los puntos críticos se presentan en (0, 0), (50, 0), (0, 100) y en la solución (20, 40) del sistema

$$\begin{aligned} x + 0.75y &= 50 \\ 3.0x + y &= 100. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha_{12}\alpha_{21} = 2.25 > 1$, tenemos el caso *b*) de la figura 9.4.11, y así el punto crítico en (20, 40) es un punto silla. La matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0.2 - 0.008x - 0.003y & -0.003x \\ -0.003y & 0.1 - 0.002y - 0.003x \end{pmatrix},$$

y obtenemos

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((50,0)) = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.15 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{g}'((20,40)) = \begin{pmatrix} -0.08 & -0.12 \\ -0.06 & -0.04 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_4 = \mathbf{g}'((0,100)) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, (0, 0) es un nodo inestable, mientras que (50, 0) y (0, 100) son estables. (¡Compruébelo!) Puesto que det $\mathbf{A}_3 < 0$, tenemos una segunda demostración de que (20, 40) es un punto silla. ≡

La coexistencia también puede presentarse en el modelo de competición de Lotka-Volterra si existe al menos una solución periódica ubicada en su totalidad en el primer cuadrante. Es factible demostrar, sin embargo, que este modelo no cuenta con soluciones periódicas.

9.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

≡ El péndulo no lineal

1. Un péndulo se libera en $\theta = \pi/3$ y se le imprime una velocidad angular inicial de ω_0 rad/s. Determine en qué condiciones es periódico el movimiento resultante.

2. *a*) Si un péndulo se libera a partir del reposo en $\theta = \theta_0$, demuestre que la velocidad angular es de nuevo 0 cuando $\theta = -\theta_0$.

b) El periodo T del péndulo es la cantidad de tiempo necesaria para que θ cambie de θ_0 a $-\theta_0$ y de nuevo a θ_0. Demuestre que

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, d\theta.$$

≡ La cuenta deslizante

3. Una cuenta con masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado cuya forma está descrita por la función $z = f(x)$. Si $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es un punto crítico del sistema autónomo plano asociado con la cuenta deslizante, compruebe que en $\mathbf{X}_1$ la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf''(x_1) & -\beta/m \end{pmatrix}.$$

4. Una cuenta con masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado cuya forma está descrita por la función $z = f(x)$. Cuando $f'(x_1) = 0, f''(x_1) > 0$, y el sistema no es amortiguado, el punto crítico $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ es un centro. Calcule el periodo de la cuenta cuando $x(0)$ está cerca de x_1 y $x'(0) = 0$.

5. Una cuenta se libera a partir de la posición $x(0) = x_0$ sobre la curva $z = \frac{1}{2}x^2$ con velocidad inicial $x'(0) = v_0$ cm/s.

a) Utilice el método del plano fase para demostrar que la solución resultante es periódica cuando el sistema no es amortiguado.

b) Demuestre que la altura máxima $z_{\text{máx}}$ a la cual se eleva la cuenta está dada por

$$z_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\left[e^{v_0^2/g}(1 + x_0^2) - 1\right].$$

6. Vuelva a resolver el problema 5 para $z = \cosh x$.

≡ Modelos de interacción

7. (Refiérase a la figura 9.4.9.) Si $x_m < x_1 < x_M$ y $x = x_1$, demuestre que $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones y_1 y y_2 que satisfacen $y_1 < a/b < y_2$. [*Sugerencia:* Primero demuestre que $G(y) = c_0/F(x_1) < G(a/b)$.]

8. A partir de los incisos 1) y 3) de la página 457, concluya que el número máximo de depredadores ocurre cuando $y = a/b$.

9. En muchos modelos acerca de las ciencias pesqueras se supone que la velocidad a que se atrapan las especies es directamente proporcional a su abundancia. Si tanto el depredador como la presa están siendo explotadas de esta manera, las ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra toman la forma

$$\begin{aligned} x' &= -ax + bxy - \varepsilon_1 x \\ y' &= -cxy + dy - \varepsilon_2 y, \end{aligned}$$

donde ε_1 y ε_2 son constantes positivas.

a) Cuando $\varepsilon_2 < d$, demuestre la existencia de un nuevo punto crítico, que es un centro, en el primer cuadrante.

b) El **principio de Volterra** establece que una cantidad moderada de explotación aumenta el número promedio

de presas y disminuye el número promedio de depredadores. ¿El modelo pesquero de este ejercicio es consistente con el principio de Volterra?

10. Una interacción depredador-presa está descrita por el modelo de Lotka-Volterra

$$x' = -0.1x + 0.02xy$$
$$y' = 0.2y - 0.025xy.$$

a) Encuentre el punto crítico ubicado en el primer cuadrante y utilice un método numérico para trazar algunos ciclos de población.

b) Calcule el periodo de las soluciones periódicas cercanas al punto crítico en *a*).

11. Una interacción competitiva está descrita por el modelo de competición de Lotka-Volterra

$$x' = 0.08x(20 - 0.4x - 0.3y)$$
$$y' = 0.06y(10 - 0.1y - 0.3x).$$

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos del sistema.

12. En (1) demuestre que (0, 0) es siempre un nodo inestable.

13. En (1) demuestre que $(K_1, 0)$ es un nodo estable cuando $K_1 > K_2/\alpha_{21}$ y un punto silla cuando $K_1 < K_2/\alpha_{21}$.

14. Con ayuda de los problemas 12 y 13 establezca que (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son inestables cuando $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$ es un nodo estable.

15. En (1) demuestre que $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$ es un punto silla cuando

$$\frac{K_1}{\alpha_{12}} < K_2 \quad \text{y} \quad \frac{K_2}{\alpha_{21}} < K_1.$$

Diversos modelos no lineales

16. Si suponemos que una fuerza de amortiguamiento actúa en dirección opuesta al movimiento de un péndulo y tiene una magnitud que es directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta/dt$, el ángulo de desplazamiento θ del péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}.$$

a) Escriba la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema autónomo plano y encuentre todos los puntos críticos.

b) Encuentre la condición de *m*, *l* y β que hará de (0, 0) un punto espiral estable.

17. En el análisis del movimiento amortiguado libre de la sección 3.8, supusimos que la fuerza de amortiguamiento era proporcional a la velocidad x'. Con frecuencia, la magnitud de esta fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, y la nueva ecuación diferencial se convierte en

$$x'' = -\frac{\beta}{m}x'|x'| - \frac{k}{m}x.$$

a) Escriba la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema autónomo plano y encuentre todos los puntos críticos.

b) Un sistema es *sobreamortiguado* cuando (0, 0) es un nodo estable, y es *subamortiguado* cuando (0, 0) es un punto espiral estable. Ciertas consideraciones físicas sugieren que (0, 0) debe ser un punto crítico estable asintóticamente. Demuestre que el sistema es necesariamente subamortiguado. [*Sugerencia:* $\frac{d}{dy}(y|y|) = 2|y|$.]

18. Una cuenta con masa *m* se desliza a lo largo de un alambre delgado, cuya forma puede ser descrita mediante la función $z = f(x)$. Pequeños tramos del alambre actúan como plano inclinado y, en mecánica, se supone que la magnitud de la fuerza de fricción entre la cuenta y el alambre es directamente proporcional a $mg\cos\theta$. Consulte la figura 9.4.3.

a) Explique por qué la nueva ecuación diferencial para la coordenada *x* de la cuenta es

$$x'' = g\frac{\mu - f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{\beta}{m}x'$$

para alguna constante positiva μ.

b) Investigue los puntos críticos del sistema autónomo plano correspondiente. ¿En qué condiciones un punto crítico es un punto silla? ¿En qué condiciones un punto crítico es un punto espiral estable?

19. Una oscilación no amortiguada satisface una ecuación diferencial no lineal de segundo orden de la forma $x'' + f(x) = 0$, donde $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $-d < x < d$. Utilice el método del plano fase para investigar si es posible que el punto crítico (0, 0) sea un punto espiral estable. [*Sugerencia:* Sea $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ y demuestre que $y^2 + 2F(x) = c$.]

20. El modelo depredador-presa de Lotka-Volterra supone que, en ausencia de depredadores, el número de presas crece en forma exponencial. Si de modo alterno suponemos que la población de presas aumenta logísticamente, el nuevo sistema es

$$x' = -ax + bxy$$
$$y' = -cxy + \frac{r}{K}y(K - y),$$

donde *a*, *b*, *c*, *r* y *K* son positivos y $K > a/b$.

a) Demuestre que el sistema tiene puntos críticos en (0, 0), (0, *K*) y $(\hat{x}, \hat{y})$, donde $\hat{y} = a/b$ y $c\hat{x} = \frac{r}{K}(K - \hat{y})$.

b) Demuestre que los puntos críticos en (0, 0) y (0, *K*) son puntos silla, mientras que el punto crítico en $(\hat{x}, \hat{y})$ es un nodo estable o un punto espiral estable.

c) Demuestre que $(\hat{x}, \hat{y})$ es un punto espiral estable si $\hat{y} < \frac{4bK^2}{r + 4bK}$.

Explique por qué este caso se presentará cuando la capacidad de transportación *K* de la presa sea grande.

21. El sistema no lineal

$$x' = \alpha\frac{y}{1 + y}x - x$$
$$y' = -\frac{y}{1 + y}x - y + \beta$$

se presenta en un modelo desarrollado para conocer el crecimiento de microorganismos en un *quimiostato*, un dispositivo de laboratorio donde un nutriente que proviene de una fuente de alimentación fluye hacia una cámara de crecimiento. En el sistema, *x* expresa la concentración de microorganismos en la cámara de crecimiento, *y* expresa la concentración de nutrientes, y $\alpha > 1$ y $\beta > 0$ son constantes que el experimentador puede ajustar. Encuentre las condiciones de α y β que aseguren que el sistema tenga un solo punto crítico $(\hat{x}, \hat{y})$ en el primer cuadrante, e investigue la estabilidad de este punto crítico.

22. Utilice los métodos estudiados en este capítulo junto con un método numérico para investigar la estabilidad del sistema no lineal resorte/masa cuyo modelo se puede expresar mediante

$$x'' + 8x - 6x^3 + x^5 = 0.$$

Consulte el problema 8 de los ejercicios 3.11.

9.5 Soluciones periódicas, ciclos límite y estabilidad global

Introducción En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones periódicas de sistemas autónomos planos no lineales y presentaremos las soluciones periódicas especiales llamadas ciclos límite.

En las secciones 9.3 y 9.4 vimos que, utilizando linealización, un análisis de los puntos críticos puede proporcionar información valiosa acerca del comportamiento de soluciones cercanas a los puntos críticos y profundizar en una gran variedad de fenómenos biológicos y físicos. Sin embargo, existen limitaciones inherentes a este método. Cuando los valores propios de la matriz jacobiana son imaginarios puros, no podemos concluir que haya soluciones periódicas cercanas al punto crítico. En algunos casos pudimos resolver $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$, obtener una representación implícita $f(x, y) = c$ de las curvas solución e investigar si cualquiera de dichas soluciones forman curvas cerradas. Con mucha frecuencia, esta ecuación diferencial no tendrá soluciones en forma cerrada. Por ejemplo, el modelo de competición de Lotka-Volterra no puede manejarse aplicando este procedimiento. El objetivo principal de esta sección es *determinar condiciones en las cuales podamos excluir la posibilidad de que existan soluciones periódicas o afirmar su existencia.*

Al estudiar los modelos de la sección 9.3, encontramos un problema adicional. La **FIGURA 9.5.1** ilustra la situación común en que una región R contiene un *solo* punto crítico $\mathbf{X}_1$ que es estable asintóticamente. Podemos afirmar que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ cuando la posición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está "cerca" de $\mathbf{X}_1$; sin embargo, ¿en qué condiciones $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ para *todas las posiciones iniciales* presentes en R? Tal punto crítico existe y se llama **estable globalmente** en R. Un segundo objetivo aquí es *determinar aquellas condiciones en las que un punto crítico estable asintóticamente es estable globalmente.*

Para abordar y analizar los métodos de esta sección, utilizaremos el hecho de que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ puede interpretarse como si definiera el flujo de un fluido en una región del plano, y una solución al sistema autónomo puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula a medida que se desplaza por esa región.

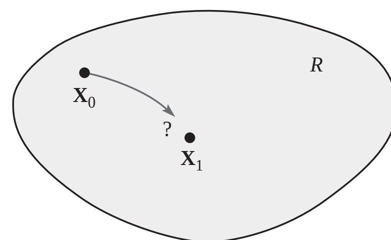


FIGURA 9.5.1 Para cualquier $\mathbf{X}_0$ en R, ¿$\mathbf{X}$ se aproxima a $\mathbf{X}_1$ a medida que $t \to \infty$?

Criterio negativo Algunas veces se pueden utilizar varios resultados para establecer que no existen soluciones periódicas en una región R dada del plano. Supondremos que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en R y que R está simplemente conectado. Recuerde que en una región simplemente conectada, cualquier curva cerrada simple C en R contiene solamente los puntos ubicados en R. Por lo tanto, si existe una solución periódica $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ en R, entonces R contendrá todos los puntos en el interior de la curva resultante.

Teorema 9.5.1 Ciclos y puntos críticos

Si un sistema autónomo plano tiene una solución periódica $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ en una región R simplemente conectada, entonces el sistema posee al menos un punto crítico dentro de la correspondiente curva cerrada simple C. Si existe un solo punto crítico dentro de C, entonces dicho punto crítico no puede ser un punto silla.

Corolario del teorema 9.5.1

Si una región R simplemente conectada no tiene puntos críticos de un sistema autónomo plano o tiene un solo punto silla, entonces no existen soluciones periódicas en R.

EJEMPLO 1 Soluciones no periódicas

Demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = xy$$
$$y' = -1 - x^2 - y^2$$

no tiene soluciones periódicas.

Solución Si (x, y) es un punto crítico, entonces, a partir de la primera ecuación, $x = 0$ o $y = 0$. Si $x = 0$, entonces $-1 - y^2 = 0$ o $y^2 = -1$. De manera similar, $y = 0$ implica que

$x^2 = -1$. Por lo tanto, este sistema autónomo plano no tiene puntos críticos, y de acuerdo con el corolario, posee soluciones no periódicas en el plano. ≡

EJEMPLO 2 Modelo de competición de Lotka-Volterra

Demuestre que el modelo de competición de Lotka-Volterra

$$x' = 0.004x(50 - x - 0.75y)$$
$$y' = 0.001y(100 - y - 3.0x)$$

no tiene soluciones periódicas en el primer cuadrante.

Solución En el ejemplo 4 de la sección 9.4 demostramos que este sistema tiene puntos críticos en (0, 0), (50, 0), (0, 100) y (20, 40), y que (20, 40) es un punto silla. Puesto que solamente (20, 40) está en el primer cuadrante, de acuerdo con el corolario, no existen soluciones periódicas en el primer cuadrante. ≡

A menudo se puede formular otro resultado de gran utilidad en términos de la divergencia del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$:

Teorema 9.5.2 Criterio negativo de Bendixson

Si div $\mathbf{V} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ no varía en signo en una región R simplemente conectada, entonces el sistema autónomo plano no tiene soluciones en R.

DEMOSTRACIÓN

Suponga, por el contrario, que existe una solución periódica $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ en R, y establezca a C como la curva cerrada simple resultante y a R_1 como la región acotada por C. El teorema de Green establece que

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

siempre y cuando $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tengan primeras derivadas parciales continuas en R. Al establecer $N = P$ y $M = -Q$, obtenemos

$$\int_C -Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Puesto que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución con periodo p, tenemos $x'(t) = P(x(t), y(t))$ y $y'(t) = Q(x(t), y(t))$, y así

$$\int_C -Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = \int_0^P [-Q(x(t), y(t))\,x'(t) + P(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt$$
$$= \int_0^P [-QP + PQ]\,dt = 0.$$

Puesto que div $\mathbf{V} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ es continua y no cambia el signo de R, es posible deducir que div $\mathbf{V} \geq 0$ en R o div $\mathbf{V} \leq 0$ en R, y entonces

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy \neq 0.$$

Esta contradicción establece que no existen soluciones periódicas en R. ≡

EJEMPLO 3 Criterio negativo de Bendixson

Investigue las soluciones periódicas posibles de cada sistema.

a) $x' = x + 2y + 4x^3 - y^2$
$y' = -x + 2y + yx^2 + y^3$

b) $x' = y + x(2 - x^2 - y^2)$
$y' = -x + y(2 - x^2 - y^2)$

Solución

a) Tenemos div $\mathbf{V} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = 1 + 12x^2 + 2 + x^2 + 3y^2 \geq 3$, por lo que no existen soluciones periódicas en el plano.

b) Para este sistema div $\mathbf{V} = (2 - 3x^2 - y^2) + (2 - x^2 - 3y^2) = 4 - 4(x^2 + y^2)$. Por lo tanto, si R es el interior de un círculo $x^2 + y^2 = 1$, div $\mathbf{V} > 0$, y entonces no existen soluciones periódicas en el interior de este disco. Observe que div $\mathbf{V} < 0$ en el exterior del círculo. Si R es un subconjunto simplemente conectado del exterior, entonces no existen soluciones periódicas en R. Se puede deducir que si hay una solución periódica en el exterior, debe encerrar el círculo $x^2 + y^2 = 1$. De hecho, usted puede comprobar que $\mathbf{X}(t) = (\sqrt{2}\text{ sen } t, \sqrt{2}\cos t)$ es una solución periódica que genera el círculo $x^2 + y^2 = 2$. ≡

EJEMPLO 4 Cuenta deslizante y soluciones periódicas

La cuenta deslizante que se estudió en la sección 9.4 satisface la ecuación diferencial

$$mx'' = -mg\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \beta x'.$$

Demuestre que no existen soluciones periódicas.

Solución El sistema autónomo plano correspondiente es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{\beta}{m}y \end{aligned}$$

por lo que $\mathbf{V} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\dfrac{\beta}{m} < 0.$ ≡

El teorema siguiente es una generalización del criterio negativo de Bendixson, y se le deja a usted la tarea de construir una función apropiada $\delta(x, y)$.

Teorema 9.5.3 Criterio negativo de Dulac

Si $\delta(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas en una región R simplemente conectada y $\dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\delta Q)}{\partial y}$ no varía el signo de R, entonces el sistema autónomo plano tiene soluciones no periódicas en R.

No existen técnicas generales para construir una función apropiada $\delta(x, y)$. En lugar de eso, experimentamos con funciones simples de la forma $ax^2 + by^2$, e^{ax+by}, $x^a y^b$, etc., y tratamos de determinar las constantes para las que $\partial(\delta P)/\partial x + \partial(\delta Q)/\partial y$ es diferente de cero en determinada región.

EJEMPLO 5 Criterio negativo de Dulac

Demuestre que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' = x^2 + (x')^2 - x - x'$$

no tiene soluciones periódicas.

Solución El sistema autónomo plano correspondiente es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 + y^2 - x - y. \end{aligned}$$

Si establecemos $\delta(x, y) = e^{ax+by}$, entonces

$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta Q)}{\partial y} = e^{ax+by}(ay + 2y - 1) + e^{ax+by}b(x^2 + y^2 - x - y).$$

Si fijamos los valores $a = -2$ y $b = 0$, entonces $\partial(\delta P)/\partial x + \partial(\delta Q)/\partial y = -e^{ax+by}$, la cual es siempre negativa. Por lo tanto, mediante el criterio negativo de Dulac, la ecuación diferencial de segundo orden no tiene soluciones periódicas. ≡

EJEMPLO 6 Criterio negativo de Dulac

Utilice $\delta(x, y) = 1/(xy)$ para demostrar que las ecuaciones de competición de Lotka-Volterra

$$x' = \frac{r_1}{K_1}x(K_1 - x - \alpha_{12}y)$$

$$y' = \frac{r_2}{K_2}y(K_2 - y - \alpha_{21}x)$$

no tienen soluciones periódicas en el primer cuadrante.

Solución Si $\delta(x, y) = 1/(xy)$, entonces

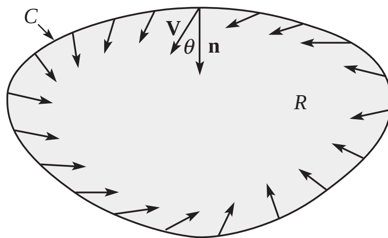
$$\delta P = \frac{r_1}{K_1}\left[\frac{K_1}{y} - \frac{x}{y} - \alpha_{12}\right] \qquad \text{y} \qquad \delta Q = \frac{r_2}{K_2}\left[\frac{K_2}{x} - \frac{y}{x} - \alpha_{21}\right]$$

por lo que

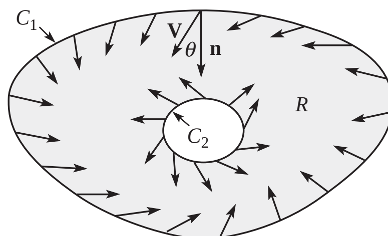
$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta Q)}{\partial y} = \frac{r_1}{K_1}\left(-\frac{1}{y}\right) + \frac{r_2}{K_2}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Para que (x, y) esté en el primer cuadrante, la última expresión siempre debe ser negativa. Por lo tanto, no existen soluciones periódicas. ≡

Criterio positivo: teoría de Poincaré-Bendixson El teorema de Poincaré-Bendixson es un resultado avanzado que describe el comportamiento de largo alcance de una solución *acotada* a un sistema autónomo plano. Más que presentar el resultado con toda su generalidad, nos concentraremos en varios casos especiales que se presentan con frecuencia en las aplicaciones. Uno de estos casos nos conducirá a un nuevo tipo de solución periódica denominada *ciclo límite*.



a) Región invariante tipo I



b) Región invariante tipo II

FIGURA 9.5.2 Dos tipos de regiones invariantes

Definición 9.5.1 Región invariante

Una región R se llama **región invariante** de un sistema autónomo plano si, siempre que $\mathbf{X}_0$ esté en R, la solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ permanece en R.

La **FIGURA 9.5.2** muestra dos tipos estándar de regiones invariantes. Una **región invariante** R **tipo I** está acotada por una curva cerrada simple C, y el flujo en el límite definido por el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ siempre está dirigido al interior la región. Esto evita que una partícula atraviese el límite. Una **región invariante tipo II** es una región anular acotada por las curvas cerradas simples C_1 y C_2, y el flujo en la frontera de nuevo está dirigido hacia el interior de R. El teorema siguiente proporciona un método para comprobar que una región dada es invariante.

Teorema 9.5.4 Vectores normales y regiones invariantes

Si $\mathbf{n}(x, y)$ expresa un vector normal en la frontera que apunta hacia adentro de la región, entonces R será una región invariante para el sistema autónomo plano siempre y cuando $\mathbf{V}(x, y) \cdot \mathbf{n}(x, y) \geq 0$ para todos los puntos (x, y) situados en el límite.

DEMOSTRACIÓN

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{V}(x, y)$ y $\mathbf{n}(x, y)$ entonces, a partir de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{V}\|\,\|\mathbf{n}\| \cos\theta$, podemos concluir que $\cos\theta \geq 0$ y así θ se encuentra entre 0 y 90°. El flujo está, por lo tanto, dirigido hacia la región (o, en el peor de los casos, a lo largo del límite) para cualquier punto (x, y) situado en el límite. Lo anterior evita que una solución iniciada en R abandone R. Así, R es una región invariante para un sistema autónomo plano. ≡

El problema que representa la búsqueda de una región invariante para un sistema no lineal dado es extremadamente complejo. Un excelente primer paso es utilizar algún programa de cómputo que pueda graficar el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ junto con las curvas $P(x, y) = 0$ (a lo largo de las cuales los vectores son verticales) y $Q(x, y) = 0$ (a lo largo de las cuales los vectores son horizontales). Lo anterior puede conducirnos a alternati-

vas para R. En los ejemplos siguientes, construiremos regiones invariantes acotadas por líneas y círculos. En casos más complejos, nos conformaremos con brindar evidencia empírica de que existe una región invariante.

EJEMPLO 7 Región circular invariante

Encuentre una región circular con centro en (0, 0) que sirva como región invariante para el sistema autónomo plano

$$x' = -y - x^3$$
$$y' = x - y^3.$$

Solución Para un círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $\mathbf{n} = (-2x, -2y)$ es un vector normal que apunta hacia el interior del círculo. Como

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (-y - x^3, x - y^3) \cdot (-2x, -2y) = 2(x^4 + y^4),$$

podemos concluir que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Así, por el teorema 9.5.4, la región circular definida por $x^2 + y^2 \leq r^2$ sirve como una región invariante para el sistema para toda $r > 0$. ≡

EJEMPLO 8 Región anular invariante

Encuentre una región anular acotada por círculos que sirva como región invariante para el sistema autónomo plano

$$x' = x - y - 5x(x^2 + y^2) + x^5$$
$$y' = x + y - 5y(x^2 + y^2) + y^5.$$

Solución Así como en el ejemplo 7, el vector normal $\mathbf{n}_1 = (-2x, -2y)$ apunta hacia adentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, mientras que el vector normal $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ está dirigido hacia el exterior. Al calcular $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1$ y simplificar, obtenemos

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = -2(r^2 - 5r^4 + x^6 + y^6).$$

Observe que $r^2 - 5r^4 = r^2(1 - 5r^2)$ toma valores tanto positivos como negativos.

Si $r = 1$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = 8 - 2(x^6 + y^6) \geq 0$, puesto que el valor máximo de $x^6 + y^6$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 1. El flujo está, por ende, dirigido hacia el interior de la región circular $x^2 + y^2 \leq 1$.

Si $r = \frac{1}{4}$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 \leq -2(r^2 - 5r^4) < 0$, entonces $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 > 0$. Por lo tanto, el flujo está dirigido hacia el exterior del círculo $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$, y así la región anular R definida por $\frac{1}{16} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ es una región invariante del sistema. ≡

EJEMPLO 9 La ecuación de Van der Pol

La ecuación de Van der Pol es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que surge a partir de la electrónica y, como sistema autónomo plano, toma la forma

$$x' = y$$
$$y' = -\mu(x^2 - 1)y - x.$$

La **FIGURA 9.5.3** muestra el campo vectorial correspondiente para $\mu = 1$, junto con las curvas $y = 0$ y $(x^2 - 1)y = -x$ a lo largo de las cuales los vectores son verticales y horizontales, respectivamente. (Por conveniencia, trazamos el campo vectorial normalizado $\mathbf{V}/\|\mathbf{V}\|$.) No es factible calcular una región invariante simple cuyo límite consiste en líneas o círculos. La figura no brinda evidencia empírica de que exista una región invariante R, con (0, 0) en su interior. Se requiere de métodos avanzados para demostrar lo anterior matemáticamente.* ≡

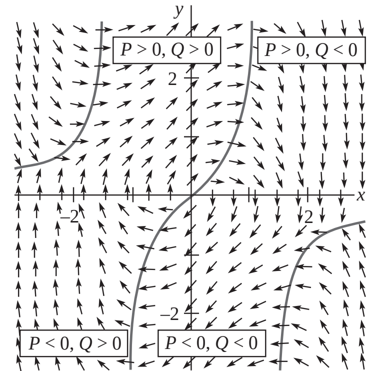


FIGURA 9.5.3 Campo vectorial para la ecuación de Van der Pol del ejemplo 9

A continuación presentamos dos casos especiales de gran importancia del teorema de Poincaré-Bendixson que garantizan la existencia de soluciones periódicas.

* Consulte M. Hirsch y S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (Nueva York: Academic Press, 1974).

Teorema 9.5.5 Poincaré-Bendixson I

Sea R una región invariante de un sistema autónomo plano, y suponga que R no tiene puntos críticos en su límite.

a) Si R es una región tipo I que tiene un solo nodo inestable o un punto espiral inestable en su interior, entonces existe al menos una solución periódica en R.

b) Si R es una región tipo II que no contiene puntos críticos del sistema, entonces existe al menos una solución periódica en R.

En cualquiera de los dos casos, si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución no periódica en R, entonces $\mathbf{X}(t)$ realiza una espiral hacia un ciclo que es una solución del sistema. Esta solución periódica se llama **ciclo límite**.

La interpretación del flujo desplegado en la figura 9.5.2 puede utilizarse para hacer factible el resultado. Si se libera una partícula en el punto $\mathbf{X}_0$ de una región R invariante tipo II, entonces, sin escaparse de la región y sin tener puntos de descanso, la partícula comenzará a girar alrededor del límite C_2 y se establecerá en una órbita periódica. No es posible que la partícula regrese a una posición anterior a menos que la solución sea periódica en sí misma.

EJEMPLO 10 Existencia de una solución periódica

Utilice el teorema 9.5.5 para demostrar que el sistema

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) - y(x^2 + y^2)$$
$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2) + x(x^2 + y^2)$$

tiene al menos una solución periódica.

Solución Primero construimos una región invariante que esté acotada por círculos. Si $\mathbf{n}_1 = (-2x, -2y)$, entonces $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = -2r^2(1 - r^2)$. Si establecemos $r = 2$ y después $r = \frac{1}{2}$, podemos concluir que la región anular R definida por $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4$ es invariante. Si (x_1, y_1) es un punto crítico del sistema, entonces $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = (0, 0) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$. Por lo tanto, $r = 0$ o $r = 1$. Si $r = 0$, entonces $(x_1, y_1) = (0, 0)$ es un punto crítico. Si $r = 1$, el sistema se reduce a $-2y = 0$, $2x = 0$ y habremos llegado a una contradicción. En consecuencia, (0, 0) es el único punto crítico y no está en R. De acuerdo con el inciso *b*) del teorema 9.5.5, el sistema tiene al menos una solución periódica en R.

Usted puede comprobar que $\mathbf{X}(t) = (\cos 2t, \text{sen } 2t)$ es una solución periódica. ≡

EJEMPLO 11 Ciclo límite de la ecuación de Van der Pol

Demuestre que la ecuación diferencial de Van der Pol

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

tiene una solución periódica cuando $\mu > 0$.

Solución Supondremos que existe una región invariante R del tipo I para el sistema autónomo plano correspondiente, y que esta región contiene (0, 0) en su interior (véase el ejemplo 9 y la figura 9.5.3). El único punto crítico es (0, 0) y la matriz jacobiana está dada por

$$\mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\tau = \mu$, $\Delta = 1$ y $\tau^2 - 4\Delta = \mu^2 - 4$. Puesto que $\mu > 0$, el punto crítico es un punto espiral inestable o un nodo inestable. De acuerdo con el inciso *a*) del teorema 9.5.5, el sistema tiene al menos una solución periódica en R. La **FIGURA 9.5.4** muestra las soluciones correspondientes a $\mathbf{X}(0) = (0.5, 0.5)$ y $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$ para $\mu = 1$. Cada una de estas soluciones forma una espiral alrededor del origen y se aproxima a un ciclo límite. Es posible demostrar que la ecuación diferencial de Van der Pol tiene un ciclo límite único para todos los valores del parámetro μ. ≡

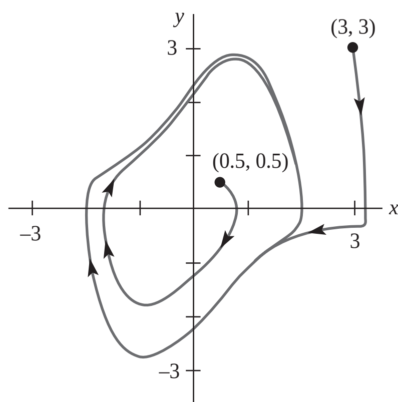


FIGURA 9.5.4 Dos soluciones de la ecuación de Van der Pol que se aproximan al mismo ciclo límite del ejemplo 11

■ **Estabilidad global** Se puede utilizar otra versión del teorema de Poincaré-Bendixson para mostrar que un punto crítico estable localmente es globalmente estable:

Teorema 9.5.6 **Poincaré-Bendixson II**

Sea R una región invariante del tipo I de un sistema autónomo plano que *no* tenga soluciones periódicas en R.

a) Si R tiene un número finito de nodos o de puntos en espiral, entonces, dada cualquier posición inicial $\mathbf{X}_0$ en R, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ para algún punto crítico $\mathbf{X}_1$.

b) Si R tiene un *único* nodo estable o punto espiral estable $\mathbf{X}_1$ en su interior y no tiene puntos críticos en su límite, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ para todas las posiciones iniciales $\mathbf{X}_0$ en R.

En el teorema 9.5.6, la partícula no puede escapar de R, no puede regresar a ninguna de sus posiciones anteriores y, por lo tanto, en ausencia de ciclos, debe ser atraída por algún punto crítico estable $\mathbf{X}_1$.

EJEMPLO 12 Punto crítico estable globalmente

Investigue la estabilidad global del sistema del ejemplo 7:

$$x' = -y - x^3$$
$$y' = x - y^3.$$

Solución En el ejemplo 7 demostramos que la región circular definida por $x^2 + y^2 \leq r^2$ sirve como región invariante para el sistema para cualquier $r > 0$. Puesto que $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = -3x^2 - 3y^2$ no cambia de signo, no existen soluciones periódicas mediante el criterio negativo de Bendixson. No resulta difícil demostrar que (0, 0) es el único punto crítico y que la matriz jacobiana es

$$\mathbf{g}'((0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\tau = 0$ y $\Delta = 1$, (0, 0) puede ser una espiral estable o una inestable (no puede ser un centro). Sin embargo, el teorema 9.5.6 garantiza que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ para algún punto crítico $\mathbf{X}_1$. Puesto que (0, 0) es el único punto crítico, debemos tener $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (0, 0)$ para *cualquier* posición inicial $\mathbf{X}_0$ en el plano. Por lo tanto, el punto crítico es un punto espiral globalmente estable. La **FIGURA 9.5.5** muestra dos vistas de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (4, 4)$. El inciso *b*) es una vista aumentada de la curva alrededor de (0, 0). Advierta lo lento que se mueve la solución formando una espiral hacia (0, 0). ≡

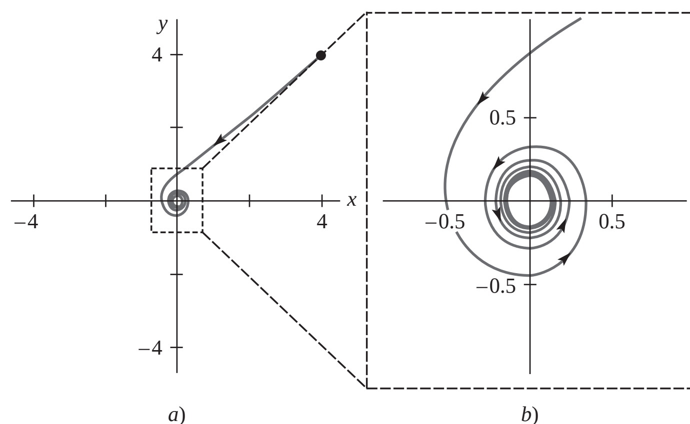


FIGURA 9.5.5 Vista aumentada de una región alrededor de (0, 0) del ejemplo 12

9.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas del 1 al 8, demuestre que el sistema autónomo plano dado (o ecuación diferencial de segundo orden) no tiene soluciones periódicas.

1. $x' = 2 + xy$
$y' = x - y$

2. $x' = 2x - xy$
$y' = -1 - x^2 + 2x - y^2$

3. $x' = -x + y^2$
$y' = x - y$

4. $x' = xy^2 - x^2y$
$y' = x^2y - 1$

5. $x' = -\mu x - y$
$y' = x + y^3$
para $\mu < 0$

6. $x' = 2x + y^2$
$y' = xy - y$

7. $x'' - 2x + (x')^4 = 0$

8. $x'' + x = [\ + 3(x')^2]x' - x^2$

En los problemas 9 y 10, utilice el criterio negativo de Dulac para demostrar que el sistema autónomo plano dado no tiene soluciones periódicas. Experimente con funciones simples de la forma $\delta(x, y) = ax^2 + by^2$, $e^{ax + by}$, o con $x^a y^b$.

9. $x' = -2x + xy$
$y' = 2y - x^2$

10. $x' = -x^3 + 4xy$
$y' = -5x^2 - y^2$

11. Demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$$
$$y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$$

no tiene soluciones periódicas en una región elíptica localizada alrededor del origen.

12. Si $\partial g/\partial x' \neq 0$ en una región R, demuestre que $x'' = g(x, x')$ no tiene soluciones periódicas en R.

13. Demuestre que el modelo depredador-presa

$$x' = -ax + bxy$$
$$y' = -cxy + \frac{r}{K}y(K - y)$$

incluido en el problema 20 de los ejercicios 9.4 no tiene soluciones periódicas en el primer cuadrante.

En los problemas 14 y 15, encuentre una región invariante circular para el sistema autónomo plano dado.

14. $x' = -y - xe^{x+y}$
$y' = x - ye^{x+y}$

15. $x' = -x + y + xy$
$y' = x - y - x^2 - y^3$

16. Compruebe que la región acotada por la curva cerrada $x^6 + 3y^2 = 1$ es una región invariante para la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + x' = -(x')^3 - x^5$. Consulte la **FIGURA 9.5.6**.

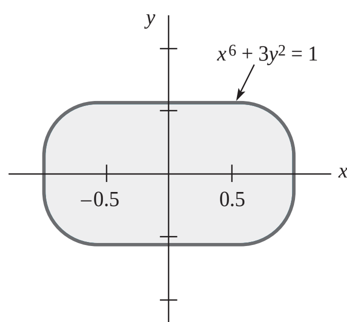


FIGURA 9.5.6 Región invariante del problema 16

17. El sistema autónomo plano del ejemplo 8 tiene solamente un punto crítico. ¿Podemos concluir que este sistema tiene al menos una solución periódica?

18. Utilice el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' = x'[1 - 3x^2 - 2(x')^2] - x$$

tiene al menos una solución periódica. [*Sugerencia:* Encuentre una región anular invariante para el sistema autónomo plano correspondiente.]

19. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la solución del sistema autónomo plano

$$x' = y$$
$$y' = -x - (1 - x^2)y$$

que satisface $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$. Demuestre que si $x_0^2 + y_0^2 < 1$, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (0, 0)$. [*Sugerencia:* Seleccione $r < 1$ con $x_0^2 + y_0^2 < r^2$ y pruebe primero que la región circular R definida por $x^2 + y^2 \leq r^2$ es una región invariante.]

20. Investigue la estabilidad global del sistema

$$x' = y - x$$
$$y' = -x - y^3.$$

21. La evidencia empírica sugiere que el sistema autónomo plano

$$x' = x^2y - x + 1$$
$$y' = -x^2y + \tfrac{1}{2}$$

tiene una región invariante R tipo I que se encuentra dentro del rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

a) Utilice el criterio negativo de Bendixson para demostrar que no existen soluciones periódicas en R.

b) Si $\mathbf{X}_0$ está en R y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es la solución que satisface $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$, aplique el teorema 9.5.6 para encontrar $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t)$.

22. *a*) Encuentre y clasifique todos los puntos críticos del sistema autónomo plano

$$x' = x\left(\frac{2y}{y + 2} - 1\right)$$
$$y' = y\left(1 - \frac{2x}{y + 2} - \frac{y}{8}\right).$$

b) La **FIGURA 9.5.7** muestra el campo vectorial $\mathbf{V}/\|\mathbf{V}\|$, también proporciona evidencia empírica de que existe una región invariante R en el primer cuadrante con un punto crítico en su interior. Suponiendo que dicha región existe, demuestre que hay al menos una solución periódica.

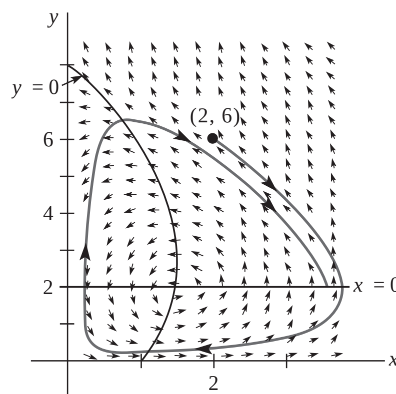


FIGURA 9.5.7 Campo vectorial del problema 22

9 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

Conteste los problemas del 1 al 10 sin remitirse al texto. Llene los espacios en blanco o conteste verdadero o falso.

1. La ecuación diferencial de segundo orden $x'' + f(x') + g(x) = 0$ puede escribirse como un sistema autónomo plano. _____

2. Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución de un sistema autónomo plano y $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, entonces $\mathbf{X}(t)$ es una solución periódica. _____

3. Si la traza de la matriz $\mathbf{A}$ es 0 y establecemos det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces el punto crítico (0, 0) del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ puede clasificarse como _____.

4. Si el punto crítico (0, 0) del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es un punto espiral estable, entonces los valores propios de $\mathbf{A}$ son _____.

5. Si el punto crítico (0, 0) del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es un punto silla y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t)$ no existe. _____

6. Si en un punto crítico de un sistema autónomo plano la matriz jacobiana $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ tiene una traza y un determinante positivos, entonces el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable. _____

7. Mediante linealización, es factible demostrar que un sistema autónomo plano no lineal tiene soluciones periódicas. _____

8. Todas las soluciones de la ecuación del péndulo $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}$ sen $\theta = 0$ son periódicas. _____

9. Si una región simplemente conectada R no cuenta con puntos críticos de un sistema autónomo plano, entonces no existen soluciones periódicas en R. _____

10. Si un sistema autónomo plano no tiene puntos críticos en una región invariante anular R, entonces existe al menos una solución periódica en R. _____

11. Resuelva el siguiente sistema autónomo plano no lineal convirtiéndolo a coordenadas polares, y describa el comportamiento geométrico de la solución que satisface la condición inicial dada.

$$x' = -y - x(\sqrt{x^2 + y^2})^3$$

$$y' = x - y(\sqrt{x^2 + y^2})^3, \quad \mathbf{X}(0) = (1, 0)$$

12. Analice la naturaleza geométrica de las soluciones del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ dada la solución general.

a) $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}$

b) $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$

13. Clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema lineal dado calculando la traza τ y el determinante Δ.

a) $x' = -3x + 4y$, $y' = -5x + 3y$ ***b)*** $x' = -3x + 2y$, $y' = -2x + y$

14. Calcule y clasifique (si es posible), los puntos críticos del sistema autónomo plano.

$$x' = x + xy - 3x^2$$

$$y' = 4y - 2xy - y^2.$$

¿Tiene este sistema soluciones periódicas en el primer cuadrante?

15. Clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema autónomo plano correspondiente a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

donde μ es una constante real.

16. Sin resolver explícitamente, clasifique (si es posible) los puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma de primer orden $x' = (x^2 - 1)e^{-x/2}$ como asintóticamente estables o inestables.

17. Utilice el método del plano fase para demostrar que las soluciones de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' = -2x\sqrt{(x')^2 + 1}$$

que satisface $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$ son periódicas.

18. En la sección 3.8 supusimos que la fuerza de recuperación F del resorte satisfacía la ley de Hooke $F = ks$, donde s es la elongación del resorte y k es una constante positiva de proporcionalidad. Si reemplazamos este supuesto con la ley no lineal $F = ks^3$, entonces la nueva ecuación diferencial del movimiento amortiguado se convierte en $mx'' = -\beta x' - k(s + x)^3 + mg$, donde $ks^3 = mg$. El sistema se llama sobreamortiguado cuando (0, 0) es un nodo estable, y se denomina subamortiguado cuando (0, 0) es un punto espiral estable. Calcule los nuevos valores de m, k y β que nos llevarán al sobreamortiguamiento y al subamortiguamiento.

19. Demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = 4x + 2y - 2x^2$$

$$y' = 4x - 3y + 4xy$$

no tiene soluciones periódicas.

20. Mediante el teorema de Poincaré-Bendixson, demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = \epsilon x + y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x + \epsilon y - y(x^2 + y^2)$$

cuenta con al menos una solución periódica cuando $\epsilon > 0$. ¿Qué ocurre cuando $\epsilon < 0$?

21. La varilla de un péndulo está conectada a una articulación móvil en el punto P y gira a una velocidad angular de ω (radianes/s) en su plano perpendicular (véase **FIGURA 9.R.1**).

Como resultado de lo anterior, la plomada del péndulo experimenta una fuerza centrípeta adicional y la nueva ecuación diferencial en θ se convierte en

$$ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 ml \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mg\operatorname{sen}\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}.$$

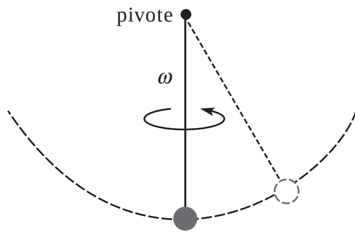


FIGURA 9.R.1 Péndulo giratorio del problema 21

a) Confirme que no existen soluciones periódicas.

b) Si $\omega^2 < g/l$, demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable y que es el único punto crítico en el dominio $-\pi < \theta < \pi$. Describa qué ocurre físicamente cuando $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ y θ_0 es pequeño.

c) Si $\omega^2 > g/l$, demuestre que (0, 0) es inestable y que existen dos puntos críticos estables adicionales $(\pm\hat{\theta}, 0)$ en el dominio $-\pi < \theta < \pi$. Describa lo que ocurre físicamente cuando $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ y θ_0 es pequeño.

d) Determine en qué condiciones los puntos críticos de los incisos *a*) y *b*) son puntos espirales estables.

22. La ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' - 2kx' + c(x')^3 + \omega^2 x = 0$$

surge del modelado del movimiento de una pala controlada eléctricamente. Véase la **FIGURA 9.R.2**, donde $k = c = 0.1$ y $\omega = 1$. Suponga que esta ecuación diferencial posee una región invariante tipo I que contiene al punto (0, 0). Demuestre la existencia de al menos una solución periódica.

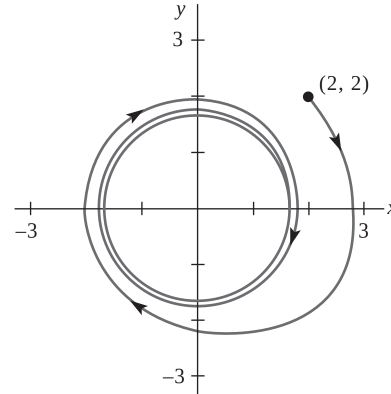


FIGURA 9.R.2 Curva solución del problema 22



Granja de viento en el Mar del Norte a gran distancia de la costa oeste de Dinamarca

Parte 4

Ecuaciones diferenciales parciales

10 FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES DE FOURIER

Estructura del capítulo

En esta parte del libro el objetivo es resolver cierto tipo de **ecuaciones diferenciales parciales** en el contexto de su aplicación. A pesar de que en este capítulo no resolvemos ninguna ecuación diferencial parcial, el material que se estudiará sirve como base para los procedimientos que se analizarán después.

En cálculo, el lector pudo observar que una función f suficientemente diferenciable podía desarrollarse en una serie de Taylor, la cual en esencia es una serie de potencias de x. El concepto medular que se estudia en el presente capítulo también implica el desarrollo de una función en una serie infinita. A principios del siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier promovió la idea de desarrollar una función f en una serie de funciones trigonométricas. Sucede que las **series de Fourier** son solamente casos especiales de un tipo más general de representación en forma de series de una función que utiliza un conjunto infinito de funciones ortogonales. La noción de un conjunto de funciones ortogonales nos lleva de regreso a los valores propios y al correspondiente conjunto de funciones propias. Puesto que los valores propios y las funciones propias son los ejes centrales de los procedimientos planteados en los dos capítulos siguientes, se le invita a repasar el ejemplo 2 de la sección 3.9.

10.1 Funciones ortogonales

Introducción En ciertas áreas de las matemáticas avanzadas, a una función se le considera como la generalización de un vector. En esta sección estudiaremos la forma en que los dos conceptos vectoriales de producto interior, o producto escalar, y la ortogonalidad de vectores pueden hacerse extensivos a funciones. El resto del capítulo es una aplicación práctica de este análisis.

Producto interior Recuerde: si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ son dos vectores en R^3 o en el espacio tridimensional, entonces el producto interior o producto escalar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es un número real (o **escalar**) que se define como la suma de los productos de sus componentes correspondientes:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^{3} u_kv_k.$$

En el capítulo 18 el producto interior se expresa como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

El producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tiene las propiedades siguientes:

i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, k es un escalar
iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Se espera que cualquier generalización del producto interior tenga estas mismas propiedades.

Suponga que f_1 y f_2 son funciones definidas en un intervalo $[a, b]$.* Puesto que una integral definida en el intervalo del producto $f_1(x)f_2(x)$ tiene las propiedades *i*) a *iv*) del producto interior vectorial, siempre que la integral exista sugerimos atender la siguiente definición.

Definición 10.1.1 Producto interior de funciones

El **producto interior** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx.$$

Funciones ortogonales Motivados por el hecho de que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales siempre que su producto interior sea cero, definimos las **funciones ortogonales** de manera similar.

Definición 10.1.2 Funciones ortogonales

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3\,dx = \tfrac{1}{6}x^6\Big]_{-1}^{1} = 0.$$

A diferencia del análisis vectorial, donde la palabra *ortogonal* es un sinónimo de *perpendicular*, en el presente contexto el término *ortogonal* y la condición (1) no tienen ningún significado geométrico.

Conjuntos ortogonales Estamos interesados, principalmente, en los conjuntos infinitos de funciones ortogonales.

* El intervalo pudo haber sido también $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$, etcétera.

Definición 10.1.3 Conjunto ortogonal

Se dice que un conjunto de funciones con valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2}$$

Conjuntos ortonormales La norma, o longitud $\|\mathbf{u}\|$, de un vector $\mathbf{u}$ puede expresarse en términos del producto interior. La expresión $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ se llama norma cuadrada, por lo que la norma es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. De manera similar, la **norma cuadrada** de una función ϕ_n es $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$, y entonces la **norma**, o su longitud generalizada, es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$. En otras palabras, en un conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ la norma cuadrada y la norma de una función ϕ_n son, respectivamente,

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un **conjunto ortonormal** en el intervalo.

EJEMPLO 1 Conjunto ortogonal de funciones

Demuestre que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución Si hacemos las identificaciones $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, entonces debemos demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $n \neq 0$, e $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$. En el primer caso, tenemos para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}(\phi_0, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}[\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0,\end{aligned}$$

y en el segundo, para $m \neq n$,

$$\begin{aligned}(\phi_m, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 2 Normas

Encuentre las normas de cada función en el conjunto ortogonal dado en el ejemplo 1.

Solución A partir de (3), para $\phi_0(x) = 1$ tenemos

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

por lo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se deduce que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx]\,dx = \pi.$$

Por lo tanto, para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$. ≡

Cualquier conjunto ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, puede *normalizarse*, esto es, convertirse en un conjunto ortonormal, dividiendo cada función entre su norma. A partir de los ejemplos 1 y 2 se deduce que el conjunto

Un conjunto ortogonal puede convertirse en un conjunto ortonormal.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Analogía vectorial Formulemos una analogía más entre vectores y funciones. Suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son tres vectores mutuamente ortogonales diferentes de cero en el espacio tridimensional. Dicho conjunto ortogonal puede utilizarse como base para el espacio tridimensional; esto es, cualquier vector en tres dimensiones puede escribirse como una combinación lineal

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \tag{4}$$

donde el c_i, $i = 1, 2, 3$, son escalares llamados componentes del vector. Cada componente c_i puede expresarse en términos de $\mathbf{u}$ y del correspondiente vector $\mathbf{v}_i$. Para poder apreciar lo anterior, calculamos el producto interior de (4) con $\mathbf{v}_1$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0.$$

De modo que

$$c_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

De manera similar, podemos observar que los componentes c_2 y c_3 están dados por

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}.$$

Así, (4) puede expresarse como

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n. \tag{5}$$

Desarrollo en series ortogonales Suponga que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto de funciones ortogonales infinito en un intervalo $[a, b]$. Nos preguntamos: si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, ¿es posible determinar un conjunto de coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, para el que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots? \tag{6}$$

Como en el análisis anterior sobre el cálculo de los componentes de un vector, podemos calcular los coeficientes c_n utilizando el producto interior. Multiplicando (6) por $\phi_m(x)$ e integrando en el intervalo $[a, b]$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\phi_m(x)\,dx &= c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\,dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots + c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots \\ &= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots.\end{aligned}$$

Debido a la ortogonalidad, cada término del lado derecho de la última ecuación es cero, *excepto* cuando $m = n$. En este caso tenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = c_n\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx.$$

Se deduce que los coeficientes requeridos son

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

En otras palabras, $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{7}$$

donde $$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}. \tag{8}$$

Mediante la notación del producto interior, (7) se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2}\,\phi_n(x). \tag{9}$$

Por lo tanto, (9) es visto como la analogía funcional del vector resultante dado en (5).

Definición 10.1.4 Conjunto ortogonal y función peso

Se dice que un conjunto de funciones con valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es **ortogonal respecto a una función peso** $w(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

La suposición usual es que $w(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$. El conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ del ejemplo 1 es ortogonal respecto a la función peso $w(x) = 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Si $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal respecto a la función peso $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces multiplicamos (6) por $w(x)\phi_n(x)$ e integramos para obtener

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,w(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \tag{10}$$

donde $$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)\,dx. \tag{11}$$

Se dice que la serie (7) con coeficientes dados por (8) y (10) es un **desarrollo en series ortogonales** de f o una **serie generalizada de Fourier**.

Conjuntos completos El procedimiento bosquejado para determinar los coeficientes c_n fue *formal*; esto es, las preguntas básicas acerca de que si un desarrollo ortogonal de una serie como la (7) es en realidad factible o pudiera ser ignorada. Asimismo, para desarrollar f en una serie de funciones ortogonales, desde luego es necesario que f no sea ortogonal a cada ϕ_n del conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. (De ser f ortogonal a cada ϕ_n, entonces $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.) Para evitar este último problema debemos suponer, en lo que resta del análisis, que un conjunto ortogonal es **completo**. Esto significa que la única función continua ortogonal a cada miembro del conjunto es la función cero.

Comentarios

Suponga que $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ es un conjunto infinito de funciones con valores reales que son continuas en un intervalo $[a, b]$. Si este conjunto es *linealmente independiente* en $[a, b]$ entonces siempre se podrá convertir en un conjunto ortogonal y, como se describió anteriormente en esta sección, puede convertirse en un conjunto ortonormal. Consulte el problema 22 de los ejercicios 10.1.

10.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas del 1 al 6, demuestre que las funciones dadas son ortogonales en el intervalo indicado.

1. $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2; \quad [-2, 2]$
2. $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2 + 1; \quad [-1, 1]$
3. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}; \quad [0, 2]$
4. $f_1(x) = \cos x, \ f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x; \quad [0, \pi]$
5. $f_1(x) = x, f_2(x) = \cos 2x; \quad [-\pi/2, \pi/2]$
6. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \operatorname{sen} x; \quad [\pi/4, 5\pi/4]$

En los problemas del 7 al 12, demuestre que cada conjunto de funciones es ortogonal en el intervalo indicado. Encuentre la norma de cada función del conjunto.

7. $\{\operatorname{sen} x, \ \operatorname{sen} 3x, \ \operatorname{sen} 5x, \ldots\}; \quad [0, \pi/2]$
8. $\{\cos x, \ \cos 3x, \ \cos 5x, \ldots\}; \quad [0, \pi/2]$
9. $\{\operatorname{sen} nx\}, \ n = 1, 2, 3, \ldots; \quad [0, \pi]$
10. $\left\{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{p} x\right\}, \ n = 1, 2, 3, \ldots; \quad [0, p]$
11. $\left\{1, \ \cos \dfrac{n\pi}{p} x\right\}, \ n = 1, 2, 3, \ldots; \quad [0, p]$
12. $\left\{1, \ \cos \dfrac{n\pi}{p} x, \ \operatorname{sen} \dfrac{m\pi}{p} x\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots,$
    $m = 1, 2, 3, \ldots; \quad [-p, p]$

En los problemas 13 y 14, compruebe por integración directa que las funciones son ortogonales respecto a la función peso indicada en el intervalo dado.

13. $H_0(x) = 1, \ H_1(x) = 2x, \ H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad w(x) = e^{-x^2}, \ (-\infty, \infty)$
14. $L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1, \ L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1; \quad w(x) = e^{-x}, \ [0, \infty)$
15. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$. Demuestre que $\int_a^b \phi_n(x)\, dx = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$.
16. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_1(x) = x$. Demuestre que $\int_a^b (\alpha x + \beta)\phi_n(x)\, dx = 0$ para $n = 2, 3, \ldots$ y para cualquier constante α y β.
17. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$. Demuestre que $\|\phi_m(x) + \phi_n(x)\|^2 = \|\phi_m(x)\|^2 + \|\phi_n(x)\|^2$, $m \neq n$.
18. Del problema 1 sabemos que $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son ortogonales en $[-2, 2]$. Determine las constantes c_1 y c_2 tales que $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ sea ortogonal a f_1 y f_2 en el mismo intervalo.
19. El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Demuestre que el conjunto está incompleto.
20. Suponga que f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$.
21. Se dice que una función con valores reales es **periódica** con periodo T si $f(x + T) = f(x)$. Por ejemplo, 4π es un periodo de sen x ya que $\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x$. El valor más pequeño de T para el que $f(x + T) = f(x)$ es válida se llama **periodo fundamental** de f. Por ejemplo, el periodo fundamental de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $T = 2\pi$. ¿Cuál es el periodo fundamental de cada una de las funciones siguientes?

    a) $f(x) = \cos 2\pi x$

    b) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{4}{L} x$

    c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

    d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 4x$

    e) $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \cos 2x$

    f) $f(x) = A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos \frac{n\pi}{p} x + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x\right)$, A_n y B_n dependen solamente de n.

22. El **proceso Gram-Schmidt** para la construcción de un conjunto ortogonal (consulte la sección 18.7) nos lleva a un conjunto linealmente independiente $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ de funciones continuas con valores reales en el intervalo $[a, b]$. Con el producto interior $(f_n, \phi_n) = \int_a^b f_n(x)\phi_n(x)dx$, defina las funciones presentes en el conjunto $B' = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ como

$$\phi_0(x) = f_0(x)$$

$$\phi_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)}\phi_0(x)$$

$$\phi_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)}\phi_0(x) - \frac{(f_2, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)}\phi_1(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

y así sucesivamente.

a) Escriba $\phi_3(x)$ perteneciente al conjunto.

b) Por construcción, el conjunto $B' = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es ortogonal en $[a, b]$. Demuestre que $\phi_0(x), \phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son mutuamente ortogonales.

≡ Problemas de análisis

23. ***a***) Considere el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ definido en el intervalo $[-1, 1]$. Aplique a este conjunto el proceso de Gram-Schmidt que se dio en el problema 22 y encuentre $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ del conjunto ortogonal B'.

    b) Analice: ¿Reconoce el conjunto ortogonal?

24. Compruebe que el producto interior (f_1, f_2) de la definición 10.1.1 satisface las propiedades *i*) a *iv*) relacionadas en la página 473.
25. En R^3, dé un ejemplo de un conjunto de vectores ortogonales que no esté completo. Proporcione un conjunto completo de vectores ortogonales.

10.2 Series de Fourier

Introducción En la sección anterior estudiamos que si $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es un conjunto de funciones con valores reales que son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ y si f es una función definida en el mismo intervalo, entonces podemos desarrollar formalmente f en una serie ortogonal $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots$. En esta sección desarrollaremos las funciones en términos de un conjunto ortogonal especial de funciones trigonométricas.

Series trigonométricas En el problema 12 de los ejercicios 10.1 se pidió al lector demostrar que el conjunto de funciones trigonométricas

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{p}x,\ \cos\frac{2\pi}{p}x,\ \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \tag{1}$$

es ortogonal en el intervalo $[-p, p]$. Este conjunto será de especial importancia posteriormente en la solución de ciertos tipos de problemas con valores en el límite que involucran ecuaciones diferenciales lineales parciales. En esas aplicaciones necesitaremos desarrollar una función f definida sobre $[-p, p]$ en una serie ortogonal que consista en las funciones trigonométricas dadas en (1), es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right). \tag{2}$$

Ésta es la razón por la que se utiliza $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0.

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, pueden determinarse exactamente en la misma forma que en el análisis general de los desarrollos de series ortogonales. Antes de continuar, observe que hemos seleccionado escribir el coeficiente de 1 en el conjunto (1) como $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0; esto solamente es por conveniencia, pues la fórmula de a_n se simplificará entonces a a_0 para $n = 0$.

Ahora al integrar ambos lados de (2) desde $-p$ hasta p nos da

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \tag{3}$$

Puesto que $\cos(n\pi x/p)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/p)$, $n \geq 1$, son ortogonales a 1 en el intervalo, el segundo miembro de (3) se reduce a un solo término:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\,\Big]_{-p}^{p} = pa_0.$$

Despejamos a_0 y obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Ahora multiplicamos (2) por $\cos(m\pi x/p)$ e integramos:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \tag{5}$$

Mediante la ortogonalidad, tenemos

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

y $$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x \cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n. \end{cases}$$

Por lo tanto, (5) se puede simplificar a $\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = a_n p,$

y así
$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{6}$$

Por último, si multiplicamos (2) por sen($m\pi x/p$), integramos, y usamos los resultados

$$\int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

y $$\int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n, \end{cases}$$

encontramos que
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{7}$$

Se dice que la serie trigonométrica (2) con coeficientes a_0, a_n y b_n definidos por (4), (6) y (7), respectivamente, se conoce como **serie de Fourier** de la función *f*. Los coeficientes obtenidos a partir de (4), (6) y (7) se conocen como **coeficientes de Fourier** de *f*.

Para calcular los coeficientes a_0, a_n *y* b_n se supone que *f* era integrable en el intervalo y que (2), así como la serie obtenida al multiplicar (2) por cos($m\pi x/p$), convergía de tal manera que permite la integración término por término. Hasta que se demuestre que (2) es convergente para una función *f* dada, el signo de igualdad no se tomará en sentido estricto o literal. En algunos textos se utiliza el símbolo ~, en lugar de =. En vista de que la mayoría de las funciones incluidas en las aplicaciones son de un tipo que garantiza la convergencia de la serie, aquí utilizaremos el símbolo de igualdad. A continuación se proporciona un resumen de los resultados:

Definición 10.2.1 Series de Fourier

La **serie de Fourier** de una función *f* definida en el intervalo $(-p, p)$ está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{8}$$

donde
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \tag{9}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{11}$$

EJEMPLO 1 Desarrollo de una serie de Fourier

Desarrolle
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \tag{12}$$

en una serie de Fourier.

Solución La gráfica de *f* se proporciona en la **FIGURA 10.2.1**. Con $p = \pi$, a partir de (9) y (10) tenemos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

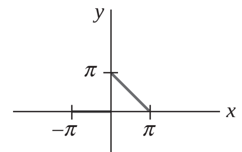


FIGURA 10.2.1 Función *f* del ejemplo 1

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\,\frac{\cos nx}{n}\bigg]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} \qquad \leftarrow \cos n\pi = (-1)^n$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}.$$

De manera similar, a partir de (11) encontramos que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

Note que

$$1 - (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 2, & n \text{ impar.}\end{cases}$$



Por lo tanto $$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right\}. \tag{13}$$ ≡

Observe que a_n, tal como fue definida en (10), se simplifica al valor a_0 que se dio en (9) cuando fijamos $n = 0$. Sin embargo, como lo muestra el ejemplo 1, éste puede no ser el caso *después* de haber evaluado la integral para a_n.

Convergencia de una serie de Fourier El teorema siguiente proporciona condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier en un punto.

Teorema 10.2.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' funciones continuas por tramos en el intervalo $(-p, p)$; esto es, establezcamos f y f' continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades finitas sólo en estos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan el límite de f en x de derecha a izquierda, respectivamente.*

Para ver la demostración de este teorema, se recomienda consultar el libro clásico de Churchill y Brown.†

EJEMPLO 2 Convergencia de un punto de discontinuidad

La función (12) del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 10.2.1. En consecuencia, por cada x en el intervalo $(-\pi, \pi)$, excepto en $x = 0$, la serie (13) convergirá a $f(x)$. En $x = 0$ la función es discontinua, entonces la serie (13) convergirá para

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$ ≡

* En otras palabras, para un punto x en el intervalo y $h > 0$,

$$f(x+) = \lim_{h\to 0} f(x + h), \quad f(x-) = \lim_{h\to 0} f(x - h).$$

† Ruel V. Churchill y James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, Nueva York: McGraw-Hill, 2000.

Extensión periódica Observe que cada una de las funciones incluidas en el conjunto básico (1) tiene un periodo fundamental diferente,* es decir, $2p/n$, $n \geq 1$; sin embargo, puesto que un múltiplo entero positivo de un periodo es también un periodo, podemos ver que todas las funciones tienen en común el periodo $2p$ (compruébelo). En consecuencia, el lado derecho de (2) tiene periodo $2p$; de hecho, $2p$ es el periodo fundamental de la suma. Concluimos que una serie de Fourier no sólo representa la función en el intervalo $(-p, p)$, sino que también proporciona la **extensión periódica** de f fuera de este intervalo. Ahora podemos aplicar el teorema 10.2.1 a la extensión periódica de f, o suponer desde el principio que la función dada es periódica con periodo $T = 2p$; esto es, $f(x + T) = f(x)$. Cuando f es una función continua y existen las derivadas derecha e izquierda en $x = -p$ y $x = p$, respectivamente, entonces la serie (8) converge al promedio $[f(p-) + f(-p+)]/2$ en estos extremos y a este valor extendido periódicamente en $\pm 3p$, $\pm 5p$, $\pm 7p$, etc. La serie de Fourier dada en (13) converge a la extensión periódica de (12) en todo el eje x. En 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, . . ., y en $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, . . ., la serie converge a los valores

Podemos suponer que la función f dada es periódica.

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0,$$

respectivamente. Los puntos en **negritas** de la **FIGURA 10.2.2** representan el valor $\pi/2$.

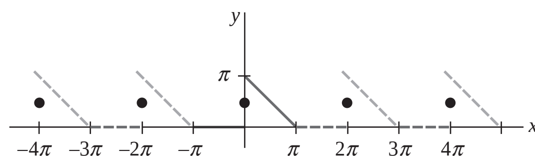


FIGURA 10.2.2 Las extensiones periódicas de la función f se muestran en la figura 10.2.1

Secuencia de sumas parciales Es interesante observar cómo la secuencia de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una serie de Fourier se aproxima a una función. Por ejemplo, las primeras tres sumas parciales de (13) son

$$S_1(x) = \frac{\pi}{4}, \quad S_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x, \quad S_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

En la **FIGURA 10.2.3** hemos utilizado un CAS (sistema asistido por computadora, por sus siglas en inglés) para graficar las sumas parciales $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_{15}(x)$ de (13) en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La figura 10.2.3*d*) muestra la extensión periódica utilizando $S_{15}(x)$ en $(-4\pi, 4\pi)$.

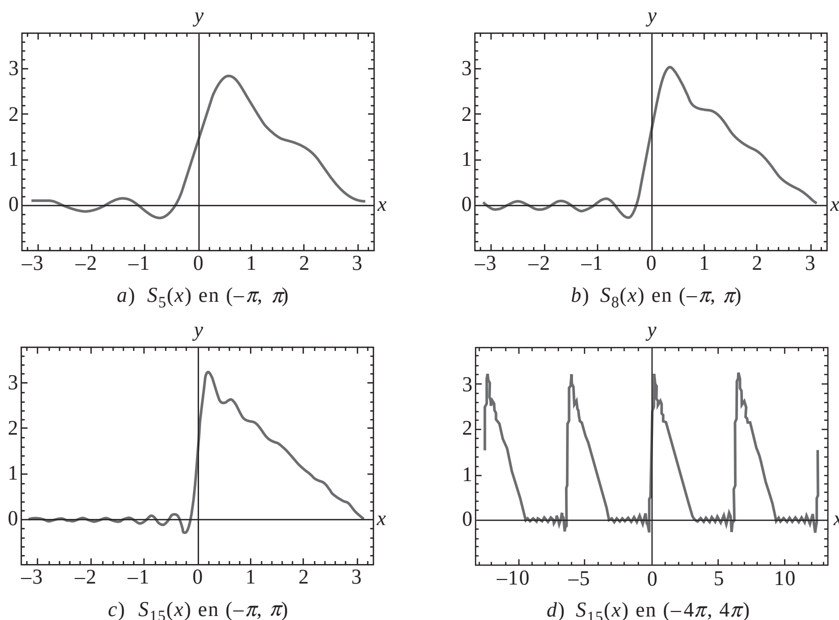


FIGURA 10.2.3 Sumas parciales de una serie de Fourier

---

* Consulte el problema 21 de los ejercicios 10.1.

10.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas del 1 al 16, encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < x < 0 \\ \pi^2 - x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

7. $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$

8. $f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi$

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ -2, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

15. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

16. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

17. Utilice el resultado del problema 5 para demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

y

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

18. Utilice el problema 17 para calcular una serie que proporcione el valor numérico de $\pi^2/8$.

19. Utilice el resultado del problema 7 y demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

20. Utilice el resultado del problema 9 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

21. El **valor cuadrático medio** (RMS, por sus siglas en inglés) de una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) está dado por

$$\operatorname{RMS}(f) = \sqrt{\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{b - a}}.$$

Si el desarrollo de la serie de Fourier de f está dada por (8), demuestre que el valor RMS de f en el intervalo $(-p, p)$ está dado por

$$\operatorname{RMS}(f) = \sqrt{\tfrac{1}{4}a_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)},$$

donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier en (9), (10) y (11).

10.3 Series de Fourier de cosenos y senos

Repaso El esfuerzo que se lleva a cabo en la evaluación de los coeficientes a_0, a_n y b_n al desarrollar una función f en una serie de Fourier se reduce de manera significativa cuando f es una función par o impar. Se dice que una función f es:

par si $f(-x) = f(x)$ e **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

En un intervalo simétrico tal como $(-p, p)$, la gráfica de una función par tiene simetría respecto al eje y, mientras que la gráfica de una función impar tiene simetría en relación con el origen.

Funciones par e impar Es probable que el origen de las palabras *par* e *impar* provenga del hecho de que las gráficas de las funciones polinomiales que consisten en todas las potencias pares de x sean simétricas respecto al eje y, mientras que las gráficas de polinomios

constituidos por todas las potencias impares de x son simétricas en relación con el origen. Por ejemplo,

$$f(x) = \underset{\text{entero par}}{x^2} \text{ es par debido a que } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$f(x) = \underset{\text{entero inpar}}{x^3} \text{ es impar debido a que } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

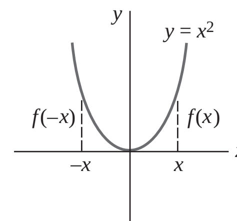


FIGURA 10.3.1 Función par

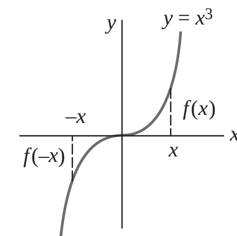


FIGURA 10.3.2 Función impar

Consulte las **FIGURAS 10.3.1** y **10.3.2**. Las funciones trigonométricas coseno y seno son funciones pares e impares, respectivamente, ya que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Las funciones exponenciales $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$ no son pares ni impares.

Propiedades El teorema siguiente relaciona algunas propiedades de las funciones pares e impares.

Teorema 10.3.1 Propiedades de las funciones pares e impares

a) El producto de dos funciones pares es par.
b) El producto de dos funciones impares es par.
c) El producto de una función par y una impar es impar.
d) La suma (resta) de dos funciones pares es par.
e) La suma (resta) de dos funciones impares es impar.
f) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
g) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE *b*)

Supongamos que f y g son funciones impares. Entonces, tenemos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$. Si definimos el producto de f y g como $F(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = F(x).$$

Lo anterior muestra que el producto F de dos funciones impares es una función par. La demostración de las propiedades restantes se deja como ejercicio para el lector. Consulte el problema 52 de los ejercicios 10.3. ≡

Series de senos y cosenos Si f es una función par de $(-p, p)$ entonces, en vista de las propiedades siguientes, los coeficientes (9), (10) y (11) de la sección 10.2 se convierten en

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x}_{\text{impar}}\,dx = 0.$$

De manera similar, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

En la definición siguiente resumimos los resultados.

Definición 10.3.1 Series de Fourier de senos y cosenos

i) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de cosenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x, \tag{1}$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\, dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x\, dx. \tag{3}$$

ii) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x, \tag{4}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x\, dx. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Desarrollo en una serie de senos

Desarrolle $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, en una serie de Fourier.

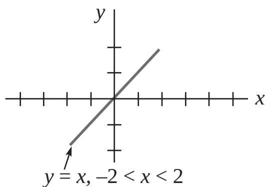


FIGURA 10.3.3 Función impar *f* del ejemplo 1

Solución La inspección de la **FIGURA 10.3.3** muestra que la función dada es impar en el intervalo $(-2, 2)$, por lo que desarrollamos *f* en una serie de senos. Con la identidad $2p = 4$, tenemos $p = 2$. Por lo tanto (5), después de la integración por partes, es

$$b_n = \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x\, dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x. \tag{6}$$ ≡

La función del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 10.2.1. De aquí que la serie (6) converja a la función en $(-2, 2)$ y a la extensión periódica (de periodo 4) dada en la **FIGURA 10.3.4**.

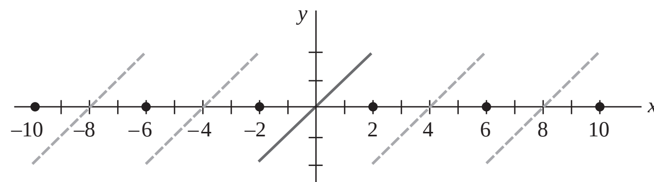


FIGURA 10.3.4 Extensión periódica de la función *f* mostrada en la figura 10.3.3

EJEMPLO 2 Desarrollo en una serie de senos

La función $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ que se muestra en la **FIGURA 10.3.5** es impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Con el valor de $p = \pi$ tenemos a partir de (5)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 - (-1)^n}{n},$$

y así

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx. \tag{7}$$ ≡

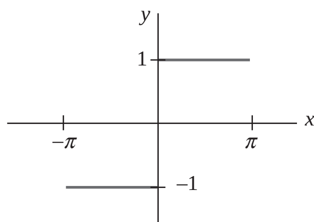


FIGURA 10.3.5 Función impar *f* del ejemplo 2

Fenómeno de Gibbs Con ayuda de un sistema asistido por computadora, en la **FIGURA 10.3.6** se han trazado las gráficas $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_{15}(x)$ de las sumas parciales de los términos diferentes a cero de (7). Como se puede observar en la figura 10.3.6*d*), la gráfica de $S_{15}(x)$ tiene picos pronunciados cerca de las discontinuidades en $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, etc. Este "disparo" por las sumas parciales S_N de los valores funcionales cerca de un punto de discontinuidad no la empareja sino que permanece constante, aun cuando el valor de N se considera elevado. Este comportamiento de una serie de Fourier cerca de un punto en el cual f es discontinua se conoce como **fenómeno de Gibbs**.

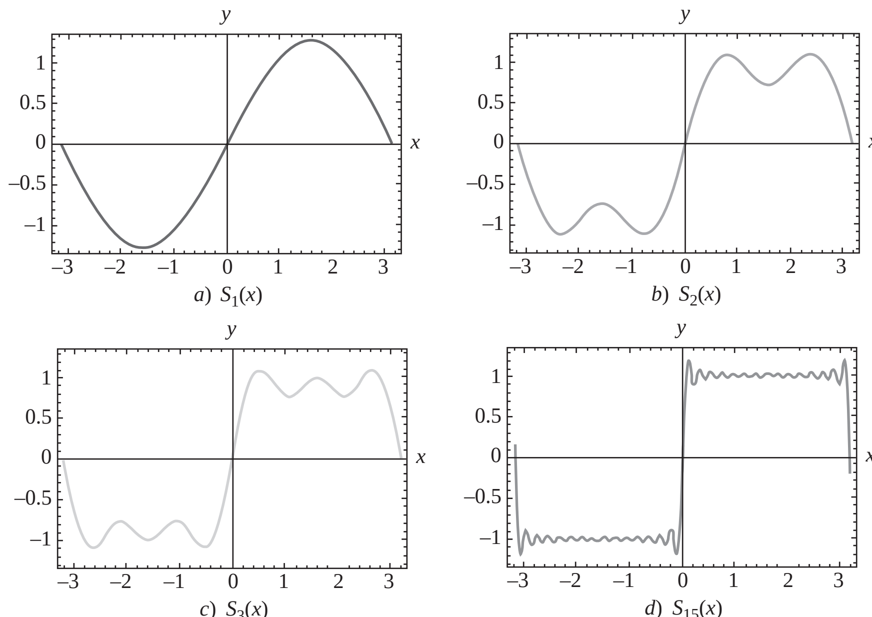


FIGURA 10.3.6 Sumas parciales de la serie seno de (7) en el intervalo $(-\pi, \pi)$

La extensión periódica de f en el ejemplo 2 sobre todo el eje x es una función meandro.

Desarrollos en semiintervalos A lo largo del análisis anterior quedó claro que una función f estaba definida en un intervalo donde el origen era el punto medio, esto es, $-p < x < p$. Sin embargo, en muchos casos, nos interesa representar una función definida solamente para $0 < x < L$ mediante una serie trigonométrica. Lo anterior se puede llevar a cabo de muchas formas diferentes por el suministro de una *definición* arbitraria de la función en el intervalo $-L < x < 0$. Por brevedad, consideramos los tres casos más importantes. Si $y = f(x)$ se define en el intervalo $0 < x < L$,

i) refleje la gráfica de la función respecto al eje y en $-L < x < 0$; la función es ahora par en $-L < x < L$ (véase la **FIGURA 10.3.7**); o

ii) refleje la gráfica de la función a través del origen en $-L < x < 0$; la función es ahora impar en $-L < x < L$ (véase la **FIGURA 10.3.8**); o

iii) defina f en $-L < x < 0$ mediante $f(x) = f(x + L)$ (véase la **FIGURA 10.3.9**).

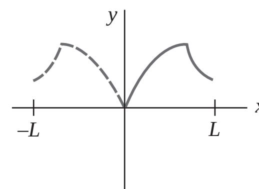


FIGURA 10.3.7 Reflexión par

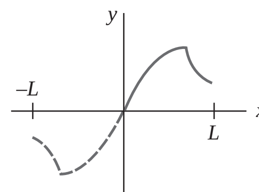


FIGURA 10.3.8 Reflexión impar

Observe que los coeficientes de las series (1) y (4) utilizan solamente la definición de la función en $0 < x < p$ (esto es, medio intervalo $-p < x < p$). De modo que, en la práctica, no existe una necesidad real de hacer las reflexiones descritas en *i*) y *ii*). Si f se define en $0 < x < L$, simplemente identificamos la mitad del periodo como la longitud del intervalo $p = L$. El coeficiente en las fórmulas (2), (3) y (5) y las series correspondientes generan una extensión periódica par o impar con periodo $2L$ de la función original. Las series coseno y seno obtenidas de esta manera se conocen como **desarrollos en semiintervalos**. Por último, en el caso *iii*) estamos definiendo que los valores funcionales en el intervalo $-L < x < 0$ sean los mismos valores presentes en $0 < x < L$. Como en los casos anteriores, no hay una necesidad real para hacer esto. Se puede demostrar que el conjunto de funciones incluidas en (1) de la sección 10.2 es ortogonal en $a \le x \le a + 2p$ para cualquier número real a. Seleccionando $a = -p$, obtenemos los límites de integración de (9), (10) y (11) de esa sección. Sin embargo, para $a = 0$ los límites de integración están desde $x = 0$ hasta $x = 2p$. Por lo tanto, si f está definida en el intervalo $0 < x < L$, identificamos $2p = L$ o $p = L/2$. La serie de Fourier resultante proporcionará la extensión periódica de f con periodo L. De esta forma, los valores hacia los cuales converja la serie serán los mismos en $-L < x < 0$ que en $0 < x < L$.

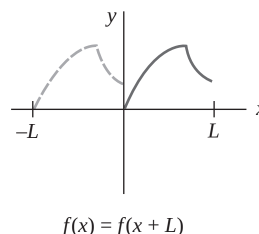


FIGURA 10.3.9 Reflexión identidad

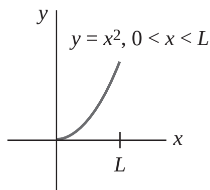


FIGURA 10.3.10 Función f del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Desarrollo en tres series

Desarrolle $f(x) = x^2$, $0 < x < L$, ***a)*** en una serie coseno, ***b)*** en una serie seno y ***c)*** en una serie de Fourier.

Solución La gráfica de la función está dada en la **FIGURA 10.3.10**.

a) Tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

donde, para encontrar el valor de a_n, se utilizó la integración por partes dos veces.

Por lo tanto,
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{8}$$

b) En este caso, nuevamente debemos integrar por partes dos veces:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1].$$

Así,
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

c) Con $p = L/2$, $1/p = 2/L$, y $n\pi/p = 2n\pi/L$, tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

y
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L^2}{n\pi}.$$

Por lo tanto,
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\right\}. \tag{10}$$ ≡

Las series (8), (9) y (10) convergen a la extensión par periódica $2L$ de f, a la extensión impar periódica $2L$ de f, y a la extensión periódica L de f, respectivamente. Las gráficas de estas extensiones periódicas se muestran en la **FIGURA 10.3.11**.

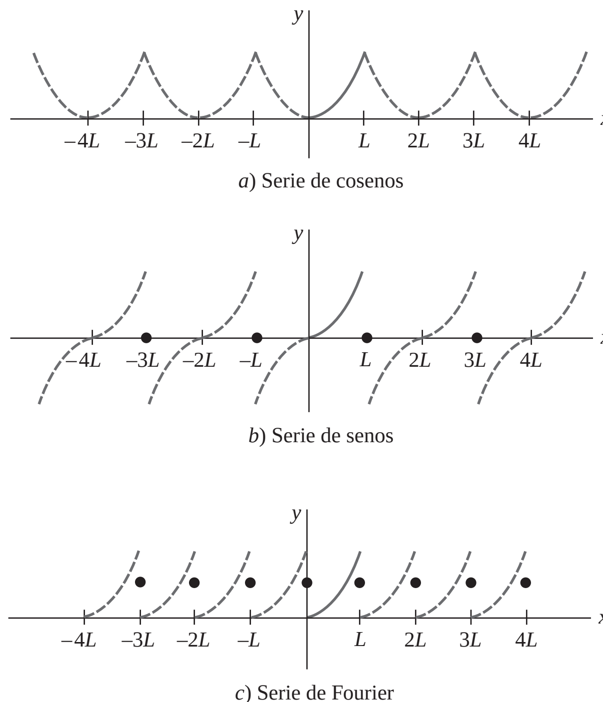


FIGURA 10.3.11 Diferentes extensiones periódicas de la función f en el ejemplo 3

Fuerza impulsora periódica A veces las series de Fourier resultan de utilidad para determinar una solución particular de una ecuación diferencial que describe un sistema físico, donde la entrada o fuerza conductora $f(t)$ es periódica. En el ejemplo siguiente, calculamos una solución particular de la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t) \tag{11}$$

donde representamos a f, en primera instancia, mediante un desarrollo en serie de seno en un semiintervalo y suponiendo entonces una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Solución particular de una ecuación diferencial

Un sistema masa-resorte no amortiguado, donde la masa $m = \frac{1}{16}$ slug y la constante del resorte $k = 4$ libras/pie, está manejado mediante la fuerza externa $f(t)$ con periodo 2 ilustrada en la **FIGURA 10.3.12**. Aunque la fuerza $f(t)$ actúa sobre el sistema para $t > 0$, observe que si la gráfica de la función se amplía con periodo 2 al eje t negativo, obtenemos una función impar. En términos prácticos, esto significa que solamente necesitamos encontrar el desarrollo de senos de semiintervalo de $f(t) = \pi t$, $0 < t < 1$. Considerando el valor $p = 1$, a partir de (5) y mediante integración por partes se deduce que

$$b_n = 2\int_0^1 \pi t \operatorname{sen} n\pi t\, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

A partir de (11) puede observarse que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} n\pi t. \tag{13}$$

Para encontrar la solución particular $x_p(t)$ de (13), sustituimos (12) en la ecuación e igualamos los coeficientes de sen $n\pi t$. Esto nos da

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2 + 4\right)B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{o} \quad B_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}.$$

Por lo tanto,

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}\operatorname{sen} n\pi t. \tag{14}$$ ≡

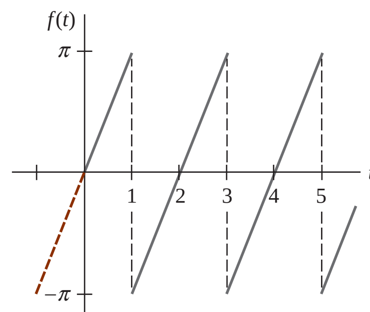


FIGURA 10.3.12 Función periódica forzada f del ejemplo 4

En la solución (14) observe que no existe entero alguno $n \geq 1$ para el que el denominador $64 - n^2\pi^2$ de B_n sea cero. En general, si *existe* un valor de n, digamos N, para el cual $N\pi/p = \omega$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, entonces el sistema descrito en (11) es un estado de resonancia pura. En otras palabras, tenemos resonancia pura si el desarrollo en series de Fourier de la fuerza conductora $f(t)$ posee un término sen$(N\pi/L)t$ (o cos$(N\pi/L)t$) a la misma frecuencia que la correspondiente a las vibraciones libres.

Desde luego, si la extensión periódica $2p$ de la fuerza conductora f en el eje t negativo nos da una función par, entonces desarrollamos f en una serie de cosenos.

10.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas del 1 al 10, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos formas.

1. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

2. $f(x) = x\cos x$

3. $f(x) = x^2 + x$

4. $f(x) = x^3 - 4x$

5. $f(x) = e^{|x|}$

6. $f(x) = e^x - e^{-x}$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x + 5, & -2 < x < 0 \\ -x + 5, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

9. $f(x) = x^3,\ 0 \leq x \leq 2$

10. $f(x) = |x^5|$

En los problemas del 11 al 24, desarrolle la función dada en una serie apropiada de cosenos o senos.

11. $f(x) = \begin{cases} \pi, & -1 < x < 0 \\ -\pi, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

13. $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$ 14. $f(x) = x, -\pi < x < \pi$

15. $f(x) = x^2, -1 < x < 1$ 16. $f(x) = x|x|, -1 < x < 1$

17. $f(x) = \pi^2 - x^2, -\pi < x < \pi$

18. $f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$

19. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ -x, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -2\pi < x < -\pi \\ x, & -\pi \le x < \pi \\ \pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

23. $f(x) = |\text{sen } x|, -\pi < x < \pi$

24. $f(x) = \cos x, -\pi/2 < x < \pi/2$

En los problemas del 25 al 34, determine los desarrollos coseno y seno de semiintervalo para la función proporcionada.

25. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

27. $f(x) = \cos x, 0 < x < \pi/2$

28. $f(x) = \text{sen } x, 0 < x < \pi$

29. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ x - \pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = x^2 + x,\ 0 < x < 1$

34. $f(x) = x(2 - x),\ 0 < x < 2$

En los problemas del 35 al 38, desarrolle la función dada en una serie de Fourier.

35. $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ 36. $f(x) = x, 0 < x < \pi$

37. $f(x) = x + 1, 0 < x < 1$ 38. $f(x) = 2 - x, 0 < x < 2$

En los problemas 39 y 40, proceda como en el ejemplo 4 para calcular una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = 1, k = 10$ y la fuerza conductora $f(t)$ es la que se proporciona. Suponga que al extenderse $f(t)$ al eje t negativo en forma periódica, la función resultante es impar.

39. $f(x) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ -5, & \pi < t < 2\pi \end{cases};\quad f(t + 2\pi) = f(t)$

40. $f(t) = 1 - t,\ 0 < t < 2;\quad f(t + 2) = f(t)$

En los problemas 41 y 42, proceda como en el ejemplo 4 para calcular una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = \frac{1}{4}, k = 12$, y la fuerza conductora $f(t)$ es como se indica. Suponga que al extenderse $f(t)$ al eje t negativo de manera periódica, la función resultante es par.

41. $f(t) = 2\pi t - t^2, 0 < t < 2\pi;\quad f(t + 2\pi) = f(t)$

42. $f(x) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 - t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases};\quad f(t + 1) = f(t)$

43. *a*) Resuelva la ecuación diferencial del problema 39, $x'' + 10x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
   b) Utilice un CAS para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ determinada en el inciso *a*).

44. *a*) Resuelva la ecuación diferencial del problema 41, $\frac{1}{4}x'' + 12x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
   b) Utilice un CAS para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ determinada en el inciso *a*).

45. Suponga que una viga uniforme de longitud L se encuentra soportada en $x = 0$ y en $x = L$. Si la carga por unidad de longitud está dada por $w(x) = w_0 x/L$, $0 < x < L$, entonces la ecuación diferencial de la deflexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w_0 x}{L},$$

donde E, I y w_0 son constantes.
   a) Desarrolle $w(x)$ en una serie de senos de semiintervalo.
   b) Utilice el método del ejemplo 4 para calcular una solución particular $y(x)$ de la ecuación diferencial.

46. Proceda igual que en el problema 45 para calcular una solución particular $y(x)$ cuando la carga por unidad de longitud está dada como indica la **FIGURA 10.3.13**.

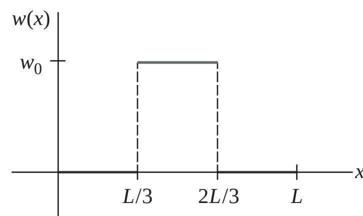


FIGURA 10.3.13 Gráfica para el problema 46

☰ Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 47 y 48, mediante el uso de un CAS, grafique las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de la serie trigonométrica dada. Experimente con diferentes valores de N y con gráficas en intervalos distintos del eje x. Utilice sus gráficas para formular una expresión de forma cerrada para una función f definida por $0 < x < L$ que esté representada por las series.

47. $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1 - 2(-1)^n}{n}\text{sen } nx\right]$

48. $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}x$

☰ Problemas de análisis

49. ¿Su respuesta a los problemas 47 o 48 es única? Proporcione una función f definida en un intervalo simétrico respecto al origen $-a < x < a$ que tenga la misma serie trigonométrica como en el problema 47; y otra como en el problema 48.

50. Analice por qué el desarrollo de la serie de cosenos de Fourier de $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ converge hacia e^{-x} en el intervalo $-\pi < x < 0$.

51. Suponga que $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ se desarrolla en una serie de cosenos y $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ en una serie de senos. Si las dos series se suman y después se dividen entre 2 (esto es, se obtiene su promedio), tendremos una serie de cosenos y senos que también representa $f(x) = e^x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. ¿Es ésta una serie de Fourier completa de f? [*Sugerencia:* ¿Qué representa el promedio de la serie coseno y seno en el intervalo $-\pi < x < 0$?]

52. Demuestre las propiedades *a*), *c*), *d*), *f*) y *g*) relacionadas en el teorema 10.3.1.

10.4 Series complejas de Fourier

Introducción Tal como hemos podido observar en las dos secciones anteriores, una función real f puede representarse mediante una serie de senos y cosenos. Las funciones cos nx, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y sen nx, $n = 1, 2, \ldots$ son funciones con *valores reales* de una variable real x. Las tres formas reales diferentes de la serie de Fourier proporcionadas en las definiciones 10.2.1 y 10.3.1 serán de significativa importancia en los capítulos posteriores, cuando comencemos a resolver ecuaciones diferenciales lineales parciales. Sin embargo, en ciertas aplicaciones, por ejemplo, en el análisis de señales periódicas practicado en ingeniería eléctrica, realmente conviene más representar una función f en una serie infinita de funciones con *valores complejos* de una variable real x como las funciones exponenciales e^{inx}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y donde i es la unidad imaginaria definida por $i^2 = -1$. Recuerde que para un número real x, la fórmula de Euler es

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \text{nos da} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

En esta sección vamos a utilizar los resultados de (1) para expresar la serie de Fourier de la definición 10.2.1 en **forma compleja** o **forma exponencial**. Observaremos que es posible representar una función real mediante una serie compleja; es decir, una serie donde los coeficientes sean números complejos. Para lograr dicho objetivo, recuerde que un número complejo es un número $z = a + ib$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número $\bar{z} = a - ib$ se llama conjugado de z.

Series complejas de Fourier Si primero sumamos las dos expresiones de (1) y despejamos cos x, y posteriormente sustituimos las dos expresiones y despejamos sen x, llegamos al resultado

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{2}$$

Al utilizar (2) para reemplazar cos $(n\pi x/p)$ y sen $(n\pi x/p)$ en (8) de la sección 10.2, la serie de Fourier de una función f puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i}\right] \\ &\qquad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/p} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/p}\right] \\ &\qquad = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi x/p}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ y $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. Los símbolos a_0, a_n y b_n son los coeficientes (9), (10) y (11) de la definición 10.2.1. Cuando la función f es real, c_n y c_{-n} son complejos conjugados y pueden escribirse también en términos de las funciones exponenciales complejas:

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, dx, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\, dx - i\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}\,dx, \tag{5}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + i\,\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{in\pi x/p}\,dx. \tag{6}$$

Puesto que los subíndices de coeficientes y exponentes se encuentran en el rango de todo el conjunto de enteros no negativos… $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, podemos escribir los resultados de (3), (4), (5) y (6) de manera más compacta al sumar tanto enteros negativos como no negativos. En otras palabras, es posible utilizar *una* suma y *una* integral que defina todos los coeficientes c_0, c_n y c_{-n}.

Definición 10.4.1 Series complejas de Fourier

La **serie compleja de Fourier** de las funciones f definidas en un intervalo $(-p, p)$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p}, \tag{7}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}\,dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{8}$$

Si f satisface la hipótesis del teorema 10.2.1, una serie compleja de Fourier converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad y hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en un punto de discontinuidad.

EJEMPLO 1 Series complejas de Fourier

Desarrolle $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$, en una serie compleja de Fourier.

Solución Con $p = \pi$, (8) da

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi(in + 1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right].$$

Podemos simplificar los coeficientes c_n de alguna manera utilizando la fórmula de Euler:

$$e^{-(in+1)\pi} = e^{-\pi}(\cos n\pi - i\,\text{sen}\,n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}$$

y

$$e^{(in+1)\pi} = e^{\pi}(\cos n\pi + i\,\text{sen}\,n\pi) = (-1)^n e^{\pi},$$

puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$ y $\text{sen}\,n\pi = 0$. En consecuencia,

$$c_n = (-1)^n\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2(in + 1)\pi} = (-1)^n\frac{\text{senh}\,\pi}{\pi}\frac{1 - in}{n^2 + 1}. \tag{9}$$

La serie compleja de Fourier es, por lo tanto,

$$f(x) = \frac{\text{senh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1 - in}{n^2 + 1}e^{inx}. \tag{10}$$ ≡

La serie (10) converge hacia la extensión periódica 2π de f.

Probablemente usted tenga la impresión de que hemos complicado las cosas presentando una versión compleja de la serie de Fourier. La realidad es que, en áreas de ingeniería, la forma (7) proporcionada en la definición 10.4.1 a veces resulta más útil que la dada en (8) de la definición 10.2.1.

Frecuencia fundamental Las series de Fourier de las definiciones 10.2.1 y 10.4.1 explican una función periódica, y el **periodo fundamental** de dicha función (esto es, la extensión periódica de f) es $T = 2p$. Puesto que $p = T/2$, (8) de la sección 10.2 y (7) se convierten, respectivamente, en

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega x}, \tag{11}$$

donde el número $\omega = 2\pi/T$ se llama **frecuencia angular fundamental**. En el ejemplo 1, la extensión periódica de la función tiene como periodo $T = 2\pi$; la frecuencia angular fundamental es $\omega = 2\pi/2\pi = 1$.

Espectro de frecuencia En el estudio de las señales periódicas de tiempo, los ingenieros eléctricos consideran de mucha utilidad el análisis espectral de diversas formas de onda. Si f es periódica y tiene un periodo fundamental T, la gráfica de los puntos $(n\omega, |c_n|)$, donde ω es la frecuencia angular fundamental y los c_n son los coeficientes definidos en (8), se llama **espectro de frecuencia** de f.

EJEMPLO 2 Espectro de frecuencia

En el ejemplo 1, $\omega = 1$ de tal forma que $n\omega$ tome los valores 0, ±1, ±2, …. Utilizando $|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, podemos observar que a partir de (9)

$$|c_n| = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

La tabla siguiente muestra algunos valores de n y los correspondientes de c_n.

n	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\lvert c_n\rvert$	1.162	1.644	2.599	3.676	2.599	1.644	1.162

La gráfica de la **FIGURA 10.4.1**, líneas con puntas de flecha terminando en los valores, representa una porción del espectro de frecuencia de f. ≡

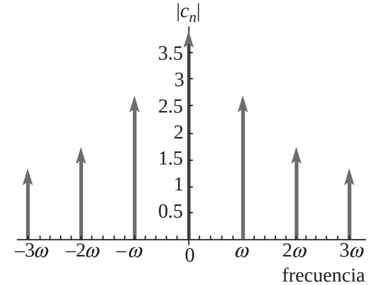


FIGURA 10.4.1 Espectro de frecuencia de f para el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Espectro de frecuencia

Encuentre el espectro de frecuencia de la onda cuadrada periódica, o pulso periódico, ilustrada en la **FIGURA 10.4.2**. La onda es la extensión periódica de la función f:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \\ 1, & -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

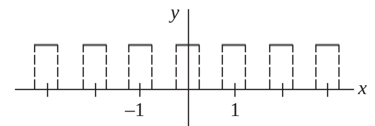


FIGURA 10.4.2 Pulso periódico en el ejemplo 3

Solución Aquí $T = 1 = 2p$, por lo que $p = \frac{1}{2}$. Como f es 0 en los intervalos $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, la ecuación (8) se convierte en

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{2in\pi x}\,dx = \int_{-1/4}^{1/4} 1 \cdot e^{2in\pi x}\,dx \\ &= \left.\frac{e^{2in\pi x}}{2in\pi}\right]_{-1/4}^{1/4} \\ &= \frac{1}{n\pi}\frac{e^{in\pi/2} - e^{-in\pi/2}}{2i}. \end{aligned}$$

Esto es, $$c_n = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}. \quad \leftarrow \text{por (2)}$$

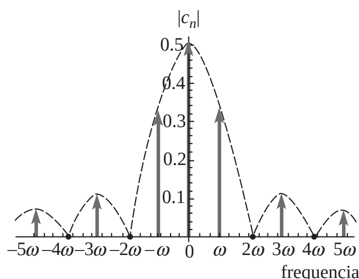


FIGURA 10.4.3 Espectro de frecuencia de f del ejemplo 3

Puesto que el último resultado no es válido en $n = 0$, calculamos ese término en forma separada:

$$c_0 = \int_{-1/4}^{1/4} dx = \frac{1}{2}.$$

La tabla siguiente muestra algunos de los valores de $|c_n|$, y la **FIGURA 10.4.3** describe

n	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$\|c_n\|$	$\frac{1}{5\pi}$	0	$\frac{1}{3\pi}$	0	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\pi}$	0	$\frac{1}{3\pi}$	0	$\frac{1}{5\pi}$

el espectro de frecuencia de f. Puesto que la frecuencia fundamental es $\omega = 2\pi/T = 2\pi$, en la escala horizontal las unidades $n\omega$ son $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$. A la figura 10.4.3 se le añadió una curva en línea discontinua con el fin de enfatizar la presencia de los valores iguales a cero de $|c_n|$ para el caso en que n sea un entero par diferente de cero. ≡

10.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la serie compleja de Fourier de f en el intervalo dado.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

5. $f(x) = x, 0 < x < 2\pi$ **6.** $f(x) = e^{-|x|}, -1 < x < 1$

7. Calcule el espectro de frecuencia de la onda periódica que es extensión periódica de la función f del problema 1.

8. Calcule el espectro de frecuencia de la onda periódica que es extensión periódica de la función f del problema 3.

En los problemas 9 y 10, bosqueje la onda periódica que se proporciona. Calcule el espectro de frecuencia de f.

9. $f(x) = 4 \text{ sen } x, 0 < x < \pi; f(x + \pi) = f(x)$. [*Sugerencia:* Utilice (2).]

10. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}; \quad f(x + \pi) = f(x)$

11. ***a***) Demuestre que $a_n = c_n + c_{-n}$ y $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
b) Utilice los resultados del inciso *a*) y la serie compleja de Fourier del ejemplo 1 para obtener el desarrollo de la serie de Fourier de f.

12. La función f del problema 1 es impar. Utilice la serie compleja de Fourier para obtener el desarrollo en series seno de Fourier de f.

10.5 Problema de Sturm-Liouville

Repaso Por conveniencia, presentamos aquí un breve repaso de algunas de las ecuaciones diferenciales ordinarias que serán de importancia en las secciones y capítulos subsecuentes.

Ecuaciones lineales	**Soluciones generales**
$y' + \alpha y = 0,$	$y = c_1 e^{-\alpha x}$
$y'' + \alpha^2 y = 0, \alpha > 0$	$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \text{ sen } \alpha x$
$y'' - \alpha^2 y = 0, \alpha > 0$	$\begin{cases} y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}, & \text{o} \\ y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \text{ senh } \alpha x \end{cases}$

Ecuación de Cauchy-Euler	**Soluciones generales, $x > 0$**
$x^2 y'' + xy' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0$	$\begin{cases} y = c_1 x^{-\alpha} + c_2 x^{\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ y = c_1 + c_2 \ln x, & \alpha = 0 \end{cases}$

Ecuación paramétrica de Bessel ($\nu = 0$)	**Solución general, $x > 0$**
$xy'' + y' + \alpha^2 xy = 0,$	$y = c_1 J_0(\alpha x) + c_2 Y_0(\alpha x)$
Ecuación de Legendre ($n = 0, 1, 2, \ldots$)	**Las soluciones particulares son polinomios**
$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$	$y = P_0(x) = 1,$
	$y = P_1(x) = x,$
	$y = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ldots$

En relación con las dos formas de la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$, de aquí en adelante emplearemos la regla informal siguiente:

Utilice la forma exponencial $y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$ cuando el dominio de x sea un intervalo infinito o semiinfinito; aplique la forma hiperbólica $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$ cuando el dominio de x sea un intervalo finito.

En capítulos posteriores esta regla será de gran utilidad.

Valores propios y funciones propias Las funciones ortogonales están presentes en la solución de ecuaciones diferenciales. Más aún, se puede generar un conjunto de funciones ortogonales mediante la resolución de un problema evaluado en el límite de dos puntos y que involucre una ecuación diferencial lineal de segundo orden que contenga un parámetro λ. En el ejemplo 2 de la sección 3.9 se pudo ver que el problema evaluado en el límite

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \tag{1}$$

contenía soluciones no triviales solamente cuando el parámetro λ tenía los valores $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ llamados **valores propios**. Las correspondientes soluciones no triviales $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ se llaman **funciones propias** del problema. Por ejemplo, para (1) tenemos:

no es un valor propio
↓

$$BVP: \quad y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

La solución es trivial: $y = 0.$

es un valor propio ($n = 2$)
↓

$$BVP: \quad y'' + \frac{4\pi^2}{L^2} y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

La solución es no trivial: $y = \operatorname{sen}(2\pi x/L).$

Para cumplir nuestros propósitos en el presente capítulo, es importante reconocer que el conjunto de funciones generadas por este problema de valores en la frontera, esto es, $\{\operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es el conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $[0, L]$ utilizado como base de la serie seno de Fourier.

EJEMPLO 1 Valores propios y funciones propias

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que, considerando los tres casos posibles del parámetro λ (cero, negativo o positivo; esto es, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\alpha > 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$), los valores propios y las funciones propias del problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0 \tag{2}$$

son, respectivamente, $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $y = c_1 \cos(n\pi x/L)$, $c_1 \neq 0$. En contraste con (1), $\lambda_0 = 0$ es un valor propio para este problema de valor en la frontera, y $y = 1$ es la función propia correspondiente. Esta última resulta de resolver $y'' = 0$ sujeta a las mismas condiciones de frontera $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Observe también que $y = 1$ puede incorporarse a la familia $y = \cos(n\pi x/L)$ al establecer $n = 0$. El conjunto $\{\cos(n\pi x/L)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal en el intervalo $[0, L]$. Consulte el problema 3 de los ejercicios 10.5. ≡

■ **Problema regular de Sturm-Liouville** Los problemas (1) y (2) son casos especiales de un importante problema general de valores en la frontera de dos puntos. Sean p, q, r y r' funciones continuas con valores reales en un intervalo $[a, b]$, y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para toda x presente en el intervalo. Entonces

Resolver: $$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \quad (3)$$

Sujeta a: $$A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \quad (4)$$

$$A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \quad (5)$$

se dice que es un **problema regular de Sturm-Liouville**. Se supone que los coeficientes de las condiciones de frontera (4) y (5) son reales e independientes de λ. Además, A_1 y B_1 no son cero y A_2 y B_2 tampoco lo son. Los problemas (1) y (2) de valores en la frontera son problemas regulares de Sturm-Liouville. A partir de (1) podemos identificar $r(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $p(x) = 1$ en la ecuación diferencial (3); en la condición de frontera (4) identificamos $a = 0$, $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, y en (5) $b = L$, $A_2 = 1$, $B_2 = 0$. A partir de (2), las identificaciones podrán ser $a = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = 1$ en (4), $b = L$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$ en (5).

La ecuación diferencial (3) es lineal y homogénea. Las condiciones de frontera en (4) y (5) son una combinación lineal de y y y' *igual a cero en un punto*, también se llaman **homogéneas**. Una condición de frontera como $A_2 y(b) + B_2 y'(b) = C_2$, donde C_2 es una constante diferente de cero, es **no homogénea**. Naturalmente, se dice que un problema de valores en la frontera constituido por una ecuación diferencial lineal homogénea y condiciones de frontera homogéneas es homogéneo; de otra forma, es no homogéneo. Se dice que las condiciones de frontera (4) y (5) son **separadas** porque cada condición involucra sólo un punto de frontera simple. Las condiciones de frontera son **mixtas** si cada condición incluye tanto los puntos de frontera $x = a$ y $x = b$. Por ejemplo, las condiciones de frontera periódicas $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ son condiciones de frontera mixtas.

Debido a que un problema regular de Sturm-Liouville es un problema homogéneo de valores en la frontera, siempre posee la solución trivial $y = 0$. Sin embargo, no nos interesa esta solución. De igual manera que en el ejemplo 1, para resolver dicho problema buscamos números π (valores propios) y soluciones y no triviales y que dependan de λ (funciones propias).

■ **Propiedades** El teorema 10.5.1 es una lista de algunas de las tantas propiedades importantes del problema regular de Sturm-Liouville. Demostraremos solamente la última propiedad.

Teorema 10.5.1 Propiedades del problema regular de Sturm-Liouville

a) Existe un número infinito de valores propios reales que pueden disponerse en orden ascendente $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ de tal manera que $\lambda_n \to \infty$ a medida que $n \to \infty$.

b) Para cada valor propio existe solamente una función propia (excepto para múltiplos constantes diferentes de cero).

c) Las funciones propias correspondientes a los diferentes valores propios son linealmente independientes.

d) El conjunto de funciones propias correspondientes al conjunto de valores propios es ortogonal respecto a la función peso $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN DE *d*)

Sean y_m y y_n funciones propias correspondientes a los valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces

$$\frac{d}{dx}[r(x)y_m'] + (q(x) + \lambda_m p(x))y_m = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}[r(x)y_n'] + (q(x) + \lambda_n p(x))y_n = 0. \quad (7)$$

Multiplicamos (6) por y_n y (7) por y_m y al restar las dos ecuaciones obtenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = y_m \frac{d}{dx}[r(x)y_n'] - y_n \frac{d}{dx}[r(x)y_m'].$$

Integramos por partes este último resultado desde $x = a$ hasta $x = b$ y resulta

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)y_m y_n\,dx = r(b)[y_m(b)\,y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b)] - r(a)\,[y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a)]. \quad (8)$$

Las funciones propias y_m y y_n deben satisfacer las condiciones de frontera (4) y (5). En particular, a partir de (4) obtenemos

$$A_1y_m(a) + B_1y_m'(a) = 0$$
$$A_1y_n(a) + B_1y_n'(a) = 0.$$

Para que A_1 y B_1 satisfagan este sistema, sin que ambos sean iguales a cero, el determinante de los coeficientes debe ser cero:

$$y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a) = 0.$$

Al aplicar un argumento similar a (5) nos da

$$y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b) = 0.$$

Utilizamos estos dos resultados en (8) para demostrar que ambos miembros del lado derecho son iguales a cero. Por lo tanto, establecimos la relación ortogonal

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \quad (9)\ \equiv$$

Asimismo, se puede demostrar que el conjunto de funciones propias ortogonales $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots\}$ de un problema regular de Sturm-Liouville es completo en $[a, b]$.

EJEMPLO 2 Un problema regular de Sturm-Liouville

Resuelva el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0. \quad (10)$$

Solución Debe demostrarse que para $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2 < 0$, donde $\alpha > 0$, el problema (10) de valor en la frontera tiene solamente la solución trivial $y = 0$. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, la solución general de la ecuación diferencial $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2$ sen αx. Ahora la condición $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$ en esta solución, por ello solamente nos queda $y = c_2$ sen αx. La segunda condición de frontera $y(1) + y'(1) = 0$ se satisface cuando

$$c_2 \operatorname{sen} \alpha + c_2\alpha \cos \alpha = 0.$$

Establecemos $c_2 \neq 0$ y podemos observar que la última ecuación es equivalente a

$$\tan \alpha = -\alpha \quad (11)$$

Si $x = \alpha$ en (11), entonces la **FIGURA 10.5.1** muestra la posibilidad de que exista un número infinito de raíces de la ecuación $\tan x = -x$, es decir, las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de $y = -x$ interseca las ramas de la gráfica de $y = \tan x$. Los valores propios del problema (10) son, entonces, $\lambda_n = \alpha_n^2$, donde α_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, son las raíces *positivas* consecutivas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ de (11). Con ayuda de un CAS se demuestra fácilmente que, redondeando a cuatro cifras decimales, $\alpha_1 = 2.0288$, $\alpha_2 = 4.9132$, $\alpha_3 = 7.9787$ y $\alpha_4 = 11.0855$, y las soluciones correspondientes son $y_1 =$ sen $2.0288x$, $y_2 =$ sen $4.9132x$, $y_3 =$ sen $7.9787x$ y $y_4 =$ sen $11.0855x$. En general, las funciones propias del problema son $\{\text{sen } \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Con las identificaciones $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $p(x) = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 1$ y $B_2 = 1$ podemos observar que (10) es un problema regular de Sturm-Liouville. Por lo tanto, $\{\text{sen } \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es un conjunto ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. ≡

En algunas circunstancias, es posible demostrar la ortogonalidad de las soluciones de (3) sin necesidad de especificar una condición de frontera en $x = a$ y en $x = b$.

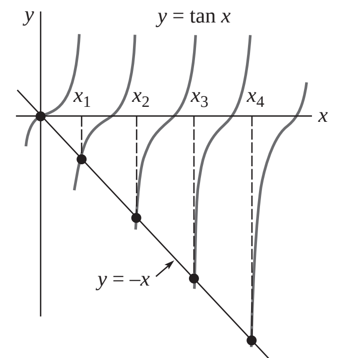


FIGURA 10.5.1 Raíces positivas de $\tan x = -x$

Problema singular de Sturm-Liouville Existen otras condiciones importantes en las cuales buscamos soluciones no triviales de la ecuación diferencial (3):

- $r(a) = 0$ y una condición de frontera del tipo dado en (5) especificada en $x = b$; **(12)**
- $r(b) = 0$ y una condición de frontera del tipo dado en (4) especificada en $x = a$; **(13)**
- $r(a) = r(b) = 0$ y que no se especifique una condición de frontera en $x = a$ o en $x = b$; **(14)**
- $r(a) = r(b)$ y las condiciones de frontera $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. **(15)**

Se dice que la ecuación diferencial (3) junto con una de las condiciones (12) o (13) es un **problema singular de valor en la frontera**. Se afirma también que la ecuación (3) con las condiciones especificadas en (15) es un **problema periódico de valor en la frontera** (y otra afirmación es que las condiciones de frontera son periódicas). Observe que si, digamos, $r(a) = 0$ entonces $x = a$ *puede* ser un punto singular de la ecuación diferencial y, en consecuencia, una solución de (3) puede hacerse infinita a medida que $x \to a$. Sin embargo, a partir de (8) vemos que si $r(a) = 0$, entonces no se requiere de una condición de frontera en $x = a$ para demostrar la ortogonalidad de las funciones propias *siempre y cuando* estas soluciones estén acotadas en ese punto. Este último requisito garantiza la existencia de las integrales involucradas. Suponiendo que las soluciones de (3) están acotadas en el intervalo cerrado $[a, b]$, por simple inspección de la ecuación (8) advertimos que:

- si $r(a) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera en $x = a$; **(16)**
- si $r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera en $x = b$;* **(17)**
- si $r(a) = r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera ya sea en $x = a$ o $x = b$; **(18)**
- si $r(a) = r(b)$, entonces la relación de ortogonalidad (9) se mantiene con las condiciones de frontera periódicas $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. **(19)**

Formulación autoadjunta Si efectuamos la diferenciación $\frac{d}{dx}[r(x)\,y']$, la ecuación diferencial (3) es lo mismo que

$$r(x)y'' + r'(x)y' + (q(x) + \lambda p(x))y = 0. \tag{20}$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ es exactamente de la forma dada en (20) con $r(x) = 1 - x^2$ y $r'(x) = -2x$. En otras palabras, otra forma de escribir la ecuación diferencial de Legendre es

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)y'] + n(n + 1)y = 0. \tag{21}$$

Sin embargo, si usted comparara otras ecuaciones diferenciales de segundo orden (digamos, la ecuación de Bessel, las ecuaciones de Cauchy-Euler, y ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes) podría pensar, puesto que el coeficiente de y' es la derivada del coeficiente de y'', que algunas otras ecuaciones diferenciales de segundo orden tienen la forma dada en (3). Por el contrario, si los coeficientes son continuos y $a(x) \neq 0$ para toda x en algún intervalo, entonces *cualquier* ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + (c(x) + \lambda d(x))y = 0 \tag{22}$$

puede escribirse nuevamente de la manera llamada **formulación autoadjunta** (3). Para apreciar esto, volvimos a escribir una ecuación lineal de primer orden $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en la forma $\frac{d}{dx}[\mu y] = 0$ dividiendo la ecuación entre $a_1(x)$ y, después, multiplicando por el factor integrante $\mu = e^{\int P(x)dx}$ donde, suponiendo que no existen factores comunes, $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$. Así, primero dividimos (22) entre $a(x)$. Los primeros dos términos son entonces $Y' + \frac{b(x)}{a(x)}Y + \cdots$ donde, para enfatizar, escribimos $Y = y'$. En segundo lugar, multiplicamos esta ecuación por el factor integrador $e^{\int P((bx)/(ax)dx}$ donde se supone que $a(x)$ y $b(x)$ no tienen factores comunes

* Las condiciones (16) y (17) equivalen a seleccionar $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ en (4) y $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ en (5), respectivamente.

$$\underbrace{e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y}_{\text{derivada de un producto}} + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y\right] + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int(b(x)/a(x))dx}y'\right] + \cdots.$$

En resumen, dividiendo (22) entre $a(x)$ y multiplicando entonces por $e^{\int(b(x)/a(x))dx}$ obtenemos

$$e^{\int(b/a)dx}y'' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}y' + \left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx} + \lambda\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}\right)y = 0. \tag{23}$$

La ecuación (23) es la forma deseada proporcionada en (20) y es lo mismo que (3):

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{e^{\int(b/a)dx}}_{r(x)}y'\right] + \left(\underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}}_{q(x)} + \lambda\underbrace{\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}}_{p(x)}\right)y = 0.$$

Por ejemplo, para expresar $3y'' = 6y' + \lambda y = 0$ en la formulación autoadjunta, escribimos $y'' + 2y' + \lambda\frac{1}{3}y = 0$ y después multiplicamos por $e^{\int 2dx} = e^{2x}$. La ecuación resultante es

$$\overset{\substack{r(x)\\ \downarrow}}{e^{2x}}y'' + \overset{\substack{r'(x)\\ \downarrow}}{2e^{2x}}y' + \lambda\overset{\substack{p(x)\\ \downarrow}}{\frac{1}{3}e^{2x}}y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}[e^{2x}y'] + \lambda\frac{1}{3}e^{2x}y = 0.$$

Desde luego, no es necesario expresar una segunda ecuación diferencial (22) en la formulación autoadjunta (3) con el fin de *resolver* la ecuación diferencial. Para cumplir nuestros propósitos utilizamos la fórmula dada en (3) para determinar la función peso $p(x)$ necesaria en la relación de ortogonalidad (9). Los dos ejemplos siguientes muestran las relaciones de ortogonalidad para las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre.

◀ Observación.

EJEMPLO 3 Ecuación paramétrica de Bessel

En la sección 5.3 vimos que la solución general de la ecuación diferencial paramétrica de Bessel $x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)y = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es $y = c_1J_n(\alpha x) + c_2Y_n(\alpha x)$. Luego de dividir la ecuación paramétrica de Bessel entre el coeficiente de mayor grado x^2 y multiplicar la ecuación resultante por el factor de integración $e^{\int(1/x)dx} = e^{\ln x} = x$, $x > 0$, obtenemos la formulación autoadjunta

$$xy'' + y' + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0,$$

donde identificamos $r(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $p(x) = x$ y $\lambda = \alpha^2$. Ahora $r(0) = 0$, y de las dos soluciones $J_n(\alpha x)$ y $Y_n(\alpha x)$ sólo $J_n(\alpha x)$ está acotada en $x = 0$. Por lo tanto, en vista de la ecuación (16), el conjunto $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)J_n(\alpha_j x)\,dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \tag{24}$$

dada α_i, y por lo tanto los valores propios $\lambda_i = \alpha_i^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, sean definidos mediante una condición de frontera en $x = b$ del tipo proporcionado en la ecuación (5):

$$A_2J_n(\lambda b) + B_2\alpha J_n'(\alpha b) = 0.^* \tag{25}$$ ≡

Para cualquier valor de A_2 y B_2, sin ser ambos iguales a cero, se sabe que (25) tiene un número infinito de raíces $x_i = \alpha_i b$. Los valores propios son entonces $\lambda_i = \alpha_i^2 = (x_i/b)^2$. En el capítulo siguiente se comentará más acerca de los valores propios.

EJEMPLO 4 Ecuación de Legendre

A partir del resultado proporcionado por (21) podemos identificar $q(x) = 0$, $p(x) = 1$ y $\lambda = n(n + 1)$. De la sección 5.3, recuerde que cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$ la ecuación de

---

* El factor extra de α en (25) proviene de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}J_n(\alpha x) = J_n'(\alpha x)\frac{d}{dx}\alpha x = \alpha J_n'(\alpha x).$$

Legendre tiene soluciones polinomiales $P_n(x)$. Ahora podemos hacer la observación de que $r(-1) = r(1) = 0$ junto con el hecho de que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son las únicas soluciones de (21) que están acotadas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, para concluir de (18) que el conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n. \qquad \equiv$$

Comentarios

i) Un problema de Sturm-Liouville se considera singular cuando el intervalo en que se trabaja es infinito. Consulte los problemas 9 y 10 de los ejercicios 10.5.
ii) Aun cuando las condiciones de los coeficientes p, q, r y r' sean las supuestas en el problema regular de Sturm-Liouville, si las condiciones de frontera son periódicas, entonces la propiedad *b*) del teorema 10.5.1 no es válida. Se le pide al lector demostrar en el problema 4 de los ejercicios 10.5, correspondientes a cada valor propio del problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-L) = y(L), \qquad y'(-L) = y'(L).$$

que existen dos funciones propias linealmente independientes.

10.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 y 2, determine las funciones propias y la ecuación que define los valores propios para el problema de valores en la frontera. Utilice un CAS para aproximar los cuatro primeros valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4. Proporcione las funciones propias correspondientes a estas aproximaciones.

1. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) + y'(0) = 0,\ y(1) = 0$

3. Considere la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ sujeta a $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Demuestre que las funciones propias son

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{L}x,\ \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[0, L]$, es la base de la serie coseno de Fourier.

4. Considere la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ sujeta a las condiciones de frontera periódicas $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$. Demuestre que las funciones propias son

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{L}x,\ \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[-L, L]$, es la base de las series de Fourier.

5. Encuentre la norma cuadrada para cada función propia del problema 1.

6. Demuestre que para las funciones propias del ejemplo 2,

$$\|\operatorname{sen}\alpha_n x\|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos^2\alpha_n].$$

7. *a*) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = 0,\ y(5) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial como una formulación autoadjunta.

c) Proporcione una relación de ortogonalidad.

8. *a*) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$y'' + y' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial como una formulación autoadjunta.

c) Proporcione una relación de ortogonalidad.

9. La **ecuación diferencial de Laguerre**

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tiene soluciones polinomiales $L_n(x)$. Exprese la ecuación como una formulación autoadjunta y proporcione una relación de ortogonalidad.

10. La **ecuación diferencial de Hermite**

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tiene soluciones polinomiales $H_n(x)$. Exprese la ecuación como una formulación autoadjunta y proporcione una relación de ortogonalidad.

11. Considere el problema regular de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}[(1 + x^2)y'] + \frac{\lambda}{1 + x^2}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

a) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera. [*Sugerencia:* Establezca $x = \tan\theta$ y después utilice la regla de la cadena.]

b) Proporcione una relación de ortogonalidad.

12. *a*) Encuentre las funciones propias y la ecuación que defina los valores propios para el problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0,$$

y está acotada en $x = 0$, $y(3) = 0$.

b) Utilice la tabla 5.3.1 de la sección 5.3 para calcular los valores aproximados de los primeros cuatro valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4.

Problemas de análisis

13. Considere el caso especial del problema regular de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + \lambda p(x)y = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

¿Es $\lambda = 0$ un valor propio del problema? Proporcione soporte a su respuesta.

Tareas para el laboratorio de cómputo

14. *a*) Proporcione una relación de ortogonalidad para el problema de Sturm-Liouville del problema 1.

b) Utilice como apoyo un CAS para demostrar la relación de ortogonalidad de las funciones propias y_1 y y_2 que correspondan a los primeros dos valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente.

15. *a*) Proporcione una relación de ortogonalidad para el problema de Sturm-Liouville del problema 2.

b) Mediante un CAS, demuestre la relación de ortogonalidad de las funciones propias y_1 y y_2 que correspondan a los primeros dos valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente.

10.6 Series de Bessel y de Legendre

Introducción Las series de Fourier, las series coseno de Fourier y las series seno de Fourier son tres formas útiles para desarrollar una función en términos de un conjunto ortogonal de funciones. Sin embargo, dichos desarrollos de ninguna manera están limitadas a conjuntos ortogonales de funciones trigonométricas. En la sección 10.1 estudiamos que una función f definida en un intervalo (a, b) podía desarrollarse, al menos formalmente, en términos de cualquier conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ que sea ortogonal respecto a una función peso en $[a, b]$. Muchos de estos desarrollos de series ortogonales o series de Fourier generalizadas provienen de problemas de Sturm-Louiville los cuales, a su vez, surgen de intentos por resolver las ecuaciones diferenciales lineales parciales que sirven como modelos para sistemas físicos. Los desarrollos en series de Fourier y ortogonales (las últimas incluyen las dos series consideradas en esta sección) aparecerán en la consideración subsecuente de estas aplicaciones.

10.6.1 Serie de Fourier-Bessel

En el ejemplo 3 de la sección 10.5 estudiamos que para un valor constante de n el conjunto de funciones de Bessel $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$ cuando α_i se define mediante una condición de frontera de la forma

$$A_2 J_n(\alpha b) + B_2 \alpha J_n'(\alpha b) = 0. \tag{1}$$

Los valores propios del problema correspondiente de Sturm-Liouville son $\lambda_i = \alpha_i^2$. A partir de (7) y (8) de la sección 10.1, el desarrollo en series ortogonales o las series de Fourier generalizadas de una función f definida en el intervalo $(0, b)$ en términos de este conjunto ortogonal es

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x), \tag{2}$$

donde

$$c_i = \frac{\int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx}{\|J_n(\alpha_i x)\|^2}. \tag{3}$$

La norma cuadrada de la función $J_n(\alpha_i x)$ está definida por la expresión (11) de la sección 10.1:

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \int_0^b x J_n^2(\alpha_i x)\, dx. \tag{4}$$

A la serie (2) con coeficientes (3) se le conoce como **serie de Fourier-Bessel**.

Relaciones de recurrencia diferenciales Las relaciones de recurrencia diferenciales que se proporcionaron en (20) y (21) de la sección 5.3 a menudo resultan de utilidad en la evaluación de los coeficientes (3). Por conveniencia, a continuación reproducimos dichas relaciones:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \tag{6}$$

Norma cuadrada El valor de la norma cuadrada (4) depende de cómo se definan los valores propios $\lambda_i = \alpha_i^2$. Si $y = J_n(\alpha x)$, entonces sabemos, con base en el ejemplo 3 de la sección 10.5, que

$$\frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0.$$

Después de multiplicar por $2xy'$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}[xy']^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}[y]^2 = 0.$$

Integramos por partes el último resultado en $[0, b]$ y obtenemos

$$2\alpha^2 \int_0^b xy^2\,dx = \left(\left[xy'\right]^2 + (\alpha^2x^2 - n^2)y^2\right)\Bigg]_0^b.$$

Puesto que $y = J_n(\alpha x)$, el límite inferior es cero para $n > 0$ ya que $J_n(0) = 0$. Para $n = 0$, la cantidad $[xy']^2 + \alpha^2x^2y^2$ es cero en $x = 0$. Por lo tanto,

$$2\alpha^2 \int_0^b xJ_n^2(\alpha x)\,dx = \alpha^2 b^2[J_n'(ab)]^2 + (\alpha^2b^2 - n^2)[J_n(\alpha b)]^2, \tag{7}$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena para escribir $y' = \alpha J_n'(\alpha x)$.

Ahora consideraremos tres casos de la condición de frontera (1).

Caso I: Si seleccionamos $A_2 = 1$ y $B_2 = 0$, entonces (1) es

$$J_n(\alpha b) = 0. \tag{8}$$

Existe un número infinito de raíces positivas $x_i = \alpha_i b$ de (8) (consulte la figura 5.3.1), que definen la α_i como $\alpha_i = x_i/b$. Los valores propios son positivos y, por lo tanto, son $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. Las raíces negativas de (8) no proporcionan nuevos valores propios ya que $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$. El número 0 no es un valor propio para cualquier valor de n puesto que $J_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $J_0(0) = 1$. En otras palabras, si $\lambda = 0$, obtenemos la función trivial (la cual nunca es una función propia) para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y para $n = 0$, $\lambda = 0$ (o, de manera equivalente, $\alpha = 0$) no satisface la ecuación (8). Cuando (6) se escribe en la forma $xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$, a partir de (7) y (8) se deduce que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2}J_{n+1}^2(\alpha_i b). \tag{9}$$

Caso II: Si seleccionamos $A_2 = h \geq 0$, $B_2 = b$, entonces (1) es

$$hJ_n(\alpha b) + \alpha bJ_n'(\alpha b) = 0. \tag{10}$$

La ecuación (10) tiene un número infinito de raíces positivas $x_i = \alpha_i b$ para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Como antes, los valores propios se obtienen a partir de $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. $\lambda = 0$ no es un valor propio para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sustituyendo $\alpha_i bJ_n'(\alpha_i b) = -hJ_n(\alpha_i b)$ en (7) se puede ver que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es ahora

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{\alpha_i^2b^2 - n^2 + h^2}{2\alpha_i^2}J_n^2(\alpha_i b). \tag{11}$$

Caso III: Si $h = 0$ y $n = 0$ en (10), α_i se define a partir de las raíces de

$$J_0'(\alpha b) = 0. \tag{12}$$

A pesar de que (12) es solamente un caso especial de (10), es la única situación para la cual $\lambda = 0$ es un valor propio. Para entender esto, observe que para $n = 0$, el resultado en (6) implica que $J_0'(\alpha b) = 0$ es equivalente a $J_1(\alpha b) = 0$. Como $x_1 = \alpha_i b = 0$ es una raíz de la última ecuación, $\alpha_1 = 0$, y debido a que $J_0(0) = 1$ es no trivial, de $\lambda_1 = \alpha_1^2 = x_1^2/2$ concluimos que $\lambda_1 = 0$ es un valor propio. Sin embargo, evidentemente no podemos utilizar (11) cuando $\alpha_1 = 0$, $h = 0$ y $n = 0$. No obstante, a partir de la norma cuadrada (4) tenemos

$$\|1\|^2 = \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}. \tag{13}$$

Para $\alpha_i > 0$ podemos utilizar (11) con $h = 0$ y $n = 0$:

$$\|J_0(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_0^2(\alpha_i b). \tag{14}$$

La definición siguiente resume las tres formas de la serie (2) correspondientes a las normas cuadradas de los tres casos.

Definición 10.6.1 Serie de Fourier-Bessel

La **serie de Fourier-Bessel** de una formación f definida en el intervalo $(0, b)$ está dada por

i)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{15}$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{16}$$

donde α_i está definido por $J_n(\alpha b) = 0$.

ii)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{17}$$

$$c_i = \frac{2\alpha_i^2}{(\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{18}$$

donde α_i está definido por $hJ_n(\alpha b) + \alpha b J_n'(\alpha b) = 0$.

iii)
$$f(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\alpha_i x) \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{2}{b^2} \int_0^b x f(x)\, dx, \quad c_i = \frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_0(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{20}$$

donde α_i está definido por $J_0'(\alpha b) = 0$.

■ **Convergencia de una serie de Fourier-Bessel** Las condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier-Bessel no están particularmente restringidas.

Teorema 10.6.1 Condiciones para la convergencia

Si f y f' son continuas en un intervalo abierto $(0, b)$, entonces un desarrollo Fourier-Bessel de f converge hacia $f(x)$ en cualquier punto donde f es continua, y converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en un punto donde f es discontinua.

EJEMPLO 1 Desarrollo en una serie de Fourier-Bessel

Desarrolle $f(x) = x$, $0 < x < 3$, en una serie de Fourier-Bessel, utilizando las funciones Bessel de orden uno que satisfagan la condición de frontera $J_1(3\alpha) = 0$.

Solución Utilizamos (15) donde los coeficientes c_i están dados por (16) con $b = 3$:

$$c_i = \frac{2}{3^2 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^3 x^2 J_1(\alpha_i x)\, dx.$$

Para calcular esta integral establecemos $t = \alpha_i x$, $dx = dt/\alpha_i$, $x^2 = t^2/\alpha_i^2$ y utilizamos (5) en la forma $\frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)] = t^2 J_1(t)$:

$$c_i = \frac{2}{9\alpha_i^3 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^{3\alpha_i} \frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)]\, dt = \frac{2}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}.$$

Por lo tanto, el desarrollo buscado es

$$f(x) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x). \equiv$$

En el problema 1 de los ejercicios 10.6, se solicita calcular los primeros cuatro valores de α_i para la serie de Bessel precedente.

EJEMPLO 2 Desarrollo en una serie de Fourier-Bessel

Si en el ejemplo 1 α_i se define mediante $J_1(3\alpha) + \alpha J_1'(3\alpha) = 0$, entonces lo único que cambia en el desarrollo es el valor de la norma cuadrada. Multiplicando la condición de frontera por 3 obtenemos $3J_1(3\alpha) + 3\alpha J_1'(3\alpha) = 0$, la cual es igual a (10) cuando $h = 3$, $b = 3$ y $n = 1$. Por lo tanto, (18) y (17) nos dan, a su vez,

$$c_i = \frac{18\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)}$$

y

$$f(x) = 18\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x). \equiv$$

Uso de las computadoras Puesto que las funciones de Bessel son funciones "integradas" en un sistema asistido por computadora (CAS, por sus siglas en inglés), calcular los valores aproximados de α_i y de los coeficientes c_i de una serie de Fourier-Bessel es tarea sencilla. Por ejemplo, en (9) podemos pensar que $x_i = \alpha_i b$ es una raíz positiva de la ecuación $hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$. Por lo tanto, en el ejemplo 2 hemos utilizado un CAS para encontrar las primeras cinco raíces positivas x_i de $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$ y a partir de estas raíces obtenemos los primeros cinco valores de α_i: $\alpha_1 = x_1/3 = 0.98320$, $\alpha_2 = x_2/3 = 1.94704$, $\alpha_3 = x_3/3 = 2.95758$, $\alpha_4 = x_4/3 = 3.98538$ y $\alpha_5 = x_5/3 = 5.02078$. Conociendo las raíces $x_i = 3\alpha_i$ y la α_i, utilizamos de nuevo un CAS para calcular los valores numéricos de $J_2(3\alpha_i)$, $J_1^2(3\alpha_i)$, y, por último, los coeficientes c_i. De esta forma encontramos que la quinta suma parcial $S_5(x)$ para la representación de la serie de Fourier-Bessel de $f(x) = x$, $0 < x < 3$ en el ejemplo 2 es

$$S_5(x) = 4.01844\, J_1(0.98320x) - 1.86937\, J_1(1.94704x) + 1.07106\, J_1(2.95758x) - 0.70306\, J_1(3.98538x) + 0.50343\, J_1(5.02078x).$$

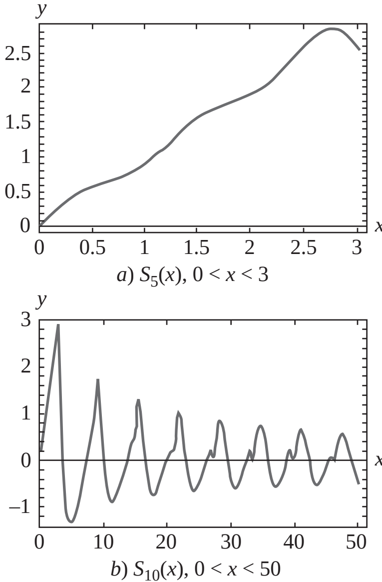


FIGURA 10.6.1 Sumas parciales de una serie de Fourier-Bessel

La gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo (0, 3) se muestra en la **FIGURA 10.6.1*a***). En la figura 10.6.1*b*) hemos graficado $S_{10}(x)$ en el intervalo (0, 50). Observe que fuera del intervalo de definición (0, 3), la serie no converge hacia una extensión periódica de *f* debido a que las funciones de Bessel no son periódicas. Consulte los problemas 11 y 12 de los ejercicios 10.6.

10.6.2 Serie de Fourier-Legendre

A partir del ejemplo 4 de la sección 10.5, sabemos que el conjunto de polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además, se puede probar que la norma cuadrada de un polinomio $P_n(x)$ depende de n en la forma siguiente:

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

El desarrollo en series ortogonales de una función en términos de los polinomios de Legendre se sintetiza en la definición siguiente:

Definición 10.6.2 Serie de Fourier-Legendre

La **serie de Fourier-Legendre** de una función *f* definida en el intervalo $(-1, 1)$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{21}$$

donde

$$c_n = \frac{2n + 1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx. \tag{22}$$

Convergencia de una serie de Fourier-Legendre En el teorema siguiente se proporcionan condiciones suficientes para la convergencia de una serie Fourier-Legendre.

Teorema 10.6.2 Condiciones para la convergencia

Si f y f' son continuas por tramos en $(-1, 1)$, entonces la serie de Fourier-Legendre (21) converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad, y converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en un punto de discontinuidad.

EJEMPLO 3 Desarrollo de una serie de Fourier-Legendre

Escriba nuevamente los primeros cuatro términos diferentes de cero en el desarrollo Fourier-Legendre para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Solución En la página 268 se muestra una relación con algunos de los primeros polinomios de Legendre. A partir de éstos y de (22) tenemos

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 1\cdot x\,dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 1\cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_0^1 1\cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dx = -\frac{7}{16}$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_4(x)\,dx = \frac{9}{2}\int_0^1 1\cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,dx = 0$$

$$c_5 = \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_5(x)\,dx = \frac{11}{2}\int_0^1 1\cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,dx = \frac{11}{32}.$$

De modo que, $$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \cdots.$$ ≡

De manera similar a las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre son funciones incluidas en sistemas algebraicos de cómputo como *Maple* y *Mathematica*, por lo que cada uno de los coeficientes relacionados líneas antes puede encontrarse mediante la aplicación de integración de dichos programas. De hecho, utilizando un CAS, podemos encontrar que $c_6 = 0$ y $c_7 = -\frac{65}{256}$. La quinta suma parcial de la representación de la serie de Fourier-Legendre para la función f definida en el ejemplo 3 es entonces

$$S_5(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \frac{65}{256}P_7(x).$$

La gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$ se proporciona en la **FIGURA 10.6.2**.

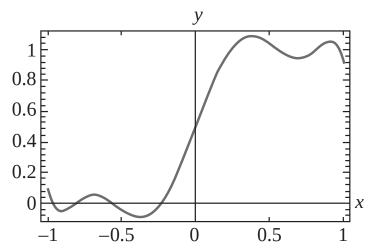


FIGURA 10.6.2 Suma parcial $S_5(x)$ de la serie de Fourier-Legendre del ejemplo 3

Forma alterna de la serie En algunas aplicaciones, la serie de Fourier-Legendre aparece de una forma alterna. Si establecemos $x = \cos\theta$, entonces $x = 1$ implica que $\theta = 0$, mientras $x = -1$ implica que $\theta = \pi$. Como $dx = -\text{sen}\,\theta\,d\theta$, (21) y (22) se convierten, respectivamente, en

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \tag{23}$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\theta)P_n(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta, \tag{24}$$

donde $f(\cos\theta)$ se ha reemplazado por $F(\theta)$.

10.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

10.6.1 Serie de Fourier-Bessel

En los problemas 1 y 2, utilice la tabla 5.3.1 de la sección 5.3.

1. Encuentre los primeros cuatro $\alpha_i > 0$ definidos por $J_1(3\alpha) = 0$.

2. Encuentre los primeros cuatro $\alpha_i \geq 0$ definidos por $J_0'(2\alpha) = 0$.

En los problemas del 3 al 6, desarrolle $f(x) = 1$, $0 < x < 2$, en la serie de Fourier-Bessel utilizando las funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la condición de frontera proporcionada.

3. $J_0(2\alpha) = 0$

4. $J_0'(2\alpha) = 0$

5. $J_0(2\alpha) + 2\alpha J_0'(2\alpha) = 0$

6. $J_0(2\alpha) + \alpha J_0'(2\alpha) = 0$

En los problemas del 7 al 10, desarrolle la función dada en una serie de Fourier-Bessel utilizando las funciones Bessel del mismo orden que en la condición de frontera indicada.

7. $f(x) = 5x$, $0 < x < 4$
$3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0$

8. $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$
$J_2(\alpha) = 0$

9. $f(x) = x^2$, $0 < x < 3$
$J_0'(3\alpha) = 0$
[*Sugerencia:* $t^3 = t^2 \cdot t$.]

10. $f(x) = 1 - x^2$, $0 < x < 1$
$J_0(\alpha) = 0$

Tareas para el laboratorio de cómputo

11. *a*) Utilice un CAS para graficar $y = 3J_1(x) + xJ_1'(x)$ en un intervalo de tal forma que se desplieguen las primeras cinco intercepciones positivas de x en la gráfica.

b) Utilice la capacidad de búsqueda de raíces de su CAS para aproximar las cinco primeras raíces positivas x_i de la ecuación $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$.

c) Use los datos obtenidos en el inciso *b*) para calcular los primeros cinco valores positivos de α_i que satisfagan

$$3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0.$$

(Consulte el problema 7.)

d) Si se le pide hacerlo, encuentre los primeros 10 valores positivos de α_i.

12. *a*) Use los valores de α_i obtenidos en el inciso *c*) del problema 11 y un CAS para aproximar los valores de los cinco primeros coeficientes de c_i en la serie de Fourier-Bessel que se obtuvo en el problema 7.

b) Mediante un CAS, grafique las sumas parciales $S_N(x)$, $N = 1, 2, 3, 4, 5$, de la serie de Fourier-Bessel del problema 7.

c) Si se le pide hacerlo, grafique la suma parcial $S_{10}(x)$ en $0 < x < 4$ y en $0 < x < 50$.

Problemas de análisis

13. Si se graficaran las sumas parciales del problema 12 en un intervalo simétrico tal que $(-30, 30)$, ¿las gráficas tendrían alguna simetría? Explique su respuesta.

14. *a*) Bosqueje, a mano, una gráfica de hacia dónde piensa usted que converge la serie de Fourier-Bessel del problema 3 en el intervalo $(-2, 2)$.

b) Bosqueje, a mano, una gráfica de hacia dónde piensa usted que converge la serie de Fourier-Bessel en el intervalo $(-4, 4)$ si los valores α_i del problema 7 estuvieran definidos por $3J_2(4\alpha) + 4\alpha J_2'(4\alpha) = 0$.

10.6.2 Serie de Fourier-Legendre

En los problemas 15 y 16, escriba nuevamente los primeros cinco términos diferentes de cero presentes en el desarrollo de Fourier-Legendre de la función dada. Si se le pide hacerlo, utilice un CAS como soporte en la evaluación de los coeficientes y para graficar la suma parcial $S_5(x)$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

16. $f(x) = e^x$, $-1 < x < 1$

17. Los primeros tres polinomios de Legendre son $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Si $x = \cos\theta$, entonces $P_0(\cos\theta) = 1$ y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Demuestre que $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$.

18. Utilice los resultados del problema 17 para calcular el desarrollo de Fourier-Legendre (23) de $F(\theta) = 1 - \cos 2\theta$.

19. El polinomio de Legendre $P_n(x)$ es una función par o impar, dependiendo de si n es par o impar. Demuestre que si f es una función par en el intervalo $(-1, 1)$, entonces (21) y (22) se convierten, respectivamente, en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}P_{2n}(x) \qquad (25)$$

$$c_{2n} = (4n + 1)\int_0^1 f(x)P_{2n}(x)\,dx. \qquad (26)$$

20. Demuestre que si f es una función impar en el intervalo $(-1, 1)$, entonces (21) y (22) se convierten, respectivamente, en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}P_{2n+1}(x) \qquad (27)$$

$$c_{2n+1} = (4n + 3)\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)\,dx. \qquad (28)$$

Las series (25) y (27) pueden utilizarse también cuando f se defina solamente en el intervalo $(0, 1)$. Ambas series representan a f en $(0, 1)$; sin embargo, en el intervalo $(-1, 0)$, (25) representa una extensión par, mientras que (27) representa una extensión impar. En los problemas 21 y 22, escriba nuevamente los primeros cuatro términos diferentes de cero en el desarrollo indicado de la función dada. ¿Qué función representa la serie en el intervalo $(-1, 1)$? Mediante un CAS, grafique la suma parcial $S_4(x)$.

21. $f(x) = x$, $0 < x < 1$; (25)

22. $f(x) = 1$, $0 < x < 1$; (27)

Problemas de análisis

23. ¿Por qué un desarrollo de Fourier-Legendre de una función polinómica definida en el intervalo $(-1, 1)$ es necesariamente una serie finita?

24. Aplique su conclusión del problema 23 para calcular la serie de Fourier-Legendre de $f(x) = x^2$. La serie de $f(x) = x^3$. *No* utilice las ecuaciones (21) y (22).

10 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas del 1 al 10, llene los espacios o responda verdadero o falso sin consultar el libro.

1. Las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^5$ son ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$. _____

2. El producto de una función impar f con una función impar g es una función _____.

3. Para desarrollar $f(x) = |x| + 1$, $-\pi < x < \pi$, en una serie trigonométrica apropiada utilizaríamos una serie _____.

4. $y = 0$ nunca es una función propia de un problema de Sturm-Liouville. _____

5. $\lambda = 0$ nunca es un valor propio de un problema de Sturm-Liouville _____.

6. Si la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

se desarrolla en una serie de Fourier, la serie convergirá hacia _____ en $x = -1$, hacia _____ en $x = 0$ y hacia _____ en $x = 1$.

7. Suponga que la función $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$, se desarrolla en una serie de Fourier, en una serie coseno y en una serie seno. En $x = 0$, la serie de Fourier convergirá hacia _____, la serie coseno convergirá hacia _____ y la serie seno convergirá hacia _____.

8. La función propia correspondiente para el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$$

para $\lambda = 25$ es _____.

9. El conjunto $\{P_{2n}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de polinomios de Legendre de grado par es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ _____.

10. El conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de polinomios de Legendre es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Así, para $n > 0$, $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx =$ _____.

11. Sin realizar ningún cálculo, explique por qué la serie coseno de $f(x) = \cos^2 x$, $0 < x < \pi$, es la serie finita

$$f(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

12. ***a***) Demuestre que el conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} x,\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2L} x,\ \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2L} x, \ldots \right\}$$

es ortogonal en el intervalo $(0, L)$.

b) Encuentre la norma de cada función del inciso *a*). Construya un conjunto ortonormal.

13. Desarrolle $f(x) = |x| - x$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier.

14. Desarrolle $f(x) = 2x^2 - 1$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier.

15. Desarrolle $f(x) = e^x$, $0 < x < 1$, en una serie coseno y en una serie seno.

16. En los problemas 13, 14 y 15, bosqueje la extensión periódica de f hacia donde converge cada serie.

17. Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$x^2 y'' + xy' + 9\lambda y = 0, \; y'(1) = 0, \; y(e) = 0.$$

18. Proporcione una relación de ortogonalidad a las funciones propias del problema 17.

19. **La ecuación diferencial de Chebyshev**

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

tiene una solución polinómica $y = T_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Especifique la función peso $p(x)$ y el intervalo donde es ortogonal el conjunto de polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}$. Escriba una relación de ortogonalidad.

20. Desarrolle la función periódica ilustrada en la **FIGURA 10.R.1** en una serie de Fourier apropiada.

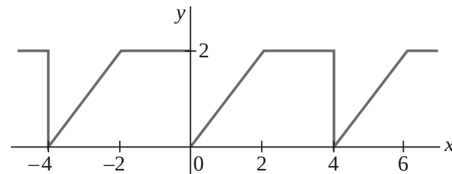


FIGURA 10.R.1 Gráfica para el problema 20

21. Desarrolle $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases}$ en una serie de Fourier-Bessel y utilice las funciones de Bessel de orden cero que satisfacen la condición de frontera $J_0(4\alpha) = 0$.

22. Desarrolle $f(x) = x^4$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier-Legendre.

11 PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS RECTANGULARES

Estructura del capítulo

En este capítulo, y en los siguientes, se enfatizan dos procedimientos utilizados a menudo para resolver problemas que involucran temperaturas y desplazamientos oscilatorios y potenciales. Tales problemas, llamados problemas de valores en la frontera (PVF), se pueden describir mediante **ecuaciones diferenciales parciales** (EDP) lineales de segundo orden relativamente sencillas. La finalidad de ambos procedimientos es encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial parcial reduciéndola a una o más ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Comenzamos con el método de **separación de variables** para las EDP lineales. La aplicación de este método a un problema de valores en la frontera nos lleva de manera natural a los importantes temas estudiados en el capítulo 4, como son los problemas de Sturm-Liouville, los valores propios, las funciones propias y el desarrollo de una función en una serie de funciones ortogonales.

11.1 Ecuaciones diferenciales parciales separables

Repaso Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se clasifican en *lineales* y *no lineales*. Así como en las EDO, en una EDP lineal la variable dependiente y sus derivadas parciales aparecen sólo en la primera potencia. En el presente capítulo, y en los subsecuentes, nuestro interés se centrará solamente en ecuaciones diferenciales parciales lineales.

Ecuación diferencial parcial lineal Si establecemos que u denota la variable dependiente y x y y las variables independientes, entonces la forma general de una **ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden** está dada por

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{1}$$

donde los coeficientes $A, B, C, \ldots, G$ son constantes o funciones de x y de y. Cuando $G(x, y) = 0$, se dice que la ecuación (1) es **homogénea**; de otra forma, es **no homogénea**. Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

son homogénea y no homogénea, respectivamente.

Solución de una ecuación diferencial parcial La **solución** de una ecuación diferencial parcial lineal (1) es una función $u(x, y)$ de dos variables independientes que tienen todas las derivadas parciales concurriendo en la ecuación y que la satisface en alguna región del plano xy.

No es nuestra intención analizar procedimientos para encontrar *soluciones generales* de las ecuaciones diferenciales parciales lineales. A menudo no solamente es difícil obtener la solución general de una EDP lineal de segundo orden, sino que una solución general con frecuencia tampoco resulta muy útil en las aplicaciones. Por lo tanto, nos enfocaremos en determinar *soluciones particulares* de algunas EDP lineales importantes, es decir, ecuaciones que aparecen en un gran número de aplicaciones.

Sólo nos interesan las soluciones particulares de las EDP.

Separación de variables A pesar de que existen varios métodos que pueden utilizarse para encontrar soluciones particulares de una EDP lineal, con el **método de separación de variables** nuestro objetivo es encontrar una solución particular en forma del *producto* de una función de x y una función de y,

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Mediante esta suposición, *a veces* es factible reducir una EDP lineal de dos variables en dos EDO. Con este objetivo en mente, podemos observar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

donde las primas expresan la diferenciación ordinaria.

EJEMPLO 1 Uso de la separación de variables

Encuentre las soluciones producto de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Solución Al sustituir $u(x, y) = X(x)Y(y)$ en la ecuación diferencial parcial obtenemos

$$X''Y = 4XY'.$$

Después de dividir ambos miembros de la ecuación entre $4XY$, separamos las variables:

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Como el miembro izquierdo de la última ecuación es independiente de y y es igual al miembro derecho, que es independiente de x, concluimos que ambos miembros de la ecuación son independientes de x y de y. En otras palabras, cada miembro de la ecuación

debe ser constante. Para fines prácticos, resulta conveniente escribir esta verdadera **constante de separación** como $-\lambda$. A partir de las dos igualdades,

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

obtenemos las dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias

$$X'' + 4\lambda X = 0 \quad \text{y} \quad Y' + \lambda Y = 0. \tag{2}$$

Puede consultar el ejemplo 2 de la sección 3.9 y el ejemplo 1 de la sección 10.5.

En los tres casos para λ: cero, negativo o positivo; esto es, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, las EDO en (2) son, respectivamente,

$$X'' = 0 \quad \text{y} \quad Y' = 0, \tag{3}$$

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' - \alpha^2 Y = 0, \tag{4}$$

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' + \alpha^2 Y = 0. \tag{5}$$

Caso I ($\lambda = 0$): En (3), las ecuaciones diferenciales pueden resolverse por integración. Las soluciones son $X = c_1 + c_2x$ y $Y = c_3$. Por lo tanto, una solución producto particular de la EDP dada es

$$u = XY = (c_1 + c_2x)c_3 = A_1 + B_1x, \tag{6}$$

donde reemplazamos c_1c_3 y c_2c_3 por A_1 y B_1, respectivamente.

Caso II ($\lambda = -\alpha^2$): En (4), las soluciones generales de las ED son

$$X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x \quad \text{y} \quad Y = c_6 e^{\alpha^2 y},$$

respectivamente. Por lo tanto, otra solución producto particular de la EDP es

$$u = XY = (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x)c_6 e^{\alpha^2 y}$$

o bien
$$u = A_2 e^{\alpha^2 y} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 y} \operatorname{senh} 2\alpha x, \tag{7}$$

donde $A_2 = c_4c_6$ y $B_2 = c_5c_6$.

Caso III ($\lambda = \alpha^2$): Por último, en (5) las soluciones generales de las ED son

$$X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \operatorname{sen} 2\alpha x \quad \text{y} \quad Y = c_9 e^{-\alpha^2 y},$$

respectivamente. Estos resultados, sin embargo, proporcionan otra solución particular

$$u = A_3 e^{-\alpha^2 y} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 y} \operatorname{sen} 2\alpha x, \tag{8}$$

donde $A_3 = c_7c_9$ y $B_3 = c_8c_9$. ≡

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que (6), (7) y (8) satisfacen la ecuación diferencial parcial dada $u_{xx} = 4u_y$. Consulte el problema 29 de los ejercicios 11.1.

La separación de variables no es un método general para encontrar soluciones particulares; algunas ecuaciones diferenciales parciales lineales simplemente no se pueden separar. Usted deberá comprobar que el supuesto $u = XY$ no lleva a una solución para $\partial^2u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = x$.

Principio de superposición El teorema siguiente es similar al 3.1.2, y se conoce como el **principio de superposición**.

Teorema 11.1.1 Principio de superposición

Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son las soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes, es también una solución.

En lo que resta del capítulo, supondremos que siempre que tengamos un conjunto infinito $u_1, u_2, u_3, \ldots$ de soluciones de una ecuación lineal homogénea, podremos construir otra solución u formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

donde las c_k, $k = 1, 2, \ldots$, son constantes.

Clasificación de las ecuaciones Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes puede clasificarse como uno de tres tipos. Esta clasificación depende solamente de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Desde luego, suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B y C es diferente de cero.

Definición 11.1.1 Clasificación de las ecuaciones

La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, se dice que es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

EJEMPLO 2 Clasificación de EDP lineales de segundo orden

Clasifique las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ***b***) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ***c***) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Solución ***a***) Al volver a escribir la ecuación dada como

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

podemos identificar que $A = 3$, $B = 0$ y $C = 0$. Puesto que $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica.

b) Al volver a escribir la ecuación como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

podemos observar que $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Si $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$, la ecuación es elíptica. ≡

Una explicación más detallada de por qué desearíamos clasificar una ecuación diferencial parcial de segundo orden está más allá del alcance de este libro. Sin embargo, la respuesta reside en el hecho de que deseamos resolver ecuaciones diferenciales parciales sujetas a ciertas condiciones alternas conocidas como condiciones iniciales y de frontera. Los tipos apropiados de condiciones alternas para una determinada ecuación están en función de si la ecuación es hiperbólica, parabólica o elíptica.

11.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas del 1 al 16, mediante la separación de variables, encuentre, si es posible, las soluciones producto para la ecuación diferencial parcial que se proporciona.

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

2. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

3. $u_x + u_y = u$

4. $u_x = u_y + u$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y}$

6. $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

8. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0$

9. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \frac{\partial u}{\partial t}, \ k > 0$

10. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ k > 0$

11. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

12. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial t}, \ k > 0$

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial t}, \ k > 0$

14. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

15. $u_{xx} + u_{yy} = u$

16. $a^2 u_{xx} - g = u_{tt}$, g es una constante

En los problemas del 17 al 26, clasifique la ecuación diferencial parcial que se proporciona en hiperbólica, parabólica o elíptica.

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

18. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

19. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

21. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

22. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

25. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

26. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ k > 0$

En los problemas 27 y 28, demuestre que la ecuación diferencial parcial que se proporciona tiene la solución producto indicada.

27. $k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t};$

$u = e^{-k\alpha^2 t}(c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r))$

28. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0;$

$u = (c_1 \cos \alpha\theta + c_2 \operatorname{sen} \alpha\theta)(c_3 r^{\alpha} + c_4 r^{-\alpha})$

29. Compruebe que cada producto $u = XY$ incluido en (6), (7) y (8) satisface las EDP de segundo orden del ejemplo 1.

30. La definición 11.1.1 es una generalización de las EDP lineales con coeficientes que son funciones de x y y. Determine las regiones del plano xy para las que la ecuación

$$(xy + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + 2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy^2 u = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica.

Problemas de análisis

En los problemas 31 y 32, vea si pueden encontrarse las soluciones producto $u = X(x)Y(y)$ para las ecuaciones diferenciales parciales que se proporcionan. [*Sugerencia:* Utilice el principio de superposición.]

31. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$

32. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

11.2 Ecuaciones clásicas y problemas de valores en la frontera

Introducción En lo que resta de este capítulo nos enfocaremos a encontrar las soluciones producto de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \tag{1}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

o ligeras variaciones de estas ecuaciones. Dichas ecuaciones clásicas de física-matemáticas se conocen como **ecuación unidimensional de calor**, **ecuación unidimensional de onda** y **ecuación bidimensional de Laplace**, respectivamente. "Unidimensional" se refiere a que x expresa una dimensión espacial mientras t representa el tiempo; en (3), "bidimensional" significa que x y y son dimensiones espaciales. La ecuación de Laplace se abrevia como $\nabla^2 u = 0$, donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

se llama **laplaciano bidimensional** de la función u. En tres dimensiones, el **laplaciano** de u es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Al comparar las ecuaciones de la (1) a la (3) con la EDP lineal de segundo orden proporcionada en el teorema 11.1.1, donde t hace las veces de y, podemos observar que la ecuación de calor (1) es parabólica, la ecuación de onda (2) es hiperbólica y la ecuación de Laplace (3) es elíptica. En el capítulo 14, esta clasificación resulta particularmente importante.

Ecuación de calor La ecuación (1) se presenta en la teoría del flujo de calor, esto es, la transferencia de calor por conducción en una varilla o un alambre delgado. La función $u(x, t)$ es la temperatura. Los problemas acerca de vibraciones mecánicas a menudo llevan a la ecuación de onda (2). Para efectos del presente análisis, una solución $u(x, t)$ de (2) representará el desplazamiento de una cuerda idealizada. Por último, una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (3) puede interpretarse como la distribución de temperatura de estado estable (es decir, independiente del tiempo) en una placa delgada de dos dimensiones.

Aunque tenemos que hacer muchas suposiciones de simplificación, vale la pena observar cómo surgen ecuaciones como la (1) y la (2).

Suponga que una varilla circular delgada de longitud L tiene área transversal A y coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Véase la **FIGURA 11.2.1**. Supongamos que:

- Dentro de la varilla, el flujo de calor tiene lugar sólo en la dirección x.
- La superficie lateral, o curva, de la varilla se encuentra aislada; esto es, no escapa calor de su superficie.
- No se está generando calor dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea; esto es, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El calor específico γ y la conductividad térmica K del material de la varilla son constantes.

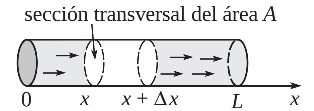


FIGURA 11.2.1 Flujo de calor unidimensional

Para deducir la ecuación diferencial parcial que se satisface mediante la temperatura $u(x, t)$, necesitamos dos leyes empíricas de conducción del calor:

i) *En un elemento de masa m, la cantidad de calor Q es*

$$Q = \gamma m u, \tag{4}$$

donde u representa la temperatura del elemento.

ii) *La velocidad del flujo de calor Q_t a través de la sección transversal que se indica en la figura 11.2.1 es proporcional al área A de la sección transversal y a la derivada parcial de la temperatura respecto a x:*

$$Q_t = -K A u_x. \tag{5}$$

Como el calor fluye en la dirección que desciende la temperatura, el signo menos se utiliza en (5) para asegurar que Q_t sea positiva para $u_x < 0$ (flujo de calor hacia la derecha) y negativa para $u_x > 0$ (flujo de calor hacia la izquierda). Si la sección circular de la varilla ilustrada en la **FIGURA 11.2.1** entre x y $x + \Delta x$ es muy delgada, entonces $u(x, t)$ puede considerarse como la temperatura aproximada en cada punto del intervalo. Ahora la masa de la sección circular es $m = \rho(A\,\Delta x)$, por ello, a partir de (4), puede deducirse que la cantidad de calor en tal masa es,

$$Q = \gamma \rho A\,\Delta x\, u. \tag{6}$$

Además, cuando fluye calor en la dirección positiva de x, a partir de (5) observamos que el calor se incrementa en la sección transversal a una velocidad neta de

$$-K A u_x(x, t) - [-K A u_x(x + \Delta x, t)] = K A[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \tag{7}$$

Diferenciamos (6) respecto a t y observamos que la velocidad neta está dada también por

$$Q_t = \gamma\rho A\,\Delta x\,u_t. \tag{8}$$

Al igualar (7) y (8) obtenemos

$$\frac{K}{\gamma\rho}\,\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = u_t. \tag{9}$$

Calculamos el límite de (9) como $\Delta x \to 0$ para finalmente obtener (1) en la forma*

$$\frac{K}{\gamma\rho}\,u_{xx} = u_t.$$

Es muy común establecer $k = K/\gamma\rho$ y llamar a esta constante positiva **difusividad térmica**.

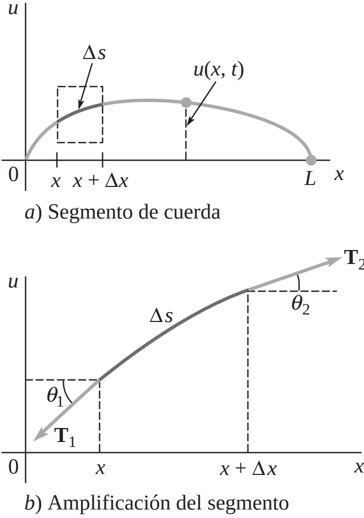


FIGURA 11.2.2 Cuerda tensada entre dos puntos del eje x

■ **Ecuación de onda** Considere una cuerda de longitud L, como la cuerda de una guitarra, tensada entre dos puntos localizados en el eje x, digamos, $x = 0$ y $x = L$. Cuando la cuerda comienza a vibrar, suponga que el movimiento tiene lugar en el plano xy de tal manera que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x (vibraciones transversales). Como se muestra en la **FIGURA 11.2.2*a***), establecemos que $u(x, t)$ exprese el desplazamiento vertical de cualquier punto de la cuerda medido a partir del eje x para $t > 0$. Además suponemos que:

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda es homogénea; esto es, su masa por unidad de longitud ρ es constante.
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.
- La pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos.
- La tensión $\mathbf{T}$ actúa en dirección tangente a la cuerda y su magnitud T es igual en todos los puntos.
- La tensión es grande en comparación con la fuerza de gravedad.
- No actúan otras fuerzas externas sobre la cuerda.

Ahora, en la figura 11.2.2*b*), las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son tangentes en los extremos de la curva en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para valores pequeños de θ_1 y θ_2, la fuerza vertical neta que actúa sobre el elemento correspondiente Δs de la cuerda es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} T \operatorname{sen}\theta_2 - T \operatorname{sen}\theta_1 &\approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 \\ &= T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)],^{\dagger} \end{aligned}$$

donde $T = |\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$. Ahora $\rho\,\Delta s \approx \rho\,\Delta x$ es la masa de la cuerda en $[x, x + \Delta x]$, por lo que la segunda ley de Newton nos da

$$T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)] = \rho\,\Delta x\,u_{tt}$$

o bien

$$\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\,u_{tt}.$$

Si el límite se toma como $\Delta x \to 0$, la última ecuación se convierte en $u_{xx} = (\rho/T)u_{tt}$. Lo anterior es, desde luego, la ecuación (2) con $a^2 = T/\rho$.

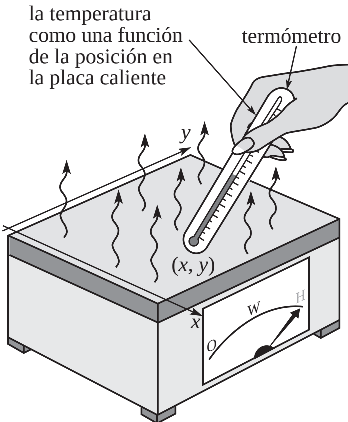


FIGURA 11.2.3 Temperaturas de estado estable en una placa rectangular

■ **Ecuación de Laplace** Aunque no lo demostraremos, la ecuación de Laplace en dos y tres dimensiones se presenta en problemas independientes del tiempo que involucran potenciales como el electrostático, el gravitacional y la velocidad en mecánica de fluidos. Además, la solución de la ecuación de Laplace también puede interpretarse como la distribución de temperatura de estado estable. Como ilustra la **FIGURA 11.2.3**, una solución $u(x, y)$ de (3) podría representar la temperatura que varía de un punto a otro (aunque no con el tiempo) de una placa rectangular.

Con frecuencia deseamos encontrar soluciones de ecuaciones como (1), (2) y (3) que satisfagan algunas condiciones adicionales.

---

* Recuerde, con base en el cálculo, que $u_{xx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}$.

† $\tan\theta_2 = u_x(x+\Delta x, t)$ y $\tan\theta_1 = u_x(x, t)$ son expresiones equivalentes para la pendiente.

■ **Condiciones iniciales** Puesto que las soluciones de (1) y (2) dependen del tiempo t, es posible establecer lo que pasa en $t = 0$; esto es, podemos proporcionar **condiciones iniciales (CI)**. Si $f(x)$ expresa la distribución inicial de temperatura a través de la varilla en la **FIGURA 11.2.1**, entonces una solución $u(x, t)$ de (1) debe satisfacer la condición inicial única $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$. Por otro lado, para una cuerda vibratoria, podemos especificar su desplazamiento inicial (o forma) $f(x)$ así como su velocidad inicial $g(x)$. En términos matemáticos, estamos buscando una función $u(x, t)$ que satisfaga (2) en las dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{10}$$

Por ejemplo, la cuerda podría estarse pulsando, como en la **FIGURA 11.2.4**, y liberarse del reposo ($g(x) = 0$).

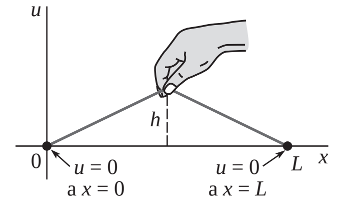


FIGURA 11.2.4 Cuerda pulsada

■ **Condiciones de frontera** La cuerda de la figura 11.2.4 está asegurada al eje x en $x = 0$ y $x = L$ en todo momento. Interpretamos lo anterior mediante las dos **condiciones de frontera (CF)**:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Observe que en este contexto la función f es continua en (10) y, en consecuencia, $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. En general, existen tres tipos de condiciones de frontera asociados con las ecuaciones (1), (2) y (3). En una frontera, podemos especificar los valores de *uno* de los siguientes formatos:

$$i)\ u, \qquad ii)\ \frac{\partial u}{\partial n}, \qquad \text{o} \qquad iii)\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu, \quad h \text{ es una constante.}$$

Aquí $\partial u/\partial n$ expresa la derivada normal de u (la derivada direccional de u en la dirección perpendicular a la frontera). Una condición de frontera del primer tipo *i*) se llama **condición de Dirichlet**; una condición de frontera del segundo tipo *ii*) es la **condición de Neumann**, y una condición de frontera del tercer tipo *iii*) se conoce como **condición de Robin**. Por ejemplo, para $t > 0$, una condición típica en el extremo derecho de la varilla de la figura 11.2.1 puede ser,

$$i)' \quad u(L, t) = u_0, \quad u_0 \text{ es una constante,}$$

$$ii)' \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad \text{o}$$

$$iii)' \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -h(u(L, t) - u_m), \quad h > 0 \text{ y } u_m \text{ son constantes.}$$

La condición *i*)′ simplemente establece que la frontera $x = L$ se conserva de alguna manera a *temperatura* constante u_0 en todo tiempo $t > 0$. La condición *ii*)′ indica que la frontera $x = L$ está *aislada*. A partir de la ley empírica para la transferencia de calor, el flujo de calor a través de una frontera (esto es, la cantidad de calor por unidad de área por unidad de tiempo que se transfiere a través de la frontera) es proporcional al valor de la derivada normal $\partial u/\partial n$ de la temperatura u. Por lo tanto, cuando la frontera $x = L$ está aislada térmicamente, no existe ningún flujo de calor desde y hacia la varilla, por lo que

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Podemos interpretar *iii*)′ como el *calor que se pierde* en el extremo derecho de la varilla por estar en contacto con un medio, como aire o agua, que se encuentra a temperatura constante. A partir de la ley de Newton para el enfriamiento, sabemos que el flujo de calor hacia fuera de la varilla es proporcional a la diferencia entre la temperatura $u(L, t)$ en la frontera y la temperatura u_m del medio circundante. Observemos que si existe pérdida de calor desde el extremo izquierdo de la varilla, la condición de frontera es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(u(0, t) - u_m).$$

El cambio de signo algebraico es consistente con el supuesto de que la varilla se encuentra a una temperatura más elevada que el medio circundante en los extremos, por lo que $u(0, t) > u_m$ y $u(L, t) > u_m$. En $x = 0$ y $x = L$, las pendientes $u_x(0, t)$ y $u_x(L, t)$ deben ser positiva y negativa, respectivamente.

Desde luego, en los extremos de la varilla podemos especificar diferentes condiciones al mismo tiempo. Por ejemplo, podríamos tener

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{y} \qquad u(L, t) = u_0, \quad t > 0.$$

Observemos que en *i*)′ la condición de frontera es homogénea si $u_0 = 0$; cuando $u_0 \neq 0$, la condición de frontera es no homogénea. La condición de frontera *ii*)′ es homogénea; *iii*)′ es homogénea si $u_m = 0$ y no homogénea si $u_m \neq 0$.

Problemas de valores en la frontera Problemas tales como

$$\begin{aligned}
&\textit{Resuelva}: && a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&\textit{Sujeta a}: && \text{(BC)}\ \ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\
& && \text{(IC)}\ \ u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L
\end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned}
&\textit{Resuelva}: && \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\
&\textit{Sujeta a}: && \text{(BC)} \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

se llaman **problemas de valores en la frontera**. Los problemas (11) y (12) están clasificados como problemas de valores en la frontera **homogéneos**, porque las ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera son homogéneas.

Variaciones Las ecuaciones diferenciales parciales (1), (2) y (3) deben modificarse con el fin de tomar en consideración las influencias internas y externas que actúan en el sistema físico. Formas más generales de las ecuaciones unidimensionales de calor y de onda son, respectivamente,

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_x) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

y

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Por ejemplo, si existe transferencia de calor desde la superficie lateral de una varilla hacia un medio circundante que se mantiene a temperatura constante u_m, entonces la ecuación de calor (13) es

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde *h* es una constante. En la ecuación (14), la función *F* podría representar las diferentes fuerzas que actúan en la cuerda. Por ejemplo, cuando las fuerzas externas de amortiguamiento y restablecimiento elástico se toman en cuenta, (14) toma la forma

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{\overset{\text{fuerza externa}}{f(x, t)} - \overset{\text{amortiguamiento}}{c\frac{\partial u}{\partial t}} - \overset{\text{fuerza de restablecimiento}}{ku}}_{F(x, t, u, u_t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Comentarios

El análisis de una amplia gama de fenómenos genera los modelos matemáticos (1), (2) o (3) o sus generalizaciones, las cuales involucran una mayor cantidad de variables espaciales. Por ejemplo, a la ecuación (1) a veces se le llama **ecuación de difusión** porque la difusión de las sustancias disueltas en una solución es análoga al flujo de calor en un sólido. La función $c(x, t)$

que satisface la ecuación diferencial parcial representa, en este caso, la concentración de la sustancia disuelta. De modo similar, la ecuación (2) y su generalización (15) aparecen en el análisis del flujo de electricidad en un cable largo o en una línea de transmisión. En este ambiente, la ecuación (2) se conoce como **ecuación telegráfica**. Es posible demostrar que, bajo ciertas suposiciones, la corriente $i(x, t)$ y el voltaje $v(x, t)$ presentes en la línea satisfacen dos ecuaciones diferenciales parciales idénticas a (2) (o a (15)). La ecuación de onda (2) aparece también en la mecánica de fluidos, en la acústica y en la elasticidad. La ecuación de Laplace (3) se puede observar en la determinación del desplazamiento estático de membranas.

11.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas del 1 al 6, una varilla de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ en el eje x. Establezca el problema de valores en la frontera para la temperatura $u(x, t)$.

1. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de cero y el derecho está aislado. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
2. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura u_0 y el derecho tiene la temperatura u_1. La temperatura inicial es de cero en todo el proceso.
3. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de 100°, y se presenta transferencia de calor desde el extremo derecho hacia el medio circundante que tiene temperatura de cero. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
4. Hay transferencia de calor desde el extremo izquierdo hacia el medio circundante, que tiene temperatura de 20°, y el extremo derecho está aislado. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
5. El extremo izquierdo está a una temperatura de sen$(\pi t/L)$, el extremo derecho se mantiene en cero, y existe transferencia de calor desde la superficie lateral de la varilla hacia el medio circundante, que se mantiene a temperatura de cero. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
6. Los extremos se encuentran aislados y existe transferencia de calor desde la superficie lateral de la varilla hacia el medio circundante que se mantiene a temperatura de 50°. En todo el proceso, la temperatura inicial es de 100°.

En los problemas del 7 al 10, una cuerda de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ sobre el eje x. Establezca el problema de valores en la frontera para el desplazamiento $u(x, t)$.

7. Los extremos están anclados al eje x. La cuerda se libera a partir del reposo desde el desplazamiento inicial $x(L - x)$.
8. Los extremos están anclados al eje x. Al inicio la cuerda no se ha desplazado, pero tiene velocidad inicial de sen$(\pi x/L)$.
9. El extremo izquierdo está asegurado al eje x, sin embargo, el derecho se mueve transversalmente de acuerdo con sen πt. La cuerda se libera a partir del reposo desde el desplazamiento inicial $f(x)$. Para $t > 0$, las vibraciones transversales son amortiguadas con una fuerza proporcional a la velocidad instantánea.
10. Los extremos están anclados al eje x y la cuerda se encuentra inicialmente en reposo sobre este eje. Una fuerza vertical externa proporcional a la distancia horizontal a partir del extremo izquierdo actúa sobre la cuerda en $t > 0$.

En los ejercicios 11 y 12, establezca el problema de valores en la frontera para la temperatura constante $u(x, y)$.

11. Una placa delgada rectangular coincide en el plano xy con la región definida por $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$. El extremo izquierdo y la parte inferior de la placa están aislados. La parte superior de la placa se mantiene a temperatura cero y su extremo derecho tiene temperatura constante $f(y)$.
12. Una placa semiinfinita coincide con la región definida por $0 \le x \le \pi$, $y \ge 0$. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de e^{-y}, y el derecho tiene temperatura constante de 100° para $0 < y \le 1$ y temperatura de cero para $y > 1$. La parte inferior de la placa se mantiene a temperatura $f(x)$.

11.3 La ecuación de calor

Introducción Considere una varilla delgada de longitud L con temperatura inicial $f(x)$ en toda ella y cuyos extremos se mantienen a una temperatura de cero en todo tiempo $t > 0$. Si la varilla ilustrada en la **FIGURA 11.3.1** satisface los supuestos, entonces su temperatura $u(x, t)$ se determina mediante el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3}$$

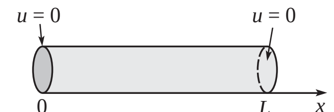


FIGURA 11.3.1 Encontrar la temperatura u presente en una varilla finita

En el análisis que se realizará a continuación, demostraremos cómo resolver estos problemas de valores en la frontera utilizando el método de separación de variables de la sección 11.1.

■ **Solución del problema de valores en la frontera** Se utiliza el producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ y $-\lambda$ como la constante de separación para llegar a

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \tag{4}$$

y

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$

$$T' + k\lambda T = 0. \tag{6}$$

Ahora las condiciones de frontera dadas en (2) se convierten en $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ y $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$. Puesto que las últimas igualdades deben ser válidas para todo tiempo t, debemos tener $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Estas condiciones de frontera homogéneas, junto con la ecuación diferencial ordinaria homogénea (5), constituyen un problema habitual de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{7}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se estudió en el ejemplo 2 de la sección 3.9 y en la sección 10.5. En ese ejemplo consideramos tres posibles casos para el parámetro λ: cero, negativo y positivo. Las soluciones generales correspondientes de las ecuaciones diferenciales son

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0 \tag{8}$$

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x, \quad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{9}$$

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x \qquad \lambda = \alpha^2 > 0 \tag{10}$$

Recuerde que al aplicar las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ a las ecuaciones (8) y (9), estas soluciones nos dan solamente $X(x) = 0$, por ello nos quedamos con el resultado $u = 0$. Aplicando la primera condición de frontera $X(0) = 0$ a la solución dada en (10), obtenemos $c_1 = 0$. Por lo tanto, $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La segunda condición de frontera $X(L) = 0$ implica ahora

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0. \tag{11}$$

Si $c_2 = 0$, entonces $X = 0$, por lo que $u = 0$. Sin embargo, la ecuación (11) puede satisfacerse para $c_2 \neq 0$ cuando $\operatorname{sen} \alpha L = 0$. Esta última ecuación implica que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. En consecuencia, (7) tiene soluciones no triviales cuando $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Los valores λ_n y las soluciones correspondientes

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

son los **valores propios** y las **funciones propias**, respectivamente, del problema planteado en (7).

La solución general de (6) es $T = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$, por lo que

$$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{13}$$

donde hemos reemplazado la constante $c_2 c_3$ por A_n. Los productos $u_n(x, t)$ dados en (13) satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) tanto como las condiciones de frontera (2) para cada valor del entero positivo n. Sin embargo, con la finalidad de que las funciones de (13) satisfagan la condición inicial (3), podríamos seleccionar el coeficiente A_n de tal manera que

$$u_n(x, 0) = f(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{14}$$

En general, no esperaríamos que la condición (14) quedara satisfecha mediante una selección arbitraria, pero razonable, de f. Por lo tanto, estamos obligados a admitir que $u_n(x, t)$ *no es una solución del problema dado en* (1), (2) y (3). Ahora, mediante el principio de superposición, la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{15}$$

también debe satisfacer, aunque formalmente, la ecuación (1) y las condiciones dadas en (2). Si sustituimos $t = 0$ en (15), entonces

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Se puede reconocer que esta última expresión es la expansión de medio intervalo de f en una serie seno. Si hacemos la identificación $A_n = b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, a partir de la ecuación (5) dada en la sección 10.3 se deduce que,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx. \tag{16}$$

Concluimos que una solución al problema de valores en la frontera descrito en (1), (2) y (3) está dada por la serie infinita

$$u(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx\right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{17}$$

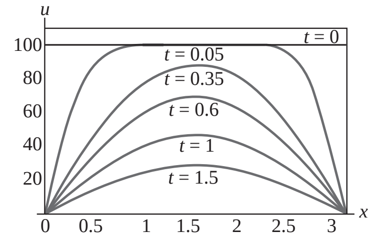
Para el caso especial en que la temperatura inicial es $u(x, 0) = 100$, $L = \pi$ y $k = 1$, el lector debe comprobar que los coeficientes de (16) estén dados por

$$A_n = \frac{200}{\pi}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n}\right],$$

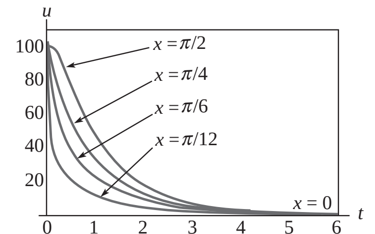
y que la serie (17) sea

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n}\right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx. \tag{18}$$

Uso de la computadora La solución u encontrada para (18) es una función de dos variables y, como tal, en el espacio tridimensional su gráfica es una superficie. Pudimos haber utilizado la aplicación gráfica 3D de un sistema algebraico de cómputo para aproximar esta superficie mediante la graficación de las sumas parciales $S_n(x, t)$ sobre una región rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$. De manera alterna, con ayuda de la aplicación gráfica 2D de un CAS, graficamos la solución $u(x, t)$ en el intervalo x $[0, \pi]$ para valores incrementales de tiempo t. Véase la **FIGURA 11.3.2*a***). En la figura 11.3.2*b*), la solución $u(x, t)$ se grafica en el intervalo t $[0, 6]$ para valores incrementales de x ($x = 0$ es el extremo izquierdo y $x = \pi/2$ es el punto medio de la varilla de longitud $L = \pi$). Ambos conjuntos de gráficas confirman lo que es evidente en (18), a saber: $u(x, t) \to 0$ a medida que $t \to \infty$.



a) $u(x, t)$ graficada como una función de x para diversos tiempos específicos



b) $u(x, t)$ graficada como una función de t para diversos tiempos específicos

FIGURA 11.3.2 Gráficas obtenidas mediante sumas parciales de (18)

11.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas. Suponga una varilla de longitud L.

1. $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}$$

2. $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$
$u(x, 0) = x(L - x)$

3. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ en toda su longitud y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

4. Resuelva el problema 3 si $L = 2$ y

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

5. Suponga que se libera calor desde la superficie lateral de una varilla delgada de longitud L hacia el medio circundante que tiene temperatura de cero. Si aplicamos la ley lineal de transferencia de calor, entonces la ecuación de calor toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde h es una constante. Determine la temperatura $u(x, t)$ **si** la temperatura inicial es $f(x)$ y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados. Véase la **FIGURA 11.3.3**.

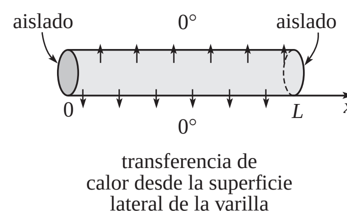


FIGURA 11.3.3 Varilla del problema 5

6. Resuelva el problema 5 si los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a una temperatura de cero.

7. Un alambre delgado que coincide con el eje x en el intervalo $[-L, L]$ se dobla en forma de círculo de manera que se unen los extremos $x = -L$ y $x = L$. En ciertas condiciones la temperatura $u(x, t)$ en el alambre satisface el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ -L < x < L, \ t > 0,$$

$$u(-L, t) = u(L, t), \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-L} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \ -L < x < L.$$

Encuentre la temperatura $u(x, t)$.

8. Determine la temperatura $u(x, t)$ para el problema de valores en la frontera (1)-(3) cuando $L = 1$ y $f(x) = 100 \text{ sen } 6\pi x$. [*Sugerencia:* Observe con atención (13) y (14).]

Tareas para el laboratorio de cómputo

9. ***a***) Resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a,

$$u(0, t) = 0, \quad u(100, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100. \end{cases}$$

b) Utilice la aplicación gráfica 3D (tridimensional) de su CAS para graficar la suma parcial $S_5(x, t)$ que consiste en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución dada en el inciso *a*) para $0 \le x \le 100$, $0 \le t \le 200$. Suponga que $k = 1.6352$. Trate con diferentes perspectivas de vistas tridimensionales de la superficie (en *Mathematica*, es la opción llamada **ViewPoint**).

Problemas de análisis

10. En la figura 11.3.2*b*) se tienen las gráficas de $u(x, t)$ en el intervalo [0, 6] para $x = 0$, $x = \pi/12$, $x = \pi/6$, $x = \pi/4$ y $x = \pi/2$. Describa o bosqueje las gráficas de $u(x, t)$ en el mismo intervalo pero para los valores $x = 3\pi/4$, $x = 5\pi/6$, $x = 11\pi/12$ y $x = \pi$.

11.4 La ecuación de onda

Introducción Ahora estamos en una posición favorable para resolver el problema de valores en la frontera (11) analizado en la sección 11.2. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda de longitud L que se encuentra vibrando libremente en el plano vertical ilustrado en la figura 11.2.2*a*) está determinado por

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{3}$$

Solución del problema de valores en la frontera Con la suposición común de que $u(x, t) = X(x)T(t)$, mediante la separación de variables en (1) obtenemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

por lo que

$$X'' + \lambda T = 0 \tag{4}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Tal como en la sección 11.3, las condiciones de frontera (2) se traducen en $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. La ecuación diferencial ordinaria dada en (4) junto con estas condiciones de frontera forman el problema habitual de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{6}$$

De las tres posibilidades usuales del parámetro λ: $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, solamente la última nos lleva a soluciones no triviales. La solución general de (4), correspondiente a $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, es

$$X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \text{ sen } \alpha x.$$

$X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ indican que $c_1 = 0$ y c_2 sen $\alpha L = 0$. La última ecuación implica de nuevo que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$. Los valores propios y las correspondientes funciones propias de (6) son $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{L} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. La solución general de la ecuación de segundo orden (5) es entonces

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t.$$

Al volver a escribir c_2c_3 como A_n y c_2c_4 como B_n, las soluciones que satisfacen tanto a la ecuación de onda (1) como a las condiciones de frontera (2) son

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

y

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{8}$$

En (8), se fija el valor $t = 0$ y utilizando la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Puesto que la última serie es un desarrollo de medio intervalo de f en una serie seno, podemos escribir $A_n = b_n$:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{9}$$

Para determinar B_n, diferenciamos (8) respecto a t y, después, fijamos el valor $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Con la finalidad de que esta última serie sea el desarrollo en serie de senos de medio intervalo de la velocidad inicial g presente en el intervalo, el coeficiente *total* $B_n n\pi a/L$ debe estar dado mediante la forma b_n en la expresión (5) de la sección 10.3, esto es:

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

a partir de la cual obtenemos

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{10}$$

La solución del problema de valores en la frontera de la ecuación (1) a la (3) consta de la serie (8) con los coeficientes A_n y B_n definidos en las ecuaciones (9) y (10), respectivamente.

Podemos observar que, en el momento que se libera la cuerda a partir del *reposo*, entonces $g(x) = 0$ para toda x en el intervalo $[0, L]$ y, en consecuencia, $B_n = 0$.

Cuerda pulsada Un caso especial del problema de valores en la frontera planteado en (1), (2) y (3) es un modelo de **cuerda pulsada**. Podemos observar el movimiento de la cuerda graficando la solución o el desplazamiento $u(x, t)$ para valores incrementales de tiempo t y utilizando la herramienta de animación que proporciona un CAS. En la **FIGURA 11.4.1** se proporcionan algunos de los cuadros de una película generados de esta forma. Se le pide al lector emular los resultados que se proporcionan en la figura mediante la graficación de una secuencia de sumas parciales de (8). Consulte los problemas 7 y 21 en los ejercicios 11.4.

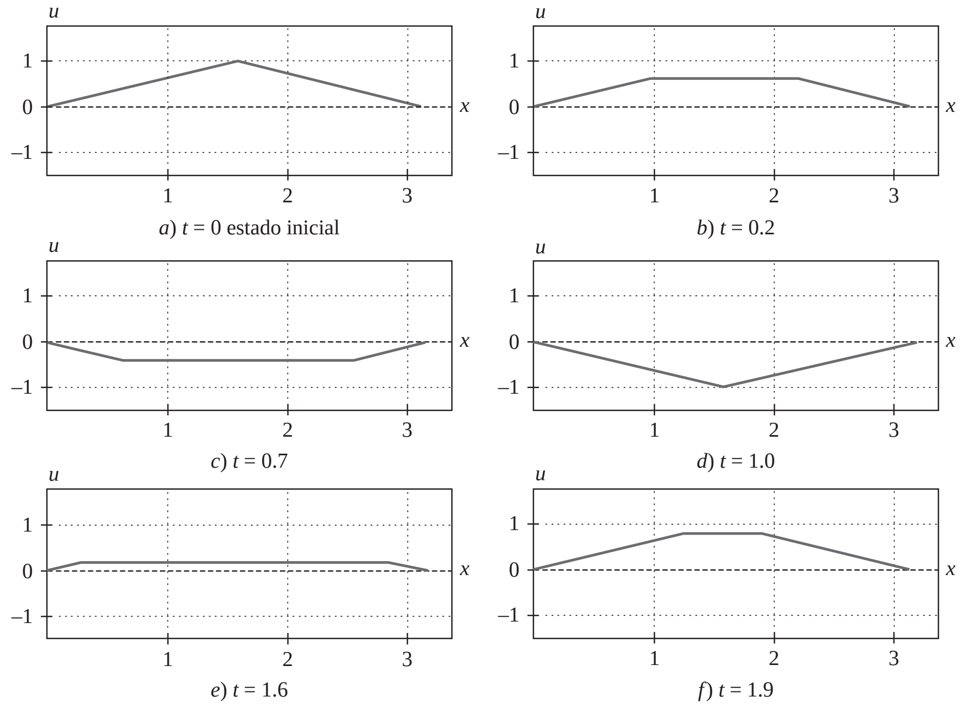
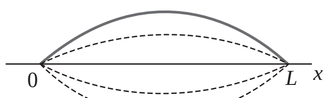
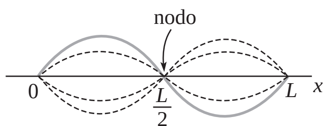


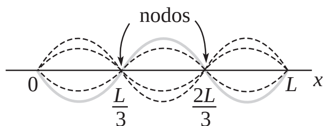
FIGURA 11.4.1 Cuadros de una película de cuerda pulsada



a) Primera onda estacionaria



b) Segunda onda estacionaria



c) Tercera onda estacionaria

FIGURA 11.4.2 Primeras tres ondas estacionarias

Ondas estacionarias

De la deducción de la ecuación de onda examinada en la sección 11.2, recuerde que la constante a mostrada en la solución del problema de valores en la frontera en (1), (2) y (3) está dada por $\sqrt{T/\rho}$, donde ρ es masa por unidad de longitud y T es la magnitud de la tensión en la cuerda. Cuando T es lo suficientemente grande, la cuerda vibratoria genera un sonido musical como resultado de las ondas permanentes. La solución (5) es una superposición de las soluciones producto llamadas **ondas estacionarias** o **modos normales**:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \cdots$$

Con base en (6) y (7) de la sección 3.8 para el movimiento no amortiguado, las soluciones producto (4) pueden escribirse como

$$u_n(x, t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x, \tag{11}$$

donde $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ y ϕ_n se definen como sen $\phi_n = A_n/C_n$ y cos $\phi_n = B_n/C_n$. Para $n = 1$, 2, 3, . . . las ondas estacionarias son, en esencia, las gráficas de sen$(n\pi x/L)$, con una amplitud variable en el tiempo dada por

$$C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right).$$

De manera alterna, en (11) podemos observar que en un valor fijo de x, cada función producto $u_n(x, t)$ representa el movimiento armónico simple de amplitud $C_n|\operatorname{sen}(n\pi x/L)|$ y frecuencia $f_n = na/2L$. En otras palabras, en una onda estacionaria, cada punto vibra con distinta amplitud pero a la misma frecuencia. Cuando $n = 1$,

$$u_1(x, t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{L}t + \phi_1\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x$$

se llama **primera onda estacionaria**, **primer modo normal** o **modo fundamental de vibración**. Las primeras tres ondas estacionarias, o modos normales, se muestran en la **FIGURA 11.4.2**. Las líneas discontinuas representan las ondas estacionarias en diversos puntos en el tiempo. Los puntos en el intervalo $(0, L)$, para los cuales sen$(n\pi/L)x = 0$, corresponden a los puntos localizados en una onda estacionaria donde no existe movimiento. A estos puntos se les llama **nodos**. Por ejemplo, en las figuras 11.4.2*b*) y *c*), podemos observar que la segunda onda estacionaria tiene un nodo en $L/2$ y la tercera tiene dos nodos, en $L/3$ y $2L/3$. En general, el n-ésimo modo normal de vibración tiene $n - 1$ nodos.

La frecuencia

$$f_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

del primer modo normal se llama **frecuencia fundamental**, o **primer armónico**, y está relacionado directamente con el tono generado por un instrumento de cuerdas. Es evidente que conforme la tensión sobre la cuerda sea mayor, el tono del sonido lo será también. Las frecuencias f_n de los demás modos normales, los cuales son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, se llaman **sobretonos**. El segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.

11.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas del 1 al 8, resuelva la ecuación de onda (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

2. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(L - x)$

3. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = f(x)$, f mostrado en la **FIGURA 11.4.3**, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

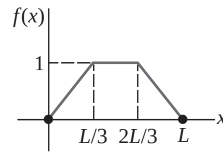


FIGURA 11.4.3 Desplazamiento para el problema 3

4. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$u(x, 0) = \frac{1}{6}x(\pi^2 - x^2), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

5. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} x$

6. $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$

$u(x, 0) = 0.01 \operatorname{sen} 3\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

7. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < L/2 \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & L/2 < x < L, \end{cases} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

8. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$u(x, 0) = x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

Este problema podría describir el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una barra elástica vibratoria. Las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ se llaman **condiciones de extremo libre**. Véase la **FIGURA 11.4.4**.

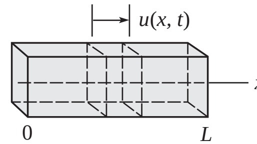


FIGURA 11.4.4 Barra elástica del problema 8

9. Una cuerda estirada está anclada en el eje x en $x = 0$ y $x = \pi$ en $t > 0$. Si las vibraciones transversales tienen lugar en un medio que ejerce una resistencia proporcional a la velocidad instantánea, entonces la ecuación de onda toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $f(x)$.

10. Demuestre que una solución al problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u, \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \; u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \; 0 < x < \pi$$

es

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k - 1)^2}\operatorname{sen}(2k - 1)x\cos\sqrt{(2k - 1)^2 + 1}\,t.$$

11. Considere el problema de valores en la frontera dado en (1), (2) y (3) de esta sección. Si $g(x) = 0$ en $0 < x < L$, demuestre que la solución al problema puede escribirse como

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

[*Sugerencia:* Utilice la identidad

$$2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2).]$$

12. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda infinitamente larga se determina mediante el problema de valor inicial

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{12}$$

Este problema puede resolverse sin separar variables.

a) Demuestre que la ecuación de onda puede expresarse en la forma $\partial^2 u/\partial\eta\partial\xi = 0$ mediante las sustituciones $\xi = x + at$ y $\eta = x - at$.

b) Integre la ecuación diferencial parcial del inciso *a*), primero respecto a η y después respecto a ξ, para demostrar que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$, donde F y G son funciones arbitrarias diferenciables dos veces, es una solución de la ecuación de onda. Utilice esta solución y las condiciones iniciales dadas para demostrar que

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + c$$

y $$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds - c,$$

donde x_0 es arbitraria y c una constante de integración.

c) Utilice los resultados del inciso *b*) para demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\, ds. \tag{13}$$

Observe que cuando la velocidad inicial $g(x) = 0$ obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)], \quad -\infty < x < \infty.$$

La última solución puede interpretarse como una superposición de dos **ondas viajeras**, una moviéndose hacia la derecha (esto es, $\frac{1}{2}f(x - at)$) y la otra moviéndose hacia la izquierda ($\frac{1}{2}f(x + at)$). Ambas ondas tienen velocidad a y la misma forma básica que el desplazamiento inicial $f(x)$. La forma de $u(x, t)$ dada en (13) se llama **solución de d'Alembert**.

En los ejercicios del 13 al 15, utilice la solución de d'Alembert (13) para resolver el problema de valor inicial del problema 12 sujeto a las condiciones iniciales dadas.

13. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

15. $f(x) = 0$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

16. Suponga $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $g(x) = 0$ y $a = 1$ para el problema de valor inicial planteado en el problema 12. Grafique la solución de d'Alembert, en este caso en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 3$.

17. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de una barra vibratoria de longitud L se determina a partir de la ecuación diferencial parcial de cuarto orden

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0.$$

Si la barra está **simplemente apoyada**, como ilustra la **FIGURA 11.4.5**, las condiciones de frontera e iniciales son

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Por comodidad, utilice $\lambda = \alpha^4$ cuando separe las variables.]

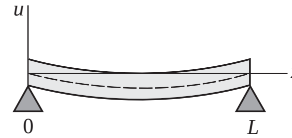


FIGURA 11.4.5 Barra simplemente apoyada del problema 17

Tareas para el laboratorio de cómputo

18. Si los extremos de la barra del problema 17 se encuentran **incrustados** en $x = 0$ y $x = L$, las condiciones de frontera se convierten en, para $t > 0$,

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

a) Demuestre que los valores propios del problema son $\lambda = x_n^2/L^2$ donde x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son las raíces positivas de la ecuación $\cosh x \cos x = 1$.

b) Muestre gráficamente que la ecuación del inciso *a*) tiene una cantidad infinita de raíces.

c) Utilice un CAS para encontrar las aproximaciones de los primeros cuatro valores propios. Use cuatro cifras decimales.

19. El modelo para una cuerda infinitamente larga que se sujeta inicialmente en los tres puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$ y después se libera simultáneamente en dichos puntos en el tiempo $t = 0$, está dado por (12) con

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

a) Grafique la posición inicial de la cuerda en el intervalo $[-6, 6]$.

b) Utilice un CAS para graficar la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

c) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda en el tiempo.

20. Una cuerda infinitamente larga que coincide con el eje x es golpeada en el origen con un martillo cuya cabeza mide 0.2 pulgadas de diámetro. El modelo del movimiento de la cuerda puede expresarse mediante la ecuación (12) donde

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 0.1 \\ 0, & |x| > 0.1. \end{cases}$$

a) Utilice un CAS para graficar la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

b) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda en el tiempo.

21. El modelo de la cuerda vibratoria del problema 7 se llama **cuerda pulsada**. La cuerda está unida al eje x en $x = 0$ y $x = L$, y se mantiene en $x = L/2$ a h unidades por encima del eje x. Véase la figura 11.2.4. Comenzando en $t = 0$, la cuerda se libera desde el reposo.

a) Utilice un CAS para graficar la suma parcial $S_6(x, t)$, esto es, los primeros seis términos diferentes de cero de su solución, para $t = 0.1k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$. Suponga que $a = 1$, $h = 1$ y $L = \pi$.

b) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución del problema 7.

11.5 La ecuación de Laplace

Introducción Suponga que deseamos encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa rectangular cuyas orillas verticales $x = 0$ y $x = a$ se encuentran aisladas, mientras las orillas superior e inferior $y = b$ y $y = 0$ se mantienen a temperaturas $f(x)$ y 0, respectivamente. Consulte la **FIGURA 11.5.1**. Cuando no escapa calor desde las superficies laterales de la placa, resolvemos el siguiente problema de valores en la frontera:

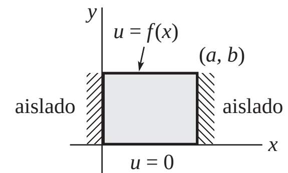


FIGURA 11.5.1 Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a. \tag{3}$$

Solución del problema de valores en la frontera Con $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la separación de variables en (1) conduce a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5}$$

En (2) y (3), las tres condiciones de frontera homogéneas se traducen en $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. El problema de Sturm-Liouville asociado con la ecuación (4) es entonces

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, X'(a) = 0. \tag{6}$$

El análisis de los casos correspondientes a $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, ya se llevó a cabo en el ejemplo 1 de la sección 10.5. Por comodidad, a continuación presentamos una versión sintetizada de dicho análisis.

Para $\lambda = 0$, (6) se convierte en

$$X'' + 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria es $X = c_1 + c_2 x$. La condición de frontera $X'(0) = 0$ entonces, implica que $c_2 = 0$, por lo que $X = c_1$. Observe que para cualquier c_1, esta solución constante satisface la segunda condición de frontera $X'(a) = 0$. Haciendo que $c_1 \neq 0$, $X = c_1$ es una solución no trivial del problema de valores en la frontera (6). Para $\lambda = -\alpha^2 < 0$, (6) no tiene una solución no trivial. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, (6) se convierte en

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, X'(a) = 0.$$

Al aplicar la condición de frontera $X'(0) = 0$, la solución $X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ implica que $c_2 = 0$, por lo que $X = c_1 \cos \alpha x$. La segunda condición de frontera $X'(a) = 0$ aplicada a esta última expresión nos da entonces $-c_1\alpha \operatorname{sen} \alpha a = 0$. Debido a que $\alpha > 0$, la última ecuación se satisface cuando $\alpha a = n\pi$ o $\alpha = n\pi/a$, $n = 1, 2, \ldots$. Los valores propios de (6)

son entonces λ_0 y $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/a^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Por la correspondiente $\lambda_0 = 0$ con $n = 0$, las funciones propias de (6) son

$$X = c_1,\ n = 0, \quad \text{y} \quad X = c_1 \cos\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ahora debemos resolver la ecuación (5) sujeta a la única condición de frontera homogénea $Y(0) = 0$. Primero, para $\lambda_0 = 0$, la ecuación diferencial en (5) es simplemente $Y'' = 0$ y, por lo tanto, su solución es $Y = c_3 + c_4 y$. Sin embargo, $Y(0) = 0$ implica que $c_3 = 0$, en consecuencia, $Y = c_4 y$. Segundo, para $\lambda_n = n^2\pi^2/a^2$, la ecuación diferencial en (5) es $Y'' - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0$. Como $0 < y < b$ es un intervalo finito, escribimos la solución general en términos de las funciones hiperbólicas:

¿Por qué funciones hiperbólicas? 

$$Y = c_3 \cosh(n\pi y/a) + c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a).$$

A partir de esta solución podemos observar que $Y(0) = 0$ de nuevo implica $c_3 = 0$, en consecuencia $Y = c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a)$.

Las soluciones producto $u_n = X(x)Y(y)$ que satisfacen la ecuación de Laplace (1) y las tres condiciones de frontera homogéneas dadas en (2) y (3) son

$$A_0 y, \quad n = 0, \quad \text{y} \quad A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y \cos\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde hemos escrito nuevamente c_1c_4 como A_0 para $n = 0$ y como A_n para $n = 1, 2, \ldots$.

El principio de superposición da otro resultado

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y \cos\frac{n\pi}{a}x. \tag{7}$$

Por último, sustituyendo $y = b$ en (7) observamos que

$$u(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b\right)\cos\frac{n\pi}{a}x,$$

es el desarrollo de semiintervalo de f en una serie coseno de Fourier. Si establecemos las identificaciones $A_0 b = a_0/2$ y $A_n \operatorname{senh}(n\pi b/a) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, a partir de (2) y (3) de la sección 10.3 es posible deducir que

$$2A_0 b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,dx$$

$$A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\,dx \tag{8}$$

y

$$A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx. \tag{9}$$

La solución de los problemas de valores en la frontera (1), (2) y (3) consta de la serie dada en (7) con coeficientes A_0 y A_n definidos en (8) y (9), respectivamente.

Problema de Dirichlet Un problema de valores en la frontera en el que buscamos una solución a una ecuación diferencial parcial elíptica como la de Laplace $\nabla^2 u = 0$ dentro de la región R (en el plano o espacio tridimensional), tal que u tome valores preestablecidos en toda la frontera de la región, recibe el nombre de **problema de Dirichlet**. En el problema 1 de los ejercicios 11.5 se solicita al lector demostrar que la solución del problema de Dirichlet para una región rectangular,

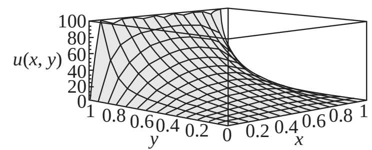
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$
$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$$

es

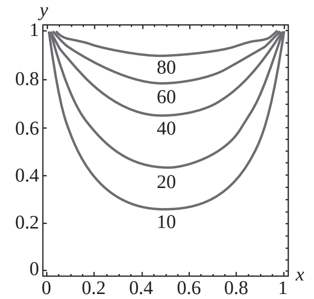
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \quad \text{donde} \quad A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx. \tag{10}$$

Para el caso especial en que $f(x) = 100$, $a = 1$, $b = 1$, los coeficientes A_n están dados por $A_n = 200 \dfrac{1 - (-1)^n}{n\pi \operatorname{senh} n\pi}$. Con ayuda de un CAS, la gráfica de la superficie definida mediante $u(x, y)$ sobre la región R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ está dada en la **FIGURA 11.5.2*a*)**. Usted puede observar en ésta que se satisfacen las condiciones de frontera; advierta especialmente que a lo largo de $y = 1$, $u = 100$ para $0 \le x \le 1$. Las isotermas, o curvas, en la región rectangular a lo largo de la cual la temperatura $u(x, y)$ es constante, pueden obtenerse utilizando las herramientas de graficación de contornos de un CAS y se ilustran en la figura 11.5.2*b*). Las isotermas también pueden visualizarse como las curvas de intersección (proyectadas en el plano *xy*) de los planos horizontales $u = 80$, $u = 60$, etc., con la superficie de la figura 11.5.2*a*). Observe que en toda la región la temperatura máxima es $u = 100$ y se presenta en la porción de la frontera correspondiente a $y = 1$. Esto no es coincidencia. Existe un **principio del máximo** que establece que una solución u de la ecuación de Laplace dentro de una región acotada R con frontera B (tal como un rectángulo, un círculo, una esfera, etc.) toma sus valores máximo y mínimo en B. Además, es posible demostrar que u puede no tener extremo relativo (máximo o mínimo) en el interior de R. Este último argumento está respaldado por la superficie ilustrada en la figura 11.5.2*a*).

El valor máximo de u se encuentra en la frontera de la región R.



a) Superficie



b) Isotermas

FIGURA 11.5.2 La superficie es una gráfica de sumas parciales cuando $f(x) = 100$ y $a = b = 1$ en la ecuación (10)

Principio de superposición

El problema de Dirichlet para un rectángulo puede resolverse fácilmente por separación de variables cuando las condiciones homogéneas de frontera están especificadas en dos fronteras *paralelas*. Sin embargo, el método de separación de variables no se aplica al problema de Dirichlet cuando las condiciones de frontera son no homogéneas en los cuatro lados del rectángulo. Para salvar esta dificultad, dividimos el problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \\ &u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned} \tag{11}$$

en dos problemas, cada uno de los cuales tiene condiciones de frontera homogéneas en fronteras paralelas, como se ilustra.

Problema 1

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u_1(0, y) = 0, \quad u_1(a, y) = 0, \quad 0 < y < b \\ &u_1(x, 0) = f(x), \quad u_1(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned}$$

Problema 2

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u_2(0, y) = F(y), \quad u_2(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \\ &u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, b) = 0, \quad 0 < x < a \end{aligned}$$

Suponga que u_1 y u_2 son las soluciones de los problemas 1 y 2, respectivamente. Si definimos $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, vemos que u satisface todas las condiciones de frontera del problema original (11). Por ejemplo:

$$u(0, y) = u_1(0, y) + u_2(0, y) = 0 + F(y) = F(y)$$

$$u(x, b) = u_1(x, b) + u_2(x, b) = g(x) + 0 = g(x)$$

y así sucesivamente. Además, por el teorema 11.1.1, u es una solución de la ecuación de Laplace. En otras palabras, hemos resuelto el problema original al resolver los problemas 1

y 2 y sumando sus soluciones. Esta propiedad aditiva de las soluciones se conoce como principio de superposición. Véase la **FIGURA 11.5.3**.

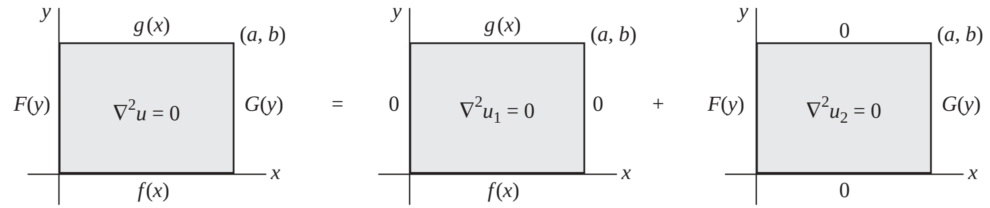


FIGURA 11.5.3 La solución u = solución u_1 del problema 1 + solución u_2 del problema 2

Se deja al lector como ejercicio (consulte los problemas 13 y 14 de los ejercicios 11.5) demostrar que una solución al problema 1 es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\left(\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right),$$

y que una solución al problema 2 es

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cosh\frac{n\pi}{b}x + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{b}x\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b F(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{b}a}\left(\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y\,dy - A_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right).$$

11.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas del 1 al 10, resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

1. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$

$u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = f(x)$

2. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ u(x, b) = f(x)$

3. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$

$u(x, 0) = f(x),\ u(x, b) = 0$

4. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$

$u(x, 0) = x,\ u(x, b) = 0$

5. $u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 1 - y$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$

6. $u(0, y) = g(y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = 0$

7. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, y),\ u(\pi, y) = 1$

$u(x, 0) = 0,\ u(x, \pi) = 0$

8. $u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = u(x, 0),\ u(x, 1) = f(x)$

9. $u(0, y) = 0, \;\; u(1, y) = 0$

$u(x, 0) = 100, \;\; u(x, 1) = 200$

10. $u(0, y) = 10y, \;\; \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -1$

$u(x, 0) = 0, \;\; u(x, 1) = 0$

En los problemas 11 y 12, resuelva la ecuación de Laplace (1) para la placa semiinfinita que se extiende en la dirección positiva de y. En cada caso, suponga que $u(x, y)$ está acotada en $y \to \infty$.

11.

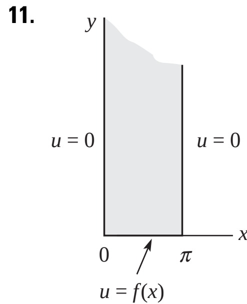


FIGURA 11.5.4 Placa semiinfinita para el problema 11

12.

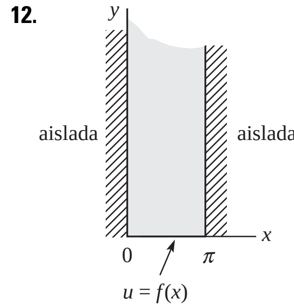


FIGURA 11.5.5 Placa semiinfinita para el problema 12

En los problemas 13 y 14, resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

13. $u(0, y) = 0, \;\; u(a, y) = 0$

$u(x, 0) = f(x), \;\; u(x, b) = g(x)$

14. $u(0, y) = F(y), \;\; u(a, y) = G(y)$

$u(x, 0) = 0, \;\; u(x, b) = 0$

En los problemas 15 y 16, utilice el principio de superposición para resolver la ecuación de Laplace (1) para una placa cuadrada sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

15. $u(0, y) = 1, \;\; u(\pi, y) = 1$

$u(x, 0) = 0, \;\; u(x, \pi) = 1$

16. $u(0, y) = 0, \;\; u(2, y) = y(2 - y)$

$u(x, 0) = 0, \;\; u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

17. En el problema 16, ¿cuál es el valor máximo de la temperatura u para $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$?

Tareas para el laboratorio de cómputo

18. ***a)*** En el problema 1, suponga que $a = b = \pi$ y $f(x) = 100x(\pi - x)$. Sin utilizar el bosquejo de la solución $u(x, y)$, a mano, ¿cómo se vería la superficie sobre la región rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$?

b) ¿Cuál es el valor máximo de la temperatura u para $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$?

c) Utilice la información del inciso ***a)*** para calcular los coeficientes de su respuesta al problema 1. Después, mediante la aplicación gráfica 3D de su CAS, trace la suma parcial $S_5(x, y)$ consistente en los primeros cinco términos de la solución encontrada en el inciso ***a)*** para $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$. Emplee diferentes perspectivas y después compárelas con el inciso ***a)***.

19. ***a)*** Utilice la aplicación gráfica de contorno de su CAS para graficar las isotermas $u = 170, 140, 110, 80, 60, 30$ para la solución del problema 9. Use la suma parcial $S_5(x, y)$ consistente en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución.

b) Mediante la aplicación gráfica 3D de su CAS, grafique la suma parcial $S_5(x, y)$.

20. Utilice la aplicación gráfica de contorno de su CAS para graficar las isotermas $u = 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0, -0.05$ para la solución del problema 10. Use la suma parcial $S_5(x, y)$ que consiste en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución.

Problemas de análisis

21. Resuelva el problema de Newmann para un rectángulo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \qquad 0 < x < a$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = g(y), \qquad 0 < y < b.$$

a) Explique por qué una condición necesaria para que la solución u exista es que g satisfaga

$$\int_0^b g(y)\, dy = 0.$$

Con frecuencia, a esto se le conoce como la **condición de compatibilidad**. Investigue más a fondo a este respecto y explique dicha condición con fundamentos físicos.

b) Si u es una solución del problema de valores en la frontera, explique por qué $u + c$, donde c es una constante arbitraria, también es una solución.

22. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(0, y) = u_0 \cos y, \quad u(1, y) = u_0(1 + \cos 2y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = 0.$$

Discuta cómo se obtuvo la siguiente respuesta

$$u(x, y) = u_0 x + u_0 \frac{\operatorname{senh}(1 - x)}{\operatorname{senh} 1} \cos y + \frac{u_0}{\operatorname{senh} 2} \operatorname{senh} 2x \cos 2y.$$

Ponga en práctica sus ideas.

11.6 Problemas de valores en la frontera no homogéneos

Introducción Se dice que un problema de valores en la frontera es **no homogéneo** cuando la ecuación diferencial parcial o las condiciones de frontera son no homogéneas. Por ejemplo, un problema característico de valores en la frontera no homogéneo de la ecuación de calor es

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \ 0 < x < L, \ t > 0 \\ &u(0, t) = u_0(t), \quad u(L, t) = u_1(t), \ t > 0 \\ &u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos interpretar este problema como un modelo desarrollado para investigar la distribución de temperatura u dentro de una varilla de longitud L cuando se está generando calor internamente a velocidad $F(x, t)$; la temperatura en los extremos de la varilla varía respecto al tiempo t. El método de separación de variables puede no ser aplicable a un problema de valores en la frontera si la ecuación diferencial parcial o las condiciones de frontera son no homogéneas. Por ejemplo, cuando se genera calor a velocidad constante r dentro de la varilla, la ecuación de calor dada en (1) toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2}$$

Se puede observar fácilmente que la ecuación (2) no es separable. Por otro lado, suponga que deseamos resolver la ecuación de calor usual $ku_{xx} = u_t$ cuando las fronteras $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a las temperaturas u_0 y u_1 que son diferentes de cero. Aunque la sustitución $u(x, t) = X(x)T(t)$ separa la ecuación diferencial parcial, nos vemos imposibilitados para determinar los valores propios y las funciones propias, ya que no se puede llegar a ninguna conclusión respecto a $X(0)$ y $X(L)$ a partir de $u(0, t) = X(0)T(t) = u_0$ y $u(L, t) = X(L)T(t) = u_1$.

Cambio de variable dependiente En esta sección consideramos diversos tipos de problemas de valores en la frontera no homogéneos que pueden resolverse mediante el cambio de la variable dependiente u por una nueva variable dependiente v aplicando la sustitución $u = v + \psi$, donde ψ es una función por determinar.

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo En primera instancia, consideramos un problema de valores en la frontera no homogéneo como (1), donde el término fuente de calor F y las condiciones de frontera son independientes del tiempo:

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}, \ 0 < x < L, \ t > 0 \\ &u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_1, \ t > 0 \\ &u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{3}$$

En la ecuación (3), u_0 y u_1 expresan constantes. Mediante el cambio de la variable dependiente u por una nueva variable dependiente v empleando la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, (3) puede reducirse a dos problemas:

$$\text{Problema 1:} \ \{k\psi'' + F(x) = 0, \ \psi(0) = u_0, \ \psi(L) = u_1$$

$$\text{Problema 2:} \ \begin{cases} k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ v(0, t) = 0, \ \ v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = f(x) - \psi(x). \end{cases}$$

Observe que la ecuación diferencial ordinaria del problema 1 puede resolverse directamente por integración. Más aún, el problema 2 es un problema de valores en la frontera homogéneo

que puede resolverse directamente por separación de variables. Una solución del problema original es, por lo tanto,

Solución u = solución ψ del problema 1 + solución v del problema 2.

En los dos problemas anteriores no se proporciona nada que deba ser memorizado, sin embargo, lleve a cabo la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$ como se indica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo

Resuelva la ecuación (2) sujeta a

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = u_0, \qquad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

Solución Tanto la ecuación diferencial parcial como la condición en la frontera derecha $x = 1$ son no homogéneas. Si establecemos $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi'' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4}$$

puesto que $\psi_t = 0$. Al sustituir los resultados de (4) en (3) obtenemos

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\psi'' + r = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{5}$$

La ecuación (5) se reduce a una ecuación diferencial parcial homogénea si demandamos que ψ sea una función que satisfaga la ecuación diferencial ordinaria

$$k\psi'' + r = 0 \qquad \text{o} \qquad \psi'' = -\frac{r}{k}.$$

Integrar la última ecuación dos veces da como resultado

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + c_1 x + c_2. \tag{6}$$

Además,
$$u(0, t) = v(0, t) + \psi(0) = 0$$
$$u(1, t) = v(1, t) + \psi(1) = u_0.$$

Tenemos $v(0, t) = 0$ y $v(1, t) = 0$, siempre y cuando seleccionemos

$$\psi(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \psi(1) = u_0.$$

Aplicar las dos últimas condiciones a (6) nos da, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = r/2k + u_0$. En consecuencia,

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x.$$

Por último, la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) + \psi(x)$ implica que $v(x, 0) = u(x, 0) - \psi(x) = f(x) - \psi(x)$. Entonces, para determinar $v(x, t)$, resolvemos el nuevo problema de valores en la frontera homogéneo

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$
$$v(0, t) = 0, \qquad v(1, t) = 0, \qquad t > 0$$
$$v(x, 0) = f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x, \quad 0 < x < 1$$

mediante separación de variables. De la manera acostumbrada obtenemos

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$$

donde la condición inicial $v(x, 0)$ determina los coeficientes senoidales de Fourier:

$$A_n = 2\int_0^1 \left[f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x \right] \text{sen } n\pi x\, dx. \tag{7}$$

Al sumar $\psi(x)$ y $v(x, t)$, obtenemos una solución del problema original:

$$u(x, t) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \text{ sen } n\pi x, \tag{8}$$

donde los coeficientes A_n se encuentran definidos en (7). ≡

Observe en (8) que $u(x, t) \to \psi(x)$ conforme $t \to \infty$. En el contexto del problema de valores en la frontera dado, ψ se llama **solución de estado estable**. Puesto que $v(x, t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, v se denomina **solución transitoria**.

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo Regresemos al problema planteado en (1), donde el término fuente de calor F y las condiciones de frontera dependen del tiempo. De manera intuitiva, esperaríamos que el modo de enfrentar este problema fuera una extensión natural del procedimiento realizado en el ejemplo 1, es decir, la búsqueda de una solución de la forma $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$. Mientras que esta última forma de la solución es correcta, en general, no es posible encontrar una función de dos variables $\psi(x, t)$ que reduzca el problema planteado en $v(x, t)$ a uno homogéneo. Para comprender por qué esto es así, veamos lo que sucede cuando $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$ se sustituye en (1). Como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{9}$$

(1) se convierte en

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &v(0, t) + \psi(0, t) = u_0(t), \quad v(L, t) + \psi(L, t) = u_0(t) \\ &v(x, 0) = f(x) - \psi(x, 0). \end{aligned} \tag{10}$$

En (10), las condiciones de frontera de v serán homogéneas si demandamos que

$$\psi(0, t) = u_0(t), \qquad \psi(L, t) = u_0(t) \tag{11}$$

Si, en este punto, fuéramos a seguir los mismos pasos aplicados en el método del ejemplo 1, trataríamos de forzar a que el problema en (10) fuera homogéneo resolviendo $k\psi_{xx} + F(x, t) = \psi_t$ y, posteriormente, imponiendo las condiciones de (11) en la solución ψ. En vista de que la ecuación definida por ψ es, en sí misma, una ecuación diferencial parcial no homogénea, ese enfoque sería una expectativa poco realista. Trataremos con una táctica diferente por completo diseñando simplemente una función ψ que satisfaga ambas condiciones de (11). Una de tales funciones está dada por

$$\psi(x, t) = u_0(t) + \frac{x}{L}[u_1(t) - u_0(t)]. \tag{12}$$

Volvamos a inspeccionar la ecuación (10) y observemos que haber seleccionado el valor de ψ como se hizo, representó alguna simplificación adicional ya que $\psi_{xx} = 0$. Ahora comencemos de nuevo. En esta ocasión, si sustituimos

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(t) + \frac{x}{L}[u_1(t) - u_0(t)] \tag{13}$$

el problema (1) se convierte en

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}, \ 0 < x < L, \ t > 0 \\ &v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \ t > 0 \\ &v(x, 0) = f(x) - \psi(x, 0), \ 0 < x < L, \end{aligned} \tag{14}$$

donde $G(x, t) = F(x, t) - \psi_t$. Mientras el problema (14) aún sea no homogéneo (las condiciones de frontera son homogéneas pero la ecuación diferencial parcial es no homogénea) resulta factible de resolver.

Estrategia básica El método de solución de (14) está ligeramente involucrado, por lo que antes de mostrarlo con un ejemplo específico, delinearemos primero la estrategia básica:

> Suponga que los coeficientes dependientes del tiempo $v_n(t)$ y $G_n(t)$ pueden ser tales que en (14) $v(x, t)$ y $G(x, t)$ puedan desarrollarse en la serie
>
> $$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad \text{y} \quad G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{15}$$
>
> donde $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las funciones propias de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(L) = 0$ correspondientes a los valores propios $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$. Este problema de Sturm-Liouville se habría obtenido de haber aplicado la separación de variables a los problemas de valores en la frontera asociados de (14). En la ecuación (15) observe que la serie supuesta para $v(x, t)$ ya satisface las condiciones de frontera de (14). Ahora sustituya la primera serie de (15) en la ecuación diferencial parcial no homogénea (14), agrupe los términos, e iguale la serie resultante con el desarrollo en serie real calculada para $G(x, t)$.

Este método se ilustra mediante el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo

Resuelva
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ 0 < x < 1, \ t > 0$$
$$u(0, t) = \cos t, \quad u(1, t) = 0, \ t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \ 0 < x < 1.$$

Solución Comparemos este problema con (1) mediante la identificación de $k = 1$, $L = 1$, $F(x, t) = 0$, $u_0(t) = \cos t$, $u_1(t) = 0$ y $f(x) = 0$. Iniciemos con la construcción de ψ. A partir de (12) obtenemos

$$\psi(x, t) = \cos t + x\,[0 - \cos t\,] = (1 - x)\cos t,$$

y después utilizaremos la sustitución tal como se indica en (13)

$$u(x, t) = v(x, t) + (1 - x)\cos t \tag{16}$$

para obtener el problema de valores en la frontera para $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - x)\operatorname{sen} t = \frac{\partial v}{\partial t}, \ 0 < x < 1, \ t > 0 \\ &v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, t > 0 \\ &v(x, 0) = x - 1, \ 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = 0, X(1) = 0$$

se calculan como $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2$ y $\operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Con $G(x, t) = (1 - x)\operatorname{sen} t$ suponemos que para un valor fijo de t, a partir de (15), v y G pueden escribirse como la serie seno de Fourier:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen} n\pi x, \tag{18}$$

y
$$(1 - x)\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \operatorname{sen} n\pi x. \tag{19}$$

Al manejar a t como un parámetro, los coeficientes G_n de (19) pueden ser calculados:

$$G_n(t) = \frac{2}{1}\int_0^1 (1 - x)\,\text{sen}\, t\,\text{sen}\, n\pi x\, dx = 2\,\text{sen}\, t\int_0^1 (1 - x)\,\text{sen}\, n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi}\,\text{sen}\, t.$$

Por lo tanto, $$(1 - x)\,\text{sen}\, t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\,\text{sen}\, t\,\text{sen}\, n\pi x. \tag{20}$$

Podemos determinar los coeficientes $v_n(t)$ sustituyendo (19) y (20) en la ecuación diferencial parcial (17). Con este objetivo en mente, las derivadas parciales de v son

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)(-n^2\pi^2)\,\text{sen}\, n\pi x \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t)\,\text{sen}\, n\pi x. \tag{21}$$

Escribimos la ecuación diferencial parcial como $v_t - v_{xx} = (1 - x)$ sen t y utilizamos las ecuaciones (20) y (21) para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v_n'(t) + n^2\pi^2 v_n(t)]\,\text{sen}\, n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}\, t}{n\pi}\,\text{sen}\, n\pi x.$$

En seguida igualamos los coeficientes de sen $n\pi x$ en cada miembro de la igualdad y resulta

$$v_n'(t) + n^2\pi^2 v_n(t) = \frac{2\,\text{sen}\, t}{n\pi}.$$

Para cada n, la última ecuación es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden cuya solución general es

$$v_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{n^2\pi^2\,\text{sen}\, t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1}\right) + C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

donde C_n representa la constante arbitraria. Por lo tanto, la forma supuesta para $v(x, t)$ en (18) puede escribirse como

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\,\frac{n^2\pi^2\,\text{sen}\, t - \cos t}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n e^{-n^2\pi^2 t}\right\}\text{sen}\, n\pi x. \tag{22}$$

C_n puede calcularse aplicando la condición inicial $v(x, 0)$ a la ecuación (22). A partir de la serie seno de Fourier

$$x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n\right\}\text{sen}\, n\pi x$$

podemos observar que la cantidad entre corchetes representa los coeficientes seno de Fourier b_n para $x - 1$. Esto es,

$$\frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n = 2\int_0^1 (x - 1)\,\text{sen}\, n\pi x\, dx \quad \text{o} \quad \frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n = \frac{-2}{n\pi}.$$

Por lo tanto, $$C_n = \frac{2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{2}{n\pi}.$$

Sustituyamos el último resultado en (22) para obtener una solución de la ecuación (17),

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2\pi^2\,\text{sen}\, t - \cos t + e^{-n^2\pi^2 t}}{n(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n}\right\}\text{sen}\, n\pi x.$$

Por último, a partir de la ecuación (16) se deduce que la solución $u(x, t)$ deseada es

$$u(x, t) = (1 - x)\cos t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2\pi^2\,\text{sen}\, t - \cos t + e^{-n^2\pi^2 t}}{n(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n}\right\}\text{sen}\, n\pi x. \quad \equiv$$

Comentarios

i) Si el problema de valores en la frontera tiene condiciones de frontera homogéneas y un término dependiente del tiempo $F(x, t)$ en la ecuación diferencial parcial, entonces no es necesario cambiar la variable dependiente sustituyendo $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$. Por ejemplo, si u_0 y u_1 son 0 en un problema tal como el (1), entonces podemos deducir a partir de (12) que $\psi(x, t) = 0$. El método de solución es básicamente un ataque frontal contra la ecuación diferencial parcial suponiendo los desarrollos en series ortogonales apropiadas para $u(x, t)$ y $F(x, t)$. De nuevo, si u_0 y u_1 son 0 en (1), la solución comienza con los supuestos dados en (15), donde los símbolos v y G se reemplazan naturalmente por u y F, respectivamente. Consulte los problemas del 13 al 16 de los ejercicios 11.6. En los problemas 17 y 18 de los ejercicios 11.6, usted tendrá que construir $\psi(x, t)$ tal como se ilustra en el ejemplo 2. Véase también el problema 20 de los ejercicios 11.6.

ii) No enfatice especialmente el hecho de que utilizamos la ecuación de calor a lo largo del análisis anterior. El método examinado en el ejemplo 1 puede aplicarse tanto a la ecuación de onda como a la de Laplace. Consulte los problemas del 1 al 12 de los ejercicios 11.6. El método presentado en el ejemplo 2 se fundamenta en la dependencia del tiempo en el problema, por ello no es aplicable a problemas de valores en la frontera que involucren la ecuación de Laplace.

11.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$ sujeta a las condiciones que se proporcionan.

1. $u(0, t) = 100, \quad u(1, t) = 100$
$u(x, 0) = 0$

2. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = 0$
$u(x, 0) = f(x)$

En los problemas 3 y 4, resuelva la ecuación de calor (2) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_0$
$u(x, 0) = 0$

4. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_1$
$u(x, 0) = f(x)$

5. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-\beta x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \; \beta > 0, 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < 1,$$

donde A es una constante. La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando éste se genera dentro de una varilla delgada debido al decaimiento radiactivo del material.

6. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, 0 < x < \pi.$$

La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando éste se pierde por radiación proveniente de la superficie lateral de una varilla delgada en un medio que se encuentra a temperatura de cero.

7. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0) = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < 1.$$

8. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ si la varilla del problema 7 es semiinfinita y se extiende en la dirección positiva de x, radia desde su cara lateral hacia un medio con temperatura de cero, y

$$u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), x > 0.$$

9. Cuando una cuerda vibratoria está sujeta a una fuerza vertical externa que varía con la distancia horizontal a partir del extremo izquierdo, la ecuación de onda toma la forma

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ax = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde A es constante. Resuelva esta ecuación diferencial parcial sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \; t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \; 0 < x < 1.$$

10. Una cuerda inicialmente en reposo sobre el eje x está anclada en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ en el eje x. Si se permite que la cuerda caiga por su propio peso en $t > 0$, el desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Despeje $u(x, t)$.

11. Determine la temperatura constante $u(x, y)$ en la placa semiinfinita ilustrada en la **FIGURA 11.6.1**. Suponga que la temperatura se acota cuando $x \to \infty$. [*Sugerencia:* Utilice $u(x, y) = v(x, y) + \psi(y)$.]

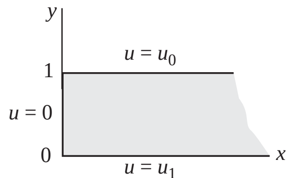


FIGURA 11.6.1 Placa semiinfinita del problema 11

12. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h,$$

donde $h > 0$ es constante, se presenta en muchos problemas que involucran potencial eléctrico y es conocida como **ecuación de Poisson**. Resuelva la ecuación anterior sujeta a las condiciones

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 1, \quad y > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

≡ Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo

En los ejercicios del 13 al 18, resuelva el problema de valores en la frontera dado.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 + x - x\cos t = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = x(1 - x),\ 0 < x < 1$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x \cos t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < \pi$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

$u(0, t) = \operatorname{sen} t,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < 1$

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + 3tx = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

$u(0, t) = t^2,\ u(1, t) = 1,\ t > 0$

$u(x, 0) = x^2,\ 0 < x < 1$

≡ Problemas de análisis

19. Considere el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0$$

$$u(0, t) = u_0,\ u(L, t) = u_1$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

éste es un modelo para la temperatura u de una varilla de longitud L. Si u_0 y u_1 son constantes diferentes de cero, ¿cuál esperaría, de manera intuitiva, que fuera la temperatura en el centro de la varilla después de un largo periodo? Demuestre su argumento.

20. Lea el inciso *i*) de los *Comentarios* incluidos al final de esta sección. Después, analice cómo resolver

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L.$$

Ponga en práctica sus ideas resolviendo el problema de valores en la frontera dado en este ejercicio y cuyos valores son $k = 1$, $L = 1$, $F(x, t) = tx$ y $f(x) = 0$.

11.7 Desarrollos en series ortogonales

■ Introducción Para ciertos tipos de condiciones de frontera, el método de separación de variables y el principio de superposición conducen al desarrollo de una función en una serie infinita que *no* es una serie de Fourier. Para resolver los problemas de esta sección, vamos a utilizar el concepto de desarrollos en series ortogonales o el de series de Fourier generalizadas que se realizó en la sección 10.1.

EJEMPLO 1 Uso de desarrollos en series ortogonales

La temperatura de una varilla de longitud unitaria en la que existe transferencia de calor desde su frontera derecha hacia un medio circundante que se mantiene a una temperatura constante de cero se determina a partir de

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -hu(1, t), \quad h > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

Despeje $u(x, t)$.

Solución Procedemos exactamente igual que en la sección 11.3, con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y $-\lambda$ como la constante de separación, y calculamos las ecuaciones diferenciales ordinarias y las condiciones de frontera, respectivamente,

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{1}$$

$$T' + k\lambda T = 0 \tag{2}$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = -hX(1). \tag{3}$$

La ecuación (1) junto con las condiciones de frontera homogéneas (3) conforman un problema habitual de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, X'(1) + hX(1) = 0. \tag{4}$$

Excepto por la presencia del símbolo h, el problema de valores en la frontera planteado en (4) es, en esencia, el problema resuelto en el ejemplo 2 de la sección 10.5. Tal como en dicho ejemplo, (4) posee las soluciones no triviales solamente en el caso de que $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. La solución general de la ecuación diferencial (4) es $X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La primera condición de frontera de (4) da inmediatamente $c_1 = 0$. Aplicando la segunda condición de frontera de (4) a $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ tenemos

$$\alpha \cos \alpha + h \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad \text{o} \quad \tan \alpha = -\frac{\alpha}{h}. \tag{5}$$

Debido a que las gráficas de $y = \tan x$ y $y = -x/h$, $h > 0$, tienen un número infinito de puntos de intersección para $x > 0$ (la figura 10.5.1 ilustra el caso cuando $h = 1$), la última ecuación dada en (5) tiene un número infinito de raíces. Desde luego, estas raíces dependen del valor de h. Si las raíces positivas consecutivas se expresan mediante α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces los valores propios del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2$, y las correspondientes funciones propias son $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. La solución de la ecuación diferencial de primer orden (2) es $T(t) = c_3 e^{-k\alpha_n^2 t}$ por lo que

$$u_n = XT = A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x \quad \text{y} \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x.$$

Ahora, en $t = 0$, $u(x, 0) = 1$, $0 < x < 1$, en consecuencia

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \alpha_n x. \tag{6}$$

La serie mostrada en (6) no es una serie seno de Fourier; en vez de eso, es un desarrollo de $u(x, 0) = 1$ en términos de las funciones ortogonales que surgen a partir del problema de Sturm-Liouville (4). Se puede deducir que el conjunto de funciones propias $\{\operatorname{sen} \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las α están definidas por $\tan \alpha = -\alpha/h$ es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Con $f(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \operatorname{sen} \alpha_n x$, a partir de la ecuación (8) de la sección 10.1 es posible deducir que en (6) los coeficientes A_n son

$$A_n = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x \, dx}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x \, dx}. \tag{7}$$

Para evaluar la norma cuadrada de cada una de las funciones propias utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2\alpha_n x) \, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha_n} \operatorname{sen} 2\alpha_n\right). \tag{8}$$

Con ayuda de la fórmula del ángulo doble sen $2\alpha_n = 2$ sen α_n cos α_n y la primera ecuación en (5) dada en la forma $\alpha_n \cos \alpha_n = -h \operatorname{sen} \alpha_n$, podemos simplificar (8) hasta llegar a

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x\, dx = \frac{1}{2h}(h + \cos^2 \alpha_n).$$

Asimismo, $$\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x\, dx = -\frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \Big]_0^1 = \frac{1}{\alpha_n}(1 - \cos \alpha_n).$$

En consecuencia, la ecuación (7) se convierte en

$$A_n = \frac{2h(1 - \cos \alpha_n)}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)}.$$

Por último, una solución del problema de valores en la frontera es

$$u(x, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha_n}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)} e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 2 Uso de desarrollos en series ortogonales

El ángulo de torsión $\theta(x, t)$ de una barra vibratoria torcida de longitud unitaria está determinado por

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=1} = 0,\ t > 0$$

$$\theta(x, 0) = x, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ 0 < x < 1.$$

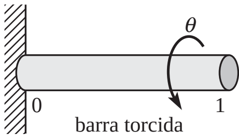


FIGURA 11.7.1 El ángulo de torsión θ en el ejemplo 2

Véase la **FIGURA 11.7.1**. La condición de frontera presentada en $x = 1$ se llama condición de extremo libre. Despeje $\theta(x, t)$.

Solución Procedemos igual que en la sección 11.4 con $\theta(x, t) = X(x)T(t)$ y utilizando $-\lambda$ una vez más como la constante de separación, las ecuaciones separadas y las condiciones de frontera son

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{9}$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \tag{10}$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = 0. \tag{11}$$

La ecuación (9), junto con las condiciones de frontera homogéneas dadas en (11),

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = 0, X'(1) = 0, \tag{12}$$

producen un problema habitual de Sturm-Liouville. Se exhorta al lector a comprobar que para $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, la única solución de (12) es $X = 0$. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X'(1) = 0$ aplicadas a la solución general $X(x) = c_1$ cos $\alpha x + c_2$ sen αx nos dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 \cos \alpha = 0$. Puesto que cos α es cero solamente cuando α es un múltiplo entero impar de $\pi/2$, escribimos $\alpha_n = (2n - 1)\pi/2$. Los valores propios de (12) son $\lambda_n = \alpha_n^2 = (2n - 1)^2\pi^2/4$, y las correspondientes funciones propias son $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha_n x = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Como la varilla es liberada a partir del reposo, la condición inicial $\theta_t(x, 0) = 0$ se traduce en $X(x)T'(0) = 0$ o $T'(0) = 0$. Cuando ésta se aplica a la solución general $T(t) = c_3$ cos $a\alpha_n t + c_4$ sen $a\alpha_n t$ de la ecuación diferencial de segundo orden (10), $T'(0) = 0$ implica que $c_4 = 0$ dejando a $T(t) = c_3 \cos a\alpha_n t = c_3 \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t$. Por lo tanto,

$$\theta_n = XT = A_n \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x.$$

Con la finalidad de satisfacer la condición inicial restante, formamos la superposición de θ_n,

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{13}$$

Cuando $t = 0$ debemos tener, para $0 < x < 1$,

$$\theta(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{14}$$

Como en el ejemplo 1, el conjunto de funciones propias $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Aunque la serie trigonométrica dada en (14) se parece más a la serie de Fourier que a (6), no es la serie seno de Fourier, pues el argumento de la función seno no es un entero múltiplo de $\pi x/L$ (donde $L = 1$). La serie es de nuevo un desarrollo de la serie ortogonal o serie generalizada de Fourier. Entonces, a partir de la ecuación (8) de la sección 10.1, los coeficientes A_n de (14) están dados por

$$A_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\, dx}{\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\, dx}.$$

Realizamos las dos integraciones y llegamos a

$$A_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Por lo tanto, el ángulo de torsión es

$$\theta(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \qquad \equiv$$

11.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

1. En el ejemplo 1, determine la temperatura $u(x, t)$ cuando el extremo izquierdo de la varilla está aislado.

2. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -h(u(1, t) - u_0), h > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

3. Determine la temperatura de estado estable de una placa rectangular para la que las condiciones de frontera son

$$u(0, y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -hu(a, y), h > 0, 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

4. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x > 0, 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, y) = 0, 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = -hu(x, 1), h > 0, x > 0.$$

5. Determine la temperatura $u(x, t)$ de una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ a todo lo largo, el extremo $x = 0$ se mantiene a temperatura de cero y el extremo $x = L$ está aislado.

6. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

La solución $u(x, t)$ representa el desplazamiento longitudinal de una barra elástica vibratoria anclada en su extremo izquierdo y sujeta a una fuerza constante F_0 en su extremo derecho. Véase la figura 11.4.4. Al parámetro E se le denomina módulo de elasticidad.

7. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \; u(1, y) = u_0, 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0, 0 < x < 1.$$

8. La temperatura inicial de una varilla de longitud unitaria es $f(x)$. Existe transferencia de calor desde ambos extremos, $x = 0$ y $x = 1$, hacia un medio circundante que se mantiene a una temperatura constante de cero. Demuestre que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t}(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{(\alpha_n^2 + 2h + h^2)} \int_0^1 f(x)(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x)\, dx.$$

Los valores propios son $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las α_n son las raíces positivas consecutivas de $\tan \alpha = 2\alpha h/(\alpha^2 - h^2)$.

9. Utilice el método que inicia en (15) de la sección 11.6 para resolver el problema de valores en la frontera no homogéneo

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-2t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \; 0 < x < 1, \; t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -u(1, t), t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, 0 < x < 1.$$

[*Sugerencia:* Véase *i*) en *Comentarios* de la página 533.]

Tareas para el laboratorio de cómputo

10. Una viga vibratoria en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho ($x = 1$). Véase la **FIGURA 11.7.2**. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de la viga se determina a partir de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Este problema de valores en la frontera podría servir como un modelo para los desplazamientos del ala vibratoria de un avión.

a) Demuestre que los valores propios del problema están determinados a partir de la ecuación $\cos \alpha \cosh \alpha = -1$.

b) Utilice un CAS para calcular las aproximaciones de los dos primeros valores propios positivos del problema. [*Sugerencia:* Consulte el problema 17 de los ejercicios 11.4.]

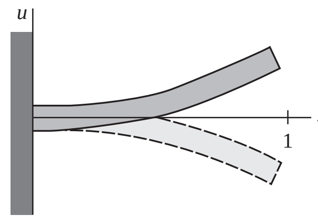


FIGURA 11.7.2 Viga en voladizo del problema 10

11. ***a***) Determine una ecuación que defina los valores propios cuando los extremos de la viga del problema 10 se encuentren empotrados en $x = 0$ y $x = 1$.

b) Utilice un CAS para calcular las aproximaciones de los dos primeros valores propios del problema. [*Sugerencia:* Consulte el problema 18 de los ejercicios 11.4.]

11.8 Serie de Fourier con dos variables

Introducción En el capítulo anterior resolvimos formas unidimensionales de las ecuaciones de calor y de onda. En esta sección vamos a hacer extensivo el método de separación de variables a ciertos problemas que involucran a ecuaciones de calor y de onda en dos dimensiones.

Ecuaciones de calor y de onda en dos dimensiones Suponga que la región rectangular de la **FIGURA 11.8.1*a*)** es una placa delgada donde la temperatura u es una función del tiempo t y de la posición (x, y). Entonces, en las condiciones adecuadas, puede demostrarse que la expresión $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación bidimensional del calor**

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Por otro lado, suponga que la figura 11.8.1*b*) representa un marco rectangular sobre el que se encuentra estirada una delgada membrana flexible (un tambor rectangular). Si la membrana se pone en movimiento, entonces su desplazamiento u, medido a partir del plano xy (vibraciones transversales), es también una función del tiempo t y de la posición (x, y). Cuando los

desplazamientos son pequeños, libres y no amortiguados, $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación bidimensional de onda**

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Tal como ilustra el ejemplo siguiente, las soluciones de problemas de valores en la frontera que involucran (1) y (2) nos llevan al concepto de una serie de Fourier en dos variables. Debido a que los análisis de problemas que involucran (1) y (2) son muy similares, solamente ilustramos la solución para el caso de la ecuación de calor.

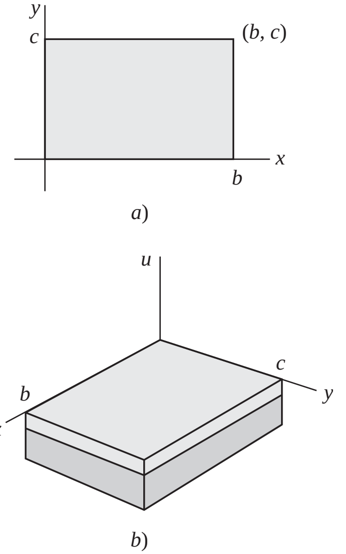


FIGURA 11.8.1 *a*) Determine la temperatura u en una placa rectangular, y *b*) calcule el desplazamiento vertical u de una membrana rectangular

EJEMPLO 1 Temperatura de una placa

Encuentre la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa mostrada en la figura 11.8.1*a*) si la temperatura inicial es $f(x, y)$ en todo momento y las fronteras se mantienen a una temperatura de cero en el tiempo $t > 0$.

Solución Debemos resolver

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < b, 0 < y < c, t > 0$$

sujeta a

$$u(0, y, t) = 0, \qquad u(b, y, t) = 0, \quad 0 < y < c, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = 0, \qquad u(x, c, t) = 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < b, \qquad 0 < y < c.$$

Con el fin de separar variables en la ecuación diferencial parcial en tres variables independientes x, y y t, tratemos de encontrar la solución producto $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Sustituyendo, obtenemos

$$k(X''YT + XY''T) = XYT' \qquad \text{o} \qquad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT}. \tag{3}$$

Puesto que en (3) el primer miembro de la última ecuación depende solamente de x y el segundo miembro depende solamente de y y t, debemos igualar ambos miembros a una constante de $-\lambda$:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

y así

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda. \tag{5}$$

Por el mismo razonamiento, si introducimos otra constante de separación $-\mu$ en (5), entonces

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu \quad \text{y} \quad \frac{T'}{kT} + \lambda = -\mu$$

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{y} \quad T' + k(\lambda + \mu)T = 0. \tag{6}$$

Ahora las condiciones homogéneas de frontera

$$\left.\begin{matrix} u(0, y, t) = 0, & u(b, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, & u(x, c, t) = 0 \end{matrix}\right\} \text{ implica } \left\{\begin{matrix} X(0) = 0, & X(b) = 0 \\ Y(0) = 0, & Y(c) = 0. \end{matrix}\right.$$

Por lo tanto, tenemos dos problemas de Sturm-Liouville, uno en la variable x,

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, X(b) = 0 \tag{7}$$

y el otro en la variable y,

$$Y'' + \mu Y = 0, Y(0) = 0, Y(c) = 0 \tag{8}$$

La consideración usual de casos ($\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\mu = 0$, $\lambda = -\beta^2 < 0$, y así sucesivamente) nos lleva a dos conjuntos independientes de valores propios definidos por sen $\lambda b = 0$ y sen $\mu c = 0$. Estas ecuaciones, a la vez, implican

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad \text{y} \quad \mu_n = \frac{n^2\pi^2}{c^2}. \tag{9}$$

Las funciones propias correspondientes son

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x, \; m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{y} \quad Y(y) = c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y, \; n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Después de sustituir los valores de (9) en la ecuación diferencial de primer orden de (6), su solución general es $T(t) = c_5 e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t}$. Una solución producto de la ecuación de calor en dos dimensiones que satisface las cuatro condiciones homogéneas de frontera es, por lo tanto,

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y,$$

donde A_{mn} es una constante arbitraria. Debido a que contamos con dos conjuntos de valores propios, ello invita a probar con el principio de superposición en la forma de una doble suma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \tag{11}$$

Se desea que en $t = 0$ la temperatura $f(x, y)$ esté representada por

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \tag{12}$$

El cálculo de los coeficientes A_{mn} incluidos en (12) no representa en realidad problema alguno; simplemente multiplicamos la doble suma (12) por el producto sen $(m\pi x/b)$ sen $(n\pi y/c)$ e integramos sobre el rectángulo definido por $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$. Se puede deducir que

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy. \tag{13}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valores en la frontera consta de (11) con A_{mn} definida por (13). ≡

La serie (11) con coeficientes (13) se llama **serie seno en dos variables**, o **serie doble seno**. La **serie coseno en dos variables** de una función $f(x, y)$ es un poco más compleja. Si la función f se define sobre una región rectangular determinada por $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$, entonces la **serie doble coseno** está dada por

$$f(x, y) = A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} \cos \frac{m\pi}{b} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \cos \frac{n\pi}{c} y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y,$$

donde

$$A_{00} = \frac{1}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \, dx \, dy$$

$$A_{m0} = \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \, dx \, dy$$

$$A_{0n} = \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy$$

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy.$$

Consulte el problema 2 de los ejercicios 11.8 para encontrar un problema de valores en la frontera que implica el uso de una serie doble coseno.

11.8 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, y, t) = 0,\ u(\pi, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, \pi, t) = 0$
$u(x, y, 0) = u_0$

2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$
$u(x, y, 0) = xy$

En los problemas 3 y 4, resuelva la ecuación de onda (2) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, y, t) = 0,\ u(\pi, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, \pi, t) = 0$
$u(x, y, 0) = xy(x - \pi)(y - \pi)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

4. $u(0, y, t) = 0,\ u(b, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, c, t) = 0$
$u(x, y, 0) = f(x, y)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y)$

En los problemas del 5 al 7, resuelva la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (14)$$

para la temperatura de estado estable $u(x, y, z)$ del paralelepípedo rectangular mostrado en la **FIGURA 11.8.2**.

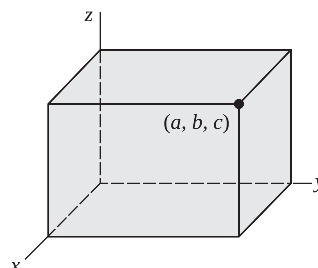


FIGURA 11.8.2 Paralelepípedo rectangular para los problemas del 5 al 7.

5. La parte superior ($z = c$) del paralelepípedo se mantiene a una temperatura $f(x, y)$ y los lados restantes conservan temperatura de cero.

6. La parte inferior ($z = 0$) del paralelepípedo se mantiene a una temperatura $f(x, y)$ y los lados restantes conservan temperatura de cero.

7. El paralelepípedo es un cubo unitario ($a = b = c = 1$) en el que el lado superior ($z = 1$) y el lado inferior ($z = 0$) se mantienen a las temperaturas constantes u_0 y $-u_0$, respectivamente, y los lados restantes conservan temperatura de cero.

11 Ejercicios de repaso Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 y 2, mediante separación de variables, encuentre las soluciones producto $u = X(x)Y(y)$ de la ecuación diferencial parcial que se proporciona.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

3. Encuentre la solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = u(\pi, t) - u_1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < \pi.$$

4. Proporcione una interpretación física de las condiciones de frontera del problema 3.

5. En $t = 0$, una cuerda de longitud unitaria se estira sobre el eje positivo x. Los extremos de la cuerda, $x = 0$ y $x = 1$, están anclados al eje x en $t > 0$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la velocidad inicial $g(x)$ es la que se expresa en la **FIGURA 11.R.1**.

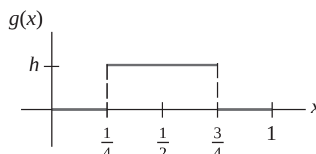


FIGURA 11.R.1 Velocidad inicial, problema 5

6. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

es una forma de la ecuación de onda cuando, desde el extremo izquierdo, se aplica a la cuerda una fuerza vertical externa que es proporcional al cuadrado de la distancia horizontal. La cuerda se encuentra anclada en $x = 0$ una unidad por arriba del eje x y sobre el eje x en $x = 1$ en $t > 0$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo con un desplazamiento inicial $f(x)$.

7. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa cuadrada que ilustra la **FIGURA 11.R.2**.

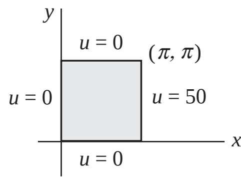


FIGURA 11.R.2 Placa cuadrada para el problema 7

8. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa semiinfinita que se muestra en la **FIGURA 11.R.3**.

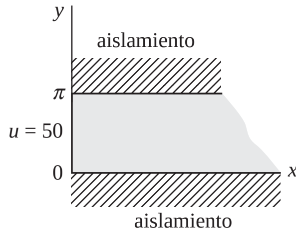


FIGURA 11.R.3 Placa semiinfinita para el problema 8

9. Resuelva el problema 8 si las fronteras $y = 0$ y $y = \pi$ se mantienen a temperatura de cero en todo momento.

10. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de la placa infinita de ancho $2L$ mostrada en la **FIGURA 11.R.4** si la temperatura inicial es u_0 en toda la placa. [*Sugerencia:* $u(x, 0) = u_0$, $-L < x < L$ es una función par de x.]

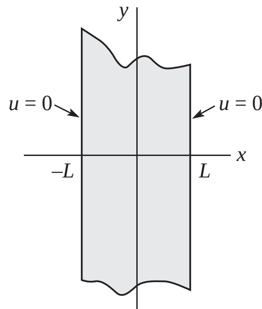


FIGURA 11.R.4 Placa infinita para el problema 10

11. ***a***) Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi.$$

b) ¿Cuál es la solución del problema de valores en la frontera del inciso *a*), si la temperatura inicial es

$$u(x, 0) = 100 \operatorname{sen} 3x - 30 \operatorname{sen} 5x?$$

12. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x = \frac{\partial u}{\partial t}, \; 0 < x < \pi, \; t > 0$$

$$u(0, t) = 400, \; u(\pi, t) = 200, \; t > 0$$

$$u(x, 0) = 400 + \operatorname{sen} x, \; 0 < x < \pi.$$

13. Calcule una solución en forma de serie del problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \; t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi.$$

No trate de calcular los coeficientes de la serie.

14. La concentración $c(x, t)$ de una sustancia que se difunde en un medio y se calienta mediante las corrientes de dicho medio satisface la ecuación diferencial parcial

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - h\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}, \; 0 < x < 1, \; t > 0,$$

donde k y h son constantes. Resuelva la ecuación diferencial parcial sujeta a

$$c(0, t) = 0, \qquad c(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = c_0, \qquad 0 < x < 1,$$

donde c_0 es una constante.

PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA EN OTROS SISTEMAS COORDENADOS

12

Estructura del capítulo

En el capítulo anterior utilizamos las series de Fourier para resolver problemas de valores en la frontera descritos mediante el sistema coordenado cartesiano, o rectangular. En este capítulo finalmente pondremos en práctica la teoría de la serie de Fourier-Bessel (sección 12.2) y de la serie de Fourier-Legendre (sección 12.3) para resolver problemas de valores en la frontera descritos en **coordenadas cilíndricas** o en **coordenadas esféricas**.

12.1 Problemas en coordenadas polares

Introducción Todos los problemas de valores en la frontera estudiados hasta el momento se han expresado en términos de coordenadas rectangulares. Sin embargo, si deseáramos calcular la temperatura presente en un disco, en un disco cilíndrico o en una esfera, naturalmente que trataríamos de describir los problemas en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, respectivamente.

Como en esta sección solamente consideramos problemas que involucran temperaturas en estado estable en coordenadas polares, lo primero que debemos hacer es convertir la ya familiar ecuación de Laplace dada en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

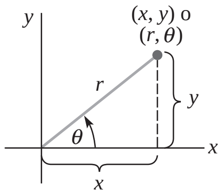


FIGURA 12.1.1 Las coordenadas polares de un punto (x, y) son (r, θ)

Laplaciano en coordenadas polares Las relaciones que existen entre las coordenadas polares en el plano y las coordenadas rectangulares están dadas por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Véase la **FIGURA 12.1.1**. El primer par de ecuaciones transforma las coordenadas polares (r, θ) en coordenadas rectangulares (x, y); el segundo par de ecuaciones nos permite transformar coordenadas rectangulares en coordenadas polares. Estas ecuaciones también hacen posible la conversión del laplaciano bidimensional de la función u, $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, a coordenadas polares. Se invita al lector a desarrollar detalladamente los cálculos de la regla de la cadena y demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\text{sen}^2\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{sen}^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{2}$$

Mediante la suma de (1) y (2) y la simplificación obtenemos el laplaciano de u en coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

En la presente sección solamente nos enfocaremos en los problemas de valores en la frontera que involucren a la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{3}$$

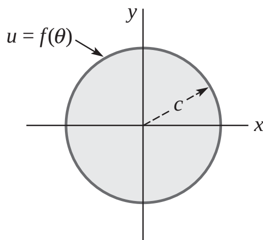


FIGURE 12.1.2 El problema de Dirichlet aplicado a un círculo

Nuestro primer ejemplo es el problema de Dirichlet aplicado a un disco. Deseamos resolver la ecuación de Laplace (3) para encontrar la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en un disco o placa circular de radio c cuando la temperatura de la circunferencia es $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. Consúltese la **FIGURA 12.1.2**. Se supone que dos lados de la placa se encuentran aislados. Este problema aparentemente simple es diferente a cualquiera de los ejemplos estudiados en el capítulo anterior.

EJEMPLO 1 Temperaturas estables en una placa circular

Resuelva la ecuación de Laplace (3) sujeta a $u(c, \theta) = f(\theta)$, $\quad 0 < \theta < 2\pi$.

Solución Antes de intentar la separación de variables, podemos observar que la única condición de frontera es no homogénea. En otras palabras, no existen condiciones explícitas en el enunciado del problema que nos permitan determinar los coeficientes de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias por separado o los valores propios requeridos. Sin embargo, hay algunas condiciones implícitas.

En primera instancia, nuestra intuición nos lleva a esperar que la temperatura $u(r, \theta)$ sea continua y, por ende, acotada dentro de un círculo $r = c$. Además, la temperatura $u(r, \theta)$ debe tener un solo valor, lo cual significa que el valor de u debe ser el mismo en un punto específico del círculo sin importar la descripción polar de dicho punto. Como $(r, \theta + 2\pi)$ es una descripción equivalente del punto (r, θ), debemos tener $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$. Esto es, $u(r, \theta)$ debe ser periódica en θ con periodo de 2π. Si estamos buscando una solución producto $u = R(r)\Theta(\theta)$, entonces es necesario que $\Theta(\theta)$ sea periódica en 2π.

Con todo lo anterior en mente, optamos por escribir la constante de separación en la separación de variables como λ:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

Las ecuaciones separadas son, por lo tanto,

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{4}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{5}$$

Estamos buscando una solución al problema

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \tag{6}$$

A pesar de que (6) no es un problema normal de Sturm-Liouville, el problema genera valores propios y funciones propias. Estas últimas forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De las tres soluciones generales posibles de (5),

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta, \qquad \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh \alpha\theta + c_2 \operatorname{senh} \alpha\theta, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{8}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \alpha\theta + c_2 \operatorname{sen} \alpha\theta, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0 \tag{9}$$

podemos eliminar (8) como inherentemente no periódica a menos que $c_1 = c_2 = 0$. De manera similar, la solución (7) es no periódica a menos que definamos $c_2 = 0$. A la solución constante que permanece $\Theta(\theta) = c_1, c_1 \neq 0$, puede asignársele cualquier periodo; y así $\lambda = 0$ es un valor propio. Por último, la solución (9) será periódica en 2π si tomamos $\alpha = n$, donde $n = 1, 2, \ldots$.* Los valores propios de (6) son entonces $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Si hacemos que $\lambda_0 = 0$ corresponda con $n = 0$, las funciones propias de (6) son

$$\Theta(\theta) = c_1, n = 0 \quad \text{y} \quad \Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \operatorname{sen} n\theta, n = 1, 2, \ldots.$$

Cuando $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ las soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler (4) son

$$R(r) = c_3 + c_4 \ln r, n = 0, \tag{10}$$

$$R(r) = c_3r^n + c_4r^{-n}, n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Ahora observe en (11) que $r^{-n} = 1/r^n$. En cualquiera de las soluciones (10) y (11) debemos definir $c_4 = 0$ con la finalidad de garantizar que la solución u esté acotada en el centro de la placa (el cual es $r = 0$). Así, las soluciones producto $u_n = R(r)\Theta(\theta)$ para la ecuación de Laplace en coordenadas polares son

$$u_0 = A_0, n = 0 \quad \text{y} \quad u_n = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta), n = 1, 2, \ldots,$$

donde hemos sustituido c_3c_1 por A_0 para $n = 0$ y por A_n para $n = 1, 2, \ldots$; la combinación c_3c_2 se ha sustituido por B_n. Por lo tanto, a partir del principio de superposición obtenemos

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{12}$$

Al aplicar la condición de frontera en $r = c$ al resultado de (12), es posible reconocer

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$$

* Por ejemplo, observe que $\cos n(\theta + 2\pi) = \cos(n\theta + 2n\pi) = \cos n\theta$.

como un desarrollo de f en una serie de Fourier completa. En consecuencia, podemos expresar las identificaciones

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c^n A_n = a_n, \quad \text{y} \quad c^n B_n = b_n.$$

Esto es,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \tag{13}$$

$$A_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta \tag{14}$$

$$B_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta. \tag{15}$$

La solución al problema consta de la serie dada en (12), donde los coeficientes A_0, A_n y B_n se definen en (13), (14) y (15), respectivamente. ≡

En el ejemplo 1 observe que, correspondiendo a cada valor propio *positivo*, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, existen dos funciones propias diferentes, las cuales son $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$. En este caso, los valores propios a veces son denominados **valores propios dobles**.

EJEMPLO 2 Temperaturas estables en una placa semicircular

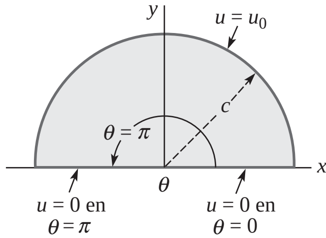


FIGURA 12.1.3 Placa semicircular del ejemplo 2

Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la placa semicircular que se muestra en la **FIGURA 12.1.3**.

Solución El problema de valores en la frontera es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \;\; 0 < \theta < \pi, 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < c.$$

Al definir $u = R(r)\Theta(\theta)$ y separar variables obtenemos

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

y

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{16}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{17}$$

Las condiciones homogéneas que se especifican en las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ se trasladan a $\Theta(0) = 0$ y $\Theta(\pi) = 0$. Estas condiciones junto con la ecuación (17) constituyen un problema normal de Sturm-Liouville:

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(0) = 0, \Theta(\pi) = 0. \tag{18}$$

Este problema tan conocido* tiene valores propios $\lambda_n = n^2$ y funciones propias $\Theta(\theta) = c_2 \operatorname{sen} n\theta$, $n = 1, 2, \ldots$. Asimismo, al reemplazar λ por n^2 la solución de (16) es $R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$. En el razonamiento utilizado en el ejemplo 1, esperábamos que una solución u del problema que estuviera acotada en $r = 0$ nos sugiriera definir $c_4 = 0$. Por lo tanto, $u_n = R(r)\Theta(\theta) = A_n r^n \operatorname{sen} n\theta$ y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

La condición de frontera que permanece en $r = c$ nos da la serie seno

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c^n \operatorname{sen} n\theta.$$

* El problema (18) es el mismo del ejemplo 2 tratado en la sección 3.9 con $L = \pi$.

En consecuencia, $$A_n c^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0 \operatorname{sen} n\theta\, d\theta,$$

y, por lo tanto, $$A_n = \frac{2u_0}{\pi c^n}\,\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

De modo que la solución del problema está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \operatorname{sen} n\theta. \quad \equiv$$

12.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas del 1 al 4, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa circular de radio $r = 1$ si la temperatura de la circunferencia es la que se proporciona.

1. $u(1, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

2. $u(1, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < \theta < \pi \\ \pi - \theta, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

3. $u(1, \theta) = 2\pi\theta - \theta^2, 0 < \theta < 2\pi$

4. $u(1, \theta) = \theta, 0 < \theta < 2\pi$

5. Resuelva el problema exterior de Dirichlet de una placa circular de radio c si $u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < 2\pi$. En otras palabras, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa que coincide con todo el plano xy en el cual se ha recortado un agujero de radio c alrededor del origen, y la temperatura en la circunferencia del agujero es $f(\theta)$. [*Sugerencia:* Suponga que la temperatura u está acotada por $r \to \infty$.]

6. Resuelva el problema de Neumann para el caso de un disco:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < c$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=c} = f(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Proporcione la condición de compatibilidad. [*Sugerencia:* Consulte el problema 21 de los ejercicios 11.5.]

7. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ del anillo que muestra la **FIGURA 12.1.4**. [*Sugerencia:* Proceda igual que en el ejemplo 1.]

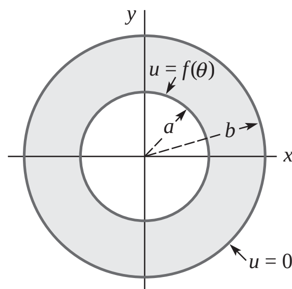


FIGURA 12.1.4 Anillo del problema 7

8. Si las condiciones de frontera para el anillo de la figura 12.1.4 son $u(a, \theta) = u_0$, $u(b, \theta) = u_1$, $0 < \theta < 2\pi$, u_0 y u_1 son constantes, demuestre que la temperatura de estado estable está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

[*Sugerencia:* Pruebe con una solución de la forma $u(r, \theta) = v(r, \theta) + \psi(r)$.]

9. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ del anillo que muestra la figura 12.1.4 si las condiciones de frontera son

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \quad u(b, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < 2\pi.$$

10. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa de cuarto de círculo que muestra la **FIGURA 12.1.5**.

11. Si las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ de la figura 12.1.5 están aisladas, tenemos entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

Determine la temperatura de estado estable si

$$u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < \theta < \pi/2. \end{cases}$$

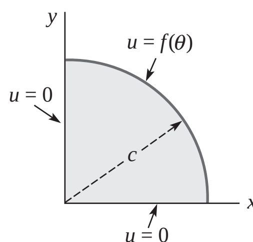


FIGURA 12.1.5 Placa de cuarto de círculo para el problema 10

12. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa infinita en forma de cuña que muestra la **FIGURA 12.1.6**. [*Sugerencia:* Suponga que la temperatura está acotada a medida que $r \to 0$ y $r \to \infty$.]

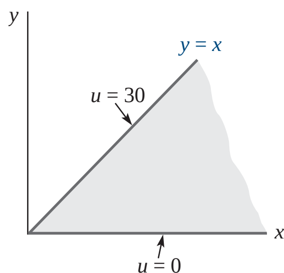


FIGURA 12.1.6 Placa infinita para el problema 12

13. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de un anillo semicircular si

$$u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta), \quad u(b, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad a < r < b.$$

14. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio $r = 1$ si

$$u(1, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = u_0, \quad 0 < r < 1,$$

donde u_0 es una constante.

15. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio $r = 2$ si

$$u(2, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi, \end{cases}$$

donde u_0 es una constante y las orillas $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ están aisladas.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

16. ***a***) Encuentre la solución de la serie para $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 cuando

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(Consulte el problema 1.)

b) Utilice un CAS, o una herramienta de graficación, para elaborar la gráfica de la suma parcial $S_5(r, \theta)$ que consta de los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución encontrada en el inciso *a*) para $r = 0.9$, $r = 0.7$, $r = 0.5$, $r = 0.3$ y $r = 0.1$. Sobreponga las gráficas en los mismos ejes coordenados.

c) Aproxime las temperaturas $u(0.9, 1.3)$, $u(0.7, 2)$, $u(0.5, 3.5)$, $u(0.3, 4)$, $u(0.1, 5.5)$. Después, aproxime $u(0.9, 2\pi - 1.3)$, $u(0.7, 2\pi - 2)$, $u(0.5, 2\pi - 3.5)$, $u(0.3, 2\pi - 4)$, $u(0.1, 2\pi - 5.5)$.

d) ¿Cuál es la temperatura en el centro de la placa circular? ¿Por qué es apropiado llamar a este valor temperatura promedio de la placa? [*Sugerencia:* Considere las gráficas del inciso *b*) y los números del inciso *c*).]

≡ Problema de análisis

17. Considere el anillo que muestra la figura 12.1.4. Analice cómo puede calcularse la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ cuando las condiciones de frontera son $u(a, \theta) = f(\theta)$, $u(b, \theta) = g(\theta)$, $0 \leq \leq \theta\ 2\pi$.

12.2 Problemas en coordenadas cilíndricas

Introducción En esta sección vamos a considerar problemas de valores en la frontera que involucran las formas de las ecuaciones de calor y de onda en coordenadas polares y una forma de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Existe algo en común entre los ejemplos y ejercicios de esta sección: cada problema de valor en la frontera posee simetría radial.

Simetría radial Las ecuaciones bidimensionales de calor y de onda

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

expresadas en coordenadas polares son, a su vez,

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

donde $u = u(r, \theta, t)$. Para resolver un problema de valor en la frontera, donde se involucre cualquiera de estas ecuaciones, mediante la separación de variables debemos definir $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Como en la sección 11.8, este supuesto nos lleva a series infinitas múltiples. Observe el problema 16 de los ejercicios 12.2. En el análisis desarrollado a continuación se considerarán los más simples, pero también importantes, problemas que poseen **simetría radial**, esto es, problemas en los que la función desconocida u es independiente de la coordenada angular θ. En este caso, las ecuaciones de calor y de onda presentadas en (1) toman a su vez las formas

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

donde $u = u(r, t)$. Se dice que las vibraciones descritas mediante la segunda ecuación de (2) son **vibraciones radiales**.

El primer ejemplo tiene que ver con las vibraciones radiales no amortiguadas de una membrana circular delgada. Suponemos desplazamientos pequeños y el movimiento es tal que cada punto de la membrana se mueve en dirección perpendicular al plano *xy* (vibraciones transversales), esto es, el eje *u* es perpendicular al plano *xy*. Un modelo físico a tener en mente durante el análisis de este ejemplo es un tambor vibratorio.

EJEMPLO 1 Vibraciones radiales de una membrana circular

Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ de una membrana circular de radio c, sujeta por su circunferencia, si el desplazamiento inicial es $f(r)$ y la velocidad inicial $g(r)$. Consulte la **FIGURA 12.2.1**.

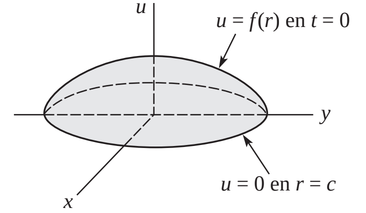


FIGURA 12.2.1 Desplazamiento inicial de la membrana circular del ejemplo 1

Solución El problema de valores en la frontera a resolver es

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < c, t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < c.$$

Al sustituir $u = R(r)T(t)$ en la ecuación diferencial parcial y separando variables obtenemos

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda. \tag{3}$$

Observe en (3) que regresamos a nuestra acostumbrada constante de separación $-\lambda$. Las dos ecuaciones obtenidas a partir de (3) son

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{4}$$

y

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Debido a la naturaleza vibratoria del problema, la ecuación (5) sugiere que usemos solamente $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. Ahora (4) no es una ecuación de Cauchy-Euler, pero es la ecuación diferencial paramétrica de Bessel de orden $\nu = 0$, esto es, $rR'' + R' + \alpha^2 rR = 0$. A partir de la expresión (13) dada en la sección 5.3, la solución general de la última ecuación es

$$R = c_1J_0(\alpha r) + c_2Y_0(\alpha r). \tag{6}$$

La solución general de la ya conocida ecuación (5) es

$$T = c_3\cos a\alpha t + c_4\text{sen } a\alpha t.$$

Recuerde que la función de Bessel del segundo tipo de orden cero tiene la propiedad de que $Y_0(\alpha r) \to -\infty$ conforme $r \to 0^+$, por ello el supuesto implícito de que el desplazamiento $u(r, t)$ debe estar acotado en $r = 0$ nos obliga a definir $c_2 = 0$ en (6). Por lo tanto, $R = c_1J_0(\alpha r)$.

Como la condición de frontera $u(c, t) = 0$ es equivalente a $R(c) = 0$, debemos tener $c_1J_0(\alpha c) = 0$. Descartamos $c_1 = 0$ (porque nos llevaría a una solución trivial de la ecuación diferencial parcial), en consecuencia

$$J_0(\alpha c) = 0. \tag{7}$$

Si $x_n = \alpha_n c$ son las raíces positivas de (7), entonces $\alpha_n = x_n/c$ y los valores propios del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2 = x_n^2/c^2$ y las funciones propias son $c_1J_0(\alpha_n r)$. Las soluciones producto que satisfacen la ecuación diferencial parcial y la condición limítrofe son

$$u_n = R(r)T(t) = (A_n\cos a\alpha_n t + B_n\text{sen } a\alpha_n t)J_0(\alpha_n r), \tag{8}$$

donde se ha llevado a cabo la acostumbrada reasignación de constantes. Por lo tanto, el principio de superposición nos da

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t)J_0(\alpha_n r). \tag{9}$$

Las condiciones iniciales dadas determinan los coeficientes A_n y B_n.

Fijamos el valor de $t = 0$ en (9) y utilizando $u(r, 0) = f(r)$ obtenemos

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\alpha_n r). \tag{10}$$

Este último resultado puede identificarse como el desarrollo de Fourier-Bessel de la función f en el intervalo $(0, c)$. De modo que mediante una comparación directa de las expresiones (7) y (10) con (7) y (15) de la sección 10.6, podemos identificar los coeficientes A_n con aquellos proporcionados en (16) de la sección 10.6:

$$A_n = \frac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)}\int_0^c rJ_0(\alpha_n r)f(r)\,dr. \tag{11}$$

A continuación, diferenciamos (9) respecto a t, fijamos el valor de $t = 0$ y utilizamos $u_t(r, 0) = g(r)$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}a\alpha_n B_n J_0(\alpha_n r).$$

Éste es ahora el desarrollo de Fourier-Bessel de la función g. Por identificación del coeficiente total $a\alpha_n B_n$ con (16) de la sección 10.6 podemos escribir

$$B_n = \frac{2}{a\alpha_n c^2 J_1^2(\alpha_n c)}\int_0^c rJ_0(\alpha_n r)g(r)\,dr. \tag{12}$$

Por último, la solución del problema de valores en la frontera dado es la serie (9) con los coeficientes A_n y B_n definidos en (11) y (12). ≡

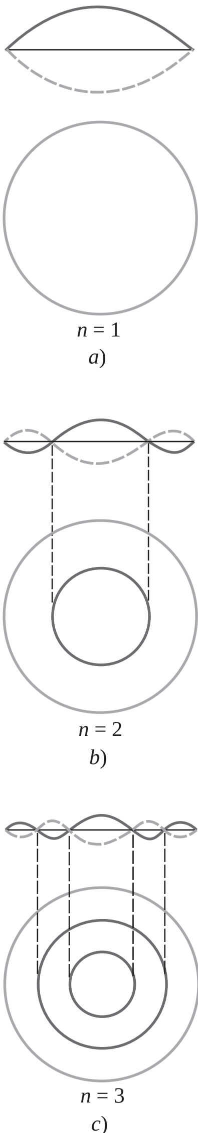


FIGURA 12.2.2 Ondas estacionarias

Ondas estacionarias De manera análoga a (8) de la sección 5.4, las soluciones producto (8) se llaman **ondas estacionarias**. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, las ondas estacionarias son, en esencia, la gráfica de $J_0(\alpha_n r)$ con la amplitud variante en el tiempo

$$A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t.$$

Las ondas estacionarias a distintos valores de tiempo se representan mediante las gráficas en línea discontinua de la **FIGURA 12.2.2**. En el intervalo $(0, c)$, los ceros de cada onda estacionaria son las raíces de $J_0(\alpha_n r) = 0$ y corresponden al conjunto de puntos de una onda estacionaria donde no hay movimiento. A este conjunto de puntos se le llama **línea nodal**. Si (como en el ejemplo 1) las raíces positivas de $J_0(\alpha_n c) = 0$ se expresan mediante x_n, entonces $x_n = \alpha_n c$ que implica $\alpha_n = x_n/c$ y, en consecuencia, los ceros de las ondas estacionarias son determinados a partir de

$$J_0(\alpha_n r) = J_0\left(\frac{x_n}{c}r\right) = 0.$$

Ahora, en la tabla 5.3.1, los primeros tres ceros positivos de J_0 son (de manera aproximada) $x_1 = 2.4$, $x_2 = 5.5$ y $x_3 = 8.7$. Por lo tanto, $n = 1$, la primera raíz positiva de

$$J_0\left(\frac{x_1}{c}r\right) = 0 \quad \text{es} \quad \frac{2.4}{c}r = 2.4 \quad \text{o} \quad r = c.$$

Como estamos buscando ceros de las ondas estacionarias en el intervalo abierto $(0, c)$, el último resultado significa que la primera onda estacionaria no tiene línea nodal. Para $n = 2$, las primeras dos raíces positivas de

$$J_0\left(\frac{x_2}{c}r\right) = 0 \quad \text{están determinadas a partir de} \quad \frac{5.5}{c}r = 2.4 \quad \text{y} \quad \frac{5.5}{c}r = 5.5.$$

Por lo tanto, la segunda onda estacionaria tiene una línea nodal definida por $r = x_1c/x_2 = 2.4c/5.5$. Observe que $r \approx 0.44c < c$. Para $n = 3$, un análisis similar muestra la existencia de dos líneas nodales definidas por $r = x_1c/x_3 = 2.4c/8.7$ y $r = x_2c/x_3 = 5.5c/8.7$. En general, la n-ésima onda estacionaria tiene $n - 1$ líneas nodales $r = x_1c/x_n$, $r = x_2c/x_n$, $\ldots$, $r = x_{n-1}c/x_n$. Como $r = constante$ es la ecuación de un círculo en coordenadas polares, en la figura 12.2.2 vemos que las líneas nodales de una onda estacionaria son círculos concéntricos.

■ **Uso de la computadora** En el modelo resuelto en el ejemplo 1, mediante el uso de la herramienta de animación de un CAS, es posible observar el efecto de un solo tambor. En el problema 19 de los ejercicios 12.2 se pide al lector calcular la solución dada en (9) cuando

$$c = 1,\ f(r) = 0, \qquad \text{y} \qquad g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1. \end{cases}$$

Algunas tomas de la "película" del tambor vibrador se muestran en la **FIGURA 12.2.3**.

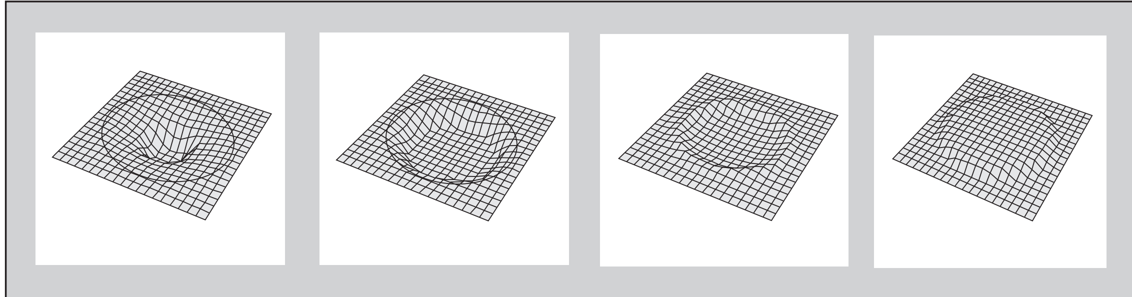


FIGURA 12.2.3 Tomas de "película" en un CAS

■ **El laplaciano en coordenadas cilíndricas** En la **FIGURA 12.2.4** podemos observar que la relación entre las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio y sus coordenadas rectangulares está dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z.$$

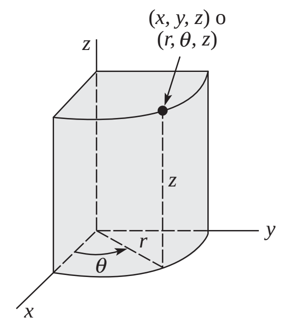


FIGURA 12.2.4 Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son (r, θ, z)

A partir de la deducción del laplaciano en coordenadas polares (véase la sección 12.1), de inmediato es posible deducir que el laplaciano de una función u en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

EJEMPLO 2 Temperaturas estables en un cilindro

Encuentre la temperatura de estado estable en el cilindro que muestra la **FIGURA 12.2.5**.

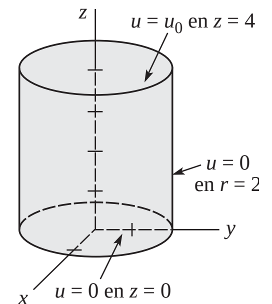


FIGURA 12.2.5 Cilindro finito del ejemplo 2

Solución Las condiciones de frontera sugieren que la temperatura u posee simetría radial. De acuerdo con eso, $u(r, z)$ se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 2,\ 0 < z < 4$$

$$u(2, z) = 0, \quad 0 < z < 4$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, 4) = u_0, \quad 0 < r < 2.$$

Utilizamos $u = R(r)Z(z)$ y separamos variables para obtener

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda. \tag{13}$$

y

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{14}$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{15}$$

Mediante la selección de $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, la solución de (14) es

$$R(r) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r),$$

y, puesto que la solución de (15) está definida en el intervalo finito [0, 2], escribimos su solución general como

$$Z(z) = c_3\cosh\alpha z + c_4\,\mathrm{senh}\,\alpha z.$$

Así como en el ejemplo 1, el supuesto de que la temperatura u está acotada en $r = 0$ obliga a que $c_2 = 0$. La condición $u(2, z) = 0$ implica que $R(2) = 0$. Esta ecuación,

$$J_0(2\alpha) = 0, \tag{16}$$

define los valores propios positivos $\lambda_n = \alpha_n^2$ del problema. Por último, $Z(0) = 0$ implica que $c_3 = 0$. Entonces tenemos $R = c_1 J_0(\alpha_n r)$, $Z = c_4 \operatorname{senh} \alpha_n z$,

$$u_n = R(r)\,Z(z) = A_n \operatorname{senh} \alpha_n z\, J_0(\alpha_n r)$$

y

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \alpha_n z\, J_0(\alpha_n r).$$

La condición de frontera restante en $z = 4$ nos da entonces la serie de Fourier-Bessel

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_0(\alpha_n r),$$

de tal forma que, en vista de (16), los coeficientes están definidos por la expresión (16) de la sección 10.6,

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{2u_0}{2^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^2 r J_0(\alpha_n r)\, dr.$$

Para evaluar la última integral, primero utilizamos la sustitución $t = \alpha_n r$, seguida de $\frac{d}{dt}[tJ_1(t)] = tJ_0(t)$. A partir de

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{u_0}{2\alpha_n^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^{2\alpha_n} \frac{d}{dt}[tJ_1(t)]\, dt = \frac{u_0}{\alpha_n J_1(2\alpha_n)},$$

obtenemos

$$A_n = \frac{u_0}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}.$$

Por último, la temperatura del cilindro es

$$u(r, z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \alpha_n z}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n\, J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r).$$ ≡

No concluya a partir de los dos ejemplos que cada problema de valores en la frontera en coordenadas cilíndricas produce una serie de Fourier-Bessel.

EJEMPLO 3 Temperaturas estables en un cilindro

Encuentre las temperaturas de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro definido por $0 \le r \le 1$, $0 \le z \le 1$ si las condiciones en la frontera son

$$u(1, z) = 1 - z, \quad 0 < z < 1$$
$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, 1) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Solución Debido a la condición no homogénea especificada en $r = 1$ no esperamos que se definan los valores propios del problema en términos de los ceros de una función Bessel del primer tipo. Como se hizo en la sección 12.1, es conveniente en este problema usar λ como la constante de separación. Por lo tanto, de (13) del ejemplo 2 vemos que la separación de variables produce ahora dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$rR'' + R' - \lambda rR = 0 \quad \text{y} \quad Z'' + \lambda Z = 0.$$

Deberá verificar que los dos casos $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2 < 0$ solamente lleva a la solución trivial $u = 0$. En el caso $\lambda = -\alpha^2 > 0$ las ED son

$$rR'' + R' - \alpha^2 rR = 0 \quad \text{y} \quad Z'' + \alpha^2 Z = 0.$$

La primera ecuación es la forma paramétrica modificada de la educación diferencial de orden $v = 0$. La solución de esta ecuación es $R(r) = c_1I_0(\alpha r) + c_2K_0(\alpha r)$. Se define inmediatamente $c_2 = 0$ porque la función de Bessel modificada de segundo tipo $K_0(\alpha r)$ no es acotada en $r = 0$. Por ello, $R(r) = c_1I_0(\alpha r)$.

Ahora los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville

$$Z'' + \alpha^2 Z = 0, \qquad Z(0) = 0, Z(1) = 0$$

son $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $Z(z) = c_3$ sen $n\pi z$. De este modo el producto de las soluciones que satisface la ecuación diferencial parcial y las condiciones de frontera homogéneas son

$$u_n = R(r)Z(z) = A_nI_0(n\pi r) \text{ sen } n\pi z$$

A continuación se forma

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0(n\pi r)\text{sen } n\pi z.$$

La condición restante en $r = 1$ produce la serie seno de Fourier

$$u(1, z) = 1 - z = \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0(n\pi)\text{sen } n\pi z.$$

De (5) de la sección 10.6 podemos escribir

$$A_nI_0(n\pi) = 2\int_0^1 (1 - z)\text{sen } n\pi z dz = \frac{2}{n\pi} \qquad \leftarrow \text{integración por partes}$$

y
$$A_n = \frac{2}{n\pi I_0(n\pi)}.$$

La temperatura de estado estable es entonces

$$u(r, z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(n\pi r)}{n\pi I_0(n\pi)}\text{sen } n\pi z. \qquad \equiv$$

12.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

1. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ del ejemplo 1 si $f(r) = 0$ y a la membrana circular se le imprime una velocidad inicial con dirección hacia arriba.

2. Una membrana circular de radio unitario está sujeta a lo largo de su circunferencia. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ si la membrana se empieza a mover desde el reposo con un desplazamiento inicial $f(r) = 1 - r^2$, $0 < r < 1$. [*Sugerencia:* Consulte el problema 10 de los ejercicios 10.6.]

3. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro del ejemplo 2 si las condiciones de frontera son $u(2, z) = 0$, $0 < z < 4$, $u(r, 0) = u_0$, $u(r, 4) = 0$, $0 < r < 2$.

4. Si la cara lateral del cilindro del ejemplo 2 está aislada, entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, \quad 0 < z < 4.$$

a) Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ cuando $u(r, 4) = f(r)$, $0 < r < 2$.

b) Demuestre que la temperatura de estado estable determinada en el inciso *a*) se simplifica a $u(r, z) = u_0z/4$ cuando $f(r) = u_0$. [*Sugerencia:* Utilice (12) de la sección 10.6.]

En los problemas del 5 al 8, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en un cilindro finito definido por $0 \le r \le 1$, $0 \le z \le 1$ si las condiciones de frontera están dadas como se indica.

5. $u(1, z) = z, \quad 0 < z < 1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0, \quad 0 < r < 1$$

6. $u(1, z) = z, \quad 0 < z < 1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

$u(r, 1) = 0, \quad 0 < r < 1$

7. $u(1, z) = u_0, \quad 0 < z < 1$

$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0, \quad 0 < r < 1$$

8. $u(1, z) = 0, \quad 0 < z < 1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$u(r, 1) = u_0, \quad 0 < r < 1$$

9. La temperatura de una placa circular con radio $r = c$ está determinada a partir del problema de valor en la frontera

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < c, t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < c.$$

Despeje $u(r, t)$.

10. Resuelva el problema 9 si la orilla $r = c$ de la placa se encuentra aislada.

11. Cuando existe transferencia de calor desde la pared lateral de un cilindro infinito de radio unitario (véase la **FIGURA 12.2.6**) hacia el medio circundante con temperatura de cero, la temperatura dentro del cilindro está determinada por

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -hu(1, t), \quad h > 0, t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < 1.$$

Despeje $u(r, t)$.

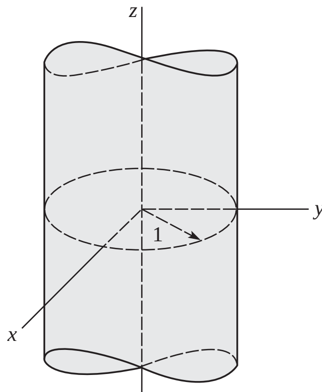


FIGURA 12.2.6 Cilindro infinito del problema 11

12. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ para un cilindro semiinfinito de radio unitario ($z \geq 0$) cuando existe transferencia de calor desde la cara lateral hacia el medio circundante con temperatura de cero y si la temperatura de la base $z = 0$ se mantiene constante como u_0.

13. Una placa circular está compuesta por dos materiales distintos en forma de círculos concéntricos. Consulte la **FIGURA 12.2.7**. En la placa, la temperatura está determinada por el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 2, t > 0$$

$$u(2, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = \begin{cases} 200, & 0 < r < 1 \\ 100, & 1 < r < 2. \end{cases}$$

Encuentre el valor de $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Sea $u(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$.]

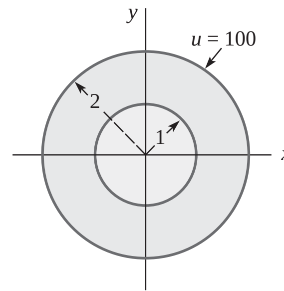


FIGURA 12.2.7 Placa circular del problema 13

14. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \beta = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0, \quad \beta \text{ una constante}$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

15. El desplazamiento horizontal $u(x, t)$ de una pesada cadena de longitud L que oscila en un plano vertical satisface la ecuación diferencial parcial

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, t > 0.$$

Véase la **FIGURA 12.2.8**.

a) Utilice $-\lambda$ como constante de separación para demostrar que la ecuación diferencial ordinaria en la variable espacial x es $xX'' + X' + \lambda X = 0$. Resuelva esta ecuación mediante la sustitución $x = \tau^2/4$.

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para resolver la ecuación diferencial parcial dada y sujeta a

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

[*Sugerencia:* Suponga que las oscilaciones en el extremo libre $x = 0$ son finitas.]

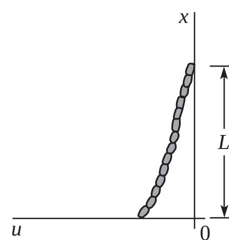


FIGURA 12.2.8 Cadena oscilatoria del problema 15

16. En este problema consideramos el caso general (esto es, dependiente de θ) de una membrana circular vibratoria de radio c:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < c, t > 0$$

$$u(c, \theta, t) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, t > 0$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r, \theta), \quad 0 < r < c, 0 < \theta < 2\pi.$$

a) Suponga que $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y las constantes de separación son $-\lambda$ y $-\nu$. Demuestre que las ecuaciones diferenciales separadas son

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad \Theta'' + \nu\Theta = 0$$

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \nu)\, R = 0.$$

b) Con $\lambda = \alpha^2$ y $\nu = \beta^2$ resuelva las ecuaciones separadas del inciso *a*).

c) Demuestre que los valores propios y las funciones propias del problema son los siguientes:
Valores propios: $\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
funciones propias: 1, $\cos n\theta$, $\operatorname{sen} n\theta$.
Valores propios: $\lambda_{ni} = x_{ni}/c$, $i = 1, 2, \ldots$, donde, para cada n, x_{ni} son las raíces positivas de $J_n(\lambda c) = 0$; funciones propias: $J_n(\lambda_{ni}r) = 0$.

d) Utilice el principio de superposición para determinar la solución de series múltiples. No calcule los coeficientes.

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

17. *a*) Considere el ejemplo 1 con $a = 1$, $c = 10$, $g(r) = 0$, y $f(r) = 1 - r/10$, $0 < r < 10$. Utilice un CAS como ayuda para encontrar los valores numéricos de los primeros tres valores propios λ_1, λ_2, λ_3 del problema de valor en la frontera y los primeros tres coeficientes A_1, A_2, A_3 de la solución $u(r, t)$ dada en (9). Escriba la tercera suma parcial $S_3(r, t)$ de la solución serie.

b) Utilice un CAS para trazar la gráfica de $S_3(r, t)$ para $t =$ 0, 4, 10, 12, 20.

18. Resuelva el problema 9 bajo las condiciones de frontera $u(c, t) = 200$, $u(r, 0) = 0$. En estas condiciones esperaríamos de manera intuitiva que en cualquier punto interior de la placa, $u(r, t) \to 200$ conforme $t \to \infty$. Suponga que $c = 10$ y que la placa es de hierro fundido, entonces $k = 0.1$ (aproximadamente). Utilice un CAS como ayuda para encontrar los valores numéricos de los primeros cinco valores propios λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 del problema de valor en la frontera y de los cinco coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en la solución $u(r, t)$. Exprese la solución aproximada correspondiente por medio de $S_5(r, t)$. Grafique $S_5(5, t)$ y $S_5(0, t)$ en un intervalo lo suficientemente grande $[0, T]$. Utilice las gráficas de $S_5(5, t)$ y $S_5(0, t)$ para estimar los tiempos (en segundos) para los cuales $u(5, t) \approx 100$ y $u(0, t) \approx 100$. Repita para $u(5, t) \approx 200$ y $u(0, t) \approx 200$.

19. Considere un tambor idealizado que consista en una delgada membrana estirada sobre un marco circular de radio unitario. Cuando se golpea el tambor en su centro, escuchamos un sonido descrito con frecuencia como un ruido sordo más que como un tono melódico. Podemos modelar un golpe del tambor utilizando el problema de valor en la frontera resuelto en el ejemplo 1.

a) Encuentre la solución $u(r, t)$ dada en (9) cuando $c = 1$, $f(r) = 0$, y

$$g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1. \end{cases}$$

b) Demuestre que la frecuencia de la onda estacionaria $u_n(r, t)$ es $f_n = a\lambda_n/2\pi$, donde λ_n es el n-ésimo cero positivo de $J_0(x)$. A diferencia del resultado de la ecuación de onda unidimensional estudiada en la sección 11.4, las frecuencias no son enteros múltiplos de la frecuencia fundamental f_1. Demuestre que $f_2 \approx 2.295f_1$ y $f_3 \approx 3.598f_1$. Decimos que el sonido producido por el tambor genera **sobretonos no armónicos**. Como consecuencia, la función de desplazamiento $u(r, t)$ es no periódica, y así nuestro tambor ideal no puede generar un tono sostenido.

c) Sean $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$ y $v_0 = 1$ en la solución del inciso *a*). Utilice un CAS para graficar la quinta suma parcial $S_5(r, t)$ para los tiempos $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 5.9, 6.0$ en el intervalo $[-1, 1]$. Use la herramienta de animación de su sistema de cómputo para generar una "película" de estas vibraciones.

d) Para hacer el reto aún mayor, utilice las herramientas de graficación 3D de su CAS para realizar una película del movimiento del tambor circular que aparece en la sección transversal del inciso *c*). [*Sugerencia:* Existen varias maneras de proceder. Para un tiempo fijo, grafique ya sea u en función de x y y utilizando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ o utilice la función equivalente en el programa *Mathematica* llamada **CylindricalPlot3D**.]

12.3 Problemas en coordenadas esféricas

■ Introducción En esta sección continuamos nuestro análisis de los problemas de valores en la frontera en diferentes sistemas coordenados. Aquí vamos a analizar problemas que involucren las ecuaciones de calor, de onda y de Laplace en coordenadas esféricas.

■ Laplaciano en coordenadas esféricas Tal como indica la **FIGURA 12.3.1**, un punto en el espacio tridimensional se describe en términos de coordenadas rectangulares y esféricas. Las coordenadas rectangulares x, y y z del punto se encuentran relacionadas con sus coordenadas esféricas r, θ y ϕ mediante las ecuaciones

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{1}$$

Si utilizamos las ecuaciones incluidas en (1), es posible demostrar que en el sistema de coordenadas esféricas el laplaciano $\nabla^2 u$ es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2}$$

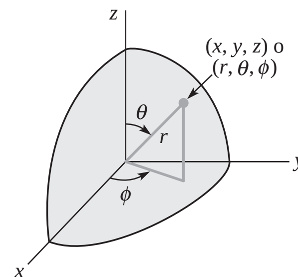


FIGURA 12.3.1 Las coordenadas esféricas del punto (x, y, z) son (r, θ, ϕ)

Como el lector se podrá imaginar, los problemas involucrados con la ecuación (1) pueden resultar muy complejos. En consecuencia, solamente se considerarán algunos de los problemas más sencillos que sean independientes del ángulo azimutal ϕ.

Nuestro primer ejemplo es el problema de Dirichlet para una esfera.

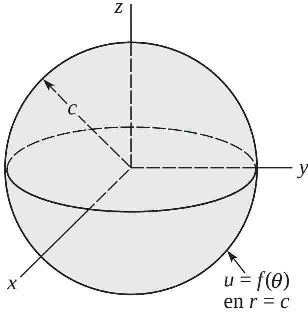


FIGURA 12.3.2 Problema de Dirichlet para la esfera del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Temperaturas estables en una esfera

Calcule la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ para la esfera que se muestra en la **FIGURA 12.3.2**.

Solución La temperatura está determinada a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad 0 < r < c, 0 < \theta < \pi$$

$$u(c, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

Si $u = R(r)\Theta(\theta)$, la ecuación diferencial parcial se separa como

$$\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \cot\theta\,\Theta'}{\Theta} = \lambda,$$

por lo que

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + \lambda \operatorname{sen}\theta\,\Theta = 0. \tag{4}$$

Después de sustituir $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, (4) se convierte en

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \lambda\Theta = 0, \quad -1 \le x \le 1. \tag{5}$$

Esta última ecuación es una forma de la ecuación de Legendre (consulte los problemas 46 y 47 de los ejercicios 5.3). Ahora las únicas soluciones de (5) que son continuas y tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ correspondientes a $\lambda^2 = n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Por lo tanto, hacemos que las soluciones de (4) sean

$$\Theta = P_n(\cos\theta).$$

Además, cuando $\lambda = n(n + 1)$, la solución general de la ecuación de Cauchy-Euler (3) es

$$R = c_1r^n + c_2r^{-(n+1)}.$$

Como de nuevo esperamos que $u(r, \theta)$ esté acotada en $r = 0$, definimos $c_2 = 0$. Entonces $u_n = A_nr^nP_n(\cos\theta)$, y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta).$$

En $r = c$,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n c^n P_n(\cos\theta).$$

Por lo tanto, A_nc^n son los coeficientes de la serie de Fourier-Legendre (23) de la sección 10.6:

$$A_n = \frac{2n + 1}{2c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Se deduce que la solución es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n + 1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad \equiv$$

12.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

1. Resuelva el problema del ejemplo 1 si

$$f(\theta) = \begin{cases} 50, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Escriba los primeros cuatro términos diferentes de cero de la solución serie. [*Sugerencia:* Véase el ejemplo 3 de la sección 10.6.]

2. La solución $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 pudo interpretarse también como el potencial dentro de la esfera debido a una distribución de carga $f(\theta)$ en su superficie. Calcule el potencial fuera de la esfera.

3. Encuentre la solución del problema del ejemplo 1 si $f(\theta) = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia:* $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Utilice la ortogonalidad.]

4. Encuentre la solución del problema del ejemplo 1 si $f(\theta) = 1 - \cos 2\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia:* Consulte el problema 18, ejercicios 10.6.]

5. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ dentro de una esfera hueca $a < r < b$ si la superficie interna $r = a$ se mantiene a temperatura $f(\theta)$ y su superficie externa $r = b$ se mantiene a cero grados. El primer octante de la esfera aparece en la **FIGURA 12.3.3**.

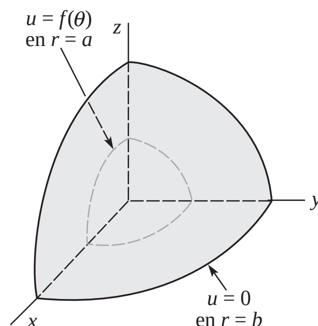


FIGURA 12.3.3 Esfera hueca del problema 5

6. La temperatura de estado estable para un hemisferio de radio $r = c$ se determina mediante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, 0 < r < c, 0 < \theta < \pi/2$$

$$u(r, \pi/2) = 0, 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < \pi/2.$$

Despeje $u(r, \theta)$. [*Sugerencia:* $P_n(0) = 0$ solamente cuando n es impar. También consulte el problema 20 de los ejercicios 10.6.]

7. Resuelva el problema 6 cuando la base de la semiesfera se encuentra aislada; esto es,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0, \quad 0 < r < c.$$

8. Resuelva el problema 6 para $r > c$.

9. La temperatura en función del tiempo dentro de una esfera con radio unitario se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$u(1, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Despeje $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Compruebe que el lado izquierdo de la ecuación diferencial parcial puede escribirse como $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $ru(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$. Utilice únicamente funciones acotadas conforme $r \to 0$.]

10. Una esfera sólida uniforme de radio 1 que tiene temperatura inicial constante u_0 se deja caer en un recipiente de grandes dimensiones que contiene un fluido a temperatura constante u_1 ($u_1 > u_0$) en todo momento. Véase la **FIGURA 12.3.4**. Puesto que existe transferencia de calor a través de la frontera $r = 1$, la temperatura $u(r, t)$ de la esfera se determina a partir del problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -h(u(1, t) - u_1), \quad 0 < h < 1$$

$$u(r, 0) = u_0, \quad 0 < r < 1.$$

Despeje $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Proceda como en el problema 9.]

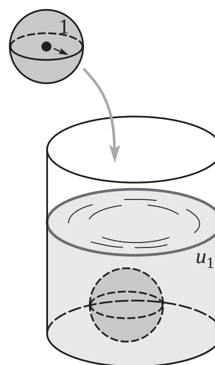


FIGURA 12.3.4 Recipiente del problema 10

11. Resuelva el problema de valores en la frontera que involucre vibraciones esféricas:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < c, t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < c.$$

[*Sugerencia:* Escriba el miembro izquierdo de la ecuación diferencial parcial como $a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $v(r, t) = ru(r, t)$.]

12. Una esfera conductora, de radio $r = c$, está aterrizada y puesta en un campo eléctrico uniforme de intensidad E en la dirección z. El potencial $u(r, \theta)$ fuera de la esfera está determinado a partir del problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad r > c, 0 < \theta < \pi$$

$$u(c, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = -Ez = -Er\cos\theta.$$

Demuestre que $u(r, \theta) = -Er\cos\theta + E\dfrac{c^3}{r^2}E\cos\theta$.

[*Sugerencia:* Explique por qué $\int_0^\pi \cos\theta\, P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0$ para todos los enteros no negativos excepto $n = 1$. Consulte la expresión (24) en la sección 10.6.]

12 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 y 2, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa circular de radio c cuando la temperatura de la circunferencia es como se indica.

1. $u(c, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ -u_0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

2. $u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ 1, & 3\pi/2 < \theta < 2\pi \end{cases}$

En los problemas 3 y 4, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio 1 cuando las condiciones de frontera son como se indica.

3. $u(1, \theta) = u_0(\pi\theta - \theta^2), 0 < \theta < \pi$
   $u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, 0 < r < 1$

4. $u(1, \theta) = \operatorname{sen}\theta, 0 < \theta < \pi$
   $u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, 0 < r < 1$

5. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio c cuando las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ están aisladas y $u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < \pi$.

6. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio c cuando la frontera $\theta = 0$ se mantiene a cero grados, la frontera $\theta = \pi$ está aislada, y $u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < \pi$.

En los problemas 7 y 8, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$.

7.

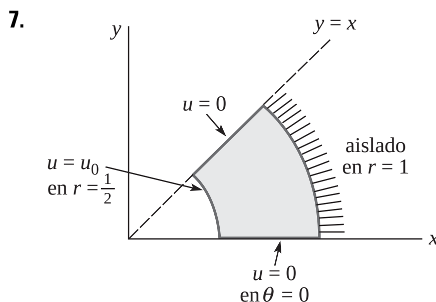


FIGURA 12.R.1 Placa del problema 7

8.

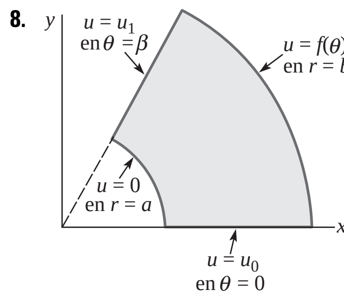


FIGURA 12.R.2 Placa del problema 8

9. Si las condiciones de frontera de un anillo definido por $1 < r < 2$ son

$$u(1, \theta) = \operatorname{sen}^2\theta, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, 0 < \theta < 2\pi,$$

demuestre que la temperatura de estado estable es $u(r, \theta) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{34}r^2 + \frac{8}{17}r^{-2})\cos 2\theta$. [*Sugerencia:* Consulte la figura 12.1.4. También, utilice la identidad $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$.]

10. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa infinita que se muestra en la **FIGURA 12.R.3**.

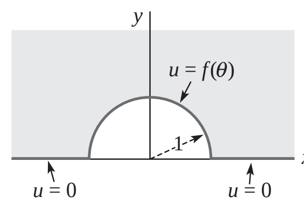


FIGURA 12.R.3 Placa infinita del problema 10

11. Suponga que se pierde calor desde las superficies planas de un disco unitario muy delgado hacia el ambiente que tiene temperatura de cero. Si la ley lineal de transferencia de calor se aplica, la ecuación de calor toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad h > 0, 0 < r < 1, t > 0.$$

Véase la **FIGURA 12.R.4**. Determine la temperatura $u(r, t)$ si la orilla $r = 1$ se mantiene a temperatura cero y si al principio la temperatura de la placa es unitaria en toda la superficie.

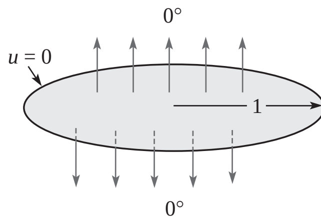


FIGURA 12.R.4 Placa circular del problema 11

12. Suponga que x_k es un cero positivo de J_0. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = u_0 J_0(x_k r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

es $u(r, t) = u_0 J_0(x_k r) \cos ax_k t$.

13. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ del cilindro mostrado en la figura 12.2.5 si la cara lateral se mantiene a temperatura de cero, la superior $z = 4$ se mantiene a 50°, y la base $z = 0$ está aislada.

14. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, 0 < z < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad 0 < z < 1$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad u(r, 1) = g(r), \quad 0 < r < 1.$$

15. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una esfera de radio unitario si la superficie se mantiene a

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi/2 \\ -100, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Consulte el problema 22 de los ejercicios 10.6.]

16. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), 0 < r < 1.$$

[*Sugerencia:* Proceda como en los problemas 9 y 10 de los ejercicios 12.3, pero establezca $v(r, t) = ru(r, t)$. Consulte la sección 11.7.]

17. La función $u(x) = Y_0(\alpha a)J_0(\alpha x) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha x)$, $a > 0$ es una solución de la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + \alpha^2 x^2 u = 0$$

en el intervalo $[a, b]$. Si los valores propios $\lambda_n = \alpha_n^2$ están definidos mediante las raíces positivas de la ecuación

$$Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b) = 0,$$

demuestre que las funciones

$$u_m(x) = Y_0(\alpha_m a)J_0(\alpha_m x) - J_0(\alpha_m a)Y_0(\alpha_m x)$$
$$u_n(x) = Y_0(\alpha_n a)J_0(\alpha_n x) - J_0(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n x)$$

son ortogonales con respecto a la función peso $p(x) = x$ en el intervalo $[a, b]$; esto es,

$$\int_a^b x u_m(x) u_n(x)\, dx = 0, m \neq n.$$

[*Sugerencia:* Lleve a cabo el procedimiento de las páginas 494-495.]

18. Utilice los resultados del problema 17 para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la temperatura $u(r, t)$ de un anillo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a < r < b, t > 0$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad a < r < b.$$

19. Analice cómo resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < c, 0 < z < L$$

en las condiciones de frontera que se proporcionan en la **FIGURA 12.R.5**.

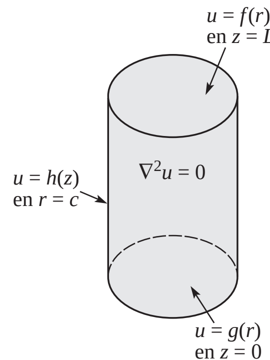


FIGURA 12.R.5 Cilindro del problema 19

20. Genere sus propios conceptos y calcule $u(r, z)$ en el problema 19. [*Sugerencia:* Repase (11) en la sección 11.5.]

21. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, 0 < z < 1$$

$$u(1, z) = 100, \quad 0 < z < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$u(r, 1) = 200, \quad 0 < r < 1.$$

22. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, z > 0$$

$$u(1, z) = 0, \quad z > 0$$

$$u(r, 0) = 100, \quad 0 < r < 1.$$

13 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL

Estructura del capítulo

El método de separación de variables que empleamos en los capítulos 11 y 12 es eficaz, mas no universalmente aplicable para resolver problemas de valores en la frontera. Si la ecuación diferencial parcial que estamos tratando es no homogénea, o si las condiciones de frontera son dependientes del tiempo, o si el dominio de la variable espacial es infinito $(-\infty, \infty)$, o semiinfinito (a, ∞), debemos ser capaces de utilizar una **transformada integral** para resolver el problema. En la sección 13.2 resolveremos problemas que involucran las ecuaciones de calor y las de onda mediante la ya conocida **transformada de Laplace**. En la sección 13.4 presentaremos y utilizaremos tres nuevas transformadas integrales: las **transformadas de Fourier**.

13.1 Función de error

Introducción En matemáticas existe una gran cantidad de funciones que se definen mediante una integral. Por ejemplo, en muchos libros de cálculo tradicionales, el logaritmo natural se define como: $\ln x = \int_1^x dt/t$, $x > 0$. En capítulos anteriores ya hemos visto, aunque de manera breve, la función de error erf(x), la función de error complementaria erfc(x), la función integral seno Si(x), la integral seno de Fresnel $S(x)$ y la función gamma $\Gamma(\alpha)$; todas estas funciones se hallan definidas en términos de una integral. Antes de aplicar la transformada de Laplace a problemas de valores en la frontera, necesitamos conocer un poco más acerca de la función de error y de la función de error complementaria. En esta sección analizamos las gráficas y algunas de las propiedades más evidentes de erf(x) y erfc(x).

Propiedades y gráficas De la ecuación (14) presentada en la sección 2.3, recuerde que las definiciones de **función de error** erf(x) y **función de error complementaria** erfc(x) son, respectivamente,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du \qquad \text{y} \qquad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du. \tag{1}$$

Con ayuda de coordenadas polares se puede demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = 1.$$

Por lo tanto, a partir de la propiedad del intervalo aditivo de las integrales definidas, el último resultado es lo mismo que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^x e^{-u^2}\,du + \int_x^\infty e^{-u^2}\,du\right] = 1.$$

Lo anterior demuestra que erf(x) y erfc(x) están relacionadas mediante la identidad

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1. \tag{2}$$

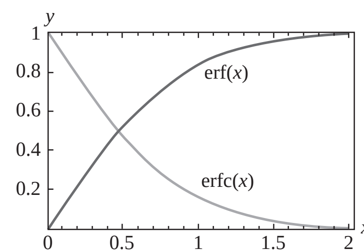


FIGURA 13.1.1 Gráficas de erf(x) y erfc(x) para $x \geq 0$

Las gráficas de erf(x) y erfc(x) para $x \geq 0$ están dadas en la **FIGURA 13.1.1**. Observe que erf$(0) = 0$, erfc$(0) = 1$, y que erf$(x) \to 1$, erfc$(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$.

Otros valores numéricos de erf(x) y erfc(x) pueden obtenerse desde un CAS o mediante el uso de tablas. En las tablas, a menudo la función de error se denomina **integral de probabilidad**. El dominio de erf(x) y erfc(x) es $(-\infty, \infty)$. En el problema 11 de los ejercicios 13.1 se solicita obtener la gráfica de cada función incluida en este intervalo y deducir algunas propiedades adicionales.

La **TABLA 13.1.1**, transformadas de Laplace, será de utilidad en los ejercicios de la siguiente sección.

TABLA 13.1.1

$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	**4.** $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-a^2/4t} - a\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
2. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	**5.** $e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
3. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	**6.** $-e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{be^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$

Comentarios

Las demostraciones de los resultados de la tabla 13.1.1 no se proporcionarán debido a que son extensas y complicadas. Por ejemplo, demostrar los enunciados 2 y 3 requiere de algunos cambios de variables y el uso del teorema de convolución. A quienes son curiosos, les sugerimos que consulten la obra *Introduction to the Laplace Transform*, de Holl, Maple y Vinograde, Appleton-Century-Crofts, 1959, páginas 142 y 143. Una variante de este tipo de demostraciones puede obtenerse resolviendo el problema 1 de los ejercicios 13.1.

13.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

1. ***a***) Demuestre que $(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$

b) Use el teorema de convolución y los resultados de los problemas 41 y 42 de los ejercicios 4.1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

2. Utilice el resultado del problema 1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right].$$

3. Mediante el uso del problema 1, demuestre que

$$\mathscr{L}\{e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}.$$

4. Utilice el resultado del problema 2 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)}.$$

5. Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}+1}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t}).$$

6. Encuentre la transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\sqrt{s+1}}\right\}.$$

7. Sean C, G, R y x constantes. Utilice la tabla 13.1.1 para demostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{Cs+G}\left(1 - e^{-x\sqrt{RCs+RG}}\right)\right\} = e^{-Gt/C}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right).$$

8. Sea a una constante. Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}{s\operatorname{senh}\sqrt{s}}\right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+a}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-a}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

[*Sugerencia:* Utilice la definición exponencial del seno hiperbólico. Desarrolle $1/(1 - e^{-2\sqrt{s}})$ en una serie geométrica.]

9. Utilice la transformada de Laplace y la tabla 13.1.1 para resolver la ecuación integral

$$y(t) = 1 - \int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

10. Mediante el uso de los enunciados tercero y quinto de la tabla 13.1.1, demuestre el sexto enunciado de la misma tabla.

11. Demuestre que $\int_a^b e^{-u^2}\,du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)].$

12. Demuestre que $\int_{-a}^a e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(a).$

Tareas para el laboratorio de cómputo

13. Las funciones erf(x) y erfc(x) están definidas para $x < 0$. Utilice un CAS y sobreponga las gráficas de erf(x) y erfc(x) sobre los mismos ejes en $-10 \le x \le 10$. ¿Las gráficas tienen alguna simetría? Determine $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{erf}(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{erfc}(x)$.

13.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace

Introducción En el capítulo 4 definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$, $t \ge 0$, como

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt,$$

siempre que la integral impropia converja. Esta integral transforma una función $f(t)$ en otra función F del parámetro de transformación s, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. La principal aplicación de la transformada de Laplace en el capítulo 4 fue la solución de ciertos tipos de problemas de valor inicial que involucraban ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Recuerde que en tales ecuaciones la transformada de Laplace reduce la ecuación diferencial ordinaria a una ecuación algebraica. En esta sección vamos a aplicar la transformada de Laplace a ecuaciones diferenciales parciales lineales. Veremos que esta transformada reduce una ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria.

Transformada de derivadas parciales Los problemas de valores en la frontera que se estudian en la presente sección involucran las ecuaciones de calor y las de onda en una dimensión, o ligeras variaciones de estas ecuaciones. Dichas ecuaciones diferenciales parciales involucran una función desconocida de dos variables independientes $u(x, t)$, donde la

variable t representa el tiempo $t \geq 0$. Definimos la transformada de Laplace de $u(x, t)$ con respecto a t usando la expresión

$$\mathscr{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)\, dt = U(x, s),$$

donde x recibe el tratamiento de un parámetro. A lo largo de esta sección se supondrá que todas las propiedades operativas de las secciones 4.3 y 4.4 se aplican a funciones de dos variables. Por ejemplo, mediante el teorema 4.2.2, la transformada de la derivada parcial $\partial u/\partial t$ es

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\mathscr{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0);$$

esto es,
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, 0). \tag{1}$$

De manera similar,
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{2}$$

Como estamos realizando una transformación con respecto a t, suponemos que es legítimo intercambiar la integración y la diferenciación en la transformada de $\partial^2 u/\partial x^2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e^{-st}u(x, t)\right] dt\\ &= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)\, dt = \frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x, t)\};\end{aligned}$$

esto es,
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2U}{dx^2}. \tag{3}$$

En vista de (1) y (2) podemos observar que la transformada de Laplace resulta adecuada en problemas con condiciones iniciales, es decir, problemas asociados con la ecuación de calor o la ecuación de onda.

EJEMPLO 1 La transformada de Laplace de una ecuación diferencial parcial

Encuentre la transformada de Laplace de la ecuación de onda $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ t > 0.$

Solución A partir de (2) y (3),

$$\mathscr{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierte en

$$a^2\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x, t)\} = s^2\mathscr{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

o bien
$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{4}$$
≡

La transformada de Laplace con respecto a t de la ecuación de onda o de la de calor elimina dicha variable; y para las ecuaciones en una dimensión, las ecuaciones transformadas son entonces *ecuaciones diferenciales ordinarias* en la variable espacial x. Al resolver una ecuación transformada, se trata a s como parámetro.

EJEMPLO 2 Uso de la transformada de Laplace para resolver un problema de valores en la frontera

Resuelva $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

sujeta a $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Solución La ecuación diferencial parcial se puede reconocer como la ecuación de onda con $a = 1$. A partir de (4) y de las condiciones iniciales dadas, la ecuación transformada es

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -\operatorname{sen}\pi x, \tag{5}$$

donde $U(x, s) = \mathscr{L}\{u(x, t)\}$. Puesto que las condiciones de frontera son funciones de t, debemos calcular también sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}\{u(1, t)\} = U(1, s) = 0. \tag{6}$$

Los resultados obtenidos en (6) son condiciones de frontera para la ecuación diferencial ordinaria (5). Como (5) está definida en un intervalo finito, su función complementaria es

$$U_c(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx.$$

El método de coeficientes indeterminados nos da una solución particular

$$U_p(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2}\operatorname{sen}\pi x.$$

De aquí que $\qquad U(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx + \dfrac{1}{s^2 + \pi^2}\operatorname{sen}\pi x.$

Sin embargo, las condiciones $U(0, s) = 0$ y $U(1, s) = 0$ dan como resultado, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, respectivamente. Concluimos que

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2}\operatorname{sen}\pi x$$

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \pi^2}\operatorname{sen}\pi x\right\} = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi x\, \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}\right\}.$$

Por lo tanto, $\qquad u(x, t) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen}\pi t.$ ≡

EJEMPLO 3 Uso de la transformada de Laplace para resolver un problema de valores en la frontera

Una cadena muy larga se encuentra inicialmente en reposo en el eje x no negativo. La cadena está anclada en $x = 0$ y su lejano extremo derecho se desliza hacia abajo sin fricción sobre un soporte vertical. La cadena se pone en movimiento dejando que caiga por su propio peso. Determine el desplazamiento $u(x, t)$.

Solución Como se toma en cuenta la fuerza de gravedad es posible demostrar que la ecuación de onda tiene la forma

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, t > 0,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Las condiciones inicial y de frontera son, respectivamente,

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

La segunda condición de frontera $\lim_{x\to\infty}\partial u/\partial x = 0$ indica que la cadena es horizontal a una distancia mayor desde el extremo izquierdo. Ahora, a partir de (2) y (3),

$$\mathscr{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} - \mathscr{L}\{g\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierte en $$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{g}{s} = s^2U - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

o, en vista de las condiciones iniciales,

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}U = \frac{g}{a^2s}.$$

Las transformadas de las condiciones de frontera son

$$\mathscr{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{dU}{dx} = 0.$$

Con ayuda de coeficientes indeterminados es posible deducir que la solución general de la ecuación transformada es

$$U(x, s) = c_1e^{-(x/a)s} + c_2e^{(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

La condición de frontera $\lim_{x\to\infty} dU/dx = 0$ implica que $c_2 = 0$ y $U(0, s) = 0$ nos da $c_1 = g/s^3$. Por lo tanto,

$$U(x, s) = \frac{g}{s^3}e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

Ahora, mediante el teorema de la segunda traslación se tiene

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{g}{s^3}e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}g\left(t - \frac{x}{a}\right)^2\mathscr{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}gt^2$$

o bien $$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}gt^2, & 0 \le t < \dfrac{x}{a} \\ -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & t \ge \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

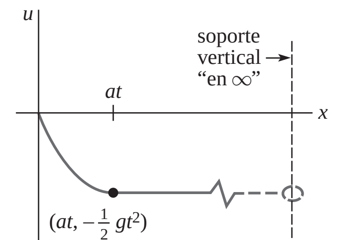


FIGURA 13.2.1 Cadena larga que cae por su propio peso en el ejemplo 3

Para interpretar la solución, supongamos que $t > 0$ es fijo. Para $0 \le x \le at$, la cadena tiene la forma de una parábola que pasa por $(0, 0)$ y $(at, -\frac{1}{2}gt^2)$. Para $x > at$, la cadena se describe mediante la línea horizontal $u = -\frac{1}{2}gt^2$. Consulte la **FIGURA 13.2.1**. ≡

Observe que el problema del ejemplo siguiente pudo haberse resuelto mediante el procedimiento de la sección 11.6. La transformada de Laplace ofrece una solución alterna.

EJEMPLO 4 Una solución en términos de erf(x)

Resuelva la ecuación de calor

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a $$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Solución De las ecuaciones (1) y (3) y la condición inicial dada,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

se convierte en $$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0. \tag{7}$$

Las transformadas de las condiciones de frontera son

$$U(0, s) = 0 \qquad \text{y} \qquad U(1, s) = \frac{u_0}{s}. \tag{8}$$

Puesto que estamos interesados en un intervalo finito en el eje x, optamos por escribir la solución general de (7) como

$$U(x, s) = c_1 \cosh(\sqrt{s}x) + c_2 \operatorname{senh}(\sqrt{s}x).$$

Aplicar las dos condiciones de frontera en (8) nos da, respectivamente, $c_1 = 0$ y $c_2 = u_0/(s \operatorname{senh} \sqrt{s})$. Por lo tanto,

$$U(x, s) = u_0 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}}.$$

La transformada inversa de esta última función no se encuentra en la mayoría de las tablas. Sin embargo, escribiendo

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} = \frac{e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x}}{s(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}})} = \frac{e^{(x-1)\sqrt{s}} - e^{-(x+1)\sqrt{s}}}{s(1 - e^{-2\sqrt{s}})}$$

y utilizando la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s}}$$

encontramos

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} - \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s} \right].$$

Si suponemos que la transformada inversa de Laplace puede resolverse término por término, a partir del enunciado 3 de la tabla 13.1.1 puede deducirse que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} \right\} \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} \right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s} \right\} \right] \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

La solución (9) puede volverse a escribir en términos de la función de error utilizando $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$:

$$u(x, t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \tag{10} \equiv$$

La **FIGURA 13.2.2*a***), obtenida con ayuda de la función gráfica 3D de un CAS, muestra la superficie de la región rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 6$ definida mediante la suma parcial $S_{10}(x, t)$ de la solución (10). A partir de la superficie y de las dos gráficas bidimensionales que la acompañan, resulta evidente que para un valor específico de x (la curva de intersección de un plano recortando la superficie perpendicular al eje x en el intervalo [0, 1], la temperatura $u(x, t)$ aumenta considerablemente hacia un valor constante cuando se incrementa el tiempo. Consulte las figuras 13.2.2*b*) y *c*). Para un tiempo específico (la curva de intersección de un plano que recorta la superficie perpendicular en el eje t), la temperatura $u(x, t)$ aumenta de manera natural de 0 a 100. Véanse las figuras 13.2.2*d*) y *e*).

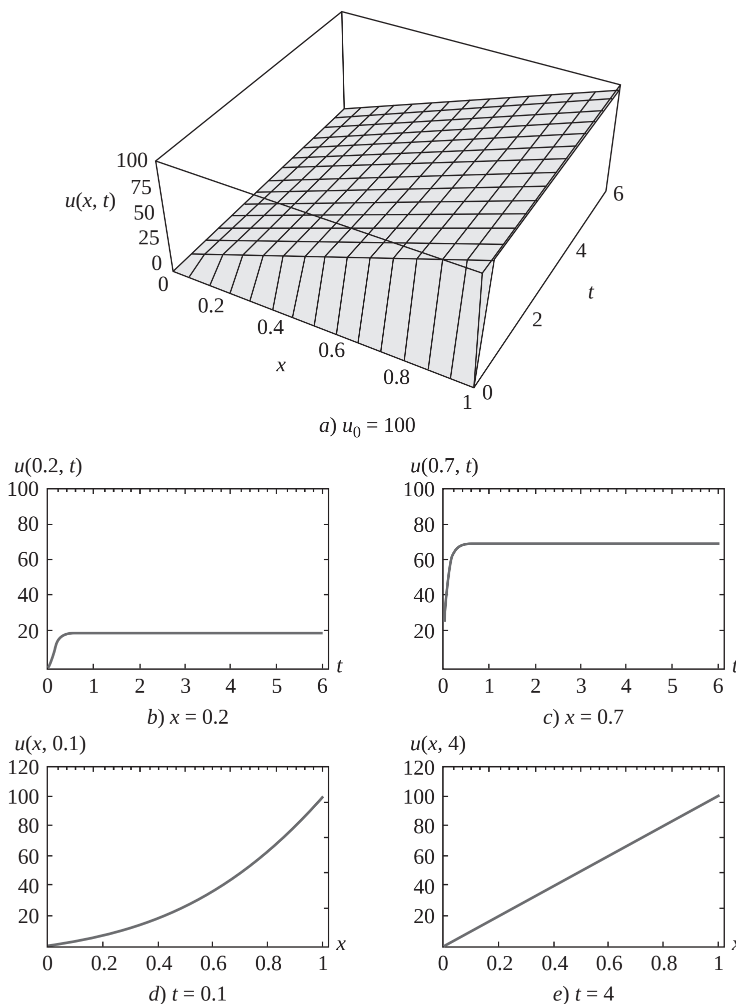


FIGURA 13.2.2 Gráfica de la solución dada en (10). En *b*) y *c*), x se mantiene constante. En *d*) y *e*), t se mantiene constante

13.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas siguientes utilice las tablas según sea necesario.

1. Una cadena se estira a lo largo del eje x entre (0, 0) y $(L, 0)$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la cadena parte desde el reposo en la posición inicial $A\,\text{sen}(\pi x/L)$.

2. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\,\text{sen}\,\pi x + 4\,\text{sen}\,3\pi x.$$

3. El desplazamiento de una cadena elástica semiinfinita se determina a partir de

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

Despeje $u(x, t)$.

4. Resuelva el problema de valores en la frontera del ejercicio 3 cuando

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,\pi t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Trace el desplazamiento $u(x, t)$ para $t > 1$.

5. En el ejemplo 3, calcule el desplazamiento $u(x, t)$ cuando al extremo izquierdo de la cadena ubicado en $x = 0$ se le imprime un movimiento oscilatorio descrito por $f(t) = A$ sen ωt.

6. El desplazamiento $u(x, t)$ de una cadena accionada por una fuerza externa se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \omega t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Despeje $u(x, t)$.

7. Una barra uniforme está anclada en $x = 0$ y se encuentra inicialmente en reposo. Si una fuerza constante F_0 se aplica al extremo libre localizado en $x = L$, el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de la sección transversal de la barra se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad E \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad E \text{ es una constante, } t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Desarrolle $1/(1 + e^{-2sL/a})$ en una serie geométrica.]

8. Una viga elástica uniforme semiinfinita que se mueve a lo largo del eje x a velocidad constante $-v_0$ se detiene al golpear una pared en el tiempo $t = 0$. Consulte la **FIGURA 13.2.3**. El desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ está determinado por

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -v_0, \quad x > 0.$$

Despeje $u(x, t)$.

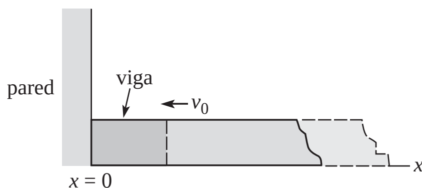


FIGURA 13.2.3 Viga elástica en movimiento del problema 8

9. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

10. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

En los problemas del 11 al 18, utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $x > 0$, $t > 0$ sujeta a las condiciones dadas.

11. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_1$

12. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{u(x, t)}{x} = u_1, \quad u(x, 0) = u_1 x$

13. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = u_0, \quad u(x, 0) = u_0$

14. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t) - 50, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

15. $u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

[*Sugerencia:* Utilice el teorema de convolución.]

16. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -f(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

17. $u(0, t) = 60 + 40\,\mathscr{U}(t - 2), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 60,$

$u(x, 0) = 60$

18. $u(0, t) = \begin{cases} 20, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 100,$

$u(x, 0) = 100$

19. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 100 - u(1, t), \quad \lim_{x\to-\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < 1.$$

20. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

donde r es constante, está dada por

$$u(x, t) = rt - r\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k\tau}}\right) d\tau.$$

21. Una varilla de longitud L se mantiene a una temperatura constante u_0 en sus extremos $x = 0$ y $x = L$. Si la temperatura inicial de la varilla es $u_0 + u_0 \operatorname{sen}(x\pi/L)$, resuelva la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $0 < x < L$, $t > 0$ para la temperatura $u(x, t)$.

22. Si hay transferencia de calor desde la superficie lateral de un alambre delgado de longitud L hacia un medio a temperatura constante u_m, entonces la ecuación de calor toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde h es una constante. Determine la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial es una constante u_0 en todo el proceso y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

23. Una varilla de longitud unitaria está aislada en $x = 0$ y se mantiene a temperatura de cero en $x = 1$. Si la temperatura inicial de la varilla es una constante u_0, resuelva $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$ para la temperatura $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Desarrolle $1/(1 + e^{-2\sqrt{s/k}})$ en una serie geométrica.]

24. Una losa porosa infinita de ancho unitario está sumergida en una solución cuya concentración constante es c_0. Una sustancia disuelta en la solución se difunde en la losa. La concentración $c(x, t)$ en la losa está determinada mediante

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$c(0, t) = c_0, \quad c(1, t) = c_0, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

donde D es una constante. Encuentre el valor de $c(x, t)$.

25. Una línea telefónica muy larga se encuentra inicialmente a un potencial constante u_0. Si la línea está aterrizada en $x = 0$ y aislada en su extremo derecho, entonces el potencial $u(x, t)$ en un punto x a lo largo de la línea en el tiempo t está determinado mediante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad x > 0,$$

donde R, C y G son constantes conocidas como resistencia, capacitancia y conductancia, respectivamente. Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Vea el problema 5 de los ejercicios 13.1.]

26. A partir de $t = 0$, una carga concentrada de magnitud F_0 se mueve a velocidad constante v_0 por una cadena semiinfinita. En este caso, la ecuación de onda se convierte en

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_0\delta\left(t - \frac{x}{v_0}\right),$$

donde $\delta(t - x/v_0)$ es la función delta de Dirac. Resuelva la ecuación diferencial parcial sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0$$

a) cuando $v_0 \neq a$ y
b) cuando $v_0 = a$.

27. En el problema 9 de los ejercicios 12.3 se le pidió encontrar las temperaturas dependientes del tiempo $u(r, t)$ dentro de una esfera unitaria. Las temperaturas fuera de la esfera se describen mediante el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad r > 1, \ t > 0$$

$$u(1, t) = 100, \quad t > 0$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, t) = 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad r > 1.$$

Utilice la transformada de Laplace para encontrar $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Después de transformar las ecuaciones diferenciales parciales, considere que $v(r, s) = rU(r, s)$, donde $\mathscr{L}\{u(r, t)\} = U(r, s)$.]

28. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \ t > 0, \ h \text{ constante}$$

$$u(0, t) = u_0, \ \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \ t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

es

$$u(x, t) = \frac{u_0 x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-h\tau - x^2/4\tau}}{\tau^{3/2}}\,d\tau.$$

≡ Tareas para el laboratorio de cómputo

29. ***a***) La temperatura en un sólido semiinfinito está modelada mediante el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \ t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \ t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Encuentre el valor de $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$, $x > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ en una región rectangular $0 \le x \le 10$, $0 \le t \le 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$. Indique las dos condiciones de frontera y la condición inicial de su gráfica. Use las gráficas 2D (bidimensionales) y 3D (tridimensionales) de $u(x, t)$ para comprobar su respuesta al inciso *a*).

30. ***a***) En el problema 29, si existe un flujo constante de calor hacia el sólido en su frontera izquierda, entonces la condición de frontera es $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, A > 0, t > 0.$ Encuentre el valor de $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$, $x > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ sobre la región rectangular $0 \le x \le 10$, $0 \le t \le 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$. Use las gráficas 2D y 3D de $u(x, t)$ para comprobar su respuesta al inciso *a*).

31. Los humanos captamos la mayor parte de la información que poseemos del mundo exterior mediante la vista y el oído. Sin embargo, muchas criaturas utilizan señales químicas como forma principal de comunicación; por ejemplo, las abejas, cuando experimentan un estado de alarma, emiten cierta sustancia y agitan sus alas para pasar el mensaje a las que atien-

den a la reina. Estos mensajes moleculares entre miembros de una misma especie se llaman feromonas. Las señales pueden transportarse por el movimiento del aire o el agua, o por un proceso de difusión en el que el movimiento aleatorio de moléculas de gas transporta el químico lejos de su fuente. La **FIGURA 13.2.4** muestra a una hormiga emitiendo una alarma química hacia el aire quieto de un túnel. Si $c(x, t)$ expresa la concentración del químico a x centímetros de la fuente en el tiempo t, entonces $c(x, t)$ satisface

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \; x > 0, \; t > 0,$$

y k es una constante positiva. La emisión de feromonas como pulsos discretos da origen a una condición de frontera de la forma

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A\delta(t),$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

a) Resuelva el problema de valores en la frontera si además se sabe que $c(x, 0) = 0$, $x > 0$ y $\lim_{x\to\infty} c(x, t) = 0$, $t > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar la solución del inciso *a*) para $x > 0$ en los tiempos $t = 0.1$, $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$.

c) Para un determinado tiempo t, demuestre que $\int_0^\infty c(x, t)\,dx = Ak$. Por lo tanto, Ak representa la cantidad total de descarga química.

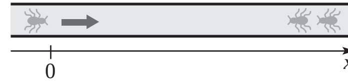


FIGURA 13.2.4 Hormigas del problema 31

13.3 Integral de Fourier

Introducción En los capítulos anteriores la serie de Fourier se utilizó para representar una función f definida en un intervalo *finito* $(-p, p)$ o $(0, L)$. Cuando f y f' son continuas en dicho intervalo finito, una serie de Fourier representa la función en el intervalo y converge hacia la extensión periódica de f fuera del intervalo. De esta manera, es justificado afirmar que las series de Fourier solamente se asocian con funciones *periódicas*. Ahora procederemos a deducir, aunque no rigurosamente, una forma para representar ciertos tipos de funciones *no periódicas* que estén definidas en un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ o semiinfinito $(0, \infty)$.

De la serie de Fourier a la integral de Fourier Suponga que una función f está definida en $(-p, p)$. Si utilizamos las definiciones integrales de los coeficientes (9), (10) y (11) de la sección 10.2 en su expresión (8), entonces la serie de Fourier de f en el intervalo es

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\cos\frac{n\pi}{p}x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right]. \quad (1)$$

Si establecemos $\alpha_n = n\pi/p$, $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \pi/p$, entonces (1) se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p} f(t)\,dt\right)\Delta\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\alpha_n t\,dt\right)\cos\alpha_n x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\alpha_n t\,dt\right)\operatorname{sen}\alpha_n x\right]\Delta\alpha. \quad (2)$$

Ahora vamos a desarrollar el intervalo $(-p, p)$ haciendo que $p \to \infty$. Como $p \to \infty$ implica que $\Delta\alpha \to 0$, el límite (2) tiene la forma $\lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\Delta\alpha$, la cual sugiere la definición de la integral $\int_0^\infty F(\alpha)\,d\alpha$. Por lo tanto, si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ existe, el límite del primer término incluido en (2) es cero y el límite de la suma se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt\right)\operatorname{sen}\alpha x\right]d\alpha. \quad (3)$$

El resultado que se proporciona en (3) se llama **integral de Fourier** de f en $(-\infty, \infty)$. Tal como señala el resumen siguiente, la estructura básica de la integral de Fourier nos recuerda la forma de una serie de Fourier.

Definición 13.3.1 Integral de Fourier

La **integral de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha)\text{sen } \alpha x]\, d\alpha, \tag{4}$$

donde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx \tag{5}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\text{sen } \alpha x\, dx. \tag{6}$$

Convergencia de la integral de Fourier Las condiciones suficientes en las que la integral de Fourier converge hacia $f(x)$ son similares a, pero ligeramente más estrictas que, las condiciones de la serie de Fourier.

Teorema 13.3.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' continuas por tramos en cada intervalo finito, y sea f absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$.* Entonces la integral de Fourier de f en el intervalo converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la integral de Fourier convergerá hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ expresan el límite de f en x desde la derecha y desde la izquierda, respectivamente.

EJEMPLO 1 Representación de la integral de Fourier

Encuentre la representación de la integral de Fourier de la función continua por tramos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Solución La función cuya gráfica se muestra en la **FIGURA 13.3.1** satisface la hipótesis del teorema 13.3.1. En consecuencia, de (5) y (6), tenemos de una vez

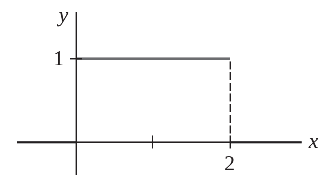


FIGURA 13.3.1 Función del ejemplo 1

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x)\cos \alpha x\, dx + \int_0^2 f(x)\cos \alpha x\, dx + \int_2^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx \\ &= \int_0^2 \cos \alpha x\, dx = \frac{\text{sen } 2\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\text{sen } \alpha x\, dx = \int_0^2 \text{sen } \alpha x\, dx = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}.$$

Por sustitución de estos coeficientes en (4) obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{\text{sen } 2\alpha}{\alpha}\right)\cos \alpha x + \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}\right)\text{sen } \alpha x\right] d\alpha.$$

Cuando hacemos uso de identidades trigonométricas, la última integral se simplifica a

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen } \alpha \cos \alpha(x - 1)}{\alpha}\, d\alpha. \tag{7}$$ ≡

* Esto significa que la integral $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx$ converge.

La integral de Fourier puede utilizarse para evaluar integrales. Por ejemplo, en $x = 1$, se deduce a partir del teorema 13.3.1 que (7) converge hacia $f(1)$; esto es,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Vale la pena destacar este último resultado ya que no puede obtenerse de la manera "usual"; el integrando $(\operatorname{sen} x)/x$ no tiene una antiderivada que sea función elemental.

Integrales seno y coseno Cuando f es una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces el producto $f(x) \cos \alpha x$ lo es también, mientras que $f(x) \operatorname{sen} \alpha x$ es una función impar. Como una consecuencia de la propiedad (g) de la sección 10.3, $B(\alpha) = 0$, por lo que (4) se convierte en

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt\right)\cos \alpha x\, d\alpha.$$

Aquí también se ha utilizado la propiedad (f) de la sección 10.3 para escribir

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt = 2\int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt.$$

De manera similar, cuando f es una función impar en $(-\infty, \infty)$, los productos $f(x) \cos \alpha x$ y $f(x) \operatorname{sen} \alpha x$ son funciones impares y pares, respectivamente. Por lo tanto, $A(\alpha) = 0$ y

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} \alpha t\, dt\right)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha.$$

Presentamos un resumen de lo anterior en la definición siguiente.

Definición 13.3.2 Integrales seno y coseno de Fourier

i) La integral de Fourier de una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral coseno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos \alpha x\, d\alpha, \tag{8}$$

donde

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx. \tag{9}$$

ii) La integral de Fourier de una función impar en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral seno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\alpha)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha, \tag{10}$$

donde

$$B(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx. \tag{11}$$

EJEMPLO 2 Representación mediante la integral coseno

Encuentre la representación integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Solución A partir de la **FIGURA 13.3.2** resulta evidente que f es una función par. De aquí que representamos f mediante la integral coseno de Fourier (8). A partir de (9) obtenemos

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx = \int_0^a f(x)\cos \alpha x\, dx + \int_a^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx$$

$$= \int_0^a \cos \alpha x\, dx = \frac{\operatorname{sen} a\alpha}{\alpha},$$

por lo que

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\alpha \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha. \tag{12}$$ ≡

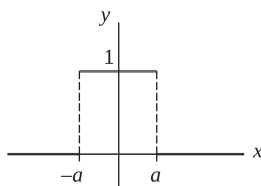


FIGURA 13.3.2 Función del ejemplo 2

Las integrales (8) y (10) pueden utilizarse cuando f no es impar ni par y definirse únicamente a la mitad de la línea $(0, \infty)$. En este caso, (8) representa a f en el intervalo $(0, \infty)$ y a su extensión par (pero no periódica) hacia $(-\infty, 0)$, mientras que (10) representa a f en $(0, \infty)$ y a su extensión impar hacia el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

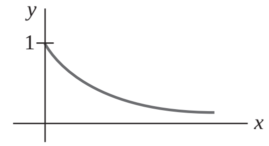


FIGURA 13.3.3 Función del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Representaciones mediante las integrales seno y coseno

Represente $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ ***a***) mediante la integral coseno; ***b***) mediante la integral seno.

Solución La gráfica de la función se proporciona en la **FIGURA 13.3.3**.

a) Usamos la integración por partes y encontramos que

$$A(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x \, dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Por lo tanto, la integral coseno de f es

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2}\, d\alpha. \tag{13}$$

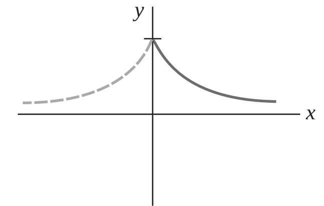
b) De manera similar, tenemos

$$B(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

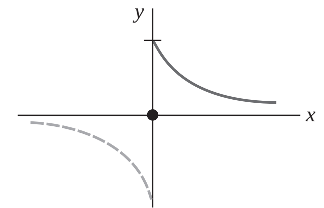
La integral seno de f es entonces

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{1 + \alpha^2}\, d\alpha. \tag{14}$$

La **FIGURA 13.3.4** muestra las gráficas de las funciones y sus extensiones representadas mediante las dos integrales. ≡



a) Integral coseno



b) Integral seno

FIGURA 13.3.4 En el ejemplo 3, *a*) es la extensión par de f; *b*) es la extensión impar de f

■ **Forma compleja** La integral de Fourier (4) también tiene una **formulación compleja** equivalente o **formulación exponencial**, esto es análogo a la formulación compleja de una serie de Fourier (consulte la sección 10.4). Cuando (5) y (6) son sustituidas en (4), entonces

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)[\cos \alpha t \cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \alpha x]\, dt\, d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha && (15) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)[\cos \alpha(t - x) + i \operatorname{sen} \alpha(t - x)]\, dt\, d\alpha && (16) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha(t-x)}\, dt\, d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha t}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha. && (17)
\end{aligned}$$

Podemos observar que (15) deriva del hecho de que el integrando es una función par de α. En (16), simplemente hemos sumado un cero al integrando,

$$i\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\operatorname{sen} \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha = 0,$$

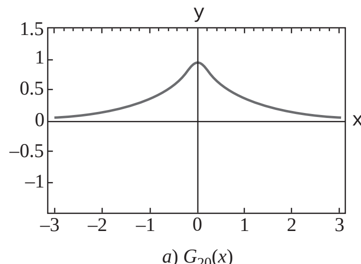
ya que el integrando es una función impar de α. La integral (17) puede expresarse como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha, \tag{18}$$

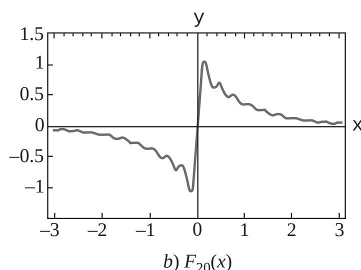
donde

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx. \tag{19}$$

Esta última forma de la integral de Fourier se utilizará en la siguiente sección, cuando regresemos al tema de la resolución de problemas de valores en la frontera.



a) $G_{20}(x)$



b) $F_{20}(x)$

FIGURA 13.3.5 Gráficas de las integrales parciales

Uso de la computadora La convergencia de una integral de Fourier puede estudiarse de manera similar a la graficación de las sumas parciales de una serie de Fourier. Para ilustrar esto, vamos a emplear los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3. Por definición de integral impropia, la representación de la integral coseno de Fourier de $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ en (13) puede escribirse como $f(x) = \text{lím}_{b\to\infty}F_b(x)$, donde

$$F_b(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2}\, d\alpha,$$

y a x se le trata como un parámetro. De modo similar, la representación de la integral seno de Fourier de $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ en (14) puede escribirse como $f(x) = \text{lím}_{b\to\infty}G_b(x)$, donde

$$G_b(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\alpha \text{ sen } \alpha x}{1 + \alpha^2}\, d\alpha.$$

Debido a que las integrales de Fourier (13) y (14) convergen, las gráficas de las integrales parciales $F_b(x)$ y $G_b(x)$ para un valor específico de $b > 0$ serán una aproximación de la gráfica de f y sus extensiones pares e impares ilustradas en las figuras 13.3.4*a*) y *b*), respectivamente. Las gráficas de $F_b(x)$ y $G_b(x)$ para $b = 20$ dadas en la **FIGURA 13.3.5** se obtuvieron mediante el uso de *Mathematica* y su aplicación llamada **NIntegrate**. Consulte el problema 21 de los ejercicios 13.3.

13.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la representación de la integral de Fourier para la función dada.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi \\ 4, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \text{sen}\, x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ **6.** $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

En los problemas del 7 al 12, utilice la integral seno o la coseno adecuada para representar la función que se proporciona.

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -5, & -1 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \pi, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ **10.** $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

11. $f(x) = e^{-|x|}\text{sen}\, x$ **12.** $f(x) = xe^{-|x|}$

En los problemas del 13 al 16, encuentre las representaciones como una integral seno o una coseno de la función dada.

13. $f(x) = e^{-kx}, k > 0, x > 0$ **14.** $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, x > 0$

15. $f(x) = xe^{-2x}, x > 0$ **16.** $f(x) = e^{-x}\cos x, x > 0$

En los problemas 17 y 18, resuelva la ecuación integral dada para la función f.

17. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx = e^{-\alpha}$

18. $\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$

19. ***a***) Utilice (7) para demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

[*Sugerencia:* α es una variable de prueba en la integración.]

b) Demuestre que, en general, para $k > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

20. Utilice la forma compleja (15) para calcular la representación de la integral de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. Demuestre que el resultado es el mismo que el obtenido en (8).

Tareas para el laboratorio de cómputo

21. Mientras que la integral (12) pudo graficarse de igual manera a como se estudió en la página 313 para obtener la figura 13.3.5, ésta puede expresarse también en términos de una función especial que es parte de un CAS.

a) Utilice una identidad trigonométrica para demostrar que una forma alterna de la representación de la integral de Fourier (12) de la función *f* del ejemplo 2 (con $a = 1$) es

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha(x+1) - \operatorname{sen} \alpha(x-1)}{\alpha} d\alpha.$$

b) Como una consecuencia del inciso *a*), $f(x) = \lim_{b\to\infty}$, donde

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} \alpha(x+1) - \operatorname{sen} \alpha(x-1)}{\alpha} d\alpha.$$

Demuestre que la última integral puede escribirse como

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Si}(b(x+1)) - \operatorname{Si}(b(x-1))],$$

donde $\operatorname{Si}(x)$ es la **función integral seno**. Consulte el problema 49 de los ejercicios 2.3.

c) Utilice un CAS y la forma integral seno que se obtuvo en el inciso *b*) para graficar $F_b(x)$ en el intervalo [–3, 3] para $b = 4$, 6 y 15. Después, grafique $F_b(x)$ para valores mayores de $b > 0$.

13.4 Transformadas de Fourier

Introducción Hasta el momento, sólo hemos estudiado y utilizado una transformada integral: la transformada de Laplace. Sin embargo, en la sección 13.3 estudiamos que la integral de Fourier tenía tres formas alternas: la integral coseno, la integral seno, y la forma compleja o la exponencial. En la presente sección consideraremos estas tres formas de la integral de Fourier y las desarrollaremos en tres nuevas transformadas integrales llamadas **transformadas de Fourier**. Además, ampliaremos el concepto de un par de transformación, esto es, una transformada integral y su inversa. Asimismo, se podrá ver que la inversa de una transformada integral es, en sí misma, otra transformada integral.

Pares de transformación La transformada de Laplace $F(s)$ de una función $f(t)$ está definida mediante una integral; sin embargo, hasta el momento, hemos estado usando la representación simbólica $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ para expresar la transformada inversa de Laplace de $F(s)$. En realidad, la transformada inversa de Laplace también es una transformada *integral*. Si

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s), \tag{1}$$

entonces, la **transformada inversa de Laplace** es

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds = f(t). \tag{2}$$

La última integral se llama **integral de contorno**; su evaluación requiere el uso de variables complejas y su análisis queda más allá del alcance del presente estudio. El tema a tratar aquí es: las transformadas integrales aparecen como **pares de transformación**. Si transformamos $f(x)$ en $F(\alpha)$ mediante la **transformada integral**

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)\, K(\alpha, x)\, dx, \tag{3}$$

entonces la función *f* puede recuperarse mediante otra transformada integral

$$f(x) = \int_c^b F(\alpha)\, H(\alpha, x)\, d\alpha, \tag{4}$$

llamada **transformada inversa**. Las funciones *K* y *H* presentes en el integrando de (3) y (4) se llaman **núcleos** de sus respectivas transformadas. Identificamos a $K(s, t) = e^{-st}$ como el núcleo de la transformada de Laplace, y a $H(s, t) = e^{st}/2\pi i$ como el núcleo de la transformada inversa de Laplace.

■ **Pares de transformación de Fourier** La integral de Fourier es la fuente de tres nuevas transformadas integrales. Las ecuaciones (8) y (9), (10) y (11), y (18) y (19) de la sección anterior nos impulsan a definir los siguientes **pares de transformación de Fourier**.

Definición 13.4.1 **Pares de transformación de Fourier**

i) Transformada de Fourier:
$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = F(\alpha) \tag{5}$$

Transformada inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = f(x) \tag{6}$$

ii) Transformada seno de Fourier:
$$\mathscr{F}_s\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx = F(\alpha) \tag{7}$$

Transformada seno inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha = f(x) \tag{8}$$

iii) Transformada coseno de Fourier:
$$\mathscr{F}_c\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = F(\alpha) \tag{9}$$

Transformada coseno inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha = f(x) \tag{10}$$

■ **Existencia** Las condiciones en las cuales (5), (7) y (9) existen son más estrictas que las de la transformada de Laplace. Por ejemplo, el lector debe comprobar que $\mathscr{F}\{1\}$, $\mathscr{F}_s\{1\}$ y $\mathscr{F}_c\{1\}$ no existan. Las condiciones suficientes para que existan son que f sea absolutamente integrable en el intervalo apropiado y que f y f' sean continuas en cada intervalo finito.

■ **Propiedades de operación** Puesto que el objetivo inmediato es aplicar estas nuevas transformadas a problemas de valores en la frontera, necesitamos examinar las transformadas de derivadas.

Transformada de Fourier

Suponga que f es continua y absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y que f' es continua en cada intervalo finito. Si $f(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$, entonces la integración por partes nos da

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x}\,dx \\ &= f(x)e^{i\alpha x}\Big]_{-\infty}^{\infty} - i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \\ &= -i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx;\end{aligned}$$

esto es,
$$\mathscr{F}\{f'(x)\} = -i\alpha F(\alpha). \tag{11}$$

De manera similar, bajo los supuestos adicionales de que f' es continua en $(-\infty, \infty)$, $f''(x)$ es continua en cada intervalo finito, y $f'(x) \to 0$ conforme $x \to \pm\infty$, tenemos

$$\mathscr{F}\{f''(x)\} = (-i\alpha)^2\mathscr{F}\{f(x)\} = -\alpha^2F(\alpha). \tag{12}$$

En general, bajo condiciones análogas para aquellas que conducen a (12), tenemos

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(x)\} = (-i\alpha)^n\mathscr{F}\{f(x)\} = (-i\alpha)^nF(\alpha),$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Es muy importante estar conscientes de que las transformadas seno y coseno no son apropiadas para transformar la primera derivada (o, para el caso, cualquier derivada de orden *impar*). Se puede demostrar fácilmente que

$$\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -\alpha\mathscr{F}_c\{f(x)\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{F}_c\{f'(x)\} = \alpha\mathscr{F}_s\{f(x)\} - f(0).$$

La dificultad es evidente; la transformada de $f'(x)$ no está expresada en términos de la transformada integral original.

Transformada seno de Fourier

Suponga que f y f' son continuas, que f es absolutamente integrable en el intervalo $[0, \infty)$, y que f'' es continua en todos los intervalos finitos. Si $f \to 0$ y $f' \to 0$ conforme $x \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\{f''(x)\} &= \int_0^\infty f''(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \\ &= f'(x) \operatorname{sen} \alpha x \Big]_0^\infty - \alpha \int_0^\infty f'(x) \cos \alpha x \, dx \\ &= -\alpha \left[f(x) \cos \alpha x \Big]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \right] \\ &= \alpha f(0) - \alpha^2 \mathcal{F}_s\{f(x)\};\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) + \alpha f(0). \tag{13}$$

Transformada coseno de Fourier

Bajo los mismos supuestos que nos llevaron a (9), encontramos que la transformada coseno de Fourier de $f''(x)$ es

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0). \tag{14}$$

Una pregunta natural es: "¿Cómo sabemos cuál transformada utilizar en un determinado problema de valores en la frontera?" Resulta evidente que, para usar una transformada de Fourier, el dominio de la variable a eliminar debe ser $(-\infty, \infty)$. Para utilizar la transformada seno o la coseno, el dominio de al menos una de las variables del problema debe ser $[0, \infty)$. Sin embargo, el factor determinante al optar por la transformada seno o la coseno es el tipo de condición de frontera especificada en el cero.

¿Cómo sabemos qué transformada utilizar?

En los ejemplos dados a continuación supondremos, sin mayor comentario, que tanto u como $\partial u/\partial x$ (o $\partial u/\partial y$) se aproximan a cero a medida que $x \to \pm\infty$. Esto no es una restricción significativa ya que estas condiciones son válidas en la mayoría de las aplicaciones.

EJEMPLO 1 Uso de la transformada de Fourier

Resuelva la ecuación de calor $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, sujeta a

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Solución El problema puede interpretarse como el cálculo de la temperatura $u(x, t)$ en una varilla infinita. Como el dominio de x es el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, utilizamos la transformada de Fourier (5) y definimos

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{i\alpha x} \, dx = U(\alpha, t).$$

Transformar la ecuación diferencial parcial y utilizar (12)

$$\mathcal{F}\left\{ k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{F}\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

nos da

$$-k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{dU}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{dU}{dt} + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0.$$

Resolvemos la última ecuación para obtener $U(\alpha, t) = ce^{-k\alpha^2 t}$. Ahora la transformada de la condición inicial es

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i\alpha x} \, dx = \int_{-1}^1 u_0 e^{i\alpha x} \, dx = u_0 \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

Este resultado es lo mismo que $U(\alpha, 0) = 2u_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$. Aplicando esta condición a la solución $U(\alpha, t)$ nos da $U(\alpha, 0) = c = (2u_0 \operatorname{sen}\alpha)/\alpha$, por lo que

$$U(\alpha, t) = 2u_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}.$$

A partir de la integral de inversión (6) es posible deducir que

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

La última expresión puede simplificarse de alguna manera mediante la fórmula de Euler $e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i \operatorname{sen}\alpha x$ y al observar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha = 0$ puesto que el integrando es una función impar de α. Así, por último, tenemos

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha. \qquad (15) \equiv$$

Se deja al lector la demostración de que la solución (15) puede expresarse en términos de la función de error. Consulte el problema 23 de los ejercicios 13.4.

EJEMPLO 2 Uso de la transformada coseno

La temperatura constante de una placa semiinfinita está determinada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \qquad u(\pi, y) = e^{-y}, \qquad y > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad 0 < x < \pi.$$

Encuentre el valor de $u(x, y)$.

Solución El dominio de la variable y la condición prescrita en $y = 0$ indican que se puede aplicar la transformada coseno de Fourier al problema. Definimos,

$$\mathscr{F}_c\{u(x, y)\} = \int_0^{\infty} u(x, y) \cos\alpha y\, dy = U(x, \alpha).$$

En vista de (14), $$\mathscr{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + \mathscr{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} = \mathscr{F}_c\{0\}$$

se convierte en

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \alpha^2 U(x, \alpha) - u_y(x, 0) = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2U}{dx^2} - \alpha^2 U = 0.$$

Puesto que el dominio de x es un intervalo finito, optamos por escribir la solución de la ecuación diferencial ordinaria como

$$U(x, \alpha) = c_1 \cosh\alpha x + c_2 \operatorname{senh}\alpha x. \qquad (16)$$

Ahora, $\mathscr{F}_c\{u(0, y)\} = \mathscr{F}_c\{0\}$ y $\mathscr{F}_c\{u(\pi, y)\} = \mathscr{F}_c\{e^{-y}\}$ son, a la vez, equivalentes a

$$U(0, \alpha) = 0 \qquad \text{y} \qquad U(\pi, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Cuando aplicamos estas últimas condiciones, la solución (16) nos da $c_1 = 0$ y $c_2 = 1/[(1 + \alpha^2) \operatorname{senh}\alpha\pi]$. Por lo tanto,

$$U(x, \alpha) = \frac{\operatorname{senh}\alpha x}{(1 + \alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi},$$

de modo que, a partir de (10), llegamos al siguiente resultado:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \alpha x}{(1 + \alpha^2)\operatorname{senh} \alpha\pi} \cos \alpha y \, d\alpha. \qquad (17) \equiv$$

Si en el ejemplo 2 se hubiera dado $u(x, 0)$ en lugar de $u_y(x, 0)$, entonces la transformada seno hubiera resultado más apropiada.

13.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 18, utilice una transformada integral de Fourier apropiada para resolver el problema de valores en la frontera que se plantea. Formule supuestos con respecto a los acotamientos donde sea necesario.

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \; -\infty < x < \infty, \; t > 0$

$u(x, 0) = e^{-|x|}, \; -\infty < x < \infty$

2. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \; -\infty < x < \infty, \; t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -100, & -1 < x < 0 \\ 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

3. Determine la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = u_0$, $t > 0$ y $u(x, 0) = 0$, $x > 0$.

4. Con el resultado $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, demuestre que la solución del problema 3 puede escribirse como

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha.$$

5. Determine la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 0$, $t > 0$, y

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

6. Resuelva el problema 3 si en la frontera izquierda la condición es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, \quad t > 0.$$

7. Resuelva el problema 5 si el extremo $x = 0$ está aislado.

8. Determine la temperatura $u(x, t)$ de una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 1$, $t > 0$ y $u(x, 0) = e^{-x}$, $x > 0$.

9. ***a***) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \; -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = f(x), \; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \; -\infty < x < \infty$$

b) Si $g(x) = 0$, demuestre que la solución del inciso *a*) puede escribirse como $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$.

10. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ de una cadena semiinfinita si

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \; x > 0.$$

11. Resuelva el problema del ejemplo 2 si se invirtieran las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = \pi$:

$$u(0, y) = e^{-y}, \quad u(\pi, y) = 0, \; y > 0.$$

12. Resuelva el problema del ejemplo 2 si la condición de frontera en $y = 0$ es $u(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$.

13. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de una placa definida por $x \geq 0$, $y \geq 0$ si la frontera $x = 0$ está aislada y, en $y = 0$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 50, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

14. Resuelva el problema 13 si la condición de frontera en $x = 0$ es $u(0, y) = 0$, $y > 0$.

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; x > 0, \; 0 < y < 2$

$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < 2$

$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 2) = 0, \quad x > 0$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; 0 < y < \pi, \; y > 0$

$$u(0, y) = f(y), \; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \; y > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \; 0 < x < \pi$$

En los problemas 17 y 18, determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa mostrada en la figura. [*Sugerencia:* Una forma de proceder es expresar los problemas 17 y 18 como dos o tres problemas de valores en la frontera, respectivamente. Utilice el principio de superposición (consulte la sección 11.5).]

17.

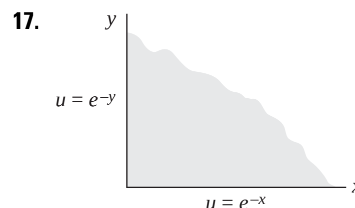


FIGURA 13.4.1 Placa del problema 17

18.

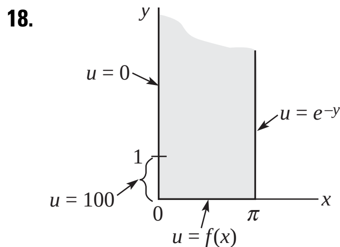


FIGURA 13.4.2 Placa del problema 18

19. Utilice el resultado $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\} = 2\sqrt{\pi}pe^{-p^2\alpha^2}$para resolver el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

20. Si $\mathscr{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ y $\mathscr{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$, entonces el **teorema de convolución** para la transformada de Fourier está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)\, d\tau = \mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\}.$$

Utilice este resultado y la transformada $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\}$ del problema 19 para demostrar que una solución del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

es $$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-(x-\tau)^2/4kt}\, d\tau.$$

21. Utilice la transformada $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\}$ del problema 19 para encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la tira infinita que se muestra en la **FIGURA 13.4.3**.

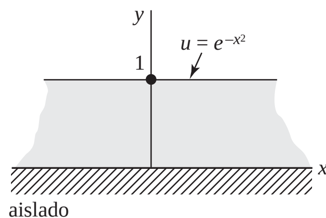


FIGURA 13.4.3 Placa del problema 21

22. La solución del problema 14 puede integrarse. Utilice los enunciados 42 y 43 de la tabla del apéndice III para demostrar que

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi}\left[\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{y}\right].$$

23. Utilice el problema 20, el cambio de variables $v = (x - \tau)/2\sqrt{kt}$, y el problema 9 de los ejercicios 13.1, para demostrar que la solución del ejemplo 1 puede expresarse como

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

24. Las temperaturas de estado estable en un cilindro semiinfinito son descritas por el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad z > 0$$

$$u(1, z) = 0, \quad z > 0$$

$$u(r, 0) = u_0, \quad 0 < r < 1.$$

Utilice la transformada de Fourier apropiada para encontrar $u(r, z)$. [*Sugerencia:* Considere el problema 4 y el ejemplo 3 en la sección 12.2.]

Tareas para el laboratorio de cómputo

25. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$ en la solución del problema 23. Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ en la región rectangular $-4 \le x \le 4$, $0 \le t \le 6$. Use una gráfica bidimensional y sobreponga las gráficas de $u(x, t)$ para $t = 0.05, 0.125, 0.5, 1, 2, 4, 6$ y 15 en el intervalo $-4 \le x \le 4$. Emplee las gráficas para formular un juicio acerca de los valores de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$ y $\lim_{x\to\infty} u(x, t)$. Luego demuestre analíticamente estos resultados utilizando las propiedades de $\operatorname{erf}(x)$.

Problemas de análisis

26. ***a*)** Suponga que

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx = F(\alpha),$$

donde

$$F(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \le \alpha \le 1 \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Encuentre $f(x)$.

***b*)** Utilice el inciso *a*) para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

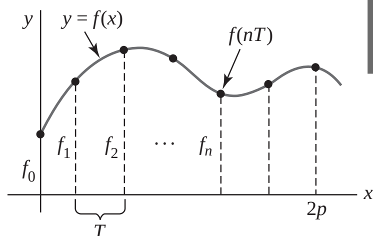


FIGURA 13.5.1 Muestreo de una función continua

13.5 Transformada rápida de Fourier

Introducción Considere una función f que esté definida y sea continua en el intervalo $[0, 2p]$. Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ son puntos uniformemente espaciados en el intervalo, entonces se dice que los valores funcionales correspondientes $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ mostrados en la **FIGURA 13.5.1** representan un *muestreo* discreto de la función f. La noción de las muestras discretas de una función es importante en el análisis de señales continuas.

En esta sección, la forma compleja o exponencial de la serie de Fourier juega un papel muy importante. Se recomienda efectuar un repaso de la sección 10.4.

Transformada discreta de Fourier Considere una función f definida en el intervalo $[0, 2p]$. En la sección 10.4, a partir de la expresión (11), estudiamos que f puede escribirse como una serie compleja de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \tag{1}$$

donde $\omega = 2\pi/2p = \pi/p$ es la frecuencia angular fundamental y $2p$ es el periodo fundamental. Sin embargo, en el *caso discreto*, la entrada es $f_0, f_1, f_2, \ldots$, que son los valores de la función f en puntos uniformemente espaciados $x = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ El número T se llama **velocidad de muestreo** o longitud del intervalo de muestreo.* Si f es continua en T, entonces la **muestra** de f en T está definida como el producto $f(x)\delta(x - T)$, donde $\delta(x - T)$ es la función delta de Dirac (véase la sección 4.5). Podemos entonces representar esta versión discreta de f, o **señal discreta**, como la suma de impulsos unitarios que actúan sobre la función en $x = nT$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - nT). \tag{2}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a la señal discreta (2), tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - nT)e^{i\alpha x}\,dx. \tag{3}$$

Mediante la propiedad de análisis de la función delta de Dirac (véanse los *Comentarios* incluidos al final de la sección 4.5), (3) es lo mismo que

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{i\alpha nT}. \tag{4}$$

La expresión $F(\alpha)$ en (4) se llama **transformada discreta de Fourier** (DFT) de la función f. En (4), a menudo escribimos los coeficientes $f(nT)$ como $f(n)$ o f_n. También vale la pena observar que debido a que $e^{i\alpha x}$ es periódica en α y $e^{i\alpha T} = e^{i(\alpha T + 2\pi)} = e^{i(\alpha + 2\pi/T)T}$, solamente es necesario considerar la función para α en $[0, 2\pi/T]$. Sea $N = 2\pi/T$. Esto coloca a x en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por lo tanto, debido a que muestreamos sobre un periodo, la suma en (4) es realmente finita.

Ahora considere los valores funcionales $f(x)$ en puntos N uniformemente espaciados, $x = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$, en el intervalo $[0, 2\pi]$, esto es, $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$. Usando estos N términos, la serie discreta (finita) de Fourier $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ nos da

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 e^{i1\cdot 0} + c_2 e^{i2\cdot 0} + \quad + c_{N-1}e^{i(N-1)\cdot 0}\\
f_1 &= c_0 + c_1 e^{i2\pi/N} + c_2 e^{i4\pi/N} + \quad + c_{N-1}e^{i2(N-1)\pi/N}\\
f_2 &= c_0 + c_1 e^{i4\pi/N} + c_2 e^{i8\pi/N} + \quad + c_{N-1}e^{i4(N-1)\pi/N}\\
&\vdots \\
f_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{i2(N-1)\pi/N} + c_2 e^{i4(N-1)\pi/N} + \quad + c_{N-1}e^{i2(N-1)2\pi/N}.
\end{aligned}$$

Si establecemos $\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$ y aplicamos las leyes de los exponentes, este sistema de ecuaciones es lo mismo que

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{N-1}\\
f_1 &= c_0 + c_1\omega_N + c_2\omega_N^2 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{N-1}\\
f_2 &= c_0 + c_1\omega_N^2 + c_2\omega_N^4 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{2(N-1)}\\
&\vdots \\
f_{N-1} &= c_0 + c_1\omega_N^{N-1} + c_2\omega_N^{2(N-1)} + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{(N-1)^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

* Observe que el símbolo T utilizado aquí no tiene el mismo significado que en la sección 10.4.

Al utilizar la notación matricial (véanse las secciones 7.1 y 7.2), entonces (5) es

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dejemos que la matriz de $N \times N$ en (6) quede expresada mediante el símbolo $\mathbf{F}_N$. Dadas las entradas $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$, ¿existe una forma sencilla de encontrar los coeficientes de Fourier $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}$? Si $\overline{\mathbf{F}}_N$ es la matriz constituida por los complejos conjugados de los elementos de $\mathbf{F}_N$ y si $\mathbf{I}$ expresa la matriz identidad de $N \times N$, entonces tenemos

$$\mathbf{F}_N\overline{\mathbf{F}}_N = \overline{\mathbf{F}}_N\mathbf{F}_N = N\mathbf{I} \qquad \text{por lo que} \qquad \mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N.$$

A partir de (6) y de la última ecuación es posible deducir que

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Par de transformadas discretas De la sección 13.4 recuerde que en el par de transformadas de Fourier utilizamos una función $f(x)$ como entrada y calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia k (c_k en el caso de funciones periódicas con periodo 2π), o calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia α ($F(\alpha)$ en el caso de funciones no periódicas).

Asimismo, dadas estas frecuencias y estos coeficientes, podríamos reconstruir la función original $f(x)$. Para el caso discreto, usamos una muestra de N valores de la función $f(x)$ como entrada y calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia de la muestra. Dadas dichas frecuencias y estos coeficientes, es posible reconstruir los n valores muestreados de $f(x)$. El par transformado, el **par de la transformada discreta de Fourier**, está dado por

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N\mathbf{f} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = \mathbf{F}_N\mathbf{c} \tag{7}$$

donde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Transformada discreta de Fourier

Establecemos $N = 4$ en forma tal que la entrada sea f_0, f_1, f_2, f_3 en los cuatro puntos $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Como $\omega_4 = e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) = i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$, la matriz $\mathbf{F}_4$ es

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, a partir de (7), los coeficientes de Fourier están dados por $\mathbf{c} = \frac{1}{4}\overline{\mathbf{F}}_4\mathbf{f}$:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Si establecemos f_0, f_1, f_2, f_3 como 0, 2, 4, 6, respectivamente, podemos deducir, a partir de la matriz producto anterior, que

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + i \\ -1 \\ -1 - i \end{pmatrix}.$$

Observe que obtenemos el mismo resultado utilizando (4), esto es, $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{3} f(nT)e^{i\alpha nT}$, con $T = \pi/2$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Las gráficas de $|c_n|$, $n = 0, 1, 2, 3$, o, de modo equivalente, $|F(\alpha)|$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$, están dadas en la **FIGURA 13.5.2**. ≡

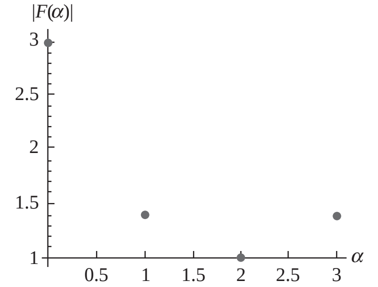


FIGURA 13.5.2 Gráfica de $|F(\alpha)|$ para el ejemplo 1

El cálculo de los coeficientes involucra la multiplicación de las matrices $\mathbf{F}_n$ y $\overline{\mathbf{F}}_n$. Debido a la naturaleza de tales matrices, estas multiplicaciones pueden realizarse de manera muy eficiente, desde el punto de vista computacional, mediante el uso de la **transformada rápida de Fourier (TRF)**, la cual se estudia más adelante en la presente sección.

Ecuación de calor y serie discreta de Fourier Si la función f incluida en el problema de valor inicial

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{8}$$

es periódica con periodo 2π, la solución puede escribirse en términos de la serie de Fourier para $f(x)$. También podemos aproximar esta solución con una suma finita

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t)e^{ikx}.$$

Si analizamos ambos miembros de la ecuación unidimensional de calor dada en (8), podemos observar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{dc_j}{dt} e^{ijx}$$

y

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\sum_{j=0}^{n-1} c_j(t)(ij)^2 e^{ijx},$$

puesto que $\dfrac{d^2 e^{ijx}}{dx^2} = (ij)^2 e^{ijx}$.

Se igualan estas dos expresiones para obtener la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dc_j}{dt} = -kj^2 c_j(t) \quad \text{con solución} \quad c_j(t) = c_j(0)e^{-kj^2 t}.$$

La tarea final consiste en encontrar los valores $c_j(0)$. Sin embargo, recordemos que $u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t)e^{ikx}$ y $u(x, 0) = f(x)$, por lo que $c_j(0)$ son los coeficientes de la serie discreta de Fourier de $f(x)$. Compare esto con la sección 11.3.

Ecuación de calor y transformada discreta de Fourier El problema (8) de valor inicial puede interpretarse como el modelo matemático para la temperatura $u(x, t)$ presente en una barra de longitud infinita. En la sección 13.4 vimos que podemos resolver (8) utilizando la transformada de Fourier, y que la solución $u(x, t)$ depende de la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de $f(x)$. Es posible aproximar $F(\alpha)$ enfocando la transformada discreta de Fourier desde otro punto de vista.

En primera instancia, aproximamos los valores de la transformada discretizando la integral $\mathscr{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$. Considere el intervalo $[a, b]$. Hagamos que $f(x)$ esté dado por los n puntos uniformemente espaciados

$$x_j = a + \frac{b - a}{n} j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad n - 1.$$

A continuación, aproximamos:

$$\begin{aligned}F(\alpha) &\approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)e^{i\alpha x_j}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha x_j}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha a}e^{i\alpha\frac{b-a}{n}j}\\ &= \frac{b-a}{n}e^{i\alpha a}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha\frac{b-a}{n}j}.\end{aligned}$$

Si ahora seleccionamos un valor apropiado para α, digamos $\dfrac{2\pi M}{b-a}$ donde M es un entero, tenemos

$$\begin{aligned}F\left(\frac{2\pi M}{b-a}\right) &\approx \frac{b-a}{n}e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\frac{2\pi jM}{n}}\\ &= \frac{b-a}{n}e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)\omega_n^{jM},\end{aligned}$$

donde recordemos que $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. Ésta es una aproximación numérica de la transformada de Fourier de $f(x)$ evaluada en los puntos $\dfrac{2\pi M}{b-a}$ con M como entero.

EJEMPLO 2 Vuelta al ejemplo 1, sección 13.4

Del ejemplo 1 dado en la sección 13.4 (con $u_0 = 1$), recuerde que la transformada de Fourier de un pulso rectangular definido mediante

$$f(x) = \begin{cases}1, & |x| < 1\\ 0, & |x| > 1\end{cases}$$

es
$$F(\alpha) = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha}.$$

El espectro de frecuencia es la gráfica de $|F(\alpha)|$ contra α dada en la **FIGURA 13.5.3*a***). Utilizando $n = 16$ puntos espaciados uniformemente entre $a = -2$ y $b = 2$ y M con un valor en el rango de -6 a 6, obtenemos la transformada discreta de Fourier de $f(x)$, sobrepuesta en la gráfica de $|F(\alpha)|$ de la figura 13.5.3*b*).

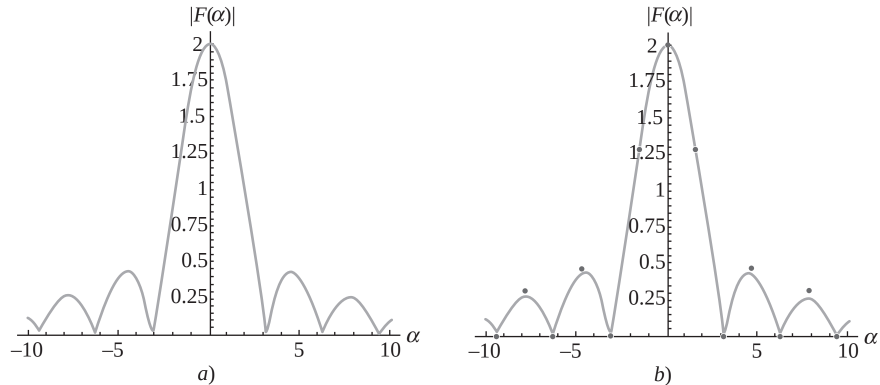
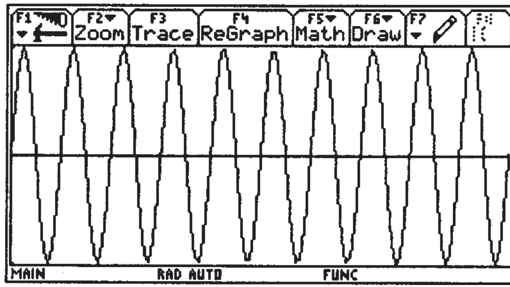


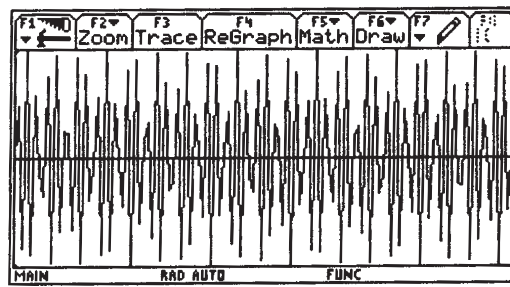
FIGURA 13.5.3 En el ejemplo 2, *a*) es la gráfica de $|F(\alpha)|$; *b*) es la transformada discreta de Fourier de f

≡

Diente de sierra Un problema conocido como diente de sierra puede presentarse siempre que se generen muestras de datos a intervalos uniformemente espaciados. Si usted alguna vez ha visto una película donde ruedas en movimiento parezcan estar girando más lentamente (o incluso ¡en sentido contrario!), habrá experimentado el fenómeno llamado diente de sierra. Las ruedas pueden girar a velocidad elevada, sin embargo, como en una película las tomas se "muestrean" a intervalos uniformemente espaciados, es posible observar una velocidad de giro baja.

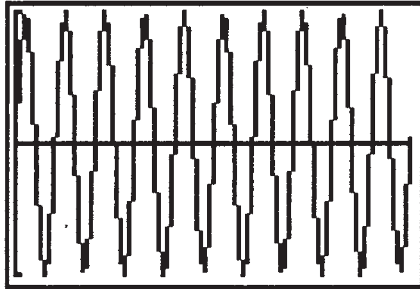


a) y = sen $20\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [–1, 1]

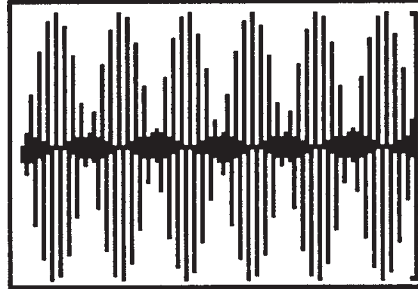


b) y = sen $100\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [–1, 1]

FIGURA 13.5.4 TI-92



a) y = sen $20\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [–1, 1]



b) y = sen $100\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [–1, 1]

FIGURA 13.5.5 TI-83

Las calculadoras gráficas también son susceptibles de experimentar este problema debido a la forma en que muestrean los puntos para crear gráficas. Por ejemplo, grafique la función trigonométrica $y =$ sen $20\pi x$ con frecuencia de 10 en una calculadora Texas Instruments TI-92 y obtendrá la gráfica ilustrada en la **FIGURA 13.5.4*a***). A frecuencias más elevadas, digamos $y =$ sen $100\pi x$ con una frecuencia de 50, se obtiene la cantidad correcta de ciclos; sin embargo, las amplitudes de la gráfica de la figura 13.5.4*b*) por supuesto que no son iguales a 1.

En una calculadora como la Texas Instruments TI-83, las gráficas de la **FIGURA 13.5.5** muestran el efecto diente de sierra en forma un tanto más clara.

El problema estriba en el hecho de que $e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \operatorname{sen} 2n\pi = 1$ para valores enteros de n. La serie discreta de Fourier no puede distinguir e^{inx} de 1, ya que estas funciones son iguales en los puntos de muestreo $x = 2k\pi/n$. La frecuencia más elevada se ve como la más baja. Considere las funciones cos $(\pi n/2)$y cos $(7\pi n/2)$. Si muestreamos en los puntos $n = 0, 1, 2, \ldots$, estas dos funciones parecen idénticas, se supone la frecuencia más baja y las amplitudes (coeficientes de Fourier) asociadas con las frecuencias más elevadas se suman con la amplitud de menor frecuencia. Sin embargo, si a altas frecuencias estos coeficientes de Fourier son pequeños, ello no representa un gran problema. En el teorema del muestreo que presentamos más adelante, veremos qué instancia puede hacerse cargo de este problema.

Procesamiento de señales Más allá de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, como las que hemos estado haciendo con anterioridad, las ideas presentadas en la presente sección resultan de gran utilidad en el **procesamiento de señales**. Considere a las funciones con que hemos trabajado como **señales** provenientes de una fuente. Podremos reconstruir una señal transmitida por el muestreo en sus puntos discretos. El problema que representa realizar el cálculo de un número infinito de coeficientes de Fourier y sumar una serie infinita para reconstruir una señal (función) no es práctico. Una suma finita podría ser una aproximación satisfactoria; sin embargo, ciertas señales pueden reconstruirse mediante un número finito de muestras.

Teorema 13.5.1 Teorema del muestreo

Si una señal $f(x)$ está **limitada en banda**, es decir, si el rango de frecuencias de la señal se encuentra en la banda $-A < k < A$, entonces la señal puede reconstruirse muestreando dos veces cada ciclo de la frecuencia más alta presente; de hecho,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \frac{\operatorname{sen}(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}.$$

Para justificar el teorema 13.5.1 considere a la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de $f(x)$ como una extensión periódica en forma tal que $F(\alpha)$ esté definida para todos los valores de α, no solamente para aquellos incluidos en $-A < k < A$. Utilizando la transformada de Fourier tenemos

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha. \tag{10}$$

A $F(\alpha)$ se le da el tratamiento de una extensión periódica, la serie de Fourier para $F(\alpha)$ es

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\alpha/A}, \tag{11}$$

donde
$$c_n = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-in\pi\alpha/A}\,d\alpha. \tag{12}$$

Usamos (10) y observe que

$$\frac{\pi}{A} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) = \frac{\pi}{A}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-in\pi\alpha/A}\,d\alpha,$$

la cual, por (12), es igual a c_n. Al sustituir $c_n = \dfrac{\pi}{A} f\left(\dfrac{n\pi}{A}\right)$ en (11) resulta

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{A} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)e^{in\pi\alpha/A}.$$

De nuevo en (10), sustituimos esta expresión de $F(\alpha)$ para tener

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{A} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)e^{in\pi\alpha/A}\right)e^{-i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\int_{-A}^{A} e^{in\pi\alpha/A}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\int_{-A}^{A} e^{i\alpha\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{1}{i\left(\dfrac{n\pi}{A}-x\right)}\left(e^{iA\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}-e^{-iA\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{1}{i\left(\dfrac{n\pi}{A}-x\right)}2i\,\text{sen}\,(n\pi - Ax) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{\text{sen}\,(n\pi - Ax)}{n\pi - Ax} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{\text{sen}\,(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}.
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos, de manera sucesiva, un intercambio de suma e integración (no siempre permitida, sin embargo, en esta ocasión es correcto), integración de una función exponencial, $\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, y el hecho de que $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

Por lo tanto, a partir de las muestras en intervalos π/A pueden reconstruirse todos los valores de f. Observe que si establecemos e^{iAx} (en otras palabras, si establecemos $k = A$), entonces el teorema del muestreo no procederá. Si, por ejemplo, $f(x) = \text{sen } Ax$, entonces todas las muestras serán 0 y f no podrá ser reconstruida, ya que se presentará el fenómeno de diente de sierra.

Señales limitadas en banda Una señal que contenga muchas frecuencias puede **filtrarse** de tal manera que solamente queden intactas las frecuencias presentes en un intervalo, por ello la señal se considerará limitada en banda. Considere la señal $f(x)$. Multiplique la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de f por una función $G(\alpha)$ que sea 1 en el intervalo que contiene las frecuencias α a conservar, y 0 en cualquier otra frecuencia. Esta multiplicación de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia es una convolución de $f(x)$ y $g(x)$ en el dominio del tiempo. Recuerde que el problema 20 de los ejercicios 13.4 establece que

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau.$$

La integral que aparece en el segundo miembro de la ecuación se llama **convolución de *f* y *g***, y se expresa como $f*g$. El último enunciado puede escribirse de manera más compacta como

$$\mathscr{F}\{f*g\} = F(\alpha)G(\alpha).$$

La idea análoga para las transformadas de Laplace se encuentra en la sección 4.4. La función $g(x) = \dfrac{\text{sen } Ax}{\pi x}$ tiene como su transformada de Fourier la función pulso

$$G(\alpha) = \begin{cases} 1, & -A < \alpha < A \\ 0, & \text{en cualquier otro lugar.} \end{cases}$$

Lo anterior implica que la función $(f*g)(x)$ está limitada en banda, con frecuencias dentro del rango de $-A$ y A.

Cálculos con la transformada rápida de Fourier Regresemos a la transformada discreta de Fourier de $f(x)$, donde tenemos a f muestreada en n puntos uniformemente espaciados por una distancia T entre ellos, por ejemplo $0, T, 2T, 3T, \ldots, (n-1)T$. (Utilizamos $T = \pi/n$ al comienzo de esta sección.) Al sustituir lo anterior, la transformada discreta de Fourier

$$F\left(\frac{2\pi M}{b-a}\right) = \frac{b-a}{n} e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \omega_n^{jM}$$

se convierte en

$$F\left(\frac{2\pi k}{nT}\right) = T \sum_{j=0}^{n-1} f(jT)\omega_n^{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Por simplicidad de notación, escriba lo anterior como

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega_n^{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto le debe recordar a (6), donde teníamos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

o $\mathbf{f} = \mathbf{F}_n\mathbf{c}$. La clave de la TRF son las propiedades de ω_n y la factorización de matrices. Si $n = 2^N$ podemos escribir $\mathbf{F}_n$ de la manera siguiente (la cual no se demostrará):

$$\mathbf{F}_{2^N} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2^{N-1}} & \mathbf{D}_{2^{N-1}} \\ \mathbf{I}_{2^{N-1}} & -\mathbf{D}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{2^{N-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \mathbf{P}, \tag{13}$$

donde $\mathbf{I}_k$ es la matriz identidad $k \times k$, y $\mathbf{P}$ es la matriz permutación que modifica a la matriz $\mathbf{c}$ de tal forma que los subíndices pares se colocan en la parte superior mientras los impares van en la inferior. La matriz $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal definida por,

$$\mathbf{D}_{2^{N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega_{2^N} & & & \\ & & (\omega_{2^N})^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\omega_{2^N})^{2^{N-1}-1} \end{pmatrix}.$$

Observe que cada una de las $\mathbf{F}_{2^{N-1}}$ matrices puede, a su vez, factorizarse. Al final, la matriz $\mathbf{F}_n$ con n^2 elementos diferentes de cero se factoriza como el producto de n matrices más sencillas, lo cual significa un gran ahorro en cuanto a la cantidad de cálculos necesarios que deba realizar una computadora.

EJEMPLO 3 La transformada rápida de Fourier

Sean $n = 2^2 = 4$ y $\mathbf{F}_4$ la matriz del ejemplo 1:

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

A partir de (13), la factorización de $\mathbf{F}_4$ que se desea es

$$\mathbf{F}_4 = \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{array}\right)}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}. \qquad (14)$$

Hemos insertado líneas discontinuas en las matrices marcadas como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de tal manera que usted pueda identificar las submatrices $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{D}_2$, $-\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{F}_2$ comparando (14) directamente con (13). También se le exhorta a multiplicar el segundo miembro de (14) y comprobar que se obtiene $\mathbf{F}_4$. Ahora, si $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{F}_4\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -5 - 15i \\ -14 \\ -5 + 15i \end{pmatrix} = \mathbf{f}. \qquad \equiv$$

Sin entrar en detalles, el cálculo de $\mathbf{F}_n$ requiere de n^2 operaciones, mientras que el uso de la factorización de matrices (la TRF) significa una reducción en la cantidad de cálculos a una cifra proporcional a $n \ln n$. Haga la prueba con valores más grandes de n y verá que esto representa ahorros significativos.

13.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

1. Demuestre que $\mathbf{F}_4^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{F}_4$.
2. Demuestre la propiedad de análisis de la función delta de Dirac:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a).$$
[*Sugerencia:* Considere la función
$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x - a| < \varepsilon \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$
Utilice el teorema del valor medio para las integrales y, después, establezca $\epsilon \to 0$.]
3. Determine la transformada de Fourier para la función delta de Dirac $\delta(x)$.
4. Demuestre que la función delta de Dirac es la identidad implícita en la operación de convolución, es decir, muestre $f*\delta = \delta*f = f$. [*Sugerencia:* Utilice las transformadas de Fourier y el problema 3.]
5. Demuestre que la derivada de la función delta de Dirac $\delta'(x-a)$ tiene la propiedad que examina la derivada de una función f en a. [*Sugerencia:* Utilice la integración por partes.]
6. Utilice un CAS para demostrar que la transformada de Fourier de la función $g(x) = \dfrac{\text{sen } Ax}{\pi x}$ es la función pulso
$$G(\alpha) = \begin{cases} 1, & -A < \alpha < A \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
7. Escriba la matriz $\mathbf{F}_8$ y, después, escríbala en forma factorizada (13). Compruebe que el producto de los factores es $\mathbf{F}_8$. Si se le solicita comprobar el resultado, utilice un CAS para hacerlo.
8. Sea $\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos(2\pi/n) + i \text{ sen } (2\pi/n)$. Como $e^{i2\pi k} = 1$, todos los números ω_n^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, tienen la propiedad de que $(\omega_n^k)^n = 1$. Debido a lo anterior, ω_n^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se llaman **raíces *n*-ésimas de la unidad** y son soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$. Encuentre las raíces octavas de la unidad y grafíquelas en el plano xy donde un número complejo se escribe como $z = x + iy$. ¿Qué puede observar?

Tareas para el laboratorio de cómputo

9. Utilice un CAS para comprobar que la función $f*g$, donde $f(x) = e^{-5x^2}$ y $g(x) = \dfrac{\text{sen } 2x}{\pi x}$, está limitada en la banda. Si su CAS lo puede hacer, trace las gráficas de $\mathscr{F}\{f*g\}$ y $F(\alpha)G(\alpha)$ para comprobar el resultado.
10. Si en su CAS hay un comando para ejecutar la transformada discreta de Fourier, seleccione seis puntos cualesquiera y compare los resultados obtenidos utilizando ese comando con los obtenidos a partir de la ecuación $\mathbf{c} = \frac{1}{6}\overline{\mathbf{F}}_6\mathbf{f}$.

13 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los ejercicios del 1 al 18, resuelva cada problema de valores en la frontera dado mediante una transformada integral apropiada. Cuando sea necesario formule supuestos acerca del acotamiento.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x > 0,\ 0 < y < \pi$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ 0 < y < \pi$
$u(x, 0) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = e^{-x},\ x > 0$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$
$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$
$u(x, 0) = 50 \text{ sen } 2\pi x,\ 0 < x < 1$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ h > 0,\ x > 0,\ t > 0$
$u(0, t) = 0,\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ t > 0$
$u(x, 0) = u_0,\quad x > 0$
4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-|x|},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$
$u(x, 0) = u_0,\ -\infty < x < \infty$
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ x > 1,\ t > 0$
$u(0, t) = t,\ \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0$
$u(x, 0) = 0,\ x > 0$ [*Sugerencia:* Utilice el teorema 4.4.2.]
6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0$
$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$
$u(x, 0) = \text{ sen } \pi x,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\text{sen } \pi x,\ 0 < x < 1$
7. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ u_0, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$
8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < \pi,\ y > 0$
$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 1 \\ 1, & 1 < y < 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ 0 < x < \pi$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x > 0,\ y > 0$

$u(0, y) = \begin{cases} 50, & 0 < y < 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$

$u(x, 0) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < 1$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x > 0,\ 0 < y < \pi$

$u(0, y) = A,\ 0 < y < \pi$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = Be^{-x},\ x > 0$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0$

$u(0, t) = u_0,\ u(1, t) = u_0,\ t > 0$

$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < 1$

[*Sugerencia:* Utilice la identidad

$$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y,$$

y después use el problema 6 de los ejercicios 13.1.]

13. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$

$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ x > 0,\ t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -50,\ \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 100,\ t > 0$

$u(x, 0) = 100, x > 0$

15. Demuestre que una solución al problema de valores en la frontera

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ u(x, 1) = f(x),\ -\infty < x < \infty$

es $\quad u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \frac{\cosh \alpha y \cos \alpha(t - x)}{\cosh \alpha}\, dt\, d\alpha.$

16. $0.5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\quad x > 0,\quad t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad t > 0$

$u(x, 0) = e^{-2x},\quad x > 0$

17 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\quad 0 < x < \pi,\quad t > 0$

$u(0, t) = 1,\ u(\pi, t) = 1,\quad t > 0$

$u(x, 0) = 1 + \operatorname{sen} 2x,\quad 0 < x < \pi$

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x > 0,\quad t > 0$

$u(0, t) = 100[\mathscr{U}(t - 5) - \mathscr{U}(t - 10)],\quad t > 0$

$\lim_{x\to\infty} u(x, t) = 50,\quad t > 0$

$u(x, 0) = 50,\quad x > 0$

19. Considere el problema de valores en la frontera

$$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\quad x > 0,\quad t > 0$$

$$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -1,\ \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0,\quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0,\quad x > 0.$$

Resuelva el problema de valores en la frontera utilizando la transformada de Laplace.

20. ***a*)** Resuelva el problema de valores en la frontera del problema 19 empleando la transformada de Fourier.

***b*)** Demuestre que las respuestas en el inciso *a*) y en el problema 17 son equivalentes.

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

14

Estructura del capítulo

En la sección 6.5 estudiamos que una forma de aproximar la solución de un problema de segundo orden con valores en la frontera era trabajar con una ecuación de diferencias finitas como reemplazo de la ecuación diferencial ordinaria. La misma idea se puede aplicar a las ecuaciones diferenciales parciales. En las secciones correspondientes del presente capítulo se formulará una ecuación en diferencias como reemplazo de la ecuación de Laplace, de la ecuación unidimensional de calor y de la ecuación unidimensional de onda mediante la sustitución de las derivadas parciales u_{xx}, u_{yy}, u_{tt} y u_t por coeficientes en diferencias.

14.1 La ecuación de Laplace

Introducción De la sección 11.1 recuerde que las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables independientes se clasifican en *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. A grandes rasgos, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas involucran solamente derivadas parciales con respecto a variables en el espacio y, como una consecuencia, las soluciones de dichas ecuaciones están determinadas por condiciones de frontera únicas. Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas involucran derivadas parciales con respecto a variables en el espacio y el tiempo, así que sus soluciones se determinan generalmente a partir de las condiciones iniciales y de frontera. La solución de una ecuación diferencial parcial elíptica (como la de Laplace) puede describir un sistema físico cuyo estado se encuentra en equilibrio (de estado estable); la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica (digamos la ecuación de calor) puede describir un estado difuso, mientras que una ecuación diferencial parcial hiperbólica (la ecuación de onda) describe un estado vibratorio.

En esta sección comenzamos nuestro estudio con los métodos de aproximación apropiados para las ecuaciones elípticas. El enfoque se centrará en la ecuación diferencial parcial más sencilla, pero quizá la más importante de las ecuaciones de tipo elíptico: la ecuación de Laplace.

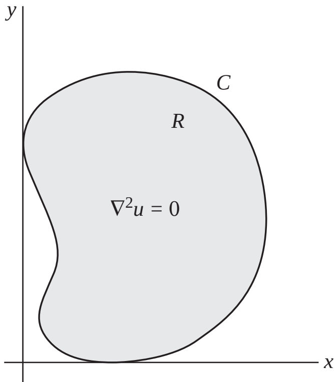


FIGURA 14.1.1 Región plana R con frontera C

Reemplazo de la ecuación en diferencias Suponga que estamos buscando una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en una región plana R acotada por la curva C. Véase la **FIGURA 14.1.1**. De manera similar a (6) de la sección 6.5, mediante las diferencias centrales

$$u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y) \qquad \text{y} \qquad u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h),$$

se pueden obtener aproximaciones para las segundas derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} utilizando cocientes en diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)] \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)]. \tag{2}$$

Ahora sumamos (1) y (2) para obtener una **aproximación de cinco puntos** al laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y)].$$

Por lo tanto, podemos reemplazar la ecuación de Laplace con la ecuación en diferencias

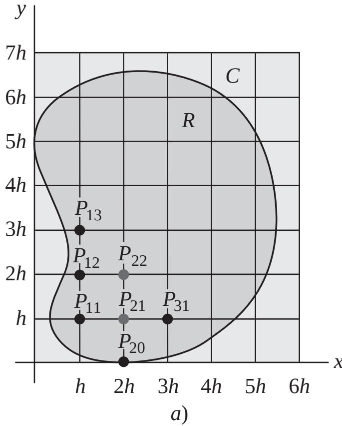
$$u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) = 0. \tag{3}$$

Si adoptamos la notación $u(x, y) = u_{ij}$ y

$$u(x + h, y) = u_{i+1,\, j}, \qquad u(x, y + h) = u_{i,\, j+1}$$
$$u(x - h, y) = u_{i-1,\, j}, \qquad u(x, y - h) = u_{i,\, j-1},$$

entonces (3) se convierte en

$$u_{i+1,\, j} + u_{i,\, j+1} + u_{i-1,\, j} + u_{i,\, j-1} - 4u_{ij} = 0. \tag{4}$$



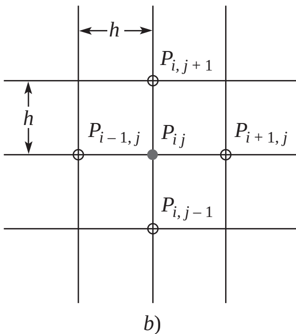


FIGURA 14.1.2 Región R colocada sobre una malla rectangular

Para comprender un poco mejor la ecuación (4) suponga la existencia de una malla rectangular constituida por líneas horizontales espaciadas h unidades entre sí y líneas verticales espaciadas h unidades entre sí colocada sobre la región R. El número h se llama **tamaño de la malla**. Consulte la **FIGURA 14.1.2a**). Los puntos $P_{ij} = P(ih, jh)$, donde i y j son enteros, de intersección de las líneas horizontales y verticales se llaman **puntos de la malla** o **puntos de la retícula**. Un punto de la malla es un **punto interior** si sus cuatro puntos de malla más cercanos son puntos de R. Los puntos localizados en R o en C que no sean interiores se llaman **puntos de frontera**. Por ejemplo, en la figura 14.1.2*a*) se tiene

$$P_{20} = P(2h, 0), \quad P_{11} = P(h, h), \quad P_{21} = P(2h, h), \quad P_{22} = P(2h, 2h),$$

y así sucesivamente. De los puntos listados, P_{21} y P_{22} son interiores, mientras que P_{20} y P_{11} son puntos de frontera. En la figura 14.1.2*a*), los puntos interiores se muestran en gris y los de frontera en negro. Ahora, a partir de (4), podemos observar que

$$u_{ij} = \frac{1}{4}[u_{i+1,\,j} + u_{i,\,j+1} + u_{i-1,\,j} + u_{i,\,j-1}], \tag{5}$$

y entonces, como indica la figura 14.1.2*b*), el valor de u_{ij} en un punto de malla interior de R es el promedio de los valores de u en cuatro puntos de malla cercanos. Los puntos cercanos $P_{i+1,\,j}$, $P_{i,\,j+1}$, $P_{i-1,\,j}$ y $P_{i,\,j-1}$ corresponden, respectivamente, a los cuatro puntos cardinales de la rosa de los vientos E, N, O y S.

Problema de Dirichlet Recuerde que en el **problema de Dirichlet** para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$, los valores de $u(x, y)$ son prescritos en la frontera C de la región R. La idea fundamental es encontrar una solución aproximada a la ecuación de Laplace en puntos interiores de la malla, mediante el reemplazo de la ecuación diferencial parcial ubicada en estos puntos por la ecuación en diferencias (4). Por lo tanto, los valores aproximados de u en los puntos de la malla (digamos u_{ij}), están relacionados entre sí y, posiblemente, con valores conocidos de u si un punto de la malla se encuentra en la frontera C. De esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el que despejamos la incógnita u_{ij}. El ejemplo siguiente ilustra el método de la región cuadrada.

EJEMPLO 1 Vuelta a problemas de valores en la frontera

En el problema 16 de los ejercicios 11.5 se pidió resolver el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \qquad u(2, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

utilizando el principio de superposición. Para aplicar el método numérico presente, comencemos con un tamaño de malla de $h = \frac{2}{3}$. Como podemos observar en la **FIGURA 14.1.3**, esta elección nos da cuatro puntos interiores y ocho de frontera. Los números listados junto a los puntos de frontera son los valores exactos de u obtenidos a partir de la condición especificada a lo largo de esa frontera. Por ejemplo, en $P_{31} = P(3h, h) = P(2, \frac{2}{3})$ tenemos $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}$, por lo que la condición $u(2, y)$ nos da $u(2, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$. De manera similar, en $P_{13} = P(\frac{2}{3}, 2)$, la condición $u(x, 2)$ nos da $u(\frac{2}{3}, 2) = \frac{2}{3}$. Ahora aplicamos (4) en cada punto interior. Por ejemplo, en P_{11} tenemos $i = 1$ y $j = 1$, entonces (4) se convierte en

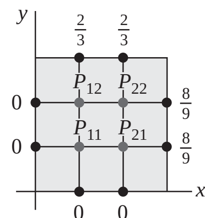


FIGURA 14.1.3 Región cuadrada R del ejemplo 1

$$u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0.$$

Puesto que $u_{01} = u(0, \frac{2}{3}) = 0$ y $u_{10} = u(\frac{2}{3}, 0) = 0$, la ecuación anterior se convierte en $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$. Repetir esto, respectivamente, en los puntos P_{21}, P_{12} y P_{22}, resulta en las tres ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\quad &= 0 \\ u_{11} - 4u_{21} + \qquad\quad u_{22} &= -\tfrac{8}{9} \\ u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= -\tfrac{2}{3} \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -\tfrac{14}{9}. \end{aligned} \tag{6}$$

Utilizamos un sistema algebraico de cómputo para resolver este sistema y encontramos que las temperaturas aproximadas en los cuatro puntos interiores son

$$u_{11} = \frac{7}{36} = 0.1944, \qquad u_{21} = \frac{5}{12} = 0.4167,$$
$$u_{12} = \frac{13}{36} = 0.3611, \qquad u_{22} = \frac{7}{12} = 0.5833. \qquad \equiv$$

De la misma forma que en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, esperamos que un valor más pequeño de h mejorará la precisión de esta aproximación. Sin embargo, utilizar una malla más pequeña significa, desde luego, que existen más puntos interiores de malla y, por lo tanto, un mayor número de sistemas de ecuaciones a resolver. Para una región *cuadrada* cuya longitud de lado es L, un tamaño de malla de $h = L/n$ dará un total de $(n - 1)^2$ puntos interiores de malla. En el ejemplo 1, para $n = 8$, el tamaño de la malla es un razonable $h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, pero el número de puntos interiores es de $(8 - 1)^2 = 49$. Así, tenemos 49 ecuaciones con 49 incógnitas. En el ejemplo siguiente utilizamos un tamaño de malla de $h = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2 Ejemplo 1 con más puntos de malla

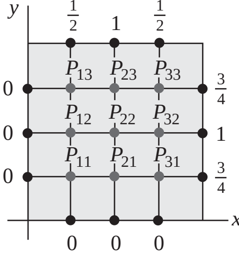


FIGURA 14.1.4 Región R del ejemplo 1 con puntos de malla adicionales

Tal como podemos observar en la **FIGURA 14.1.4**, con $n = 4$, un tamaño de malla $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ para el cuadrado del ejemplo 1 nos da $3^2 = 9$ puntos interiores de malla. Aplicando (4) en estos puntos y utilizando las condiciones de frontera indicadas, obtenemos nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Para que usted pueda comprobar los resultados, escribimos el sistema en forma no simplificada:

$$\begin{aligned}
u_{21} + u_{12} + \quad 0 + \quad 0 - 4u_{11} &= 0\\
u_{31} + u_{22} + u_{11} + \quad 0 - 4u_{21} &= 0\\
\tfrac{3}{4} + u_{32} + u_{21} + \quad 0 - 4u_{31} &= 0\\
u_{22} + u_{13} + u_{11} + \quad 0 - 4u_{12} &= 0\\
u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0\\
1 + u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0\\
u_{23} + \quad \tfrac{1}{2} + \quad 0 + u_{12} - 4u_{13} &= 0\\
u_{33} + \quad 1 + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0\\
\tfrac{3}{4} + \quad \tfrac{1}{2} + u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

En este caso, un CAS nos da

$$\begin{aligned}
&u_{11} = \tfrac{7}{64} = 0.1094, && u_{21} = \tfrac{51}{224} = 0.2277, && u_{31} = \tfrac{177}{448} = 0.3951\\
&u_{12} = \tfrac{47}{224} = 0.2098, && u_{22} = \tfrac{13}{32} = 0.4063, && u_{32} = \tfrac{135}{224} = 0.6027\\
&u_{13} = \tfrac{145}{448} = 0.3237, && u_{23} = \tfrac{131}{224} = 0.5848, && u_{33} = \tfrac{39}{64} = 0.6094.
\end{aligned}$$
≡

Después de simplificar (7) resulta interesante observar que la matriz de coeficientes de 9×9 es

$$\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Éste es un ejemplo de una **matriz dispersa** en la que un gran porcentaje de elementos son cero. La matriz (8) también es ejemplo de una **matriz bandeada**. Estos tipos de matrices se caracterizan por las propiedades de que los elementos ubicados en la diagonal principal o en las diagonales (o bandas) paralelas a la diagonal principal son todos diferentes de cero. En (8), las bandas en tono oscuro están separadas por diagonales constituidas o no por ceros.

Iteración de Gauss-Seidel Los problemas que requieren aproximaciones para soluciones de ecuaciones diferenciales parciales invariablemente llevan a sistemas de ecuaciones algebraicas lineales de gran tamaño. No es raro tener que resolver sistemas conformados por cientos de ecuaciones. A pesar de que un método de solución directo como la eliminación gaussiana deja sin modificar los elementos que son ceros fuera de las bandas en una matriz como la (8), llena las posiciones entre las bandas con elementos diferentes de cero. Como el almacenamiento de matrices muy grandes utiliza gran cantidad de memoria en la computadora, es una práctica muy común resolver sistemas grandes en forma indirecta. Un popular método indirecto se llama **iteración de Gauss-Seidel**.

Ilustraremos este método para el sistema (6). En aras de la simplicidad, reemplazamos las variables con doble subíndice u_{11}, u_{21}, u_{12} y u_{22} por x_1, x_2, x_3 y x_4, respectivamente.

EJEMPLO 3 Iteración de Gauss-Seidel

Paso 1: *Despeje las variables de la diagonal principal del sistema en cada una de las ecuaciones.* Esto es, en (6) despejar x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda, y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.25x_2 + 0.25x_3 \\ x_2 &= 0.25x_1 + 0.25x_4 + 0.2222 \\ x_3 &= 0.25x_1 + 0.25x_4 + 0.1667 \\ x_4 &= 0.25x_2 + 0.25x_3 + 0.3889. \end{aligned} \tag{9}$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse directamente utilizando (5) en lugar de (4) en los puntos interiores.

Paso 2: *Iteraciones*. Comenzamos haciendo una estimación inicial de los valores x_1, x_2, x_3 y x_4. Si éste fuera un simple sistema de ecuaciones lineales y no supiéramos nada acerca de la solución, podríamos comenzar con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Sin embargo, puesto que la solución de (9) representa aproximaciones a la solución de un problema de valores en la frontera, podría parecer razonable el uso de la estimación inicial para los valores de $x_1 = u_{11}$, $x_2 = u_{21}$, $x_3 = u_{12}$ y $x_4 = u_{22}$ el promedio de todas las condiciones de frontera. En este caso, el promedio de los números localizados en los ocho puntos de frontera que se muestran en la figura 14.1.2 es aproximadamente de 0.4. Por lo tanto, nuestra estimación inicial es $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.4$ y $x_4 = 0.4$. El método de iteraciones de Gauss-Seidel utiliza los valores x tan pronto como se calculan. Observe que la primera ecuación de (9) depende solamente de x_2 y x_3; entonces, sustituyendo $x_2 = 0.4$ y $x_3 = 0.4$ nos da $x_1 = 0.2$. Como la segunda y tercera ecuaciones dependen de x_1 y x_4, utilizamos los valores calculados $x_1 = 0.2$ y $x_4 = 0.4$ para obtener $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$. La cuarta ecuación depende de x_2 y x_3, así que usamos los nuevos valores $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ para obtener $x_4 = 0.5611$. En resumen, la primera iteración nos da los valores

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.3722, \quad x_3 = 0.3167, \quad x_4 = 0.5611.$$

Observe qué tan cercanos se encuentran estos valores a los reales proporcionados al final del ejemplo 1.

La segunda iteración comienza al sustituir $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ en la primera ecuación. Esto nos da $x_1 = 0.1722$. A partir de $x_1 = 0.1722$ y el último valor calculado de x_4 (es decir, $x_4 = 0.5611$), la segunda y tercera ecuaciones dan, respectivamente, $x_2 = 0.4055$ y $x_3 = 0.3500$. Utilizando estos dos valores encontramos a partir de la cuarta ecuación que $x_4 = 0.5678$. Al final de la segunda iteración tenemos

$$x_1 = 0.1722, \quad x_2 = 0.4055, \quad x_3 = 0.3500, \quad x_4 = 0.5678.$$

De la tercera a la séptima iteraciones se resumen en la **TABLA 14.1.1**.

TABLA 14.1.1 Iteración

	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima
x_1	0.1889	0.1931	0.1941	0.1944	0.1944
x_2	0.4139	0.4160	0.4165	0.4166	0.4166
x_3	0.3584	0.3605	0.3610	0.3611	0.3611
x_4	0.5820	0.5830	0.5833	0.5833	0.5833



Nota. Para aplicar la iteración de Gauss-Seidel a un sistema general de n ecuaciones lineales con n incógnitas, la variable x_i debe aparecer realmente en la i-ésima ecuación del sistema. Además, luego de despejar x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, en cada ecuación, el sistema resultante tiene la forma $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$, donde todos los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ son cero.

Comentarios

i) En los ejemplos proporcionados en esta sección, los valores de u_{ij} se determinaron utilizando valores conocidos de u en los puntos de frontera. Sin embargo, ¿qué hacemos si la región es tal que los puntos de frontera no coinciden con la frontera real C de la región R? En tal caso, los valores requeridos pueden obtenerse mediante la interpolación.

ii) A veces puede reducirse el número de ecuaciones a resolver empleando la simetría. Considere la región rectangular $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, que muestra la **FIGURA 14.1.5**. Las condiciones de frontera son $u = 0$ a lo largo de las fronteras $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ y $u = 100$ a lo largo de $y = 0$. La región es simétrica con respecto a las líneas $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$, y los puntos interiores P_{11} y P_{31} son equidistantes en relación con los puntos de frontera vecinos donde los valores específicos de u son los mismos. En consecuencia, suponemos que $u_{11} = u_{31}$, y entonces el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se simplifica a dos ecuaciones con dos incógnitas. Consulte el problema 2 de los ejercicios 14.1.

iii) En el contexto de aproximar una solución a la ecuación de Laplace, la técnica de iteración del ejemplo 3 se conoce a menudo como el **método de Liebman**.

iv) Puede ser que no se note en una computadora; sin embargo, la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel (o método de Liebman) puede no resultar particularmente rápida. Asimismo, en un contexto más general, la iteración de Gauss-Seidel puede no converger del todo. Para enterarse de condiciones que sean suficientes para garantizar la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel, se invita al lector a consultar libros donde se trate el análisis numérico.

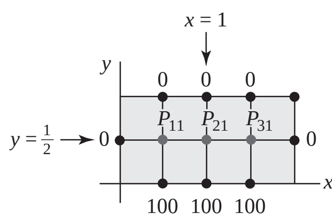


FIGURA 14.1.5 Región rectangular R

14.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas del 1 al 8, utilice una computadora como ayuda para realizar los cálculos.

En los problemas del 1 al 4, utilice (4) para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de la región dada. Aplique la simetría cuando sea posible.

1. $u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = x(3 - x), \quad 0 < x < 3$
tamaño de la malla: $h = 1$

2. $u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 100, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2$
tamaño de la malla: $h = \frac{1}{2}$

3. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1$
tamaño de la malla: $h = \frac{1}{3}$

4. $u(0, y) = 108y^2(1 - y), \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1$
tamaño de la malla: $h = \frac{1}{3}$

En los problemas 5 y 6, utilice (5) y la iteración de Gauss-Seidel para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de un cuadrado unitario. Utilice como tamaño de la malla $h = \frac{1}{4}$. En el problema 5 están dadas las condiciones de frontera; en el problema 6, los valores de u en los puntos de frontera aparecen en la **FIGURA 14.1.6**.

5. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 100y, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 100x, \quad 0 < x < 1$

6.

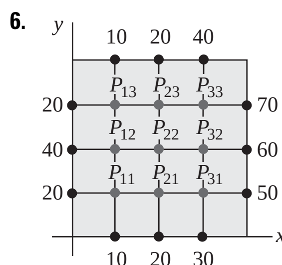


FIGURA 14.1.6 Región del problema 6

7. ***a***) En el problema 12 de los ejercicios 11.6, usted resolvió un problema de potencial utilizando la forma especial de la ecuación de Poisson $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. Demuestre que el reemplazo de la ecuación en diferencias para la de Poisson es

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 f(x, y).$$

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para aproximar la solución de la ecuación de Poisson $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ en los puntos interiores de la región indicada en la **FIGURA 14.1.7**. El tamaño de la malla es $h = \frac{1}{2}$, $u = 1$ en cada punto localizado a lo largo de $ABCD$, y $u = 0$ en cada punto de $DEFGA$. Aplique la simetría y, si fuese necesario, la iteración de Gauss-Seidel.

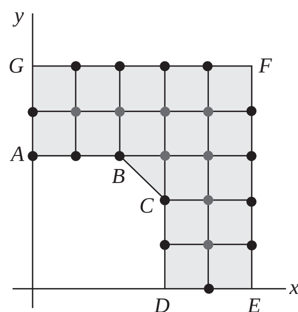


FIGURA 14.1.7 Región del problema 7

8. Utilice el resultado del inciso *a*) del problema 7 para aproximar la solución de la ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -64$ en los puntos interiores de la región de la **FIGURA 14.1.8**. La malla es de $h = \frac{1}{8}$, y $u = 0$ en cada punto de frontera de la región. De ser necesario, utilice la iteración de Gauss-Seidel.

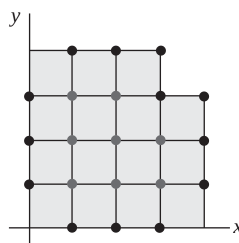


FIGURA 14.1.8 Región del problema 8

14.2 La ecuación de calor

Introducción En el siguiente análisis, la idea fundamental es la misma que en la sección 14.1: aproximamos una solución de una ecuación diferencial parcial, esta vez una ecuación diferencial parcial parabólica, reemplazando la ecuación por otra de diferencias finitas. Sin embargo, a diferencia de la sección anterior, consideraremos *dos* métodos de aproximación de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas: una llamada método explícito y la otra método implícito. Para efectos de definición, trataremos solamente la ecuación de calor en una dimensión.

Reemplazo por una ecuación en diferencias Para aproximar la solución $u(x, t)$ de la ecuación de calor en una dimensión

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

de nuevo reemplazamos las derivadas por cocientes en diferencias. Utilizando la aproximación central de diferencias (2) de la sección 14.1,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)]$$

y la aproximación en diferencias hacia delante (3) de la sección 6.5,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h}[u(x, t + h) - u(x, t)]$$

la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{c}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] = \frac{1}{k}[u(x, t + k) - u(x, t)]. \tag{2}$$

Si establecemos $\lambda = ck/h^2$ y

$$u(x, t) = u_{ij},\ \ u(x + h, t) = u_{i+1,\, j},\ \ u(x - h, t) = u_{i-1,\, j},\ \ u(x, t + k) = u_{i,\, j+1},$$

entonces, después de efectuar algunas simplificaciones, (2) es

$$u_{i,\, j+1} = \lambda u_{i+1,\, j} + (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,\, j}. \tag{3}$$

En el caso de la ecuación de calor (1), las condiciones de frontera típicas son $u(0, t) = u_1$, $u(a, t) = u_2$, $t > 0$, y una condición inicial es $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < a$. La función f puede interpretarse como la distribución inicial de temperatura en una varilla homogénea que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = a$; u_1 y u_2 pueden interpretarse como temperaturas constantes en los puntos extremos de la varilla. Aunque no lo demostraremos, el problema de valores

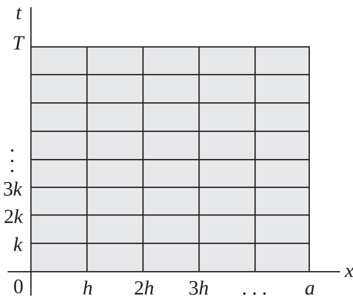


FIGURA 14.2.1 Región rectangular en el plano xt

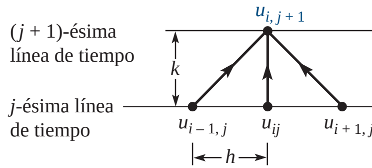


FIGURA 14.2.2 A partir de los tres valores de u en $t = j$ se determina u en $t = j + 1$

en la frontera constituido por (1) y estas dos condiciones de frontera más una condición inicial tiene una solución única cuando f es continua en el intervalo cerrado $[0, a]$. Se supondrá esta última condición, por lo que reemplazaremos la condición inicial por $u(x, 0) = f(x)$, $0 \le x \le a$. Además, en lugar de trabajar con la región semiinfinita en el plano xt definido mediante las desigualdades $0 \le x \le a$, $t \ge 0$, utilizamos una región rectangular definida por $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es un valor de tiempo específico. En esta región colocamos una malla rectangular compuesta por líneas verticales separadas entre sí en h unidades y líneas horizontales con separación entre sí de k unidades. Consulte la **FIGURA 14.2.1**. Si seleccionamos dos enteros positivos n y m y definimos

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{y} \quad k = \frac{T}{m},$$

entonces las líneas verticales y horizontales de la retícula estarán definidas mediante

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Tal como ilustra la **FIGURA 14.2.2**, la idea aquí es aplicar la fórmula (3) para calcular los valores de la solución $u(x, t)$ en los puntos sobre la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo utilizando solamente valores de la j-ésima línea de tiempo. Por ejemplo, los valores sobre la primera línea de tiempo ($j = 1$) dependen de la condición inicial $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ dada en el tiempo cero ($j = 0$). Este tipo de procedimiento numérico se denomina **método explícito de diferencia finita**.

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencia finita

Consideremos el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.5$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Primero identificamos $c = 1$, $a = 1$ y $T = 0.5$. Al seleccionar, digamos, $n = 5$ y $m = 50$, entonces $h = \frac{1}{5} = 0.2$, $k = \frac{0.5}{50} = 0.01$, $\lambda = 0.25$,

$$x_i = i\,\frac{1}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \qquad \text{y} \qquad t_j = j\,\frac{1}{100}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad 50.$$

Por lo tanto, (3) se convierte en

$$u_{i,\,j+1} = 0.25(u_{i+1,\,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}).$$

Al establecer el valor de $j = 0$ en esta fórmula, obtenemos otra fórmula para las aproximaciones de la temperatura u en la primera línea de tiempo:

$$u_{i,\,1} = 0.25(u_{i+1,\,0} + 2u_{i,\,0} + u_{i-1,\,0}).$$

Si después establecemos $i = 1, \ldots, 4$ en la última ecuación obtenemos, a su vez,

$$u_{11} = 0.25(u_{20} + 2u_{10} + u_{00})$$
$$u_{21} = 0.25(u_{30} + 2u_{20} + u_{10})$$
$$u_{31} = 0.25(u_{40} + 2u_{30} + u_{20})$$
$$u_{41} = 0.25(u_{50} + 2u_{40} + u_{30}).$$

La primera ecuación de esta lista se interpreta como

$$u_{11} = 0.25(u(x_2, 0) + 2u(x_1, 0) + u(0, 0))$$
$$= 0.25(u(0.4, 0) + 2u(0.2, 0) + u(0, 0)).$$

A partir de la condición inicial $u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x$, la última línea se convierte en

$$u_{11} = 0.25(0.951056516 + 2(0.587785252) + 0) = 0.531656755.$$

Este número representa una aproximación para la temperatura $u(0.2, 0.01)$.

Como se requeriría de una tabla mucho más grande, con más de 200 valores, para resumir todas las aproximaciones sobre la malla rectangular determinada por h y k, en la **TABLA 14.2.1** proporcionamos solamente algunos valores seleccionados.

TABLA 14.2.1 Aproximación explícita a la ecuación diferencial con $h = 0.2$, $k = 0.01$, $\lambda = 0.25$

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.2154	0.3486	0.3486	0.2154
0.20	0.0790	0.1278	0.1278	0.0790
0.30	0.0289	0.0468	0.0468	0.0289
0.40	0.0106	0.0172	0.0172	0.0106
0.50	0.0039	0.0063	0.0063	0.0039

≡

El lector deberá comprobar, mediante los métodos del capítulo 11, que una solución exacta para el problema de valores en la frontera del ejemplo 1 está dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t}$ sen πx. Utilizando esta solución, comparamos en la **TABLA 14.2.2** una muestra de los valores exactos con sus aproximaciones correspondientes.

TABLA 14.2.2

Exacto	Aproximado
$u(0.4, 0.05) = 0.5806$	$u_{25} = 0.5758$
$u(0.6, 0.06) = 0.5261$	$u_{36} = 0.5208$
$u(0.2, 0.10) = 0.2191$	$u_{1,\,10} = 0.2154$
$u(0.8, 0.14) = 0.1476$	$u_{4,\,14} = 0.1442$

Estabilidad Estas aproximaciones son comparables a los valores exactos y resultan lo suficientemente precisas como para cumplir algunos propósitos. Sin embargo, existe un problema relacionado con el método anterior. Recuerde que un método numérico es **inestable** si los errores por redondeo o de cualquier otro tipo crecen demasiado rápido conforme los cálculos se lleven a cabo. El procedimiento numérico del ejemplo 1 puede presentar este tipo de comportamiento. Es posible demostrar que el procedimiento resulta estable si λ es menor o igual que 0.5, sin embargo, es inestable para cualquier otro valor. Para obtener $\lambda = 0.25 \leq 0.5$ en el ejemplo 1, tuvimos que seleccionar el valor $k = 0.01$; la necesidad de utilizar tamaños de intervalo muy pequeños en la dirección del tiempo es la principal falla de este método. Se le pide al lector resolver el problema 12 de los ejercicios 14.2 y ser testigo de la inestabilidad predecible cuando $\lambda = 1$.

Método de Crank-Nicholson Existen **métodos implícitos de diferencia finita** para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Estos métodos requieren que resolvamos un sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo. Sin embargo, los métodos implícitos no experimentan problemas de inestabilidad.

El algoritmo que presentaron J. Crank y P. Nicholson en 1947 se utiliza principalmente para resolver la ecuación de calor. El algoritmo consiste en reemplazar la segunda derivada parcial en $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ por un promedio de dos cocientes de diferenciales centrales, uno evaluado en t y el otro en $t + k$:

$$\frac{c}{2}\left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \frac{u(x+h,t+k) - 2u(x,t+k) + u(x-h,t+k)}{h^2}\right] = \frac{1}{k}[u(x,t+k) - u(x,t)]. \quad (4)$$

Si definimos de nuevo $\lambda = ck/h^2$, entonces, después de volver a ordenar los términos, podemos escribir (4) como

$$-u_{i-1,\,j+1} + \alpha u_{i,\,j+1} - u_{i+1,\,j+1} = u_{i+1,\,j} - \beta u_{ij} + u_{i-1,\,j}, \quad (5)$$

donde $\alpha = 2(1 + 1/\lambda)$ y $\beta = 2(1 - 1/\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, e $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Por cada valor seleccionado de j, la ecuación en diferencias (5) para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ da $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas $u_{i,\,j+1}$. Debido a las condiciones de frontera prescritas, los valores de $u_{i,\,j+1}$ son conocidos para $i = 0$ y para $i = n$. Por ejemplo, en el caso $n = 4$, el sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo es

$$\begin{aligned}
-u_{0,\,j+1} + \alpha u_{1,\,j+1} - u_{2,\,j+1} &= u_{2,\,j} - \beta u_{1,\,j} + u_{0,\,j} \\
-u_{1,\,j+1} + \alpha u_{2,\,j+1} - u_{3,\,j+1} &= u_{3,\,j} - \beta u_{2,\,j} + u_{1,\,j} \\
-u_{2,\,j+1} + \alpha u_{3,\,j+1} - u_{4,\,j+1} &= u_{4,\,j} - \beta u_{3,\,j} + u_{2,\,j}
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\alpha u_{1,\,j+1} - u_{2,\,j+1} \qquad\qquad &= b_1 \\
-u_{1,\,j+1} + \alpha u_{2,\,j+1} - u_{3,\,j+1} &= b_2 \\
- \quad u_{2,\,j+1} + \alpha u_{3,\,j+1} &= b_3,
\end{aligned} \quad (6)$$

donde $b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}$

$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}$$

$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1}.$$

En general, si usamos la ecuación en diferencias (5) para determinar los valores de u en la $(j+1)$-ésima línea de tiempo, necesitaremos resolver el sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una **matriz tridiagonal**,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

y los elementos de la matriz columna $\mathbf{B}$ son

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}$$

$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}$$

$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} = u_{n,j} - \beta u_{n-1,j} + u_{n-2,j} + u_{n,j+1}.$$

EJEMPLO 2 Uso del método de Crank-Nicholson

Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$0.25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 2, \; 0 < t < 0.3$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(2, t) = 0, \; 0 \le t \le 0.3$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 2,$$

con $n = 8$ y $m = 30$.

Solución A partir de las identidades $a = 2$, $T = 0.3$, $h = \frac{1}{4} = 0.25$, $k = \frac{1}{100} = 0.01$ y $c = 0.25$ obtenemos $\lambda = 0.04$. Con ayuda de una computadora obtuvimos los resultados de la **TABLA 14.2.3**. Como en el ejemplo 1, los elementos de esta tabla solamente representan un número selecto de las 210 aproximaciones localizadas en la malla rectangular determinada por h y k.

TABLA 14.2.3 Método de Crank-Nicholson con $h = 0.25$, $k = 0.01$, $\lambda = 0.25$

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	0.7071	1.0000	0.7071	0.0000	−0.7071	−1.0000	−0.7071
0.05	0.6289	0.8894	0.6289	0.0000	−0.6289	−0.8894	−0.6289
0.10	0.5594	0.7911	0.5594	0.0000	−0.5594	−0.7911	−0.5594
0.15	0.4975	0.7036	0.4975	0.0000	−0.4975	−0.7036	−0.4975
0.20	0.4425	0.6258	0.4425	0.0000	−0.4425	−0.6258	−0.4425
0.25	0.3936	0.5567	0.3936	0.0000	−0.3936	−0.5567	−0.3936
0.30	0.3501	0.4951	0.3501	0.0000	−0.3501	−0.4951	−0.3501

≡

TABLA 14.2.4

Exacto	Aproximado
$u(0.75, 0.05) = 0.6250$	$u_{35} = 0.6289$
$u(0.50, 0.20) = 0.6105$	$u_{2,20} = 0.6259$
$u(0.25, 0.10) = 0.5525$	$u_{1,10} = 0.5594$

De la misma forma que en el ejemplo 1, el problema de valores en la frontera del ejemplo 2 también tiene una solución exacta dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \pi x$. Las comparaciones de muestra listadas en la **TABLA 14.2.4** indican que los errores absolutos son del orden de 10^{-2} o 10^{-3}. Se pueden obtener errores más pequeños disminuyendo el valor de h o el de k.

14.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas del 1 al 12, emplee una computadora como ayuda para realizar los cálculos.

1. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Use $n = 8$ y $m = 40$.

2. Al aplicar la solución por serie de Fourier del problema 1 de los ejercicios 11.3 con $L = 2$, podemos sumar los primeros 20 términos para calcular los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ para encontrar la solución $u(x, t)$ del problema 1. Un estudiante escribió un programa de computadora para realizar esto y obtuvo: $u(0.25, 0.1) = 0.3794$, $u(1, 0.5) = 0.1854$ y $u(1.5, 0.8) = 0.0623$. Suponga que estos resultados son precisos para todos los dígitos proporcionados. Compare tales valores con las aproximaciones obtenidas en el problema 1. En cada caso, determine los errores absolutos.

3. Resuelva el problema 1 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 40$. Utilice los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ proporcionados en el problema 2 para calcular los errores absolutos.

4. Repita el problema 1 con $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores para $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ dados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. ¿Por qué son tan imprecisas las aproximaciones en este caso?

5. Resuelva el problema 1 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores para $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ dados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. Compare los errores absolutos con los obtenidos en el problema 4.

6. En la sección 11.2 se demostró que si una varilla de longitud L está hecha de un material con conductividad térmica K, calor específico γ y densidad ρ, la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L.$$

Considere el problema de valores en la frontera constituido por la ecuación anterior y las condiciones

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \le t \le 10$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Utilice la ecuación en diferencias (3) de esta sección con $n = 10$ y $m = 10$ para aproximar la solución del problema de valores en la frontera cuando

a) $L = 20$, $K = 0.15$, $\rho = 8.0$, $\gamma = 0.11$, $f(x) = 30$
b) $L = 50$, $K = 0.15$, $\rho = 8.0$, $\gamma = 0.11$, $f(x) = 30$
c) $L = 20$, $K = 1.10$, $\rho = 2.7$, $\gamma = 0.22$, $f(x) = 0.5x(20 - x)$
d) $L = 100$, $K = 1.04$, $\rho = 10.6$, $\gamma = 0.06$,

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100. \end{cases}$$

7. Resuelva el problema 6 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 10$ y $m = 10$.

8. Repita el problema 6 si las temperaturas en los puntos extremos son $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 20$, $0 \le t \le 10$.

9. Resuelva el problema 8 mediante el método de Crank-Nicholson.

10. Considere el problema de valores en la frontera del ejemplo 2. Suponga que $n = 4$.

a) Calcule el nuevo valor de λ.
b) Utilice la ecuación de diferencias de Crank-Nicholson (5) para determinar el sistema de ecuaciones para u_{11}, u_{21} y u_{31}, esto es, los valores aproximados de u en la primera línea de tiempo. [*Sugerencia:* Fije el valor de $j = 0$ en (5), y permita que i tome los valores 1, 2, 3.]
c) Resuelva el sistema de tres ecuaciones sin ayuda de un programa de computadora. Compare sus resultados con los elementos correspondientes de la tabla 14.2.3.

11. Considere una varilla cuya longitud sea $L = 20$ para la cual $K = 1.05$, $\rho = 10.6$ y $\gamma = 0.056$. Suponga que

$$u(0, t) = 20, \quad u(20, t) = 30$$

$$u(x, 0) = 50.$$

a) Utilice el método que se describió en la sección 11.6 para calcular la solución de estado estable $\psi(x)$.
b) Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar las temperaturas $u(x, t)$ para $0 \le t \le T_{\text{máx}}$. Seleccione $T_{\text{máx}}$ lo suficientemente grande para permitir que las temperaturas se aproximen a los valores de estado estable. Compare las aproximaciones para $t = T_{\text{máx}}$ con los valores de $\psi(x)$ calculados en el inciso *a*).

12. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Use $n = 5$ y $m = 25$.

14.3 La ecuación de onda

Introducción En esta sección aproximamos una solución de la ecuación unidimensional de onda utilizando el método en diferencias finitas presentado en las dos secciones anteriores. La ecuación unidimensional de onda es el prototipo de la ecuación diferencial parcial hiperbólica.

Reemplazo de la ecuación en diferencias Suponga que $u(x, t)$ representa una solución de la ecuación unidimensional de onda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Utilizamos dos diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{k^2}[u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)]$$

para reemplazar la ecuación (1) por

$$\frac{c^2}{h^2}[u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] = \frac{1}{k^2}[u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)]. \tag{2}$$

Despejamos (2) para $u(x, t+k)$, lo que nos da $u_{i, j+1}$. Si $\lambda = ck/h$, entonces (2) resulta en

$$u_{i, j+1} = \lambda^2 u_{i+1, j} + 2(1-\lambda^2)u_{ij} + \lambda^2 u_{i-1, j} - u_{i, j-1} \tag{3}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Para el caso en que la ecuación de onda (1) es un modelo para los desplazamientos verticales $u(x, t)$ de una cuerda vibratoria, las condiciones de frontera típicas son $u(0, t) = 0$, $u(a, t) = 0$, $t > 0$, y las condiciones iniciales son $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = g(x)$, $0 < x < a$. Las funciones f y g pueden interpretarse como la posición inicial y la velocidad inicial de la cuerda. El método numérico basado en la ecuación (3), así como el primer método estudiado en la sección 14.2, es un método explícito de diferencias finitas. Como antes, aplicamos la ecuación de diferencias (3) para aproximar la solución $u(x, t)$ de (1) utilizando las condiciones de frontera e inicial sobre una región rectangular situada en el plano xt definido mediante las desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es un valor específico de tiempo. Si n y m son enteros positivos y

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{y} \quad k = \frac{T}{m},$$

las líneas horizontal y vertical de la retícula ubicada en esta región están definidas por

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

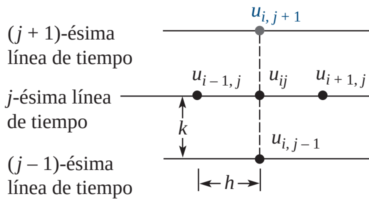


FIGURA 14.3.1 u en $t = j + 1$ se determina a partir de los tres valores de u en $t = j$ y de un valor en $t = j - 1$

Tal como se muestra en la **FIGURA 14.3.1**, (3) nos permite obtener la aproximación $u_{i, j+1}$ en la línea de tiempo $(j + 1)$-ésima a partir de los valores indicados en las líneas de tiempo j-ésima y $(j - 1)$-ésima. Además, utilizamos

$$u_{0, j} = u(0, jk) = 0, \quad u_{n, j} = u(a, jk) = 0 \quad \leftarrow \text{condiciones de frontera}$$

y

$$u_{i, 0} = u(x_i, 0) = f(x_i). \quad \leftarrow \text{condición inicial}$$

Hay un pequeño problema antes de comenzar. Usted puede observar, a partir de (3), que para $j = 1$ necesitamos saber los valores de $u_{i, 1}$ (esto es, los valores de u en la primera línea de tiempo) con la finalidad de calcular $u_{i, 2}$. Sin embargo, a partir de la figura 14.3.1, con $j = 0$, podemos observar que los valores de $u_{i, 1}$ en la primera línea de tiempo dependen de los valores de $u_{i, 0}$ en la línea de tiempo cero y de los valores de $u_{i, -1}$. Para calcular estos últimos, utilizamos la condición de velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. En $t = 0$ es posible deducir por la expresión (5) de la sección 6.5, es decir, que

$$g(x_i) = u_t(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, k) - u(x_i, -k)}{2k}. \tag{4}$$

Con la finalidad de que tenga sentido el término $u(x_i, -k) = u_{i,-1}$ en (4), debemos suponer una $u(x, t)$ extendida hacia atrás en el tiempo. A partir de (4) se deduce que

$$u(x_i, -k) \approx u(x_i, k) - 2kg(x_i).$$

Este último resultado sugiere que definamos

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg(x_i) \tag{5}$$

en la iteración de (3). Al sustituir (5) en (3) cuando $j = 0$, obtenemos el caso especial

$$u_{i,1} = \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + (1 - \lambda^2)u_{i,0} + kg(x_i). \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencias finitas

Aproxime la solución del problema de valores en la frontera

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \ 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \ 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \text{ sen } \pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 1,$$

al utilizar (3) con $n = 5$ y $m = 20$.

Solución Generamos las identidades $c = 2$, $a = 1$ y $T = 1$. Con $n = 5$ y $m = 20$, obtenemos $h = \frac{1}{5} = 0.2$, $k = \frac{1}{20} = 0.05$ y $\lambda = 0.5$. Por lo tanto, con $g(x) = 0$, las ecuaciones (6) y (3) se convierten, respectivamente, en

$$u_{i,1} = 0.125(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + 0.75u_{i,0} \tag{7}$$

$$u_{i,j+1} = 0.25u_{i+1,j} + 1.5u_{ij} + 0.25u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{8}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$, la ecuación (7) nos da los valores siguientes para $u_{i,1}$ en la primera línea de tiempo:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.125(u_{20} + u_{00}) + 0.75u_{10} = 0.55972100 \\ u_{21} &= 0.125(u_{30} + u_{10}) + 0.75u_{20} = 0.90564761 \\ u_{31} &= 0.125(u_{40} + u_{20}) + 0.75u_{30} = 0.90564761 \\ u_{41} &= 0.125(u_{50} + u_{30}) + 0.75u_{40} = 0.55972100. \end{aligned} \tag{9}$$

Observe que los resultados proporcionados en (9) fueron obtenidos a partir de la condición inicial $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$. Por ejemplo, $u_{20} = \text{sen}(0.2\pi)$, y así sucesivamente. Ahora $j = 1$ en (8) nos da

$$u_{i,2} = 0.25u_{i+1,1} + 1.5u_{i,1} + 0.25u_{i-1,1} - u_{i,0},$$

y, para $i = 1, 2, 3, 4$ obtenemos

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0.25u_{21} + 1.5u_{11} + 0.25u_{01} - u_{10} \\ u_{22} &= 0.25u_{31} + 1.5u_{21} + 0.25u_{11} - u_{20} \\ u_{32} &= 0.25u_{41} + 1.5u_{31} + 0.25u_{21} - u_{30} \\ u_{42} &= 0.25u_{51} + 1.5u_{41} + 0.25u_{31} - u_{40}. \end{aligned}$$

Al utilizar las condiciones de frontera, las condiciones iniciales y los datos surgidos de (9), conseguimos a partir de estas ecuaciones las aproximaciones para u en la segunda línea de tiempo. Estos últimos resultados y un resumen de los cálculos restantes se relacionan en la **TABLA 14.3.1**.

TABLA 14.3.1 Aproximación explícita de las ecuaciones de diferencias con $h = 0.2$, $k = 0.05$, $\lambda = 0.5$

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.4782	0.7738	0.7738	0.4782
0.20	0.1903	0.3080	0.3080	0.1903
0.30	−0.1685	−0.2727	−0.2727	−0.1685
0.40	−0.4645	−0.7516	−0.7516	−0.4645
0.50	−0.5873	−0.9503	−0.9503	−0.5873
0.60	−0.4912	−0.7947	−0.7947	−0.4912
0.70	−0.2119	−0.3428	−0.3428	−0.2119
0.80	0.1464	0.2369	0.2369	0.1464
0.90	0.4501	0.7283	0.7283	0.4501
1.00	0.5860	0.9482	0.9482	0.5860

≡

TABLA 14.3.2

Exacto	Aproximado
$u(0.4, 0.25) = 0$	$u_{25} = 0.0185$
$u(0.6, 0.3) = -0.2939$	$u_{36} = -0.2727$
$u(0.2, 0.5) = -0.5878$	$u_{1,10} = -0.5873$
$u(0.8, 0.7) = -0.1816$	$u_{4,14} = -0.2119$

TABLA 14.3.3

Exacto	Aproximado
$u(0.25, 0.3125) = -0.2706$	$u_{25} = -0.2706$
$u(0.375, 0.375) = -0.6533$	$u_{36} = -0.6533$
$u(0.125, 0.625) = -0.2706$	$u_{1,10} = -0.2706$

Se puede comprobar fácilmente que la solución exacta del problema de valores en la frontera del ejemplo 1 es $u(x, t) = \text{sen}\,\pi x \cos 2\pi t$. Usando esta función podemos comparar los resultados exactos con las aproximaciones. Por ejemplo, algunas comparaciones seleccionadas aparecen en la **TABLA 14.3.2**. Como puede observarse en la tabla, las aproximaciones están en la misma "zona" que los valores exactos, pero la precisión no es particularmente impresionante. Sin embargo, podemos obtener resultados más precisos. La precisión de este algoritmo varía con la selección de λ. Desde luego, λ está determinado por la elección de los enteros n y m, los cuales a su vez determinan los valores del tamaño de los intervalos h y k. Es posible demostrar que siempre se obtiene la mejor exactitud de este método cuando la relación $\lambda = kc/h$ es igual a uno; en otras palabras, cuando el intervalo en la dirección del tiempo es $k = h/c$. Por ejemplo, la elección $n = 8$ y $m = 16$ nos da $h = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{16}$ y $\lambda = 1$. Los valores muestra que se relacionan en la **TABLA 14.3.3** indican de manera clara la mejora en cuanto a exactitud.

Estabilidad En conclusión, observemos que este método explícito de diferencias finitas para la ecuación de onda es estable cuando $\lambda \leq 1$ e inestable cuando $\lambda > 1$.

14.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas 1, 3, 5 y 6 utilice una computadora como herramienta de cálculo.

1. Use la ecuación de diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a,\ 0 < t < T$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

cuando

a) $c = 1,\ a = 1,\ T = 1,\ f(x) = x(1 - x)$; $n = 4$ y $m = 10$

b) $c = 1,\ a = 2,\ T = 1,\ f(x) = e^{-16(x-1)^2}$; $n = 5$ y $m = 10$

c) $c = \sqrt{2},\ a = 1,\ T = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.5, & 0.5 < x \leq 1; \end{cases}$$

$n = 10$ y $m = 25$.

2. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 0.5$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$
$$u(x, 0) = \text{sen}\,\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Utilice los métodos del capítulo 11 para comprobar que la solución del problema es $u(x, t) = \text{sen}\,\pi x \cos \pi t$.

b) Utilice el método de esta sección para aproximar la solución al problema con ayuda de un programa de computadora. Use los valores $n = 4$ y $m = 5$.

c) Calcule el error absoluto en cada punto interior de la malla.

3. Aproxime la solución del problema de valores en la frontera del problema 2 utilizando un programa de computadora con

a) $n = 5, m = 10$ ***b***) $n = 5, m = 20$.

4. Dado el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < 1$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$$
$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 \leq x \leq 1$$

utilice $h = k = \frac{1}{5}$ en la ecuación (6) para calcular a mano los valores de $u_{i,1}$.

5. En la sección 11.2 se demostró que la ecuación de una cuerda vibratoria es

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde T representa la magnitud constante de la tensión presente en la cuerda, y ρ es su masa por unidad de longitud. Suponga que una cuerda de 60 centímetros de longitud está anclada al eje x en sus extremos y se suelta desde el reposo con desplazamiento inicial de

$$f(x) = \begin{cases} 0.01x, & 0 \le x \le 30 \\ 0.30 - \dfrac{x - 30}{100}, & 30 < x \le 60. \end{cases}$$

Utilice la ecuación de diferencias (3) de esta sección para aproximar la solución del problema de valores en la frontera cuando $h = 10,\ k = 5\sqrt{\rho/T}$ y donde $\rho = 0.0225$ g/cm, $T = 1.4 \times 10^7$ dinas. Use $m = 50$.

6. Repita el problema 5 utilizando

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 \le x \le 15 \\ 0.30 - \dfrac{x - 15}{150} & 15 < x \le 60 \end{cases}$$

y $h = 10$, $k = 2.5\sqrt{\rho/T}$. Use $m = 50$.

14 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

1. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = 0,\ u(2, y) = 50, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2.$$

Aproxime la solución de la ecuación diferencial en los puntos interiores de la región con tamaño de la malla $h = \frac{1}{2}$. Utilice la eliminación gaussiana o la iteración de Gauss-Seidel.

2. Resuelva el problema 1 utilizando el tamaño de la malla de $h = \frac{1}{4}$. Use la iteración de Gauss-Seidel.

3. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 0.05$$

$$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x, 0) = x,\ 0 < x < 1.$$

a) Observe que la temperatura inicial $u(x, 0) = x$ indica que en la frontera derecha $x = 1$ la temperatura debe ser $u(1, 0) = 1$, mientras que las condiciones de frontera implican que $u(1, 0) = 0$. Escriba un programa de computadora del método explícito en diferencias finitas de manera que las condiciones de frontera prevalezcan en todos los tiempos considerados, incluyendo $t = 0$. Use el programa para completar la **TABLA 14.R.1**.

b) Modifique su programa de computadora de tal manera que prevalezca la condición inicial en las fronteras en $t = 0$. Use este programa para completar la **TABLA 14.R.2**.

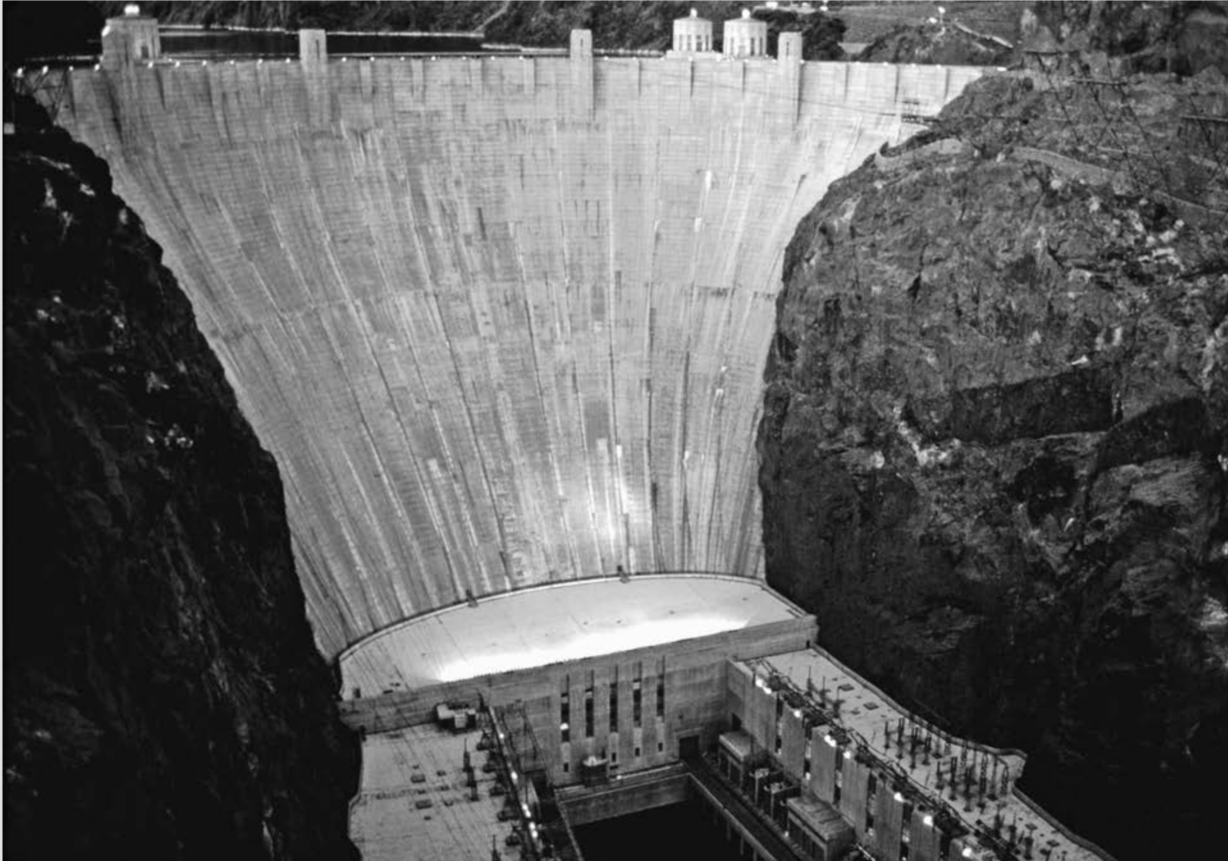
c) ¿Existe alguna relación entre las tablas 14.R.1 y 14.R.2? Utilice un intervalo de tiempo mayor si es necesario.

TABLA 14.R.1

Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000

TABLA 14.R.2

Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000



Generación de potencia hidroeléctrica de la Gran Presa de la Cañada

Parte 5

Análisis complejo

15 FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Estructura del capítulo

En cursos de álgebra elemental, además de aprender que existen números complejos, se estudian algunas de sus propiedades. No obstante, en cursos de cálculo es probable que no se utilicen números complejos. El cálculo introductorio es, básicamente, el estudio de funciones de una variable real. En cursos avanzados se pueden utilizar ocasionalmente números complejos. Sin embargo, en los próximos capítulos se introducen los conceptos de **análisis complejo**, es decir: el estudio de funciones de una variable compleja. Aunque existen muchas semejanzas entre este análisis y el análisis real, también hay muchas diferencias interesantes y algunas sorpresas.

15.1 Números complejos

Introducción Indudablemente, en cursos previos de matemáticas aparecen números complejos. Al aprender a resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ por medio de la fórmula cuadrática, se observa que las raíces de la ecuación no son reales, sino complejas, cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Entonces, por ejemplo, ecuaciones sencillas como $x^2 + 5 = 0$ y $x^2 + x + 1 = 0$ no tienen soluciones reales. Por ejemplo, las raíces de esta última ecuación son $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Si se considera que $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$ entonces las raíces se escriben como $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$.

Una definición Hace 200 años, más o menos, el tiempo que tomó a los números complejos ganar cierta respetabilidad en la comunidad matemática, el símbolo i se utilizaba originalmente como un disfraz para el engorroso símbolo $\sqrt{-1}$. Ahora simplemente se dice que i es la **unidad imaginaria** y se define por medio de la propiedad $i^2 = -1$. Utilizando la unidad imaginaria se construye un número complejo a partir de dos números reales.

Definición 15.1.1 Número complejo

Un **número complejo** es cualquier número de la forma $z = a + ib$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Terminología El número i de la definición 15.1.1 se denomina la **unidad imaginaria**. El número real x de $z = x + iy$ se denomina la **parte real** de z; el número real y se denomina la **parte imaginaria** de z. Las partes real e imaginaria de un número complejo z se abrevian Re(z) e Im(z), respectivamente. Por ejemplo, si $z = 4 - 9i$, entonces Re(z) = 4 e Im(z) = −9. Una constante real que es múltiplo de la unidad imaginaria se denomina un **número imaginario puro**. Por ejemplo, $z = 6i$ es un número imaginario puro. Dos números complejos son **iguales** si sus partes reales e imaginarias son iguales. Como en ocasiones este sencillo concepto es útil, se formaliza en la próxima definición.

Nota: la parte imaginaria de $z = 4 - 9i$ es -9 **no** $-9i$.

Definición 15.1.2 Igualdad

Los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son **iguales**, $z_1 = z_2$, si Re(z_1) = Re(z_2) e Im(z_1) = Im(z_2).

Un número complejo $x + iy = 0$ si $x = 0$ y $y = 0$.

Operaciones aritméticas Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, estas operaciones se definen como sigue:

Suma: $$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Resta: $$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplicación: $$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

División: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Las conocidas leyes conmutativa, asociativa y distributiva son válidas para números complejos.

Leyes conmutativas: $\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$

Leyes asociativas: $\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases}$

Ley distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Considerando estas leyes, no es necesario memorizar las definiciones de suma, resta y multiplicación. Para sumar (restar) dos números complejos, simplemente se suman (sustraen) las partes correspondientes reales e imaginarias. Para multiplicar dos números complejos se utiliza la ley distributiva y la propiedad de que $i^2 = -1$.

EJEMPLO 1 Suma y multiplicación

Si $z_1 = 2 + 4i$ y $z_2 = -3 + 8i$, encuentre: ***a***) $z_1 + z_2$ y ***b***) $z_1 z_2$.

Solución ***a***) Sumando las partes imaginarias y reales de los dos números, se obtiene

$$(2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i.$$

b) Utilizando la ley distributiva se tiene

$$\begin{aligned} (2 + 4i)(-3 + 8i) &= (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i. \end{aligned}$$

≡

Tampoco es necesario memorizar la definición de división pero, antes de discutir esto, es preciso introducir otro concepto.

Conjugado Si z es un número complejo, entonces el número que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria se denomina **complejo conjugado** o, simplemente, el **conjugado** de z. Si $z = x + iy$, entonces su conjugado es

$$\bar{z} = x - iy.$$

Por ejemplo, si $z = 6 + 3i$, entonces $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$, entonces $\bar{z} = -5 + i$. Si z es un número real, digamos $z = 7$, entonces $\bar{z} = 7$. De la definición de suma se demuestra fácilmente que el conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Es más, se tienen las siguientes tres propiedades

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Las definiciones de suma y multiplicación muestran que la suma y el producto de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son también números reales:

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \tag{1}$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2. \tag{2}$$

La diferencia entre un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ es un número imaginario puro:

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy. \tag{3}$$

Como $x = \text{Re}(z)$ y $y = \text{Im}(z)$, entonces (1) y (3) conducen a dos fórmulas útiles:

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sin embargo, (2) es la relación importante que permite abordar la división de manera más práctica: para dividir z_1 entre z_2 se multiplican tanto el numerador como el denominador de z_1/z_2 por el conjugado de z_2, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 División

Si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 6i$, encuentre: ***a***) $\dfrac{z_1}{z_2}$ y ***b***) $\dfrac{1}{z_1}$.

Solución En ambas partes de este ejemplo se multiplican tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador y entonces se aplica (2).

a)
$$\frac{2-3i}{4+6i} = \frac{2-3i}{4+6i}\,\frac{4-6i}{4-6i} = \frac{8-12i-12i+18i^2}{16+36}$$
$$= \frac{-10-24i}{52} = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

b)
$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$ ≡

Interpretación geométrica Un número complejo $z = x + iy$ se determina únicamente por medio de un *par ordenado* de números reales (x, y). El primero y segundo elementos de cada par ordenado corresponden, respectivamente, a la parte real y a la imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. Así también, $z = 2 - 3i$ determina al par ordenado $(2, -3)$. De esta forma se puede asociar un número complejo $z = x + iy$ con un punto (x, y) de un plano coordenado. Sin embargo, como se muestra en la sección 18.1, un par ordenado de números reales puede interpretarse como las componentes de un vector. Entonces, un número complejo $z = x + iy$ puede verse también como un *vector* cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es (x, y). El **plano coordenado** ilustrado en la **FIGURA 15.1.1** se denomina **plano complejo** o simplemente el **plano *z***. El eje horizontal o x se denomina el **eje real** y el eje vertical o y se denomina el **eje imaginario**. La longitud de un vector z, o la distancia desde el origen hasta al punto (x, y), es evidentemente $\sqrt{x^2 + y^2}$. Este número real se denomina de una forma especial.

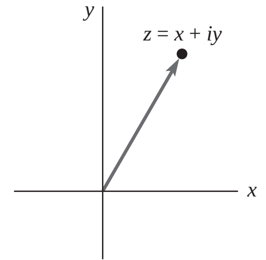


FIGURA 15.1.1 z como vector de posición

Definición 15.1.3 Módulo o valor absoluto

El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, denotado por $|z|$, es el número real
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Módulo de un número complejo

Si $z = 2 - 3i$, entonces $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. ≡

Como se muestra en la **FIGURA 15.1.2**, la suma de los vectores z_1 y z_2 es el vector $z_1 + z_2$. Para el triángulo indicado en la figura se sabe que la longitud del lado del triángulo correspondiente al vector $z_1 + z_2$ no puede ser más grande que la suma de los dos lados restantes. Simbólicamente:
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{5}$$
El resultado (5) se conoce como la **desigualdad triangular** y se extrapola a cualquier suma finita:
$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|. \tag{6}$$
Aplicando (5) en $z_1 + z_2 + (-z_2)$ se tiene otra desigualdad importante:
$$|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|. \tag{7}$$

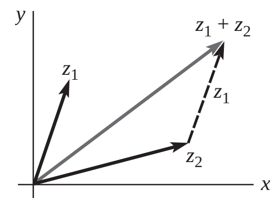


FIGURA 15.1.2 Suma de vectores

Comentarios

Muchas de las propiedades del sistema real son válidas en el sistema de números complejos, aunque existen algunas diferencias importantes. Por ejemplo, no se pueden comparar dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $y_1 \neq 0$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, $y_2 \neq 0$, por medio de desigualdades. En otras palabras, expresiones tales como $z_1 < z_2$ y $z_2 \geq z_1$ no poseen significado excepto en el caso en que z_1 y z_2 sean reales. Sin embargo, se pueden comparar los valores absolutos de dos números complejos. Así, si $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 5 - i$, entonces $|z_1| = 5$ y $|z_2| = \sqrt{26}$, y, como consecuencia, $|z_1| < |z_2|$. Esta última desigualdad significa que el punto (3, 4) está más cerca del origen que el punto (5, −1).

15.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas del 1 al 26, escriba el número indicado en la forma $a + ib$.

1. $2i^3 - 3i^2 + 5i$

2. $3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$

3. i^8

4. i^{11}

5. $(5 - 9i) + (2 - 4i)$

6. $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$

7. $i(5 + 7i)$

8. $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$

9. $(2 - 3i)(4 + i)$

10. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i)(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i)$

11. $(2 + 3i)^2$

12. $(1 - i)^3$

13. $\dfrac{2}{i}$

14. $\dfrac{i}{1 + i}$

15. $\dfrac{2 - 4i}{3 + 5i}$

16. $\dfrac{10 - 5i}{6 + 2i}$

17. $\dfrac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$

18. $\dfrac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$

19. $\dfrac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$

20. $\dfrac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$

21. $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$

22. $(1 + i)^2(1 - i)^3$

23. $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \dfrac{1}{2 - i}$

24. $(2 + 3i)\left(\dfrac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$

25. $\left(\dfrac{i}{3 - i}\right)\left(\dfrac{1}{2 + 3i}\right)$

26. $\dfrac{1}{(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)}$

En los problemas del 27 al 32, sea $z = x + iy$. Encuentre la expresión indicada.

27. $\text{Re}(1/z)$

28. $\text{Re}(z^2)$

29. $\text{Im}(2z + 4\bar{z} - 4i)$

30. $\text{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$

31. $|z - 1 - 3i|$

32. $|z + 5\bar{z}|$

En los problemas del 33 al 36, utilice la definición 15.1.2 para encontrar un número complejo z que cumpla con la ecuación indicada.

33. $2z = i(2 + 9i)$

34. $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

35. $z^2 = i$

36. $\bar{z}^2 = 4z$

En los problemas 37 y 38, determine cuál de los números complejos está más cerca del origen.

37. $10 + 8i$, $\quad 11 - 6i$

38. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$, $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6}i$

39. Demuestre que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano complejo.

40. Demuestre que $|z + 6 + 8i| \leq 12$ para todos los números complejos z del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

15.2 Potencias y raíces

Introducción Recuérdese que un punto (x, y) en coordenadas rectangulares también puede expresarse en coordenadas polares (r, θ). En esta sección se plantea que la posibilidad de expresar un número complejo z en términos de r y θ facilita enormemente el cálculo de potencias y raíces de z.

Forma polar Las coordenadas rectangulares (x, y) y las polares (r, θ) se relacionan mediante las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ (véase la sección 12.1). Por lo tanto, un número complejo no nulo $z = x + iy$ se escribe como $z = (r\cos\theta) + i(r\,\text{sen}\,\theta)$ o

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta). \tag{1}$$

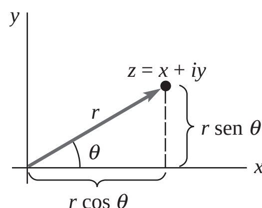


FIGURA 15.2.1 Coordenadas polares

Se dice que (1) es la **forma polar** del número complejo z. De la **FIGURA 15.2.1** se observa que la coordenada polar r puede interpretarse como la distancia desde el origen al punto (x, y). En otras palabras, se adopta la convención de que r nunca es negativo, por lo que se puede

considerar que r es el módulo de z, esto es, $r = |z|$. El ángulo θ de inclinación del vector z medido en radianes desde el eje real desde sus valores positivos, es igualmente positivo cuando se mide en contra del sentido del reloj y negativo cuando se mide en sentido del reloj. El ángulo θ se denomina **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg z$. De la figura 15.2.1 se observa que el argumento de un número complejo debe satisfacer la ecuación $\tan \theta = y/x$. Las soluciones de esta ecuación no son únicas, ya que si θ_0 es un argumento de z, entonces los ángulos $\theta_0 \pm 2\pi$, $\theta_0 \pm 4\pi$, …, son también argumentos, necesariamente. El argumento de un número complejo en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ se denomina el **argumento principal** de z y se denota como Arg z. Por ejemplo, Arg $(i) = \pi/2$.

EJEMPLO 1 Un número complejo en forma polar

Exprese $1 - \sqrt{3}i$ en forma polar.

Solución Con $x = 1$ y $y = -\sqrt{3}$, se obtiene $r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Ahora, como el punto $(1, -\sqrt{3})$ se localiza en el cuarto cuadrante, se puede considerar la solución de $\tan \theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ para obtener $\theta = \arg z = 5\pi/3$. De (1) se tiene que una forma polar del número es

$$z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right).$$

Como se muestra en la **FIGURA 15.2.2**, el argumento de $1 - \sqrt{3}i$ que se localiza en el intervalo $(-\pi, \pi]$, que es el argumento principal de z, es Arg $z = -\pi/3$. Así, una forma polar alternativa del número complejo es

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \qquad \equiv$$

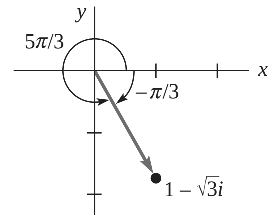


FIGURA 15.2.2 Dos argumentos de $z = 1 - \sqrt{3}i$ en el ejemplo1

Multiplicación y división La forma polar de un número complejo es especialmente conveniente para multiplicar o dividir dos números complejos. Supóngase que

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2),$$

donde θ_1 y θ_2 son cualesquiera argumentos de z_1 y z_2, respectivamente. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \tag{2}$$

y para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]. \tag{3}$$

De las fórmulas trigonométricas para la suma, (2) y (3) se reescriben, respectivamente, como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{4}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{5}$$

Al revisar (4) y (5) se observa que

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{6}$$

y

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{7}$$

EJEMPLO 2 Argumento de un producto y de un cociente

Se ha visto que Arg $z_1 = \pi/2$ para $z_1 = i$. En el ejemplo 1 se observa que Arg $z_2 = -\pi/3$ para $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Así, para

$$z_1 z_2 = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i \qquad \text{y} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{1 - \sqrt{3}i} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

se deduce a partir de (7) que

$$\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}. \qquad ≡$$

En el ejemplo 2 se utilizan los argumentos principales de z_1 y z_2 y se obtienen arg (z_1z_2) = Arg (z_1z_2) y arg (z_1/z_2) = Arg (z_1/z_2). Sin embargo, debe notarse que esto es una coincidencia. Aunque (7) es cierto para cualesquiera argumentos de z_1 y z_2, *no es cierto*, en general, que Arg (z_1z_2) = Arg z_1 + Arg z_2 y Arg (z_1/z_2) = Arg z_1 − Arg z_2; véase el problema 39 de los ejercicios 15.2.

Potencias de *z* A partir de los resultados (4) y (5) se pueden encontrar potencias enteras del número complejo z. Por ejemplo, si $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, entonces con $z_1 = z$ y $z_2 = z$, (4) conduce a

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \text{ sen } (\theta + \theta)] = r^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

Como $z^3 = z^2z$ se deduce que

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta).$$

Es más, como arg (1) = 0, se infiere a partir de (5) que

$$\frac{1}{z^2} = z^{-2} = r^{-2}[\cos(-2\theta) + i \text{ sen}(-2\theta)].$$

De esta manera se obtiene una fórmula para la n-ésima potencia de z para cualquier entero n:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta). \tag{8}$$

EJEMPLO 3 Potencia de un número complejo

Calcule z^3 para $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Solución En el ejemplo 1 se observa que

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \text{ sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Por lo tanto, de (8) con $r = 2$, $\theta = -\pi/3$ y $n = 3$, se tiene

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \text{ sen}\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$= 8[\cos(-\pi) + i \text{ sen}(-\pi)] = -8. \qquad ≡$$

Fórmula de DeMoivre Cuando $z = \cos\theta + i \text{ sen } \theta$ se tiene que $|z| = r = 1$ y por lo tanto (8) produce a

$$(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^n = \cos n\theta + i \text{ sen } n\theta. \tag{9}$$

Este resultado se conoce como la **fórmula de DeMoivre** y es útil para deducir ciertas igualdades trigonométricas.

Raíces Se dice que un número w es una **raíz *n*-ésima** de un número complejo no nulo z si $w^n = z$. Si $w = \rho(\cos\phi + i \text{ sen } \phi)$ y $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ son las formas polares de w y z, entonces, de (8), $w^n = z$ se convierte en

$$\rho^n(\cos n\phi + i \text{ sen } n\phi) = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta).$$

De aquí se concluye que $\rho^n = r$ o $\rho = r^{1/n}$ y

$$\cos n\phi + i \text{ sen } n\phi = \cos\theta + i \text{ sen } \theta.$$

Igualando las partes real e imaginaria se tiene de esta ecuación que

$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \text{sen } n\phi = \text{sen } \theta.$$

Estas igualdades implican que $n\phi = \theta + 2k\pi$, donde k es un entero. Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Al tomar k valores enteros sucesivos $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se obtienen n raíces *distintas* con el mismo módulo pero con diferentes argumentos. Pero para $k \geq n$ se obtienen las mismas raíces debido a que el seno y el coseno son periódicos cada 2π. Para ver esto, supóngase que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\phi = \frac{\theta + 2(n + m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

y así $$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right), \qquad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right).$$

A continuación se sintetiza este resultado. Las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ vienen dadas por

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{10}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

EJEMPLO 4 Raíces de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = i$.

Solución Con $r = 1$, $\theta = \arg z = \pi/2$, la forma polar del número indicado es $z = \cos(\pi/2) + i\operatorname{sen}(\pi/2)$. De (10) con $n = 3$ se obtiene

$$w_k = (1)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Por lo tanto, las tres raíces son:

$$k = 0, \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i. \qquad \equiv$$

La raíz w de un número complejo z obtenida mediante el argumento principal de z con $k = 0$ se denomina en ocasiones la **raíz principal *n*-ésima** de z. En el ejemplo 4, como $\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$, $w_0 = \sqrt{3}/2 + (1/2)i$ es la tercera raíz principal de i.

Puesto que las raíces dadas por (8) tienen el mismo módulo, las n raíces de un número complejo no nulo z se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ centrada en el origen del plano complejo. Es más, como la diferencia entre los argumentos de dos raíces sucesivas es $2\pi/n$, las raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas en esta circunferencia. La **FIGURA 15.2.3** muestra las tres raíces de i igualmente espaciadas en un círculo unitario; el ángulo entre las raíces (vectores) w_k y w_{k+1} es $2\pi/3$.

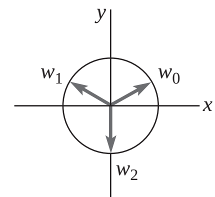


FIGURA 15.2.3 Tres raíces cúbicas de i

Como se muestra en el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen por qué ser números "agradables" como los del ejemplo 3.

EJEMPLO 5 Raíces de un número complejo

Encuentre las cuatro raíces cuartas de $z = 1 + i$.

Solución En este caso, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \arg z = \pi/4$. De (10) con $n = 4$ se obtiene

$$w_k = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Entonces,

$$k = 0, \quad w_0 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right] = 1.0696 + 0.2127i$$

$$k = 1, \quad w_1 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right] = -0.2127 + 1.0696i$$

$$k = 2, \quad w_2 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right] = -1.0696 - 0.2127i$$

$$k = 3, \quad w_3 = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right] = 0.2127 - 1.0696i. \qquad \equiv$$

15.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas del 1 al 10, escriba en forma polar el número complejo indicado.

1. 2 **2.** -10

3. $-3i$ **4.** $6i$

5. $1 + i$ **6.** $5 - 5i$

7. $-\sqrt{3} + i$ **8.** $-2 - 2\sqrt{3}i$

9. $\dfrac{3}{-1 + i}$ **10.** $\dfrac{12}{\sqrt{3} + i}$

En los problemas del 11 al 14, escriba en la forma $a + ib$ el número indicado en forma polar.

11. $z = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

12. $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{4}\right)$

13. $z = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)$

14. $z = 10\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}\right)$

En los problemas 15 y 16, encuentre z_1z_2 y z_1/z_2. Escriba el número en la forma $a + ib$.

15. $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right), z_2 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{8}\right)$

16. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)$

En los problemas del 17 al 20, escriba cada número complejo en forma polar. Después, utilice (4) o (5) para obtener una forma polar del número indicado. Finalmente, escríbalo en la forma $a + ib$.

17. $(3 - 3i)(5 + 5\sqrt{3}i)$ **18.** $(4 + 4i)(-1 + i)$

19. $\dfrac{-i}{2 - 2i}$ **20.** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

En los problemas del 21 al 26, utilice (8) para calcular la potencia indicada.

21. $(1 + \sqrt{3}i)^9$ **22.** $(2 - 2i)^5$

23. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$ **24.** $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

25. $\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)^{12}$

26. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

En los problemas del 27 al 32, utilice (10) para calcular todas las raíces. Bosqueje estas raíces en una circunferencia adecuada centrada en el origen.

27. $(8)^{1/3}$ **28.** $(1)^{1/8}$

29. $(i)^{1/2}$ **30.** $(-1 + i)^{1/3}$

31. $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$ **32.** $(-1 - \sqrt{3}i)^{1/4}$

En los problemas 33 y 34, encuentre todas las soluciones de la ecuación indicada.

33. $z^4 + 1 = 0$ **34.** $z^8 - 2z^4 + 1 = 0$

En los problemas 35 y 36, exprese el número complejo indicado en forma polar y de modo $a + ib$.

35. $\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^5$

36. $\dfrac{\left[8\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$

37. Utilice el resultado $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta$ para encontrar identidades trigonométricas para $\cos 2\theta$ y $\text{sen}\,2\theta$.

38. Utilice el resultado $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta$ para encontrar identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ y $\text{sen}\,3\theta$.

39. ***a***) Si $z_1 = -1$ y $z_2 = 5i$, verifique que

$$\text{Arg}(z_1z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2).$$

b) Si $z_1 = -1$ y $z_2 = -5i$, verifique que

$$\text{Arg}(z_1/z_2) \neq \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2).$$

40. Para los números complejos indicados en el problema 39, verifique en los incisos *a*) y *b*) que

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

y
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

15.3 Conjuntos en el plano complejo

Introducción En las secciones anteriores se plantean algunas herramientas rudimentarias de álgebra y geometría de números complejos. Sin embargo, con esto sólo se araña la superficie del tema conocido como análisis complejo; el *corpus* principal de dicho estudio se encuentra más adelante. El objetivo de las secciones y capítulos siguientes es estudiar funciones de una sola variable compleja $z = x + iy$ y el cálculo de dichas funciones.

Antes de introducir el concepto de función de una variable compleja se necesita establecer cierta terminología y definiciones esenciales respecto a los conjuntos del plano complejo.

Terminología Previamente a la discusión del concepto de funciones de una variable compleja es conveniente introducir cierta terminología esencial respecto a conjuntos del plano complejo.

Supóngase que $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre los puntos $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, los puntos $z = x + iy$ que cumplen con la ecuación

$$|z - z_0| = \rho,$$

$\rho > 0$, se encuentra en un **círculo** de radio ρ centrado en el punto z_0; véase la **FIGURA 15.3.1**.

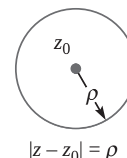


FIGURA 15.3.1 Círculo de radio ρ

EJEMPLO 1 Círculos

a) $|z| = 1$ es la ecuación de un círculo unitario centrado en el origen.
b) $|z - 1 - 2i| = 5$ es la ecuación de un círculo de radio 5 centrado en $1 + 2i$. ≡

Los puntos z que cumplen con la desigualdad $|z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$, se localizan dentro, pero no sobre, el círculo de radio ρ centrado en el punto z_0. A este conjunto se le denomina **vecindad** de z_0 o **disco abierto**. Se dice que un punto z_0 es un **punto interior** de un conjunto S del plano complejo si existe alguna vecindad de z_0 que se encuentra completamente dentro de S. Si todos los puntos z de un conjunto S son puntos interiores, entonces se dice que S es un **conjunto abierto**; véase la **FIGURA 15.3.2**. Por ejemplo, la desigualdad $\text{Re}(z) > 1$ define un *semiplano derecho*, que es un conjunto abierto. Todos los números complejos $z = x + iy$ para los que $x > 1$ se encuentran en este conjunto. Si se elige, por ejemplo, $z_0 = 1.1 + 2i$, entonces una vecindad de z_0 que se localiza completamente en el conjunto viene definida por $|z - (1.1 + 2i)| < 0.05$; véase la **FIGURA 15.3.3**. Por otro lado, el conjunto S de puntos del plano complejo definido por $\text{Re}(z) \geq 1$ *no* es abierto, puesto que cualquier vecindad de un punto sobre la línea $x = 1$ debe contener puntos en S y puntos que no están en S; véase la **FIGURA 15.3.4**.

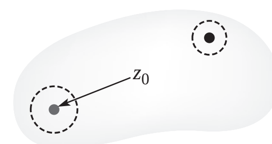


FIGURA 15.3.2 Conjunto abierto

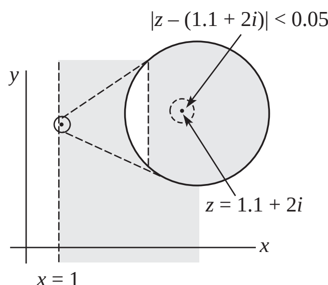


FIGURA 15.3.3 Ampliación de un punto cercano a $x = 1$ de un conjunto abierto

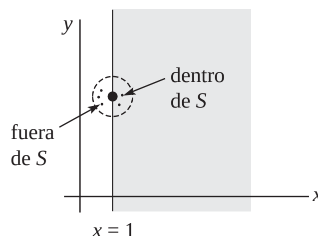


FIGURA 15.3.4 El conjunto S no es abierto

EJEMPLO 2 Conjuntos abiertos

La **FIGURA 15.3.5** ilustra algunos conjuntos abiertos adicionales

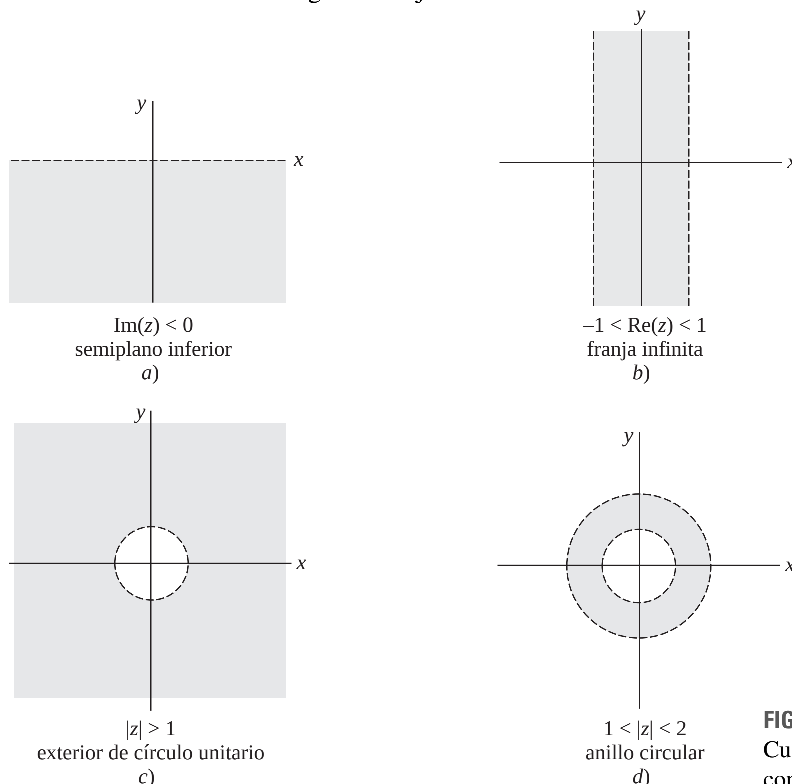


FIGURA 15.3.5 Cuatro ejemplos de conjuntos abiertos

El conjunto de números que cumplen con la desigualdad

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2,$$

tal como se ilustra en la figura 15.3.5*d*), se denomina también un **anillo** abierto.

Si cualquier vecindad de un punto z_0 contiene por lo menos un punto que está en un conjunto *S* y por lo menos un punto que no está en *S*, entonces se dice que z_0 es un **punto frontera** de *S*. La **frontera** de un conjunto *S* es el conjunto de todos los puntos frontera de *S*. Para el conjunto de puntos definido por $\text{Re}(z) \geq 1$, los puntos sobre la línea $x = 1$ son puntos frontera. Los puntos sobre el círculo $|z - i| = 2$ son puntos frontera para el disco $|z - i| \leq 2$.

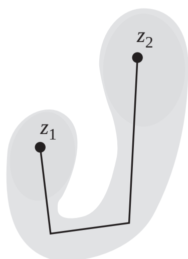


FIGURA 15.3.6 Conjunto conexo

Si cualquier par de puntos z_1 y z_2 de un conjunto abierto *S* se conectan por medio de una línea poligonal comprendida completamente en el conjunto, entonces se dice que el conjunto abierto *S* es **conexo** (o **arco-conexo**, como suele denominársele con más precisión); véase la **FIGURA 15.3.6**. Un conjunto abierto conexo se denomina **dominio**. Todos los conjuntos abiertos de la figura 15.3.5 son conexos y por lo tanto son dominios. El conjunto de números que cumple con $\text{Re}(z) \neq 4$ es un conjunto abierto, pero no es conexo ya que no es posible unir puntos de ambos lados de la línea vertical $x = 4$ mediante una línea poligonal sin abandonar el conjunto (tome en cuenta que los puntos en $x = 4$ no están en el conjunto).

Una **región** es un dominio del plano complejo con todos, algunos o ninguno de sus puntos frontera. Como un conjunto abierto conexo no contiene ningún punto frontera, automáticamente es una región. Una región que contiene a todos sus puntos frontera se dice que es **cerrada**. El disco definido por $|z - i| \leq 2$ es un ejemplo de una región cerrada y se conoce como disco cerrado. Una región puede no ser abierta ni cerrada; la región anular definida por $1 \leq |z - 5| < 3$ contiene únicamente algunos de sus puntos frontera, por lo que no es abierta ni cerrada.

Comentarios

Usualmente se utiliza la misma palabra en matemáticas para contextos completamente diferentes; no hay que confundir el concepto de "dominio" definido en esta sección con el concepto de "dominio de una función".

15.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas del 1 al 8, bosqueje la gráfica de la ecuación indicada.

1. $\text{Re}(z) = 5$ **2.** $\text{Im}(z) = -2$

3. $\text{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$

4. $\text{Im}(z - i) = \text{Re}(z + 4 - 3i)$

5. $|z - 3i| = 2$ **6.** $|2z + 1| = 4$

7. $|z - 4 + 3i| = 5$ **8.** $|z + 2 + 2i| = 2$

En los problemas del 9 al 22, bosqueje el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen con la desigualdad indicada. Determine si el conjunto es un dominio.

9. $\text{Re}(z) < -1$ **10.** $|\text{Re}(z)| > 2$

11. $\text{Im}(z) > 3$ **12.** $\text{Im}(z - i) < 5$

13. $2 < \text{Re}(z - 1) < 4$ **14.** $-1 \leq \text{Im}(z) < 4$

15. $\text{Re}(z^2) > 0$ **16.** $\text{Im}(1/z) < \frac{1}{2}$

17. $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi/3$ **18.** $|\arg(z)| < \pi/4$

19. $|z - i| > 1$ **20.** $|z - i| > 0$

21. $2 < |z - i| < 3$ **22.** $1 \leq |z - 1 - i| < 2$

23. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|z + 1| = |z - i|$.

24. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|\text{Re}(z)| \leq |z|$.

25. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

26. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|z - i| + |z + i| = 1$.

15.4 Funciones de una variable compleja

Introducción Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de una función. Se puede recordar de cursos previos que una función es cierto tipo de correspondencia entre dos conjuntos; más específicamente: *una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento en B.* Si b es el elemento del conjunto B asignado al elemento a del conjunto A a través de f, se dice que b es la **imagen** de a y se escribe $b = f(a)$. El conjunto A se denomina el **dominio** de la función f (aunque no es necesariamente un dominio en el sentido definido en la sección 15.3). El conjunto de todas las imágenes de B se denomina el **rango** de la función. Por ejemplo, supóngase que el conjunto A es un conjunto de números reales definido por $3 \leq x < \infty$ y que la función viene dada por $f(x) = \sqrt{x - 3}$; entonces $f(3) = 0$, $f(4) = 1$, $f(8) = \sqrt{5}$, etc. En otras palabras el rango de f es el conjunto dado por $0 \leq y < \infty$. Como A es un conjunto de números reales se dice que f es una **función de una variable real x**.

Funciones de una variable compleja Cuando el dominio A de la anterior definición de función es un conjunto de números complejos z, se dice que f es una **función de una variable compleja z** o, en forma abreviada, una **función compleja**. La imagen w de un número complejo z es algún número complejo $u + iv$, esto es,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{1}$$

donde u y v son las partes real e imaginaria de w, y son funciones de valores reales. En forma inherente al postulado matemático (1) está el hecho de que *no se puede dibujar una gráfica de una función compleja $w = f(z)$* puesto que una gráfica así requeriría de cuatro ejes en un sistema coordenado de cuatro dimensiones.

Algunos ejemplos de funciones de una variable compleja son

$$f(z) = z^2 - 4z, \qquad z \text{ es cualquier número complejo}$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \qquad z \neq i \text{ y } z \neq -i$$

$$f(z) = z + \text{Re}(z), \qquad z \text{ es cualquier número complejo.}$$

Cada una de estas funciones podría expresarse en la forma (1). Por ejemplo,

$$f(z) = z^2 - 4z = (x + iy)^2 - 4(x + iy) = (x^2 - y^2 - 4x) + i(2xy - 4y).$$

Así, $u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x$ y $v(x, y) = 2xy - 4y$.

Aunque no es posible dibujar una gráfica, una función compleja $w = f(z)$ puede interpretarse como un **mapeo** o **transformación** del plano z al plano w; véase la **FIGURA 15.4.1**.

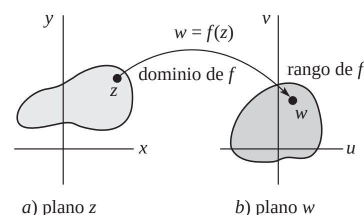
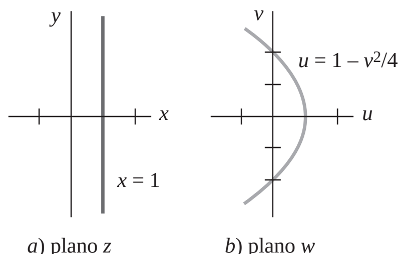


FIGURA 15.4.1 Transformación del plano z al plano w



a) plano *z* *b*) plano *w*

FIGURA 15.4.2 La imagen de $x = 1$ es una parábola

EJEMPLO 1 Imagen de una línea vertical

Encuentre la imagen de la línea $\text{Re}(z) = 1$ bajo la transformación $f(z) = z^2$.

Solución Para la función $f(z) = z^2$ se tiene $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Ahora, $\text{Re}(z) = x$ y por lo tanto, sustituyendo $x = 1$ en las funciones u y v se obtiene $u = 1 - y^2$ y $v = 2y$. Éstas son ecuaciones paramétricas de una curva en el plano w. Sustituyendo $y = v/2$ en la primera ecuación, se elimina el parámetro y para obtener $u = 1 - v^2/4$. En otras palabras, la imagen de la línea en la **FIGURA 15.4.2*a*)** es la parábola mostrada en la figura 15.4.2*b*). ≡

Debe observarse que una función compleja viene determinada completamente por las funciones reales u y v. Esto significa que una función compleja $w = f(z)$ se define especificando arbitrariamente $u(x, y)$ y $v(x, y)$, incluso aunque $u + iv$ no pueda obtenerse sólo mediante operaciones comunes sobre el símbolo z. Por ejemplo, si $u(x, y) = xy^2$ y $v(x, y) = x^2 - 4y^3$, entonces $f(z) = xy^2 + i(x^2 - 4y^3)$ es una función de una variable compleja. Para calcular, digamos, $f(3 + 2i)$ se sustituye $x = 3$ y $y = 2$ en u y v para obtener $f(3 + 2i) = 12 - 23i$.

Funciones complejas como flujos Una función compleja $w = f(z)$ se puede interpretar también como un **flujo de fluido bidimensional** considerando el número complejo $f(z)$ como un vector basado en el punto z. El vector $f(z)$ especifica la rapidez y la dirección del flujo en un punto determinado z. Las **FIGURAS 15.4.3 y 15.4.4** muestran los flujos correspondientes a las funciones complejas $f_1(z) = \bar{z}$ y $f_2(z) = z^2$, respectivamente.

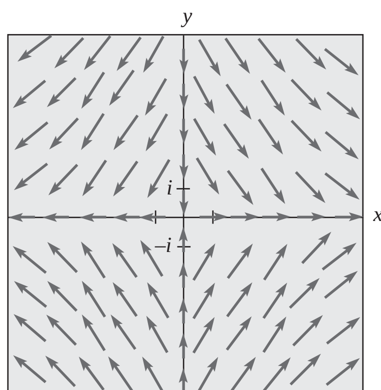


FIGURA 15.4.3 $f_1(z) = \bar{z}$ (normalizada)

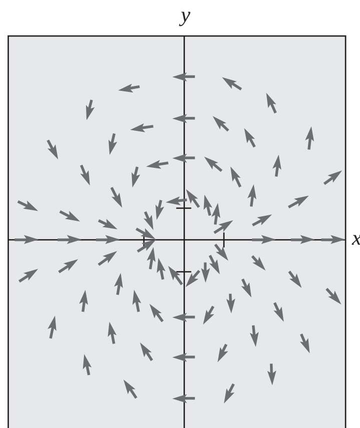


FIGURA 15.4.4 $f_2(z) = z^2$ (normalizada)

Si $x(t) + iy(t)$ es una representación paramétrica de la trayectoria de una partícula en el flujo, el vector tangente $\mathbf{T} = x'(t) + iy'(t)$ debe coincidir con $f(x(t) + iy(t))$. Cuando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se infiere que la trayectoria de la partícula debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = v(x, y).$$

A la familia de soluciones de este sistema se le llama **líneas de corriente** asociadas a $f(z)$.

EJEMPLO 2 Líneas de corriente

Encuentre las líneas de corriente de los flujos asociadas a las funciones complejas: ***a***) $f_1(z) = \bar{z}$ y ***b***) $f_2(z) = z^2$.

Solución ***a***) Las líneas de corriente correspondientes a $f_1(z) = x - iy$ cumplen con el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

por lo que $x(t) = c_1e^t$ y $y(t) = c_2e^{-t}$. Multiplicando estas dos ecuaciones paramétricas se ve que el punto $x(t) + iy(t)$ se encuentra sobre la hipérbola $xy = c_1c_2$.

b) Para encontrar las líneas de corriente correspondientes a $f_2(z) = (x^2 - y^2) + i2xy$, obsérvese que $dx/dt = x^2 - y^2$, $dy/dt = 2xy$, y por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Esta ecuación diferencial homogénea tiene como solución $x^2 + y^2 = c_2y$, que es una familia de círculos que pasan por el origen y cuyos centros se localizan sobre el eje y. ≡

Límites y continuidad La definición de límite de una función compleja $f(z)$ cuando $z \to z_0$ tiene la misma apariencia que el límite de las variables reales.

Definición 15.4.1 Límite de una función

Supóngase que la función f está definida en una vecindad de z_0, excepto posiblemente en el mismo z_0. Entonces se dice que f posee un **límite** en z_0, escrito como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Expresándolo en palabras, el $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ significa que los puntos $f(z)$ se pueden acercar arbitrariamente al punto L, si se elige el punto z suficientemente cercano, aunque no igual, al punto z_0. Como se muestra en la **FIGURA 15.4.5**, para cada ε-vecindad de L (definido por $|f(z) - L| < \varepsilon$) existe una δ-vecindad de z_0 (definida por $|z - z_0| < \delta$) tal que las imágenes de todos los puntos $z \neq z_0$ en esta vecindad se encuentran en la ε-vecindad de L.

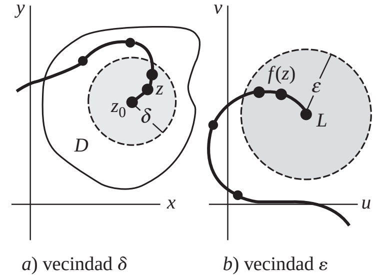


FIGURA 15.4.5 Significado geométrico de un límite complejo

La diferencia fundamental entre esta definición y el concepto de límite en variables reales radica en la comprensión de que $z \to z_0$. Para una función f de una variable real x, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a L al acercarse x a x_0, ya sea por su derecha o por su izquierda, sobre la línea de números reales. Pero como z y z_0 son puntos en el plano complejo, cuando se dice que existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ se entiende que $f(z)$ se acerca a L cuando el punto z se acerca a z_0 desde *cualquier* dirección.

El siguiente teorema sintetiza algunas propiedades de los límites:

Teorema 15.4.1 Límite de la suma, el producto y el cociente

Supóngase que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$. Entonces:

i) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L_1 + L_2$

ii) $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = L_1 L_2$

iii) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

Definición 15.4.2 Continuidad en un punto

Una función f es **continua** en un punto z_0 si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Como consecuencia del teorema 15.4.1 se tiene que si dos funciones f y g son continuas en un punto z_0, entonces su suma y su producto son continuos en z_0. El cociente de las dos funciones es continuo en z_0 siempre y cuando $g(z_0) \neq 0$.

Una función f definida por

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{2}$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes complejas, se denomina **polinomio** de grado n. Aunque no se demuestra aquí, el resultado del límite $\lim_{z \to z_0} z = z_0$ indica que la función polinómica simple $f(z) = z$ es continua en todos los puntos, esto es, en todo el plano z. Considerando este resultado y aplicando repetidamente los teoremas 15.4.1 *i*) y *ii*), se deduce que una función polinómica (2) es continua en cualquier punto. Una **función racional**

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

donde g y h son funciones polinómicas, es continua excepto en aquellos puntos para los cuales $h(z)$ es 0.

Derivada La derivada de una función compleja se define en términos de un límite. El símbolo utilizado Δz en la siguiente definición es el número complejo $\Delta x + i\Delta y$.

Definición 15.4.3 Derivada

Supóngase que la función compleja f se define en la vecindad de un punto z_0. La **derivada** de f en z_0 es

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3}$$

siempre y cuando exista dicho límite.

Si el límite (3) existe se dice que la función f es **derivable** en z_0. La derivada de una función $w = f(z)$ también se escribe dw/dz.

Como sucede con las variables reales, las funciones derivables deben ser continuas:

Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.

Es más, las **reglas de derivación** son las mismas que en el cálculo de variables reales. Si f y g son derivables en un punto z, y c es una constante compleja, entonces:

Reglas de la constante: $$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z) \tag{4}$$

Regla de la suma: $$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z) \tag{5}$$

Regla del producto: $$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z) \tag{6}$$

Regla del cociente: $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \tag{7}$$

Regla de la cadena: $$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z). \tag{8}$$

La regla común para la derivada de potencias de z también es válida:

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \quad n \text{ es un entero.} \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Uso de las reglas de derivación

Derive ***a***) $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$ y ***b***) $f(z) = \dfrac{z^2}{4z + 1}$.

Solución ***a***) Al utilizar la regla de la potencia (9) junto con la regla de la suma (5) se obtiene

$$f'(z) = 3 \cdot 4z^3 - 5 \cdot 3z^2 + 2 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

b) De la regla del cociente (7),

$$f'(z) = \frac{(4z + 1) \cdot 2z - z^2 \cdot 4}{(4z + 1)^2} = \frac{4z^2 + 2z}{(4z + 1)^2}. \qquad \equiv$$

Para que una función compleja f sea derivable en un punto z_0, $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ debe tender al mismo número complejo desde cualquier dirección. Así, en el estudio de variables complejas, son mayores los requisitos para que una función sea derivable que en el caso de variables reales. Si se inventa una función compleja, por ejemplo $f(z) = x + 4iy$, es muy probable que no sea derivable.

EJEMPLO 4 Función que no es derivable en punto alguno

Demuestre que la función $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en punto alguno.

Solución Considerando $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ se tiene

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (x + \Delta x) + 4i(y + \Delta y) - x - 4iy = \Delta x + 4i\Delta y$$

y por lo tanto

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{10}$$

Ahora, si se considera que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una línea paralela al eje x, entonces $\Delta y = 0$ y el valor de (10) es 1. Por otro lado, si se considera que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una línea paralela al eje y, entonces $\Delta x = 0$ y se ve que el valor de (10) es 4. Por lo tanto, $f(z) = x + 4iy$ es no derivable en ningún punto z. ≡

Funciones analíticas Si bien los requerimientos para que una función sea derivable son severos, existe una clase de funciones sumamente importante, cuyos miembros cumplen incluso con condiciones más severas. Estas funciones se denominan **funciones analíticas**.

Definición 15.4.4 Analiticidad en un punto

Se dice que una función compleja $w = f(z)$ es **analítica en un punto** z_0 si f es derivable en z_0 y en todo punto de alguna vecindad de z_0.

Una función f es analítica en un dominio D si es analítica en todos los puntos de D.

La definición 15.4.4 se debe leer cuidadosamente. La analiticidad *en un punto* es una propiedad de vecindad. La analiticidad en un punto no es, por lo tanto, sinónimo de derivabilidad en un punto. Se deja como ejercicio demostrar que la función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$, pero no es derivable en cualquier otro punto. Así pues, $f(z) = |z|^2$ es no analítica en todo punto. En contraste, el polinomio simple $f(z) = z^2$ es derivable en cualquier punto z del plano complejo y, por ende, $f(z) = z^2$ es analítica en cualquier punto. Una función que es analítica en cualquier punto z es una **función entera**. Los polinomios son derivables en todo punto z y por esta razón son funciones enteras.

Comentarios

Hay que recordar que un número c es un cero de un polinomio si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. El mismo resultado es válido para el análisis complejo. Por ejemplo, puesto que $f(z) = z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$, los ceros de f son $-i$, i, $-2i$ y $2i$. Por lo tanto, $f(z) = (z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)$. Asimismo, la fórmula cuadrática también es válida. Por ejemplo, utilizando esta fórmula se escribe

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 - 2z + 2 &= (z - (1 + i))(z - (1 - i)) \\ &= (z - 1 - i)(z - 1 + i). \end{aligned}$$

Véanse los problemas 21 y 22 de los ejercicios 15.4.

15.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la imagen de la línea indicada bajo la transformación $f(z) = z^2$.

1. $y = 2$
2. $x = -3$
3. $x = 0$
4. $y = 0$
5. $y = x$
6. $y = -x$

En los problemas del 7 al 14, exprese la función indicada en la forma $f(z) = u + iv$.

7. $f(z) = 6z - 5 + 9i$
8. $f(z) = 7z - 9i\bar{z} - 3 + 2i$
9. $f(z) = z^2 - 3z + 4i$
10. $f(z) = 3\bar{z}^2 + 2z$
11. $f(z) = z^3 - 4z$
12. $f(z) = z^4$
13. $f(z) = z + 1/z$
14. $f(z) = \dfrac{z}{z + 1}$

En los problemas del 15 al 18, calcúlese la función indicada en los puntos dados.

15. $f(z) = 2x - y^2 + i(xy^3 - 2x^2 + 1)$

a) $2i$ ***b)*** $2 - i$ ***c)*** $5 + 3i$

16. $f(z) = (x + 1 + 1/x) + i(4x^2 - 2y^2 - 4)$

a) $1 + i$ ***b)*** $2 - i$ ***c)*** $1 + 4i$

17. $f(z) = 4z + i\bar{z} + \operatorname{Re}(z)$

a) $4 - 6i$ ***b)*** $-5 + 12i$ ***c)*** $2 - 7i$

18. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$

a) $\pi i/4$ ***b)*** $-1 - \pi i$ ***c)*** $3 + \pi i/3$

En los problemas del 19 al 22, el límite indicado sí existe; encuentre su valor.

19. $\lim_{z\to i}(4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5i)$

20. $\lim_{z\to 1-i} \dfrac{5z^2 - 2z + 2}{z + 1}$

21. $\lim_{z\to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i}$ **22.** $\lim_{z\to 1+i} \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2i}$

En los problemas 23 y 24, demuestre que el límite indicado no existe.

23. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ **24.** $\lim_{z\to 1} \dfrac{x + y - 1}{z - 1}$

En los problemas 25 y 26, utilice (3) para obtener la derivada indicada de la función dada.

25. $f(z) = z^2, \; f'(z) = 2z$

26. $f(z) = 1/z, \; f'(z) = -1/z^2$

En los problemas del 27 al 34, utilice (4)-(8) para encontrar la derivada $f'(z)$ de la función indicada.

27. $f(z) = 4z^3 - (3 + i)z^2 - 5z + 4$

28. $f(z) = 5z^4 - iz^3 + (8 - i)z^2 - 6i$

29. $f(z) = (2z + 1)(z^2 - 4z + 8i)$

30. $f(z) = (z^5 + 3iz^3)(z^4 + iz^3 + 2z^2 - 6iz)$

31. $f(z) = (z^2 - 4i)^3$ **32.** $f(z) = (2z - 1/z)^6$

33. $f(z) = \dfrac{3z - 4 + 8i}{2z + i}$ **34.** $f(z) = \dfrac{5z^2 - z}{z^3 + 1}$

En los problemas del 35 al 38, señale los puntos en los cuales la función indicada no es analítica.

35. $f(z) = \dfrac{z}{z - 3i}$ **36.** $f(z) = \dfrac{2i}{z^2 - 2z + 5iz}$

37. $f(z) = \dfrac{z^3 + z}{z^2 + 4}$ **38.** $f(z) = \dfrac{z - 4 + 3i}{z^2 - 6z + 25}$

39. Demuestre que la función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en punto alguno.

40. La función $f(z) = |z|^2$ es continua a lo largo de todo el plano complejo. Demuestre que, sin embargo, f es derivable únicamente en el punto $z = 0$. [*Sugerencia:* Utilice (3) y considere dos casos: $z = 0$ y $z \neq 0$. En el segundo caso haga que Δz tienda a 0 a lo largo de una línea paralela al eje x y después haga lo mismo a lo largo de una línea paralela al eje y.]

En los problemas del 41 al 44, encuentre las líneas de corriente del flujo asociadas con la función compleja indicada.

41. $f(z) = 2z$ **42.** $f(z) = iz$

43. $f(z) = 1/\bar{z}$ **44.** $f(z) = x^2 - iy^2$

En los problemas 45 y 46, utilice una calculadora que grafique o una computadora para obtener la imagen de la parábola indicada bajo la transformación $f(z) = z^2$.

45. $y = \frac{1}{2}x^2$ **46.** $y = (x - 1)^2$

15.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Introducción En la sección anterior se plantea que una función f de una variable compleja z es *analítica en un punto z* cuando f es derivable en z y también derivable en todos los puntos de *alguna* vecindad de z. Este requisito es más estricto que simplemente la *derivabilidad en un punto*, ya que una función compleja puede ser derivable en un punto z aunque no sea derivable en todos los demás. Una función f es *analítica en un dominio D* si f es derivable en todos los puntos de D. A continuación se desarrolla una prueba para la analiticidad de una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Una condición necesaria para la analiticidad En el próximo teorema se observa que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto z, entonces las funciones u y v deben satisfacer un par de ecuaciones que relacionan sus derivadas parciales de primer orden. Este resultado es una condición necesaria para la analiticidad.

Teorema 15.5.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto $z = x + iy$. Entonces existen las derivadas parciales de primer orden de u y v en el punto z que cumplen con las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN

Como $f'(z)$ existe se sabe que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

Al escribir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, se tiene a partir de (2) que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3}$$

Puesto que este límite existe, Δz puede tender a 0 desde cualquier dirección conveniente. En particular, si $\Delta z \to 0$ horizontalmente, entonces $\Delta z = \Delta x$ y, por lo tanto, (3) se convierte en

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Como $f'(z)$ existe, también existen los dos límites de (4). Pero, por definición, los límites de (4) son las primeras derivadas parciales de u y v respecto a x. Con esto, se acaba de demostrar que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Si ahora se hace que $\Delta z \to 0$ verticalmente, entonces $\Delta z = i\Delta y$ y (3) queda como

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}, \tag{6}$$

que es lo mismo que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7}$$

Al igualar las partes reales e imaginarias de (5) y (7) se produce el par de ecuaciones en (1). ≡

Si una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica sobre un dominio D, entonces las funciones reales u y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) en todos los puntos de D.

EJEMPLO 1 Uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

El polinomio $f(z) = z^2 + z$ es analítico para todos los valores de z y $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$. Por lo tanto, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ y $v(x, y) = 2xy + y$. Para cualquier punto (x, y) se observa que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$ ≡

EJEMPLO 2 Uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Demuestre que la función $f(z) = (2x^2 + y) + i(y^2 - x)$ no es analítica en punto alguno.

Solución Se igualan $u(x, y) = 2x^2 + y$ y $v(x, y) = y^2 - x$. Ahora, de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

se ve que $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ pero la igualdad $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ se cumple únicamente sobre la línea $y = 2x$. Sin embargo, para cualquier punto z de la línea, no existe vecindad o disco abierto alrededor de z en el que f sea derivable. Se concluye que f es no analítica en punto alguno. ≡

Importante. ▶ Las ecuaciones de Cauchy-Riemann no son suficientes por sí mismas para asegurar la analiticidad. Sin embargo, cuando se añade la condición de continuidad a u y a v *así como* a las cuatro derivadas parciales, se puede demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican analiticidad. La demostración es larga y complicada, por lo que sólo se plantea el resultado.

Teorema 15.5.2 Criterio para la analiticidad

Supóngase que las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio D. Si u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos de D, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D.

EJEMPLO 3 Uso del teorema 15.5.2

Para la función $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En otras palabras, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen excepto en el punto donde $x^2 + y^2 = 0$, esto es, en $z = 0$. Se concluye del teorema 15.5.2 que f es analítica en cualquier dominio que no contenga al punto $z = 0$. ≡

Los resultados (5) y (7) se obtienen bajo la consideración básica de que f es derivable en el punto z. O sea, (5) y (7) proporcionan una fórmula para el cálculo de $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8}$$

Por ejemplo, se sabe que $f(z) = z^2$ es derivable para cualquier z. Con $u(x, y) = x^2 - y^2$, $\partial u/\partial x = 2x$, $v(x, y) = 2xy$ y $\partial v/\partial x = 2y$, se observa que

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Debe recordarse que la analiticidad implica derivabilidad, pero no lo contrario. Un teorema análogo al 15.5.2 proporciona condiciones suficientes para la derivabilidad:

Si las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad de z, y si u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto z, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en z y $f'(z)$ viene dada por (8).

La función $f(z) = x^2 - y^2 i$ es ahora analítica. Con las identificaciones $u(x, y) = x^2$ y $v(x, y) = -y^2$, se observa de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen únicamente cuando $y = -x$. Pero como las funciones u, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, v, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son continuas en cualquier punto, se deduce que f es derivable sobre la línea $y = -x$ y que (8) proporciona la derivada $f'(z) = 2x = -2y$ sobre dicha línea.

■ **Funciones armónicas** En el capítulo 11 se comenta que la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ aparece en ciertos problemas relacionados con temperaturas en estado estable. Esta ecuación diferencial parcial desempeña también un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada. Por supuesto, como se ve a continuación, las partes real e imaginaria de una función analítica no pueden elegirse arbitrariamente, puesto que tanto u como v deben satisfacer la ecuación de Laplace. Esta liga entre las funciones analíticas y la ecuación de Laplace hace esenciales a las variables complejas en el estudio serio de las matemáticas aplicadas.

Definición 15.5.1 Funciones armónicas

Se dice que una función real $\phi(x, y)$ que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un dominio D y que cumple la ecuación de Laplace es **armónica** en D.

Teorema 15.5.3 Una fuente de funciones armónicas

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D. Entonces las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones armónicas.

DEMOSTRACIÓN

En esta demostración se considera que u y v tienen derivadas parciales de segundo orden continuas. Como f es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen. Derivando ambas partes de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a x y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

Suponiendo continuidad, las parciales combinadas son iguales. Por lo tanto, sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Esto demuestra que $u(x, y)$ es armónica.

Derivando ahora ambos lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a y y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ con respecto a x y restándolas se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \qquad \equiv$$

Funciones armónicas conjugadas Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces u y v son armónicas en D. Ahora, supóngase que $u(x, y)$ es una función dada que es armónica en D. Entonces es posible encontrar en ocasiones otra función $v(x, y)$ que sea armónica en D, de forma que $u(x, y) + iv(x, y)$ sea una función analítica en D. La función v se denomina una **función armónica conjugada** de u.

EJEMPLO 4 Función armónica/función armónica conjugada

a) Verifique que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ es armónica en todo el plano complejo. ***b***) Encuentre la función armónica conjugada de u.

Solución ***a***) A partir de las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

se observa que u cumple la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

b) Como la función armónica conjugada v tiene que cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se debe tener que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + 5. \qquad (9)$$

La integración parcial de la primera ecuación de (9) respecto a y da como resultado $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$. De aquí, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x).$$

Al sustituir este resultado en la segunda ecuación de (9) se tiene que $h'(x) = 5$, y por lo tanto $h(x) = 5x + C$. De esta manera, la función armónica conjugada de u es $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C$. La función analítica es

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 5y + i(3x^2y - y^3 + 5x + C). \qquad \equiv$$

Comentarios

Supóngase que u y v son funciones armónicas que comprenden las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z)$. Las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ definidas por estas funciones conforman dos familias *ortogonales* de curvas. (Véase el problema 32 de los ejercicios 15.5.) Por ejemplo, las curvas de nivel generadas por la función analítica simple $f(z) = z = x + iy$ son $x = c_1$ y $y = c_2$. La familia de líneas verticales definidas por $x = c_1$ es claramente ortogonal a la familia de líneas horizontales definidas por $y = c_2$. En electrostática, si $u(x, y) = c_1$ define a las curvas equipotenciales, entonces la otra familia, ortogonal, $v(x, y) = c_2$ define a las líneas de fuerza.

15.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas 1 y 2, la función indicada es analítica para cualquier z. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en cualquier punto.

1. $f(z) = z^3$

2. $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

En los problemas del 3 al 8, demuestre que la función indicada no es analítica en punto alguno.

3. $f(z) = \text{Re}(z)$

4. $f(z) = y + ix$

5. $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

6. $f(z) = \bar{z}^2$

7. $f(z) = x^2 + y^2$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

En los problemas del 9 al 14, utilice el teorema 15.5.2 para demostrar que la función indicada es analítica en un dominio adecuado.

9. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$

10. $f(z) = x + \operatorname{sen} x \cosh y + i(y + \cos x \operatorname{senh} y)$

11. $f(z) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy + ie^{x^2 - y^2} \operatorname{sen} 2xy$

12. $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$

13. $f(z) = \dfrac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - i\dfrac{y}{(x - 1)^2 + y^2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$

En los problemas 15 y 16, encuentre las constantes reales a, b, c y d de forma que la función indicada sea analítica.

15. $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$

16. $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

En los problemas del 17 al 20, demuestre que la función indicada no es analítica en punto alguno, pero es derivable a lo largo de la curva o las curvas indicadas.

17. $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$; eje x

18. $f(z) = 3x^2y^2 - 6x^2y^2i$; ejes coordenados

19. $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$; ejes coordenados

20. $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$; $y = x + 2$

21. Utilice (8) para encontrar la derivada de la función del problema 9.

22. Utilice (8) para encontrar la derivada de la función del problema 11.

En los problemas del 23 al 28, verifique que la función indicada u es armónica. Encuentre v, la función armónica conjugada de u. Genere la función analítica correspondiente $f(z) = u + iv$.

23. $u(x, y) = x$

24. $u(x, y) = 2x - 2xy$

25. $u(x, y) = x^2 - y^2$

26. $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$

27. $u(x, y) = \log_e(x^2 + y^2)$

28. $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$

29. Bosqueje las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ de la función analítica $f(z) = z^2$.

30. Considere la función $f(z) = 1/z$. Describa las curvas de nivel.

31. Considere la función $f(z) = z + 1/z$. Describa la curva de nivel $v(x, y) = 0$.

32. Considere que u y v son las funciones armónicas que conforman las partes real e imaginaria de una función analítica. Demuestre que las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son ortogonales. [*Sugerencia:* Considere los gradientes de u y v. Ignore el caso donde un vector gradiente sea el vector cero.]

15.6 Funciones exponenciales y logarítmicas

Introducción En ésta y la próxima sección se examinan las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas de una variable compleja z. Aunque la definición de estas funciones complejas se deduce a partir de sus análogas para variables reales, las propiedades de estas funciones complejas contienen algunas sorpresas.

Función exponencial Recuérdese que en variables reales la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene las propiedades

$$f'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2). \tag{1}$$

Desde luego, se desea que la definición de la función compleja $f(z) = e^z$, donde $z = x + iy$, se reduzca a e^x para $y = 0$ y que posea las mismas propiedades que (1).

Ya se ha utilizado anteriormente una función exponencial con un exponente imaginario puro; la fórmula de Euler,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad \text{donde } y \text{ es un número real,} \tag{2}$$

desempeña un papel importante en la sección 3.3. Se puede establecer formalmente el resultado (2) utilizando las series de Maclaurin para e^x y sustituyendo x por iy y reacomodando términos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Series de Maclaurin para $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$.

Para $z = x + iy$ es razonable esperar que

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

y por lo tanto, de (2), $\quad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$

A partir de este resultado formal se plantea la siguiente definición:

Definición 15.6.1 Función exponencial

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{3}$$

La función exponencial e^z también se denota con el símbolo exp z. Nótese que (3) se reduce a e^x cuando $y = 0$.

EJEMPLO 1 Valor complejo de la función exponencial

Calcule $e^{1.7+4.2i}$.

Solución Con $x = 1.7$ y $y = 4.2$ se tiene, con la ayuda de una calculadora y redondeando a cuatro cifras decimales, que

$$e^{1.7} \cos 4.2 = -2.6837 \qquad \text{y} \qquad e^{1.7} \operatorname{sen} 4.2 = -4.7710.$$

De (3) se infiere que $e^{1.7+4.2i} = -2.6837 - 4.7710i.$ ≡

Las partes real e imaginaria de e^z, $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en cualquier punto z del plano complejo. Es más, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en todos los puntos del plano complejo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se deduce del teorema 15.5.2 que $f(z) = e^z$ es analítica para cualquier z; en otras palabras, f es una función entera.

A continuación se demuestra que e^z posee las dos propiedades deseables indicadas en (1). En primer lugar, la derivada de f viene dada por (5) de la sección 15.5:

$$f'(z) = e^x \cos y + i(e^x \operatorname{sen} y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = f(z).$$

Como se desea, se ha establecido que

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

En segundo lugar, si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces multiplicando los números complejos y utilizando las fórmulas trigonométricas de la suma, se obtiene

$$f(z_1)f(z_2) = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)$$
$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)]$$
$$= e^{x_1+x_2}[(\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = f(z_1 + z_2).$$

En otras palabras

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{4}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

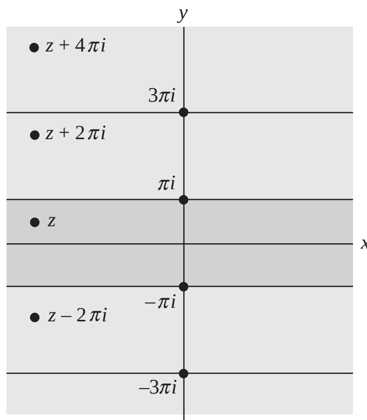


FIGURA 15.6.1 Los valores de $f(z) = e^z$ en los cuatro puntos son iguales

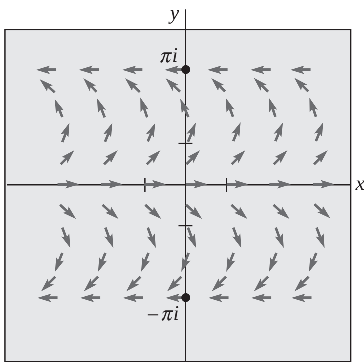


FIGURA 15.6.2 Flujo sobre la región fundamental

■ **Periodicidad** A diferencia de la función real e^x, la función compleja $f(z) = e^z$ es **periódica** con periodo complejo $2\pi i$. Como $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$ y, considerando (4), $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ para cualquier z, se deduce que $f(z + 2\pi i) = f(z)$. Debido a esta periodicidad compleja, todos los valores funcionales posibles de $f(z) = e^z$ se consideran en una franja infinita horizontal de ancho 2π. Así, si se divide el plano complejo en franjas horizontales definidas por $(2n - 1)\pi < y \le (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces, como se muestra en la **FIGURA 15.6.1**, para cualquier punto z de la franja $-\pi < y \le \pi$, los valores $f(z)$, $f(z + 2\pi i)$, $f(z - 2\pi i)$, $f(z + 4\pi i)$, etc., son los mismos. La franja $-\pi < y \le \pi$ se denomina la **región fundamental** para la función exponencial $f(z) = e^z$. El flujo correspondiente sobre la región fundamental se muestra en la **FIGURA 15.6.2**.

■ **Forma polar de un número complejo** En la sección 15.2 se plantea que el número complejo z puede escribirse en forma polar como $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Puesto que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ se escribe ahora la forma polar de un número complejo como

$$z = re^{i\theta}.$$

Por ejemplo, en forma polar $z = 1 + i$ es $z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$.

■ **Circuitos** Al aplicar las matemáticas, los matemáticos y los ingenieros suelen abordar el mismo problema en formas completamente diferentes. Considérese, por ejemplo, la solución del ejemplo 10 de la sección 3.8. En este ejemplo se utiliza estrictamente el análisis real para encontrar la corriente de estado estable $i_p(t)$ en un circuito LRC en serie descrito por la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t.$$

Los ingenieros eléctricos usualmente resuelven problemas de circuitos como éste utilizando análisis complejo. Para ilustrar esto, denótese la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ con el símbolo j para no confundirla con la corriente i. Como la corriente i se relaciona con la carga q por medio de $i = dq/dt$, la ecuación diferencial es la misma que

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t.$$

Asimismo, el voltaje impreso $E_0 \operatorname{sen}\gamma t$ se reemplaza por $\operatorname{Im}(E_0e^{j\gamma t})$, donde Im significa "parte imaginaria de". Gracias a esta última formulación, el método de coeficientes indeterminados sugiere considerar una solución en la forma de un múltiplo constante de una exponencial compleja; esto es, $i_p(t) = \operatorname{Im}(Ae^{j\gamma t})$. Al sustituir esta expresión en la última ecuación diferencial, se aprovecha el hecho que q es una antiderivada de i e igualando los coeficientes de $e^{j\gamma t}$:

$$\left(jL\gamma + R + \frac{1}{jC\gamma}\right)A = E_0 \quad \text{conduce a} \quad A = \frac{E_0}{R + j\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}.$$

La cantidad $Z = R + j(L\gamma - 1/C\gamma)$ se denomina **impedancia compleja** del circuito. Obsérvese que el módulo de la impedancia compleja, $|Z| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - 1/C\gamma)^2}$, se denotó en el ejemplo 10 de la sección 3.8 por medio de la letra Z y se denominó impedancia.

Ahora, la impedancia compleja en forma polar es

$$Z = |Z|e^{j\theta} \quad \text{donde} \quad \tan\theta = \frac{L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}}{R}.$$

Por lo tanto $A = E_0/Z = E_0/(|Z|e^{j\theta})$, y así la corriente en estado estable se escribe como

$$i_p(t) = \operatorname{Im} \frac{E_0}{|Z|} e^{-j\theta} e^{j\gamma t}.$$

Se exhorta al lector a verificar que esta última expresión es la misma que (35) de la sección 3.8.

Función logarítmica El logaritmo de un número complejo $z = x + iy$, $z \neq 0$, se define como la inversa de la función exponencial, esto es,

$$w = \ln z \quad \text{si} \quad z = e^w. \tag{5}$$

En (5) se observa que $\ln z$ no está definido para $z = 0$, ya que no existe valor de w para el cual $e^w = 0$. Para encontrar las partes real e imaginaria de $\ln z$ se escribe $w = u + iv$ y se utilizan (3) y (5):

$$x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = e^u \cos v + ie^u \operatorname{sen} v.$$

La última igualdad implica que $x = e^u \cos v$ y que $y = e^u \operatorname{sen} v$. Se pueden despejar u y v de estas dos ecuaciones. Primero, elevándolas al cuadrado y sumándolas, se tiene

$$e^{2u} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \quad \text{y así} \quad u = \log_e|z|,$$

donde $\log_e|z|$ denota el *logaritmo natural real* del módulo de z. En segundo lugar, para despejar v se dividen las dos ecuaciones y se obtiene

$$\tan v = \frac{y}{x}.$$

Esta última ecuación significa que v es un argumento de z, es decir, $v = \theta = \arg z$. Pero como no existe un único argumento de un número complejo determinado $z = x + iy$, si θ es un argumento de z, entonces también lo es $\theta + 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Definición 15.6.2 Logaritmo de un número complejo

Para $z \neq 0$ y $\theta = \arg z$,

$$\ln z = \log_e|z| + i(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{6}$$

Como se indica claramente en (6) existen infinitos valores del logaritmo de un número complejo z. Esto no debe resultar sorpresivo, puesto que la función exponencial es periódica.

En cálculo real, los logaritmos de números negativos no están definidos. Como se muestra en el siguiente ejemplo, éste no es el caso para cálculo complejo.

EJEMPLO 2 Valores complejos de la función logarítmica

Encuentre los valores de: ***a***) $\ln(-2)$, ***b***) $\ln i$ y ***c***) $\ln(-1 - i)$.

Solución ***a***) Con $\theta = \arg(-2) = \pi$ y $\log_e|-2| = 0.6932$, se tiene de (6) que

$$\ln(-2) = 0.6932 + i(\pi + 2n\pi).$$

b) Con $\theta = \arg(i) = \pi/2$ y $\log_e|i| = \log_e 1 = 0$, se tiene de (6) que

$$\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

En otras palabras, $\ln i = \pi i/2, -3\pi i/2, 5\pi i/2, -7\pi i/2$, etcétera.

c) Con $\theta = \arg(-1 - i) = 5\pi/4$ y $\log_e|-1 - i| = \log_e\sqrt{2} = 0.3466$, se tiene de (6) que

$$\ln(-1 - i) = 0.3466 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación exponencial

Encuentre todos los valores de z tales que $e^z = \sqrt{3} + i$.

Solución De (5), y reemplazando el símbolo w por z, se tiene que $z = \ln(\sqrt{3} + i)$. Ahora, $|\sqrt{3} + i| = 2$ y $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ implican que $\arg(\sqrt{3} + i) = \pi/6$, por lo que (6) conduce a

$$z = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \quad \text{o} \quad z = 0.6931 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right). \qquad \equiv$$

Valor principal Es interesante observar que, como consecuencia de (6), el logaritmo de un número real positivo tiene muchos valores. Por ejemplo, en cálculo real, $\log_e 5$ tiene únicamente un valor: $\log_e 5 = 1.6094$, mientras que en cálculo complejo, $\ln 5 = 1.6094 + 2n\pi i$. El valor de ln 5 correspondiente a $n = 0$ es el mismo que el logaritmo real $\log_e 5$ y se denomina el **valor principal** de ln 5. Recuérdese que en la sección 15.2 se estipula que el argumento principal de un número complejo, escrito como Arg z, se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$. En general, el **valor principal** del $\ln z$ se define como logaritmo complejo correspondiente a $n = 0$ y $\theta = \text{Arg}\, z$. Para destacar el valor principal del logaritmo se adopta la notación Ln z. En otras palabras,

$$\text{Ln}\, z = \log_e|z| + i\,\text{Arg}\, z. \tag{7}$$

Como Arg z es único, existe solamente un valor de Ln z para cada $z \neq 0$.

EJEMPLO 4 Valores principales

Los valores principales de los logaritmos del ejemplo 2 son los que siguen.

a) Como $\text{Arg}(-2) = \pi$, únicamente se necesita fijar $n = 0$ en el resultado indicado en el inciso *a*) del ejemplo 2:

$$\text{Ln}(-2) = 0.6932 + \pi i.$$

b) En forma similar, puesto que $\text{Arg}(i) = \pi/2$, se fija $n = 0$ en el resultado del inciso *b*) del ejemplo 2 para obtener

$$\text{Ln}\, i = \frac{\pi}{2}i.$$

c) En el inciso *c*) del ejemplo 2, $\arg(-1 - i) = 5\pi/4$ no es el argumento principal de $z = -1 - i$. El argumento de z comprendido en el intervalo $(-\pi, \pi]$ es $\text{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$. Así, de (7) se tiene que

$$\text{Ln}(-1 - i) = 0.3466 - \frac{3\pi}{4}i. \qquad \equiv$$

Hasta este instante se ha evitado emplear la palabra *función* por la obvia razón de que ln z definido en (6) no es una función, en la interpretación estricta de dicha palabra. Sin embargo, se acostumbra escribir $f(z) = \ln z$ y referirse a $f(z) = \ln z$ mediante la frase aparentemente contradictoria *función de valores múltiples.* Aunque no se entra en detalles, (6) puede interpretarse como una colección infinita de funciones logarítmicas (significado estándar de la palabra). Cada función de esta colección se denomina una **rama** de ln z. La función $f(z) = \text{Ln}\, z$ se llama entonces la **rama principal** de ln z, o la **función logaritmo principal**. Para minimizar la confusión, por simplicidad se utilizan a partir de este instante las palabras *función logarítmica* al referirse a $f(z) = \ln z$ o $f(z) = \text{Ln}\, z$.

Algunas propiedades usuales de la función logarítmica son válidas en el caso complejo:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad \text{y} \qquad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \tag{8}$$

Las ecuaciones (8) y (9) se interpretan en el sentido de que si se asignan valores a dos de estos términos, entonces el tercero toma un valor correcto.

EJEMPLO 5 Propiedades de los logaritmos

Suponga que $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$. Entonces, si se considera $\ln z_1 = 2\pi i$ y $\ln z_2 = \pi i$ se tiene que

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(-1) = \ln z_1 + \ln z_2 = 2\pi i + \pi i = 3\pi i$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(-1) = \ln z_1 - \ln z_2 = 2\pi i - \pi i = \pi i.$$ ≡

Al igual que (7) de la sección 15.2 no es válida cuando arg z se sustituye con Arg z, de la misma forma (8) no es verdadera, en general, cuando ln z se sustituye por Ln z; véanse los problemas 45 y 46 de los ejercicios 15.6.

Analiticidad La función logarítmica $f(z) = \text{Ln}\, z$ no es continua en $z = 0$ ya que $f(0)$ no está definida. Es más, $f(z) = \text{Ln}\, z$ es discontinua en todos los puntos del eje real negativo. Esto se debe a que la parte imaginaria de la función, $v = \text{Arg}\, z$, es discontinua únicamente en dichos puntos. Para ver esto, supóngase que x_0 es un punto sobre el eje real negativo. Cuando $z \to x_0$ desde el semiplano superior, entonces Arg $z \to \pi$, mientras que si $z \to x_0$ desde el semiplano inferior, entonces Arg $z \to -\pi$. Esto significa que $f(z) = \text{Ln}\, z$ no es analítica en el eje real no positivo. Sin embargo, $f(z) = \text{Ln}\, z$ es analítica en todo el dominio D que consta de todos los puntos del plano complejo excepto los del eje real no positivo. Es conveniente pensar en D como el plano complejo a partir del cual el eje real no positivo se ha cortado. Como $f(z) = \text{Ln}\, z$ es la rama principal de ln z, el eje real no positivo se conoce como **corte de ramificación** para la función; véase la **FIGURA 15.6.3**. Se deja como ejercicio demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en todo este plano cortado y que la derivada de Ln z viene dada por

$$\frac{d}{dz}\text{Ln}\, z = \frac{1}{z} \tag{9}$$

para cualquier z en D.

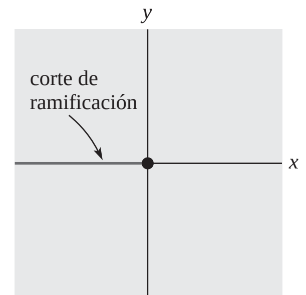


FIGURA 15.6.3 Corte de ramificación para Ln z

La **FIGURA 15.6.4** representa a $w = \text{Ln}\, z$ como un flujo. Nótese que el campo vectorial no es continuo a lo largo del corte de ramificación.

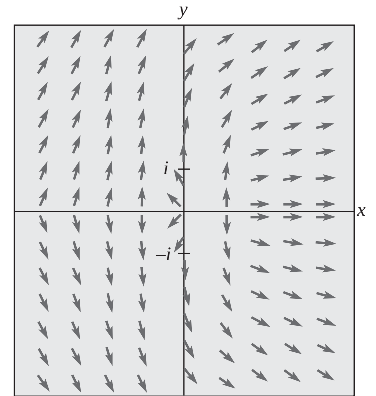


FIGURA 15.6.4 $w = \text{Ln}\, z$ como un flujo

Potencias complejas Con base en la identidad $x^a = e^{a \ln x}$ de las variables reales, se definen potencias complejas de un número complejo. Si α es un número complejo y $z = x + iy$, entonces z^α se define como

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}, \quad z \neq 0. \tag{10}$$

En general, z^α tiene valores múltiples puesto que ln z también los tiene. Sin embargo, en el caso especial en el que $\alpha = n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, (10) tiene un único valor, ya que sólo existe un valor para z^2, z^3, z^{-1}, etc. Para comprobar esto, supóngase que $\alpha = 2$ y $z = re^{i\theta}$, donde θ es cualquier argumento de z. Entonces,

$$e^{2\ln z} = e^{2(\log_e r + i\theta)} = e^{2\log_e r + 2i\theta} = e^{2\log_e r}e^{2i\theta} = r^2 e^{i\theta}e^{i\theta} = (re^{i\theta})(re^{i\theta}) = z^2.$$

Si se utiliza Ln z en lugar de ln z, entonces (10) da el **valor principal** de z^α.

EJEMPLO 6 Potencia compleja

Encuentre el valor de i^{2i}.

Solución Con $z = i$, arg $z = \pi/2$ y $\alpha = 2i$, se tiene de (9) que

$$i^{2i} = e^{2i[\log_e 1 + i(\pi/2 + 2n\pi)]} = e^{-(1+4n)\pi}$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Al inspeccionar la ecuación, se observa que i^{2i} es real para cualquier valor de n. Como $\pi/2$ es el argumento principal de $z = i$, en $n = 0$ se obtiene el valor principal de i^{2i}. Este valor principal es, redondeado hasta la cuarta cifra decimal, $i^{2i} = e^{-\pi} = 0.0043$. ≡

15.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 10, exprese e^z en la forma $a + ib$.

1. $z = \frac{\pi}{6} i$ **2.** $z = -\frac{\pi}{3} i$

3. $z = -1 + \frac{\pi}{4} i$ **4.** $z = 2 - \frac{\pi}{2} i$

5. $z = \pi + \pi i$ **6.** $z = -\pi + \frac{3\pi}{2} i$

7. $z = 1.5 + 2i$ **8.** $z = -0.3 + 0.5i$

9. $z = 5i$ **10.** $z = -0.23 - i$

En los problemas 11 y 12, exprese el número indicado en la forma $a + ib$.

11. $e^{1+5\pi i/4}e^{-1-\pi i/3}$ **12.** $\frac{e^{2+3\pi i}}{e^{-3+\pi i/2}}$

En los problemas del 13 al 16, utilice la definición 15.6.1 para expresar la función indicada en la forma $f(z) = u + iv$.

13. $f(z) = e^{-iz}$ **14.** $f(z) = e^{2\bar{z}}$

15. $f(z) = e^{z^2}$ **16.** $f(z) = e^{1/z}$

En los problemas del 17 al 20, verifique el resultado indicado.

17. $|e^z| = e^x$ **18.** $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

19. $e^{z+\pi i} = e^{z-\pi i}$ **20.** $(e^z)^n = e^{nz}$, n es un entero

21. Demuestre que $f(z) = e^{\bar{z}}$ no es analítica en punto alguno.

22. *a*) Utilice el resultado del problema 15 para demostrar que $f(z) = e^{z^2}$ es una función entera.

b) Verifique que $u(x, y) = \text{Re}(e^{z^2})$ es una función armónica.

En los problemas del 23 al 28, exprésese ln z en la forma $a + ib$.

23. $z = -5$ **24.** $z = -ei$

25. $z = -2 + 2i$ **26.** $z = 1 + i$

27. $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ **28.** $z = -\sqrt{3} + i$

En los problemas del 29 al 34, exprésese Ln z en la forma $a + ib$.

29. $z = 6 - 6i$ **30.** $z = -e^3$

31. $z = -12 + 5i$ **32.** $z = 3 - 4i$

33. $z = (1 + \sqrt{3}i)^5$ **34.** $z = (1 + i)^4$

En los problemas del 35 al 38, encuentre todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

35. $e^z = 4i$ **36.** $e^{1/z} = -1$

37. $e^{z-1} = -ie^2$ **38.** $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

En los problemas del 39 al 42, encuentre todos los valores de la cantidad indicada.

39. $(-i)^{4i}$ **40.** $3^{i/\pi}$

41. $(1 + i)^{(1+i)}$ **42.** $(1 + \sqrt{3}i)^{3i}$

En los problemas 43 y 44, encuentre el valor principal de la cantidad indicada. Exprese las respuestas en la forma $a + ib$.

43. $(-1)^{(-2i/\pi)}$ **44.** $(1 - i)^{2i}$

45. Si $z_1 = i$ y $z_2 = -1 + i$, verifíquese que

$$\text{Ln}(z_1 z_2) \neq \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2.$$

46. Encuentre los números complejos z_1 y z_2 tales que

$$\text{Ln}(z_1/z_2) \neq \text{Ln}\, z_1 - \text{Ln}\, z_2.$$

47. Determine si el enunciado indicado es verdadero.

a) $\text{Ln}(-1 + i)^2 = 2\,\text{Ln}(-1 + i)$

b) $\text{Ln}\, i^3 = 3\,\text{Ln}\, i$

c) $\ln i^3 = 3 \ln i$

48. Las leyes de los exponentes son válidas para los números complejos α y β:

$$z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}, \quad \frac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}, \quad (z^\alpha)^n = z^{n\alpha}, \quad n \text{ es un entero.}$$

Sin embargo, la última ley no es válida si n es un número complejo. Verifique que $(i^i)^2 = i^{2i}$, pero que $(i^2)^i \neq i^{2i}$.

49. Para números complejos z que cumplen con $\text{Re}(z) > 0$, demuestre que (7) puede escribirse como

$$\text{Ln}\, z = \frac{1}{2}\log_e(x^2 + y^2) + i \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

50. La función indicada en el problema 49 es analítica.

a) Verifique que $u(x, y) = \log_e(x^2 + y^2)$ es una función armónica.

b) Verifique que $v(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ es una función armónica.

15.7 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Introducción En esta sección se definen las funciones complejas trigonométricas e hiperbólicas. En forma análoga, a las funciones complejas e^z y Ln z, definidas en la sección anterior, concuerdan con sus contrapartes reales para valores reales de z. Además, se muestra que las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas tienen las mismas derivadas y cumplen con muchas de las mismas igualdades que las funciones trigonométricas e hiperbólicas reales.

Funciones trigonométricas Si x es una variable real, entonces la fórmula de Euler indica que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Al restar y sumar estas expresiones se observa que las funciones reales sen x y cos x pueden expresarse con una combinación de funciones exponenciales:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{1}$$

Utilizando (1) como referencia se definen ahora el seno y el coseno de una variable compleja:

Definición 15.7.1 Seno y coseno trigonométricos

Para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2}$$

Como en trigonometría se definen cuatro funciones trigonométricas adicionales en términos de sen z y cos z:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}. \tag{3}$$

Cuando $y = 0$, cada una de las funciones (2) y (3) se reduce a su contraparte real.

Analiticidad Como las funciones exponenciales e^{iz} y e^{-iz} son funciones enteras, se deduce que sen z y cos z son también funciones enteras. Ahora, como se ve posteriormente, sen $z = 0$ sólo para los números reales $z = n\pi$, donde n es entero, y cos $z = 0$ únicamente para los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, donde n es entero. Entonces, tan z y sec z son analíticas excepto en los puntos $z = (2n + 1)\pi/2$, y cot z y csc z son analíticas salvo en los puntos $z = n\pi$.

Derivadas Como $(d/dz)e^z = e^z$ se deduce a partir de la regla de la cadena que $(d/dz)e^{iz} = ie^{iz}$ y $(d/dz)e^{-iz} = -ie^{-iz}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

De hecho, se puede demostrar fácilmente que la forma de las derivadas de las funciones trigonométricas complejas es igual a la de las funciones reales. Se sintetizan a continuación los resultados.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z && \frac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z \\ &\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z && \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z \\ &\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z && \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z \end{aligned} \tag{4}$$

Identidades Las identidades trigonométricas comunes también son las mismas en el caso complejo.

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \qquad \cos(-z) = \cos z \\ &\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \\ &\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \\ &\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \\ &\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z \end{aligned}$$

Ceros Para encontrar los ceros de sen z y cos z se necesita expresar ambas funciones en la forma $u + iv$. Antes de proceder, debe recordarse que si y es real, entonces el seno y el coseno hiperbólicos se definen en términos de las funciones reales exponenciales e^y y e^{-y}:

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \tag{5}$$

Ahora, de la definición 15.7.1 y de la fórmula de Euler se obtiene, después de algunas simplificaciones,

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right).$$

Así, de (5) se tiene que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \tag{6}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \tag{7}$$

De (6), (7) y $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$, se encuentra que

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \tag{8}$$

y

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y. \tag{9}$$

Ahora, un número complejo z es 0 si y sólo si, $|z|^2 = 0$. Así pues, si sen $z = 0$, entonces de (8) se debe tener que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 0$. Esto implica que sen $x = 0$ y senh $y = 0$, y por lo tanto $x = n\pi$ y $y = 0$. Así, los únicos **ceros** de sen z son los números reales $z = n\pi + 0i = n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ En forma similar, de (9) se infiere que cos $z = 0$ únicamente cuando $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

EJEMPLO 1 Valor complejo de la función seno

De (6) se tiene, con la ayuda de una calculadora, que

$$\operatorname{sen}(2 + i) = \operatorname{sen} 2 \cosh 1 + i \cos 2 \operatorname{senh} 1 = 1.4031 - 0.4891i.$$

≡

En trigonometría normal, $|\operatorname{sen} x| \le 1$ y $|\cos x| \le 1$. Al inspeccionar (8) y (9) se observa que estas desigualdades no son válidas para el seno y coseno complejos, puesto que senh y puede tomar valores desde $-\infty$ a ∞. En otras palabras, es perfectamente posible tener soluciones para ecuaciones tales como cos $z = 10$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación cos $z = 10$.

Solución De (2), cos $z = 10$ es equivalente a $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 10$. Al multiplicar esta última ecuación por e^{iz} se obtiene la ecuación cuadrática en e^{iz}:

$$e^{2iz} - 20e^{iz} + 1 = 0.$$

De la fórmula cuadrática se halla $e^{iz} = 10 \pm 3\sqrt{11}$. Entonces, para $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, tenemos que $iz = \log_e(10 \pm 3\sqrt{11}) + 2n\pi i$. Dividiendo entre i y utilizando $\log_e(10 - 3\sqrt{11}) = -\log_e(10 + 3\sqrt{11})$, las soluciones de la ecuación indicada se expresan como $z = 2n\pi \pm i \log_e(10 + 3\sqrt{11})$.

≡

Funciones hiperbólicas El seno y el coseno hiperbólicos complejos se definen en forma análoga a las definiciones reales dadas en (5):

Definición 15.7.2 Seno y coseno hiperbólicos

Para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}. \tag{10}$$

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se definen en términos de senh z y cosh z:

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \tag{11}$$

El seno y el coseno hiperbólicos son funciones enteras, y las funciones definidas en (11) son analíticas excepto en los puntos donde los denominadores son 0. Es fácil ver de (10) que

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z. \tag{12}$$

Es interesante observar que, en contraste con el cálculo real, en cálculo complejo las funciones trigonométricas e hiperbólicas se relacionan entre sí; si se sustituye z por iz en todos los lugares de (10) y se comparan los resultados con (2), se ve que $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$ y $\cosh(iz) = \cos z$. Estas ecuaciones permiten expresar sen z y cos z en función de senh (iz) y cosh(iz), respectivamente. En forma similar, al sustituir z por iz en (2) se expresan senh z y cosh$z$ en función de sen(iz) y de cos(iz), respectivamente. A continuación se sintetizan estos resultados:

$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz), \quad \cos z = \cosh(iz) \tag{13}$$

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz), \quad \cosh z = \cos(iz). \tag{14}$$

Ceros Las relaciones indicadas en (14) permiten deducir igualdades para las funciones hiperbólicas utilizando los resultados de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para expresar senh z en la forma $u + iv$, se escribe $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ como $\operatorname{sen}(-y + ix)$ y se utiliza entonces (6):

$$\operatorname{senh} z = -i[\operatorname{sen}(-y)\cosh x + i\cos(-y)\operatorname{senh} x].$$

Como $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ y $\cos(-y) = \cos y$, lo anterior se simplifica a

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y. \tag{15}$$

En forma semejante,

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \tag{16}$$

También se deduce directamente de (14) que los **ceros** de senh z y cosh z son imaginarios puros y son, respectivamente,

$$z = n\pi i \quad \text{y} \quad z = (2n+1)\frac{\pi i}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Periodicidad Como sen x y cos x son periódicos en 2π, se demuestra fácilmente que sen z y cos z son también periódicos con el mismo periodo real 2π. Por ejemplo, de (6), se observa que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen}(x + 2\pi + iy)\\ &= \operatorname{sen}(x + 2\pi)\cosh y + i\cos(x + 2\pi)\operatorname{senh} y\\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y;\end{aligned}$$

o sea, $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$. De igual forma, de (7) se tiene que $\cos(z + 2\pi) = \cos z$. Asimismo, las funciones hiperbólicas senh z y cosh z tienen periodo imaginario $2\pi i$. Este último resultado se debe a la definición 15.7.2 y a que e^z es periódico con periodo de $2\pi i$, o bien a (15) y (16) reemplazando z por $z + 2\pi i$.

15.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 12, exprese la cantidad indicada en la forma $a + ib$.

1. $\cos(3i)$

2. $\operatorname{sen}(-2i)$

3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$

4. $\cos(2 - 4i)$

5. $\tan(i)$

6. $\cot\left(\frac{\pi}{2} + 3i\right)$

7. $\sec(\pi + i)$

8. $\csc(1 + i)$

9. $\cosh(\pi i)$

10. $\operatorname{senh}\left(\frac{3\pi}{2} i\right)$

11. $\operatorname{senh}\left(1 + \frac{\pi}{3} i\right)$

12. $\cosh(2 + 3i)$

En los problemas 13 y 14, verifique el resultado indicado.

13. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) = \frac{5}{4}$

14. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) = -\frac{3}{4} i$

En los problemas del 15 al 20, encuentre todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

15. $\operatorname{sen} z = 2$

16. $\cos z = -3i$

17. $\operatorname{senh} z = -i$

18. $\operatorname{senh} z = -1$

19. $\cos z = \operatorname{sen} z$

20. $\cos z = i \operatorname{sen} z$

En los problemas 21 y 22, utilice la definición de igualdad de números complejos para encontrar todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

21. $\cos z = \cosh 2$ **22.** $\operatorname{sen} z = i \operatorname{senh} 2$

23. Demuestre que $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

24. Demuestre que $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.

25. Demuestre que $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

26. Demuestre que $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.

27. Demuestre que $|\cosh z|^2 = \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.

28. Demuestre que $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

29. Demuestre que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

30. Demuestre que $\tan z = u + iv$, donde

$$u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad \text{y} \quad v = \frac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

31. Demuestre que $\tanh z$ es periódica con periodo πi.

32. Demuestre que: ***a***) $\overline{\operatorname{sen} \bar{z}} = \operatorname{sen} \bar{z}$ y ***b***) $\overline{\cos \bar{z}} = \cos \bar{z}$.

15.8 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Introducción Se acaba de plantear que tanto las funciones trigonométricas como las hiperbólicas son periódicas en el sentido de que son funciones de una variable compleja z. En consecuencia, estas funciones no poseen inversas que sean funciones en la interpretación estricta de la palabra. Las inversas de estas funciones analíticas son funciones de múltiples valores. Igual que al estudiar la función logarítmica en la sección 15.6 se descarta la expresión "múltiples valores" en la argumentación que sigue.

Seno inverso La función **seno inverso**, escrita como $\operatorname{sen}^{-1} z$ o $\operatorname{arcsen} z$, se define como

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z \quad \text{si} \quad z = \operatorname{sen} w. \tag{1}$$

El seno inverso puede expresarse en términos de la función logarítmica. Para ver esto se utiliza (1) y la definición de la función seno:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{o} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

De la última ecuación y de la fórmula cuadrática, se obtiene entonces

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}. \tag{2}$$

Nótese que en (2) no se utiliza el simbolismo acostumbrado $\pm\sqrt{1 - z^2}$, ya que se conoce de la sección 15.2 que $(1 - z^2)^{1/2}$ tiene dos valores. Al resolver entonces (2) para w se obtiene

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \tag{3}$$

Procediendo del mismo modo, se encuentra que las inversas del coseno y la tangente son

$$\cos^{-1} z = -i \ln[z + i(1 - z^2)^{1/2}] \tag{4}$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Valores de un seno inverso

Encuentre todos los valores del $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{5}$.

Solución De (3) se tiene

$$\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{5} = -i \ln[\sqrt{5}i + (1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2}].$$

Mediante $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = \pm 2i$, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{5} &= -i \ln[(\sqrt{5} \pm 2)i] \\ &= -i\left[\log_e(\sqrt{5} \pm 2) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

El resultado anterior se simplifica un poco observando que $\log_e(\sqrt{5} - 2) = \log_e(1/(\sqrt{5} + 2)) = -\log_e(\sqrt{5} + 2)$. Por lo tanto, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\log_e(\sqrt{5} + 2). \qquad (6)$$ ≡

A fin de obtener valores particulares de, digamos, $\text{sen}^{-1}z$, se debe elegir una raíz específica de $1 - z^2$ y una rama específica del logaritmo. Por ejemplo, si se selecciona $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = 2i$ y la rama principal del logaritmo, entonces (6) da el valor único

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} - i\log_e(\sqrt{5} + 2).$$

Derivadas Las derivadas de las tres funciones trigonométricas inversas consideradas anteriormente se encuentran por medio de derivación implícita. Para hallar la derivada de la función seno inverso $w = \text{sen}^{-1}z$, se comienza derivando $z = \text{sen}\, w$:

$$\frac{d}{dz}z = \frac{d}{dz}\text{sen}\, w \qquad \text{da como resultado} \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w}.$$

Utilizando la igualdad trigonométrica $\cos^2 w + \text{sen}^2 w = 1$ (véase el problema 28 de los ejercicios 15.7) en la forma $\cos w = (1 - \text{sen}^2 w)^{1/2} = (1 - z^2)^{1/2}$, se obtiene

$$\frac{d}{dz}\text{sen}^{-1}z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \qquad (7)$$

Análogamente, se encuentra que

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1}z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1}z = \frac{1}{1 + z^2}. \qquad (9)$$

Debería notarse que las raíces cuadradas utilizadas en (7) y (8) deben ser consistentes con las raíces cuadradas utilizadas en (3) y (4).

EJEMPLO 2 Cálculo de una derivada

Encuentre la derivada de $w = \text{sen}^{-1}z$ en $z = \sqrt{5}$.

Solución En el ejemplo 1, si se utiliza $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = 2i$, entonces esa misma raíz debe utilizarse en (7). El valor de la derivada que es consistente con esta elección viene dado por

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=\sqrt{5}} = \frac{1}{(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2}} = \frac{1}{(-4)^{1/2}} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i.$$ ≡

Funciones hiperbólicas inversas Las funciones hiperbólicas inversas se expresan también en términos del logaritmo. A continuación se sintetizan estos resultados para el seno, coseno y tangente hiperbólicos inversos, así como para sus derivadas:

$$\text{senh}^{-1}z = \ln[z + (z^2 + 1)^{1/2}] \qquad (10)$$

$$\cosh^{-1}z = \ln[z + (z^2 - 1)^{1/2}] \qquad (11)$$

$$\tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z}{1 - z} \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1}z = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1}z = \frac{1}{1-z^2}. \tag{15}$$

EJEMPLO 3 Valores de un coseno hiperbólico inverso

Encuentre todos los valores del $\cosh^{-1}(-1)$.

Solución De (11) con $z = -1$, se tiene que

$$\cosh^{-1}(-1) = \ln(-1) = \log_e 1 + (\pi + 2n\pi)i.$$

Como $\log_e 1 = 0$ se tiene para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\cosh^{-1}(-1) = (2n+1)\pi i.$$

≡

15.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 14, encuentre todos los valores de la cantidad indicada.

1. $\operatorname{sen}^{-1}(-i)$
2. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2}$
3. $\operatorname{sen}^{-1} 0$
4. $\operatorname{sen}^{-1}\frac{13}{5}$
5. $\cos^{-1} 2$
6. $\cos^{-1} 2i$
7. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$
8. $\cos^{-1}\frac{5}{3}$
9. $\tan^{-1} 1$
10. $\tan^{-1} 3i$
11. $\operatorname{senh}^{-1}\frac{4}{3}$
12. $\cosh^{-1} i$
13. $\tanh^{-1}(1+2i)$
14. $\tanh^{-1}(-\sqrt{3}i)$

15 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

Resuelva los problemas del 1 al 16 sin consultar el texto; complete los espacios en blanco o responda verdadero/falso.

1. $\operatorname{Re}((1+i)^{10}) =$ _____ e $\operatorname{Im}((1+i)^{10}) =$ _____.
2. Si z es un punto del tercer cuadrante, entonces $i\bar{z}$ está en el _____ cuadrante.
3. Si $z = 3 + 4i$, entonces $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) =$ _____.
4. $i^{127} - 5i^9 + 2i^{-1} =$ _____.
5. Si $z = \frac{4i}{-3-4i}$, entonces $|z| =$ _____.
6. Describa la región definida por $1 \le |z + 2| \le 3$. _____
7. $\operatorname{Arg}(z + \bar{z}) = 0$ _____
8. Si $z = \frac{5}{-\sqrt{3}+i}$, entonces $\operatorname{Arg} z =$ _____.
9. Si $e^z = 2i$, entonces $z =$ _____.
10. Si $|e^z| = 1$, entonces z es un número imaginario puro. _____
11. El valor principal de $(1+i)^{(2+i)}$ es _____.
12. Si $f(z) = x^2 - 3xy - 5y^3 + i(4x^2y - 4x + 7y)$, entonces $f(-1+2i) =$ _____.
13. Si las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en un punto, entonces la función es necesariamente analítica en dicho punto. _____
14. $f(z) = e^z$ es periódica con periodo _____.
15. $\operatorname{Ln}(-ie^3) =$ _____.
16. $f(z) = \operatorname{sen}(x - iy)$ es no analítica en punto alguno. _____

En los problemas del 17 al 20, escriba el número indicado en la forma $a + ib$.

17. $i(2-3i)^2(4+2i)$
18. $\frac{3-i}{2+3i} + \frac{2-2i}{1+5i}$
19. $\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3}$
20. $4e^{\pi i/3}e^{-\pi i/4}$

En los problemas del 21 al 24, bosqueje el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen con la desigualdad indicada.

21. $\operatorname{Im}(z^2) \le 2$
22. $\operatorname{Im}(z + 5i) > 3$
23. $\frac{1}{|z|} \le 1$
24. $\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}(z)$
25. Busque las definiciones de secciones cónicas en un texto de cálculo. A continuación, describa el conjunto de puntos del

plano complejo que cumple con la ecuación $|z - 2i| + |z + 2i| = 5$.

26. Sean z y w números complejos tales que $|z| = 1$ y $|w| \neq 1$. Demuestre que

$$\left|\frac{z - w}{1 - z\bar{w}}\right| = 1.$$

En los problemas 27 y 28, encuentre todas las soluciones de la ecuación indicada.

27. $z^4 = 1 - i$

28. $z^{3/2} = \dfrac{1}{2 - i}$

29. Si $f(z) = z^{24} - 3z^{20} + 4z^{12} - 5z^6$, encuentre $f\left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)$.

30. Escriba $f(z) = \text{Im}(z - 3\bar{z}) + z\,\text{Re}(z^2) - 5z$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

En los problemas 31 y 32, encuentre la imagen de la línea $x = 1$ en el plano w bajo la transformación indicada.

31. $f(z) = x^2 - y + i(y^2 - x)$

32. $f(z) = \dfrac{1}{z}$

En los problemas del 33 al 36, encuentre todos los números complejos para los que la afirmación indicada sea verdadera.

33. $z = z^{-1}$

34. $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

35. $\bar{z} = -z$

36. $z^2 = (\bar{z})^2$

37. Demuestre que la función $f(z) = -(2xy + 5x) + i(x^2 - 5y - y^2)$ es analítica para cualquier z; encuentre $f'(z)$.

38. Determine si la función

$$f(z) = x^3 + xy^2 - 4x + i(4y - y^3 - x^2y)$$

es derivable y analítica.

En los problemas 39 y 40, verifique la igualdad indicada.

39. $\text{Ln}(1 + i)(1 - i) = \text{Ln}(1 + i) + \text{Ln}(1 - i)$

40. $\text{Ln}\,\dfrac{1 + i}{1 - i} = \text{Ln}(1 + i) - \text{Ln}(1 - i)$

16 INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

Estructura del capítulo

Para definir la integral de una función compleja f se comienza definiendo f a lo largo de una curva C o **contorno** del plano complejo. En esta sección se plantea que la definición de una integral compleja, sus propiedades y su método de cálculo son muy similares a los de una integral real de línea en el plano.

16.1 Integrales de contorno

Introducción En la sección 19.8 se explica de qué manera la definición de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ comienza con una función real $y = f(x)$ precisada sobre un intervalo $[a, b]$ del eje x. Puesto que una curva plana es el análogo bidimensional de un intervalo, se generaliza entonces la definición de integral definida a integrales de funciones reales de *dos* variables definidas sobre una curva C en el plano cartesiano. En esta sección se plantea que una integral compleja se define en forma muy parecida a la de la integral de línea en el plano cartesiano. Se recomienda un repaso de las secciones 19.8 y 19.9 en caso de no haberlas estudiado.

Una definición La integración en el plano complejo se define de manera semejante a la de la integral de línea en el plano. En otras palabras, se trabaja con la integral de una función compleja $f(z)$ que se define a lo largo de una curva C en el plano complejo. Estas curvas se definen en términos de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, donde t es un parámetro real. Utilizando $x(t)$ y $y(t)$ como las partes real e imaginaria, es posible describir también una curva C del plano complejo por medio de una función con valores complejos de una variable real t: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$. Por ejemplo, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, describe un círculo unitario centrado en el origen. Este círculo se describe también por medio de $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, o incluso en forma más compacta por $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Las mismas definiciones de curva suave, curva suave por tramos, curva cerrada y curva cerrada simple dadas en la sección 19.8 son válidas en esta explicación. Como se señaló antes, se supone que la dirección positiva de C corresponde a valores incrementales de t. En variables complejas, una curva suave por tramos C se conoce también como un **contorno** o **trayectoria**. Una integral de $f(z)$ en C se denota por medio de $\int_C f(z)\,dz$ o $\oint_C f(z)\,dz$ si el contorno C es cerrado; se conoce como **integral de contorno** o **integral compleja de línea**.

1. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función definida en todos los puntos de una curva suave C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$.
2. Divídase C en n subarcos de acuerdo con la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$. Los puntos correspondientes a la curva C son $z_0 = x_0 + iy_0 = x(t_0) + iy(t_0)$, $z_1 = x_1 + iy_1 = x(t_1) + iy(t_1)$, $\ldots$, $z_n = x_n + iy_n = x(t_n) + iy(t_n)$. Sea $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición; esto es, el valor máximo de $|\Delta z_k|$.
4. Elíjase un punto $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ de cada subarco. Véase la **FIGURA 16.1.1**.
5. Genérese la suma $\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k$.

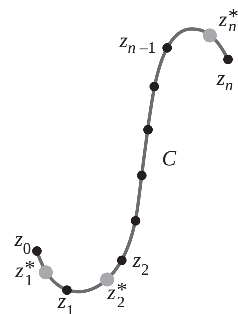


FIGURA 16.1.1 Punto de muestra en el subarco k-ésimo

Definición 16.1.1 Integral de contorno

Sea f una función definida en puntos de una curva suave C expresada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. La **integral de contorno** de f a lo largo de C es

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k. \tag{1}$$

El límite de (1) existe si f es continua en todos los puntos de C y, además, C es suave o suave por tramos. En consecuencia, en adelante se considera que estas condiciones se cumplen.

Un método de cálculo Retomemos la pregunta de cómo calcular una integral de contorno. Para facilitar la explicación se suprimen los subíndices y se escribe (1) en forma abreviada

$$\int_C f(z)\,dz = \text{lím}\,\Sigma(u + iv)(\Delta x + i\,\Delta y)$$

$$= \text{lím}\,[\Sigma(u\Delta x - v\Delta y) + i\,\Sigma(v\Delta x + u\Delta y)].$$

Esto significa
$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \tag{2}$$

En otras palabras, una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es una combinación de dos integrales reales de línea $\int_C u\,dx - v\,dy$ e $\int_C v\,dx + u\,dy$. Ahora, como $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $a \le t \le b$, donde el lado derecho de (2) es el mismo que

$$\int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]\,dt + i\int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Pero si se utiliza $z(t) = x(t) + iy(t)$ para describir C, el último resultado es el mismo que $\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$ al separarlo en dos integrales. Así, se llega a una forma práctica de calcular una integral de contorno:

Teorema 16.1.1 Cálculo de una integral de contorno

Si f es continua en una curva suave C dada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt. \tag{3}$$

Si f se expresa en términos del símbolo z, entonces para calcular $f(z(t))$ simplemente se reemplaza el símbolo z por $z(t)$. Si f no se expresa en términos de z, entonces para calcular $f(z(t))$, se reemplazan x y y donde aparezcan por $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$, donde C viene dada por $x = 3t$, $y = t^2$, $-1 \le t \le 4$.

Solución Se escribe $z(t) = 3t + it^2$ de forma que $z'(t) = 3 + 2it$ y $f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$. Entonces,

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-1}^4 (3t - it^2)(3 + 2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t)\,dt + i\int_{-1}^4 3t^2\,dt = 195 + 65i. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z}dz$, donde C es el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución En este caso $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$, $z'(t) = ie^{it}$ y $f(z) = 1/z = e^{-it}$. Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \qquad \equiv$$

Para algunas curvas, la variable real x se usa como parámetro por sí misma. Por ejemplo, para calcular $\int_C (8x^2 - iy)\,dz$ en $y = 5x$, $0 \le x \le 2$, se escribe $\int_C (8x^2 - iy)\,dz = \int_0^2 (8x^2 - 5ix)(1 + 5i)\,dx$ y se integra de la forma acostumbrada.

Propiedades Las siguientes propiedades de las integrales de contorno son análogas a las propiedades de las integrales de línea:

Teorema 16.1.2 Propiedades de las integrales de contorno

Supóngase que f y g son continuas en un dominio D, y C es una curva suave que está completamente en D. Entonces:

i) $\displaystyle\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, k es una constante

ii) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

iii) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$, donde C es la unión de las curvas suaves C_1 y C_2

iv) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, donde $-C$ denota la curva que tiene la orientación opuesta a C.

Los cuatro incisos del teorema 16.1.2 también son válidos cuando C es una curva suave por tramos en D.

EJEMPLO 3 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\int_C (x^2 + iy^2)\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.1.2**.

Solución Con base en el teorema 16.1.2*iii*) se escribe

$$\int_C (x^2 + iy^2)\,dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2)\,dz.$$

Como la curva C_1 se define mediante $y = x$ tiene sentido utilizar x como parámetro. Por lo tanto, $z(x) = x + ix$, $z'(x) = 1 + i$, $f(z(x)) = x^2 + ix^2$, y

$$\int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz = \int_0^1 (x^2 + ix^2)(1 + i)\,dx$$
$$= (1 + i)^2\int_0^1 x^2 dx = \frac{(1 + i)^2}{3} = \frac{2}{3}i.$$

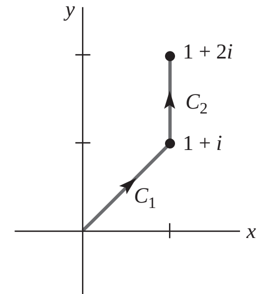


FIGURA 16.1.2 Contorno suave por tramos del ejemplo 3

La curva C_2 se define por $x = 1$, $1 \le y \le 2$. Utilizando y como parámetro, se tiene que $z(y) = 1 + iy$, $z'(y) = i$ y $f(z(y)) = 1 + iy^2$. Por lo tanto,

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2)\,dz = \int_1^2 (1 + iy^2)\,i\,dy = -\int_1^2 y^2\,dy + i\int_1^2 dy = -\frac{7}{3} + i.$$

Finalmente, se tiene que $\int_C (x^2 + iy^2)\,dz = \frac{2}{3}i + (-\frac{7}{3} + i) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}i.$ ≡

En las aplicaciones de la integración compleja existen ocasiones en que es útil encontrar un límite superior para el valor absoluto de una integral de contorno. En el siguiente teorema se aprovecha que la longitud de una curva plana es $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$. Pero si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, entonces $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ y por lo tanto $s = \int_a^b |z'(t)|\,dt$.

Teorema 16.1.3 Un teorema de acotación

Si f es continua en una curva suave C, y si $|f(z)| \le M$ para cualquier z de C, entonces $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$, donde L es la longitud de C.

DEMOSTRACIÓN

De la desigualdad triangular (6) de la sección 15.1 se escribe

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)||\Delta z_k| \le M\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|. \qquad (4)$$

Ahora, $|\Delta z_k|$ se interpreta como la longitud de la cuerda que une los puntos z_k y z_{k-1}. Como la suma de las longitudes de las cuerdas no puede ser mayor que la longitud de C, entonces (4) se convierte en $|\Sigma_{k=1}^{n} f(z_k^*)\, \Delta z_k| \leq ML$. Por lo tanto, cuando $\|P\| \to 0$, esta última desigualdad conduce a $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$. ≡

El teorema 16.1.3 se utiliza a menudo en la teoría de integración compleja y se conoce como la **desigualdad *ML***.

EJEMPLO 4 Una cota para una integral de contorno

Encuentre una cota superior para el valor absoluto de $\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 4$.

Solución En primer lugar, la longitud s del círculo de radio 4 es 8π. A continuación, de la desigualdad (7) de la sección 15.1, se deduce que $|z+1| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$, y por lo tanto

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z|-1} = \frac{|e^z|}{3}. \tag{5}$$

Además, $|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x$. Para puntos en el círculo $|z| = 4$, el máximo valor que puede tomar x es 4 y, por ende, (5) se convierte en

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{e^4}{3}.$$

Entonces, del teorema 16.1.3 se tiene que

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz\right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$ ≡

Circulación y flujo neto Sean **T** y **N** los vectores unitarios tangente y normal a un contorno cerrado simple orientado positivamente C. Al interpretar vectorialmente la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ las integrales de línea

$$\oint_C f \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C u\, dx + v\, dy \tag{6}$$

y

$$\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds = \oint_C u\, dy - v\, dx \tag{7}$$

tienen interpretaciones particulares. La integral de línea (6) se denomina **circulación** alrededor de C y mide la tendencia del flujo a hacer rotar a la curva C; véase la sección 15.8 para la deducción. El **flujo neto** a través de C es la diferencia entre la rapidez con que entra el fluido y la rapidez con que éste abandona la región acotada por C. El flujo neto a través de C viene dado por la integral de línea (7), y un valor de $\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds$ distinto de cero indica la presencia de fuentes o pozos para el fluido dentro de la curva C. Obsérvese que

$$\left(\oint_C f \cdot \mathbf{T}\, ds\right) + i\left(\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds\right) = \oint_C (u - iv)(dx + i\, dy) = \oint_C \overline{f(z)}\, dz$$

y por lo tanto

$$\text{circulación} = \operatorname{Re}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right) \tag{8}$$

$$\text{flujo neto} = \operatorname{Im}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right). \tag{9}$$

Así, estas dos cantidades importantes pueden encontrarse calculando una única integral compleja.

EJEMPLO 5 Flujo neto

Dado el flujo $f(z) = (1 + i)z$, calcule la circulación alrededor, y el flujo neto a través del círculo C: $|z| = 1$.

Solución Como $\overline{f(z)} = (1 - i)\bar{z}$ y $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se tiene

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} (1 - i)e^{-it}ie^{it}\, dt = (1 + i)\int_0^{2\pi} dt = 2\pi(1 + i) = 2\pi + 2\pi i.$$

Así, la circulación alrededor de C es 2π y el flujo neto a través de C es 2π; véase la **FIGURA 16.1.3**. ≡

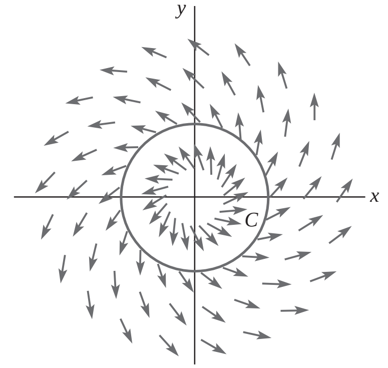


FIGURA 16.1.3 Flujo $f(z) = (1 + i)z$

16.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 16, calcule la integral indicada a lo largo del contorno propuesto.

1. $\int_C (z + 3)\, dz$, donde C es $x = 2t$, $y = 4t - 1$, $1 \leq t \leq 3$

2. $\int_C (2\bar{z} - z)\, dz$, donde C es $x = -t$, $y = t^2 + 2$, $0 \leq t \leq 2$

3. $\int_C z^2\, dz$, donde C es $z(t) = 3t + 2it$, $-2 \leq t \leq 2$

4. $\int_C (3z^2 - 2z)\, dz$, donde C es $z(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$

5. $\int_C \dfrac{1 + z}{z}\, dz$, donde C es la mitad derecha del círculo $|z| = 1$ desde $z = -i$ hasta $z = i$

6. $\int_C |z|^2\, dz$, donde C es $x = t^2$, $y = 1/t$, $1 \leq t \leq 2$

7. $\oint_C \operatorname{Re}(z)\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 1$

8. $\oint_C \left(\dfrac{1}{(z + i)^3} - \dfrac{5}{z + i} + 8\right) dz$, donde C es el círculo $|z + i| = 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$

9. $\int_C (x^2 + iy^3)\, dz$, donde C es la línea recta que va desde $z = 1$ hasta $z = i$

10. $\int_C (x^3 - iy^3)\, dz$, donde C es la mitad inferior del círculo $|z| = 1$ desde $z = -1$ hasta $z = 1$

11. $\int_C e^z\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por los segmentos de línea que van desde $z = 0$ hasta $z = 2$ y desde $z = 2$ hasta $z = 1 + \pi i$

12. $\int_C \operatorname{sen} z\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por los segmentos de línea que van desde $z = 0$ hasta $z = 1$ y desde $z = 1$ hasta $z = 1 + i$

13. $\int_C \operatorname{Im}(z - i)\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por el arco circular a lo largo de $|z| = 1$ desde $z = 1$ hasta $z = i$ y el segmento de línea desde $z = i$ hasta $z = -1$

14. $\int_C dz$, donde C es la mitad izquierda de la elipse $x^2/36 + y^2/4 = 1$ desde $z = 2i$ hasta $z = -2i$

15. $\oint_C e^z\, dz$, donde C es el cuadrado de vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, y $z = i$

16. $\int_C f(z)\, dz$, donde $f(z) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases}$ y C es la parábola $y = x^2$ desde $z = -1 + i$ hasta $z = 1 + i$

En los problemas del 17 al 20, calcule la integral indicada a lo largo del contorno C dado en la **FIGURA 16.1.4**.

17. $\oint_C x\, dz$

18. $\oint_C (2z - 1)\, dz$

19. $\oint_C z^2\, dz$

20. $\oint_C \bar{z}^2\, dz$

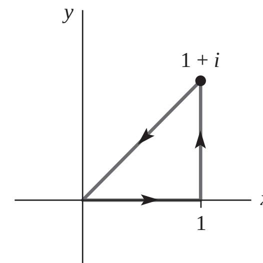


FIGURA 16.1.4 Contorno de los problemas 17 a 20

En los problemas del 21 al 24, calcule $\int_C (z^2 - z + 2)dz$ desde i hasta 1 a lo largo de los contornos indicados.

21.

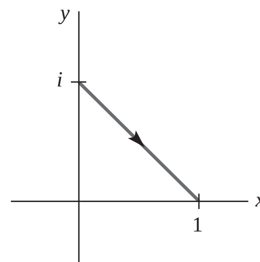


FIGURA 16.1.5 Contorno del problema 21

22.

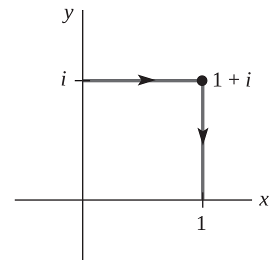


FIGURA 16.1.6 Contorno del problema 22

23.

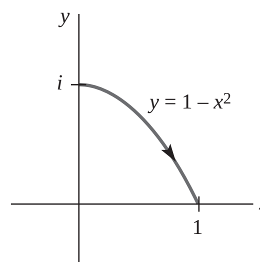


FIGURA 16.1.7 Contorno del problema 23

24.

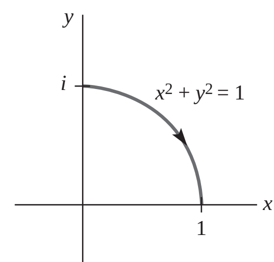


FIGURA 16.1.8 Contorno del problema 24

En los problemas del 25 al 28, encuentre una cota superior para el valor absoluto de la integral indicada a largo del contorno propuesto.

25. $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = 5$

26. $\int_C \frac{1}{z^2-2i}\,dz$, donde C es la mitad derecha del círculo $|z| = 6$ desde $z = -6i$ hasta $z = 6i$

27. $\int_C (z^2+4)\,dz$, donde C es el segmento de línea desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$

28. $\int_C \frac{1}{z^3}\,dz$, donde C es un cuarto del círculo $|z| = 4$ desde $z = 4i$ hasta $z = 4$

29. ***a***) Utilice la definición 16.1.1 para demostrar que $\int_C dz = z_n - z_0$ para cualquier curva suave C entre z_0 y z_n.

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para verificar la respuesta al problema 14.

30. Utilice la definición 16.1.1 para demostrar que $\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2)$ para cualquier curva suave C entre z_0 y z_n. [*Sugerencia:* La integral existe, por lo tanto, se elige $z_k^* = z_k$ y $z_k^* = z_{k-1}$.]

31. Utilice los resultados de los problemas 29 y 30 para calcular $\oint_C (6z+4)dz$ donde C es:

a) La línea recta desde $1 + i$ hasta $2 + 3i$

b) El contorno cerrado $x^4 + y^4 = 4$.

En los problemas del 32 al 35, calcule la circulación y el flujo neto para el flujo dado y el contorno cerrado indicado.

32. $f(z) = 1/z$, donde C es el círculo $|z| = 2$

33. $f(z) = 2z$, donde C es el círculo $|z| = 1$

34. $f(z) = 1/\overline{(z-1)}$, donde C es el círculo $|z - 1| = 2$

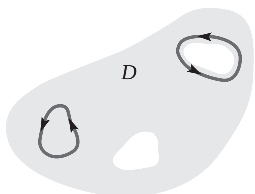
35. $f(z) = \bar{z}$, donde C es el cuadrado de vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = i$

16.2 Teorema de Cauchy-Goursat

Introducción En esta sección se concentra la atención en las integrales de contorno donde el contorno C es una **curva cerrada simple** con orientación positiva (en sentido antihorario). Específicamente, se plantea que cuando f es analítica en un tipo especial de dominio D, el valor de la integral de contorno $\oint_C f(z)\,dz$ es el mismo para *cualquier* curva cerrada simple C que se encuentre completamente en D. Este teorema, llamado **teorema de Cauchy-Goursat**, es uno de *los* resultados fundamentales del análisis complejo. Antes de explicar el teorema de Cauchy-Goursat y algunas de sus derivaciones se necesita primero distinguir dos tipos de dominio en el plano complejo: el simplemente conexo y el múltiplemente conexo.



a) Dominio simplemente conexo



b) Dominio múltiplemente conexo

FIGURA 16.2.1 Dos tipos de dominio

Dominios simplemente conexo y múltiplemente conexo La explicación que sigue se concentra en integrales de contorno, donde el contorno C es una **curva cerrada simple** con orientación positiva (en sentido antihorario). Antes de eso, es necesario distinguir dos tipos de dominio. Se dice que un dominio D es **simplemente conexo** si cualquier contorno cerrado simple C que se localice completamente en D puede encogerse hasta un punto sin tener que abandonar D. En otras palabras, en un dominio simplemente conexo, cualquier contorno cerrado simple C que se encuentre completamente en aquél encierra únicamente a puntos del dominio D. Expresado en forma alterna, un dominio simplemente conexo no tiene "orificios". El plano complejo completo es un ejemplo de un dominio simplemente conexo. Un dominio que no es simplemente conexo se denomina **dominio múltiplemente conexo**; esto es, un dominio múltiplemente conexo tiene "orificios"; véase la **FIGURA 16.2.1**. Como en la sección 19.9, un dominio con un "orificio" se denomina **doblemente conexo**, un dominio con dos "orificios" se denomina **triplemente conexo**, etcétera.

Teorema de Cauchy En 1825, el matemático francés Louis-Augustin Cauchy demostró unos de los teoremas más importantes del análisis complejo. El **teorema de Cauchy** dice:

Supóngase que una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D y que f′ es continua en D. Entonces, para cualquier contorno cerrado simple C en D, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Green y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como f' es continua en D, las partes real e imaginaria de $f(z) = u + iv$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en todo D. Por medio de (2) de la sección 16.1, se escribe $\oint_C f(z)\,dz$ en términos de integrales reales de línea y se utiliza el teorema de Green sobre cada una de ellas:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA. \qquad (1)$$

Ahora, ya que f es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, implican que los integrandos en (1) son iguales a cero. Por lo tanto, se tiene que $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

En 1883, el matemático francés Édouard Goursat demostró el teorema de Cauchy sin la hipótesis de continuidad de f'. La versión modificada resultante del teorema de Cauchy se conoce como **teorema de Cauchy-Goursat**:

Teorema 16.2.1 Teorema de Cauchy-Goursat

Supóngase que una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D. Entonces, para cualquier contorno cerrado simple C en D, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

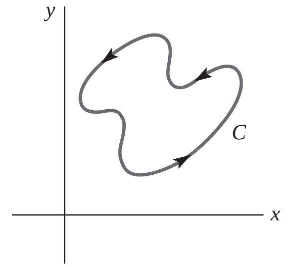


FIGURA 16.2.2 Contorno del ejemplo 1

Como el interior de un contorno cerrado simple es un dominio simplemente conexo, el teorema de Cauchy-Goursat puede plantearse en forma un poco más práctica:

Si f es analítica en todos los puntos de un contorno cerrado simple C, y dentro de dicho contorno, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$. (2)

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Calcule $\oint_C e^z\,dz$, donde C es la curva mostrada en la **FIGURA 16.2.2**.

Solución La función $f(z) = e^z$ es entera y C es un contorno cerrado simple. De la forma (2) del teorema de Cauchy-Goursat, se deduce que $\oint_C e^z\,dz = 0$. ≡

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Calcule $\oint_C \dfrac{dz}{z^2}$, donde C es la elipse $(x - 2)^2 + \dfrac{(y - 5)^2}{4} = 1$.

Solución La función racional $f(z) = 1/z^2$ es analítica en cualquier punto excepto en $z = 0$. Pero $z = 0$ no es un punto del contorno C o interior al mismo. Por lo tanto, de (2) se tiene que $\oint_C dz/z^2 = 0$. ≡

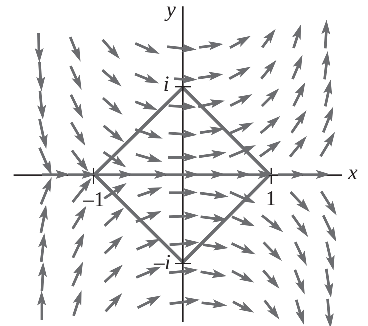


FIGURA 16.2.3 flujo $f(z) = \overline{\cos z}$

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Dado el flujo $f(z) = \overline{\cos z}$, calcule la circulación alrededor de C, y el flujo neto que lo atraviesa, donde C es el cuadrado con vértices $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ y $z = -i$.

Solución Se debe calcular $\oint_C \overline{\overline{f(z)}}\,dz = \oint_C \cos z\,dz$ y entonces tomar las partes real e imaginaria de la integral para encontrar la circulación y el flujo neto, respectivamente. La función $\cos z$ es analítica en cualquier punto, por lo que $\oint_C \overline{\overline{f(z)}}\,dz = 0$ de (2). La circulación y el flujo neto son, por lo tanto, cero. La **FIGURA 16.2.3** muestra el flujo $f(z) = \overline{\cos z}$ y el contorno C.

Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos Si f es analítica en un dominio múltiplemente conexo D, entonces no se puede concluir que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C en D. Para comenzar, supóngase que D es un dominio doblemente conexo y que C y C_1 son contornos cerrados simples tales que C_1 rodea al "orificio" en el dominio y es interior a C; véase la **FIGURA 16.2.4*a*)**. Supóngase, también, que f es analítica en cada contorno y en cada punto interior a C pero exterior a C_1. Cuando se introduce el corte AB mostrado en la figura 16.2.4*b*), la región acotada por las curvas es simplemente conexa. Ahora, la integral desde A hasta B tiene el valor opuesto de la integral desde B hasta A y, por lo tanto, de (2) se tiene $\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$ o

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz. \tag{3}$$

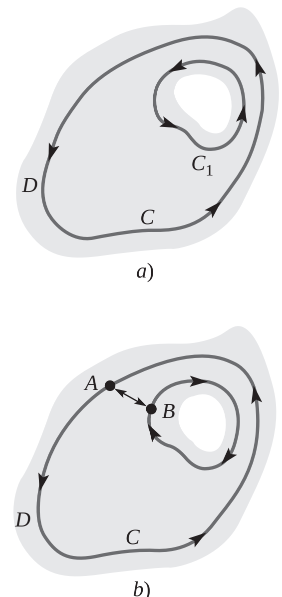


FIGURA 16.2.4 Dominio doblemente conexo D

Este último resultado se denomina en ocasiones principio de **deformación de contornos**, puesto que el contorno C_1 se puede pensar como una deformación continua del contorno C. Bajo esta deformación de contornos, el valor de la integral no cambia. Así, en un nivel práctico, (3) permite calcular una integral sobre un complicado contorno cerrado simple reemplazando dicho contorno por uno más conveniente.

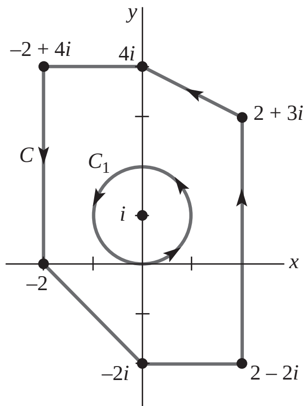


FIGURA 16.2.5 Se utiliza el contorno más sencillo C_1 en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Aplicación de la deformación de contornos

Calcule $\oint_C \frac{dz}{z - i}$, donde C es el contorno exterior mostrado en la **FIGURA 16.2.5**.

Solución A partir de (3) se elige el contorno circular más conveniente C_1, mostrado en la figura. Tomando el radio del círculo como $r = 1$ se garantiza que C_1 se encuentra dentro de C. En otras palabras, C_1 es el círculo $|z - i| = 1$, que se parametriza como $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, o, en forma equivalente, por $z = i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. De $z - i = e^{it}$ y $dz = ie^{it}\,dt$ se obtiene

$$\oint_C \frac{dz}{z - i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z - i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \qquad \equiv$$

El resultado del ejemplo 4 puede generalizarse; utilizando el principio de deformación de contornos (3) y procediendo como en el ejemplo, se demuestra que si z_0 es cualquier número complejo constante interior a *cualquier* contorno cerrado simple C, entonces

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \text{ un entero } \neq 1. \end{cases} \qquad (4)$$

El hecho de que la integral (4) sea cero cuando n es un entero $\neq 1$, es únicamente consecuencia parcial del teorema de Cauchy-Goursat. Cuando n es cero o un entero negativo, $1/(z - z_0)^n$ es un polinomio (por ejemplo, $n = -3$, $1/(z - z_0)^{-3} = (z - z_0)^3$) y por lo tanto completo. El teorema 16.2.1 implica entonces que $\oint_C dz/(z - z_0)^n = 0$. Se deja como ejercicio demostrar que la integral sigue siendo cero cuando n es un entero positivo diferente de uno; véase el problema 22 de los ejercicios 16.2.

EJEMPLO 5 Aplicación de la fórmula (4)

Calcule $\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\,dz$, donde C es el círculo $|z - 2| = 2$.

Solución Puesto que el denominador se factoriza como $z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)$, el integrando deja de ser analítico en $z = 1$ y $z = -3$. De estos dos puntos, únicamente $z = 1$ se encuentra dentro del contorno C, que es un círculo centrado en $z = 2$, de radio $r = 2$. Ahora, por fracciones parciales,

$$\frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3} = \frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 3}$$

y así

$$\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\,dz = 3\oint_C \frac{dz}{z - 1} + 2\oint_C \frac{dz}{z + 3}. \qquad (5)$$

Tomando en cuenta el resultado (4), la primera integral de (5) adquiere el valor $2\pi i$. Por el teorema de Cauchy-Goursat, el valor de la segunda integral es cero. Así pues, (5) se convierte en

$$\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\,dz = 3(2\pi i) + 2(0) = 6\pi i. \qquad \equiv$$

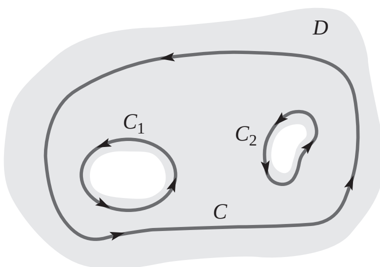


FIGURA 16.2.6 Dominio triplemente conexo D

Si C, C_1 y C_2 son los contornos cerrados simples mostrados en la **FIGURA 16.2.6**, y si f es analítica en cada uno de los tres contornos, así como en cada punto interior a C pero exterior a C_1 y C_2, entonces, introduciendo cortes, se tiene del teorema 16.2.1 que $\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$. Por lo tanto,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz.$$

El siguiente teorema sintetiza el resultado general para un dominio múltiplemente conexo con n "orificios":

Teorema 16.2.2 Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos

Supóngase que $C, C_1, \ldots, C_n$ son curvas cerradas simples con una orientación positiva tales que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son interiores a C, pero las regiones interiores a cada C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, no tienen puntos en común. Si f es analítica en cada contorno y en cada punto interior a C pero exterior a cualquiera de las C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \qquad (6)$$

EJEMPLO 6 Aplicación del teorema 16.2.2

Calcule $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, donde C es el círculo $|z| = 3$.

Solución En este caso, el denominador del integrando se factoriza como $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. En consecuencia, el integrando $1/(z^2 + 1)$ no es analítico en $z = i$ ni en $z = -i$. Estos dos puntos se encuentran dentro del contorno C. Utilizando la descomposición parcial de la fracción una vez más, se tiene

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1/2i}{z-i} - \frac{1/2i}{z+i}$$

y

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz.$$

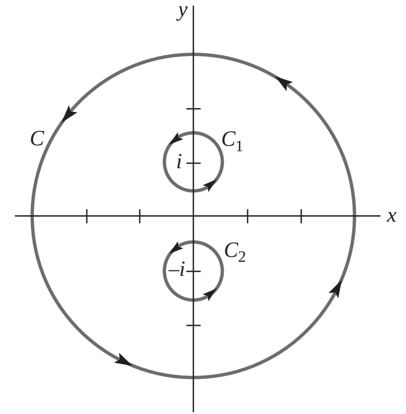


FIGURA 16.2.7 Contorno del ejemplo 6

A continuación, los puntos $z = i$ y $z = -i$ se rodean con contornos circulares C_1 y C_2, respectivamente, que se localizan completamente dentro de C. Específicamente, la elección de $|z - i| = \frac{1}{2}$ para C_1 y $|z + i| = \frac{1}{2}$ para C_2 es suficiente; véase la **FIGURA 16.2.7**. Del teorema 16.2.2 se escribe entonces

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z+i} + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{dz}{z+i}. \qquad (7)$$

Debido a que $1/(z + i)$ es analítica en C_1 y en cada punto de su interior, y como $1/(z - i)$ es analítica en C_2 y en cada punto de su interior, se tiene de (4) que la segunda y tercera integrales de (7) son cero. Asimismo, de (4), cuando $n = 1$, se tiene que

$$\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} = 2\pi i \qquad \text{y} \qquad \oint_{C_2}\frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Así, (7) se convierte en $$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0.$$ ≡

Comentarios

En la anterior argumentación se considera que C es un contorno cerrado simple; en otras palabras, C no se interseca a sí mismo. Aunque no se demuestra aquí, puede probarse que el teorema de Cauchy-Goursat es válido para cualquier contorno cerrado C en un dominio simplemente conexo D. Como se muestra en la **FIGURA 16.2.8**, el contorno C es cerrado pero no es simple. Sin embargo, si f es analítica en D, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

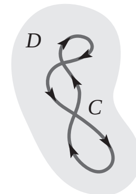


FIGURA 16.2.8 El contorno C es cerrado pero no simple

16.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 8, demuestre que $\oint_C f(z)\,dz = 0$, donde f es la función indicada y C es el círculo unitario $|z| = 1$.

1. $f(z) = z^3 - 1 + 3i$

2. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z-4}$

3. $f(z) = \frac{z}{2z+3}$

4. $f(z) = \frac{z-3}{z^2+2z+2}$

5. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2-25)(z^2+9)}$

6. $f(z) = \frac{e^z}{2z^2+11z+15}$

7. $f(z) = \tan z$

8. $f(z) = \frac{z^2-9}{\cosh z}$

9. Calcule $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.2.9**.

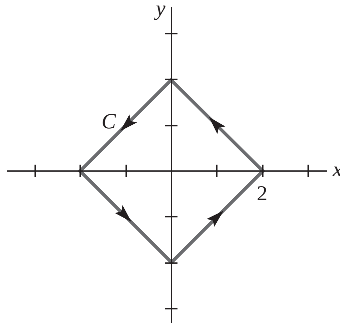


FIGURA 16.2.9 Contorno del problema 9

10. Calcule $\oint_C \frac{5}{z+1+i}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.2.10**.

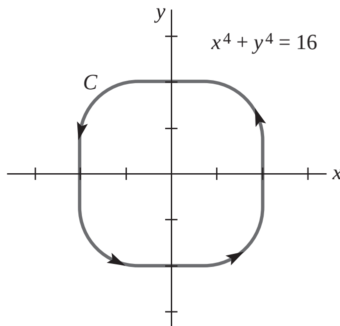


FIGURA 16.2.10 Contorno del problema 10

En los problemas del 11 al 20, utilice cualquier resultado de esta sección para calcular la integral propuesta a lo largo del contorno o los contornos cerrados indicados.

11. $\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz;\ |z| = 2$

12. $\oint_C \left(z + \frac{1}{z^2}\right) dz;\ |z| = 2$

13. $\oint_C \frac{z}{z^2 - \pi^2}\,dz;\ |z| = 3$

14. $\oint_C \frac{10}{(z+i)^4}\,dz;\ |z+i| = 1$

15. $\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz;$ ***a)*** $|z| = \frac{1}{2}$, ***b)*** $|z| = 2$, ***c)*** $|z - 3i| = 1$

16. $\oint_C \frac{2z}{z^2+3}\,dz;$ ***a)*** $|z| = 1$, ***b)*** $|z - 2i| = 1$, ***c)*** $|z| = 4$

17. $\oint_C \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz;$ ***a)*** $|z - 5| = 2$, ***b)*** $|z| = 9$

18. $\oint_C \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i}\right) dz;$ ***a)*** $|z| = 5$, ***b)*** $|z - 2i| = \frac{1}{2}$

19. $\oint_C \frac{z-1}{z(z-i)(z-3i)}\,dz;\ |z - i| = \frac{1}{2}$

20. $\oint_C \frac{1}{z^3 + 2iz^2}\,dz;\ |z| = 1$

21. Calcule $\oint_C \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz$, donde C es el contorno cerrado mostrado en la **FIGURA 16.2.11**. [*Sugerencia:* Exprese C como la unión de dos curvas cerradas C_1 y C_2.]

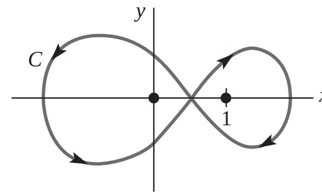


FIGURA 16.2.11 Contorno del problema 21

22. Supóngase que z_0 es cualquier número complejo constante interior a cualquier contorno cerrado simple C. Demuestre que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \text{ es un entero positivo } \neq 1. \end{cases}$$

En los problemas 23 y 24, calcule la integral indicada por cualquier método.

23. $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z}\right) dz$, C es el círculo unitario $|z| = 1$

24. $\oint_C (z^3 + z^2 + \text{Re}(z))\,dz$, C es el triángulo con vértices $z = 0$, $z = 1 + 2i$, $z = 1$

16.3 Independencia de la trayectoria

Introducción En cálculo real, cuando una función f posee una antiderivada elemental, esto es, una función F para la cual $F'(x) = f(x)$, una integral definida se calcula por medio del teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Obsérvese que $\int_a^b f(x)\,dx$ depende únicamente de los números a y b en los puntos inicial y terminal del intervalo de integración. En contraste, el valor de una integral real de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$ depende generalmente de la curva C. Sin embargo, en la sección 19.9, se plantea que existen integrales de línea cuyo valor depende sólo del punto inicial A y del punto terminal B de la curva C, y no de C en sí misma. En este caso, se dice que la integral de línea es

independiente de la trayectoria. Estas integrales se calculan por medio del teorema fundamental de las integrales de línea. Parece lógico preguntar entonces:

¿Existe una versión compleja del teorema fundamental del cálculo? ¿Puede una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ ser independiente de la trayectoria?

En la presente sección se explica que la respuesta a ambas preguntas es sí.

Una definición La definición de **independencia de la trayectoria** para una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es esencialmente la misma que para una integral real de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$.

Definición 16.3.1 Independencia de la trayectoria

Sean z_0 y z_1 puntos de un dominio D. Se dice que una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es **independiente de la trayectoria** si su valor es el mismo para cualquier contorno C en D con un punto inicial z_0 y un punto terminal z_1.

Al final de la sección anterior se explica que el teorema de Cauchy-Goursat también es válido para contornos cerrados, y no sólo para contornos cerrados simples, en un dominio simplemente conexo D. Ahora supóngase, como se muestra en la **FIGURA 16.3.1**, que C y C_1 son dos contornos en un dominio simplemente conexo D; ambos con punto inicial z_0 y punto terminal z_1. Nótese que C y $-C_1$ forman un contorno cerrado. Así, si f es analítica en D se deduce, a partir del teorema de Cauchy-Goursat, que

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

Pero (2) es equivalente a

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz. \tag{3}$$

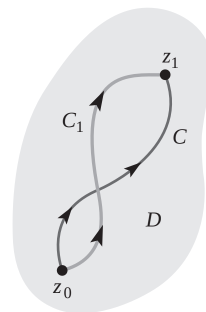


FIGURA 16.3.1 Si f es analítica en D, las integrales sobre C y C_1 son iguales

El resultado en (3) es también un ejemplo del principio de deformación de contornos, introducido en (3) de la sección 16.2. Este último resultado se sintetiza como teorema:

Teorema 16.3.1 La analiticidad implica independencia de la trayectoria

Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria C.

EJEMPLO 1 Elección de una trayectoria diferente

Calcule $\int_C 2z\,dz$, donde C es el contorno con punto inicial $z = -1$ y punto terminal $z = -1 + i$ mostrado en la **FIGURA 16.3.2**.

Solución Como la función $f(z) = 2z$ es entera, la trayectoria C se reemplaza por cualquier contorno conveniente C_1 que una $z = -1$ con $z = -1 + i$. En particular, eligiendo como C_1 el segmento de línea recta $x = -1$, $0 \leq y \leq 1$, que se muestra en negro en la figura 16.3.2, se tiene que $z = -1 + iy$, $dz = i\,dy$. Por lo tanto,

$$\int_C 2z\,dz = \int_{C_1} 2z\,dz = -2\int_0^1 y\,dy - 2i\int_0^1 dy = -1 - 2i. \quad \equiv$$

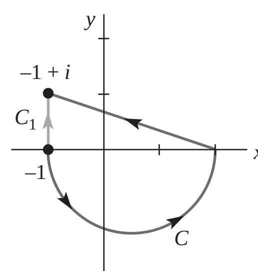


FIGURA 16.3.2 Contorno del ejemplo 1

Una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ que es independiente de la trayectoria C, se escribe usualmente como $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, donde z_0 y z_1 son los puntos inicial y terminal de C. Así, en el ejemplo 1 se escribe $\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz$.

Existe una forma más fácil de calcular la integral de contorno del ejemplo 1, pero antes de proceder se necesita otra definición.

Definición 16.3.2 Antiderivada

Supóngase que f es continua en un dominio D. Si existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para cada z en D, entonces F se denomina **antiderivada** de f.

Por ejemplo, la función $F(z) = -\cos z$ es una antiderivada de $f(z) = \operatorname{sen} z$, puesto que $F'(z) = \operatorname{sen} z$. Al igual que en cálculo real, la antiderivada más general, o **integral indefinida**, de una función $f(z)$ se escribe como $\int f(z)\,dz = F(z) + C$, donde $F'(z) = f(z)$ y C es una constante compleja.

Como una antiderivada F de una función f tiene una derivada en cada punto de un dominio D, necesariamente es analítica y por ende continua en D (recuérdese que la derivabilidad implica continuidad).

Se está ahora en posición de demostrar la analogía compleja de (1).

Teorema 16.3.2 Teorema fundamental para integrales de contorno

Supóngase que f es continua en un dominio D y F es una antiderivada de f en D. Entonces, para cualquier contorno C en D con punto inicial z_0 y punto terminal z_1,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN

A continuación se demuestra (4) en el caso en que C sea una curva suave definida por $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Utilizando (3) de la sección 16.1 y el hecho de que $F'(z) = f(z)$ para cada z en D se tiene

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena} \\ &= F(z(t))\Big]_a^b \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Aplicación de una antiderivada

En el ejemplo 1 se plantea que la integral $\int_C 2z\,dz$, donde C se muestra en la figura 16.3.2, es independiente de la trayectoria. Ahora, ya que $f(z) = 2z$ es una función entera, también es continua. Además, $F(z) = z^2$ es una antiderivada de f, puesto que $F'(z) = 2z$. Por lo tanto, mediante (4) se tiene

$$\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz = z^2\Big]_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i.$$ ≡

EJEMPLO 3 Aplicación de una antiderivada

Calcule $\int_C \cos z\,dz$, donde C es cualquier contorno con punto inicial $z = 0$ y punto terminal $z = 2 + i$.

Solución $F(z) = \operatorname{sen} z$ es una antiderivada de $f(z) = \cos z$, ya que $F'(z) = \cos z$. Por lo tanto, de (4) se tiene que

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz = \operatorname{sen} z\Big]_0^{2+i} = \operatorname{sen}(2+i) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(2+i).$$

Si se desea como respuesta un número complejo de la forma $a + ib$ se puede utilizar $\operatorname{sen}(2+i) = 1.4031 - 0.4891i$ (véase el ejemplo 1 de la sección 15.7). Por lo tanto,

$$\int_C \cos z\,dz = 1.4031 - 0.4891i.$$ ≡

Se pueden sacar varias conclusiones inmediatas del teorema 16.3.2. En primer lugar, se observa que si el contorno C es cerrado, entonces $z_0 = z_1$, en consecuencia,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$

A continuación, como el valor de $\int_C f(z)\,dz$ depende sólo de los puntos z_0 y z_1, este valor es el mismo para cualquier contorno C en D que conecte dichos puntos. En otras palabras:

Si una función continua f tiene una antiderivada F en D, entonces $\int_C f(z)\,dz$ *es independiente de la trayectoria.* **(6)**

Asimismo, se tiene la siguiente condición suficiente para la existencia de una antiderivada:

Si f es continua y $\int_C f(z)\,dz$ *es independiente de la trayectoria en un dominio D, entonces f tiene una antiderivada en cualquier punto de D.* **(7)**

Esta última afirmación es importante y merece una demostración. Considérese que f es continua, $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en un dominio D y F es una función definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ donde s denota una variable compleja, z_0 es un punto fijo de D y z representa cualquier punto de D. Se desea demostrar que $F'(z) = f(z)$; esto es, que F es una antiderivada de f en D. Ahora,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds. \tag{8}$$

Como D es un dominio, se elige Δz de forma que $z + \Delta z$ esté en D. Es más, z y $z + \Delta z$ se unen mediante un segmento recto que se encuentra en D, como muestra la **FIGURA 16.3.3**. Éste es el contorno que se utiliza en la última integral de (8). Una vez fijada z se escribe*

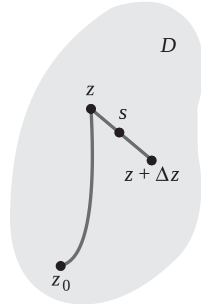


FIGURA 16.3.3 Contorno utilizado en la demostración de (7)

$$f(z)\,\Delta z = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds \qquad \text{y} \qquad f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds. \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce que

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [\,f(s) - f(z)]\,ds.$$

Ahora, f es continua en el punto z. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ de forma que $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|s - z| < \delta$. En consecuencia, si se selecciona Δz de manera que $|\Delta z| < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [\,f(s) - f(z)]\,ds\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [\,f(s) - f(z)]\,ds\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon.$$

Así, se ha demostrado que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \qquad \text{o} \qquad F'(z) = f(z).$$

Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D, necesariamente es continua en todo D. Este hecho, cuando se combina con los resultados del teorema 16.3.1 y con (7), conduce a un teorema que establece que una función analítica posee una antiderivada analítica.

Teorema 16.3.3 **Existencia de una antiderivada**

Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces f tiene una antiderivada en D; esto es, existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para cualquier z en D.

En (9) de la sección 15.6 se plantea que $1/z$ es la derivada de Ln z. Esto significa que, en ciertas circunstancias, Ln z es una antiderivada de $1/z$. Se debe tener cuidado al utilizar este resultado. Por ejemplo, supóngase que D es el plano complejo completo sin el origen. La función $1/z$ es analítica en este dominio *múltiplemente conexo.* Si C es cualquier contorno

* Véase el problema 29 de los ejercicios 16.1.

cerrado simple que contenga al origen, *no* se deduce de (5) que $\oint_C dz/z = 0$. De hecho, de (4) de la sección 16.2, junto con la igualdad $z_0 = 0$ se observa que

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

En este caso, Ln z no es una antiderivada de $1/z$ en D, puesto que Ln z no es analítica en D. Recuérdese que Ln z deja de ser analítica en el eje real no positivo (el corte de ramificación de la rama principal del logaritmo).

EJEMPLO 4 Uso de la función logarítmica

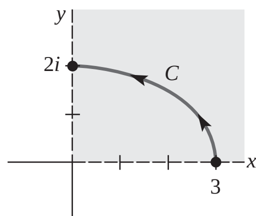


FIGURA 16.3.4 Contorno del ejemplo 4

Calcule $\int_C \frac{1}{z}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.3.4**.

Solución Supóngase que D es el dominio simplemente conexo definido por $x = \text{Re}(z) > 0$, $y = \text{Im}(z) > 0$. En este caso, Ln z es una antiderivada de $1/z$, puesto que ambas funciones son analíticas en D. Por lo tanto, mediante (4),

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \text{Ln } z\Big]_3^{2i} = \text{Ln } 2i - \text{Ln } 3.$$

De (7) de la sección 15.6, se tiene que

$$\text{Ln } 2i = \log_e 2 + \frac{\pi}{2}i \quad \text{y} \quad \text{Ln } 3 = \log_e 3$$

y así

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log_e \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}i = -0.4055 + 1.5708i.$$ ≡

Comentarios

Supóngase que f y g son analíticas en un dominio simplemente conexo D que contiene al contorno C. Si z_0 y z_1 son los puntos inicial y terminal de C, entonces la fórmula de **integración por partes** es válida en D:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\,dz.$$

Esto se demuestra en forma directa utilizando el teorema 16.3.2 sobre la función $(d/dz)(fg)$. Véanse problemas del 21 al 24 de los ejercicios 16.3.

16.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas 1 y 2, calcule la integral indicada en que C es el contorno dado en la figura: ***a***) encontrando una trayectoria alternativa de integración y ***b***) utilizando el teorema 16.3.2.

1. $\int_C (4z - 1)\,dz$

2. $\int_C e^z\,dz$

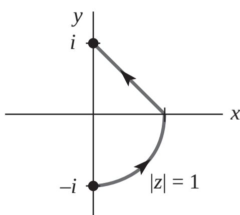


FIGURA 16.3.5 Contorno del problema 1

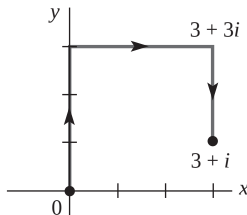


FIGURA 16.3.6 Contorno del problema 2

En los problemas 3 y 4, calcule la integral indicada a lo largo del contorno propuesto C.

3. $\int_C 2z\,dz$, donde C es $z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \le t \le 1$

4. $\int_C 6z^2\,dz$, donde C es $z(t) = 2\cos^3 \pi t - i \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}t$, $0 \le t \le 2$

En los problemas del 5 al 24, utilice el teorema 16.3.2 para calcular la integral indicada. Escriba cada respuesta en la forma $a + ib$.

5. $\int_0^{3+i} z^2\,dz$

6. $\int_{-2i}^{1} (3z^2 - 4z + 5i)\,dz$

7. $\int_{1-i}^{1+i} z^3\,dz$

8. $\int_{-3i}^{2i} (z^3 - z)\,dz$

9. $\int_{-i/2}^{1-i} (2z + 1)^2 \, dz$

10. $\int_{1}^{i} (iz + 1)^3 \, dz$

11. $\int_{i/2}^{i} e^{\pi z} \, dz$

12. $\int_{1-i}^{1+2i} ze^{z^2} \, dz$

13. $\int_{\pi}^{\pi+2i} \operatorname{sen} \frac{z}{2} \, dz$

14. $\int_{1-2i}^{\pi i} \cos z \, dz$

15. $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z \, dz$

16. $\int_{i}^{1+(\pi/2)i} \operatorname{senh} 3z \, dz$

17. $\int_C \frac{1}{z} \, dz$, C es el arco del círculo $z = 4e^{it}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

18. $\int_C \frac{1}{z} \, dz$, C es el segmento de línea recta entre $z = 1 + i$ y $z = 4 + 4i$

19. $\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2} \, dz$, C es cualquier contorno que no pase por el origen

20. $\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) dz$, C es cualquier contorno en el semiplano derecho $\text{Re}(z) > 0$

21. $\int_{\pi}^{i} e^z \cos z \, dz$

22. $\int_{0}^{i} z \operatorname{sen} z \, dz$

23. $\int_{i}^{1+i} ze^z \, dz$

24. $\int_{0}^{\pi i} z^2 e^z \, dz$

16.4 Fórmulas integrales de Cauchy

Introducción En las dos secciones previas se explicó la importancia del teorema de Cauchy-Goursat para el cálculo de integrales de contorno. En esta sección se explican algunas consecuencias adicionales del teorema de Cauchy-Goursat. Indiscutiblemente, la más significativa de éstas es el siguiente resultado:

El valor de una función analítica f en cualquier punto z_0 de un dominio simplemente conexo se representa por medio de una integral de contorno.

Una vez planteado este enunciado se utiliza para mostrar que:

Una función analítica f en un dominio simplemente conexo posee derivadas de todos los órdenes.

Las derivaciones de estos dos resultados ocupan el resto de esta sección y también parte del siguiente capítulo.

Primera fórmula Se comienza con la fórmula integral de Cauchy. La idea en el siguiente teorema es: si f es analítica en un dominio simplemente conexo y z_0 es cualquier punto D, entonces el cociente $f(z)/(z - z_0)$ *no* es analítico en D. Como consecuencia, la integral de $f(z)/(z - z_0)$ alrededor de un contorno cerrado simple C que contiene a z_0 no es necesariamente cero, pero tiene, como se ve a continuación, el valor $2\pi i\, f(z_0)$. Este resultado poco común indica que los valores de una función analítica f en puntos *dentro* de un contorno cerrado simple C se determinan por medio de los valores de f *sobre* el contorno C.

Teorema 16.4.1 Fórmula integral de Cauchy

Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D, y sea C un contorno cerrado simple que se localiza completamente en D. Si z_0 es cualquier punto dentro de C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN

Sean D un dominio simplemente conexo, C un contorno cerrado simple en D y z_0 un punto interior de C. Además, sea C_1 un círculo centrado en z_0 con un radio lo suficientemente pequeño como para que sea interior a C. Por el principio de deformación de los contornos, se puede escribir

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz. \tag{2}$$

Se desea mostrar que el valor de la integral de la derecha es $2\pi i\, f(z_0)$. Con este fin se suma y se sustrae la constante $f(z_0)$ en el numerador:

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z_0) - f(z_0) + f(z)}{z - z_0}\, dz$$
$$= f(z_0) \oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{3}$$

Ahora, de (4) de la sección 16.2 se sabe que

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Entonces, (3) se convierte en

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0) + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{4}$$

Como f es continua en z_0 para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ siempre y cuando $|z - z_0| < \delta$. En particular, si se elige el círculo C_1 como $|z - z_0| = \delta/2 < \delta$, entonces por la desigualdad *ML* (teorema 16.1.3) el valor absoluto de la integral en la derecha de (4) cumple con

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \le \frac{\varepsilon}{\delta/2}\, 2\pi \left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\pi\varepsilon.$$

En otras palabras, el valor absoluto de la integral puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando el radio del círculo C_1 suficientemente pequeño. Esto sólo sucede si la integral es cero. La fórmula de la integral de Cauchy (1) se deduce de (4) dividiendo ambos lados entre $2\pi i$. ≡

La fórmula integral de Cauchy (1) se utiliza para calcular integrales de contorno. Como a menudo se resuelven problemas sin un dominio simplemente conexo que esté definido de manera explícita, se hace un replanteamiento más práctico del teorema 16.4.1:

Si f es analítica en todos los puntos sobre un contorno cerrado simple C y en los puntos en su interior, y z_0 es cualquier punto interior a C,

entonces $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula integral de Cauchy

Calcule $\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Solución En primer lugar, se identifica $f(z) = z^2 - 4z + 4$ y $z_0 = -i$ como un punto dentro del círculo C. A continuación, se observa que f es analítica en todos los puntos del interior y sobre el contorno C. Así, por medio de la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = 2\pi(-4 + 3i).$$ ≡

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula integral de Cauchy

Calcule $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}\, dz$, donde C es el círculo $|z - 2i| = 4$.

Solución Factorizando el denominador como $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ se observa que $3i$ es el único punto dentro del contorno cerrado para el cual el integrando deja de ser analítico; véase la **FIGURA 16.4.1**. Ahora, escribiendo

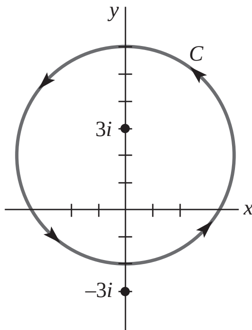


FIGURA 16.4.1 Contorno del ejemplo 2

$$\frac{z}{z^2+9} = \frac{\dfrac{z}{z+3i}}{z-3i},$$

se identifica $f(z) = z/(z + 3i)$. Esta función es analítica en todos los puntos del interior y sobre el contorno C. De la fórmula integral de Cauchy se tiene entonces

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = \oint_C \frac{\dfrac{z}{z+3i}}{z-3i}\,dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i\,\frac{3i}{6i} = \pi i. \qquad \equiv$$

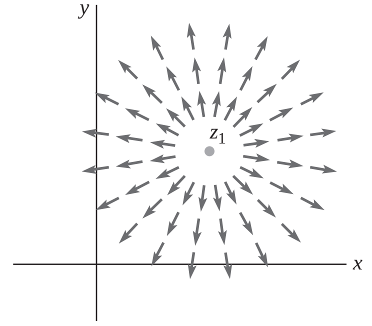
EJEMPLO 3 Flujo y fórmula de la integral de Cauchy

La función compleja $f(z) = k/(\bar{z} = \bar{z}_1)$, donde $k = a + ib$ y z_1 son números complejos, da lugar a un flujo en el dominio $z \neq z_1$. Si C es un contorno cerrado simple que contiene a $z = z_1$ en su interior, entonces, a partir de la fórmula de la integral de Cauchy se tiene

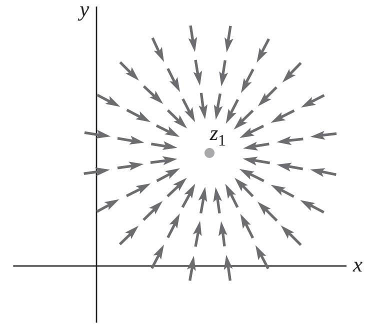
$$\oint_C \overline{f(z)}\,dz = \oint_C \frac{a-ib}{z-z_1}\,dz = 2\pi i(a-ib).$$

Así, la circulación alrededor de C es $2\pi b$ y el flujo neto a través de C es $2\pi a$. Si z_1 estuviera en el exterior de C, tanto la circulación como el flujo neto serían cero por el teorema de Cauchy.

Obsérvese que cuando k es real, la circulación alrededor de C es cero, pero el flujo neto a través de C es $2\pi k$. El número complejo z_1 es una **fuente** para el flujo cuando $k > 0$ y un **pozo** cuando $k < 0$. Los campos vectoriales correspondientes a estos dos casos se muestran en las **FIGURAS 16.4.2*a*) y *b*)**. $\equiv$



a) Fuente: $k > 0$



b) Pozo: $k < 0$

FIGURA 16.4.2 Campos vectoriales del ejemplo 3

Segunda fórmula Se utiliza ahora el teorema 16.4.1 para demostrar que una función analítica posee derivadas de cualquier orden; esto es, si f es analítica en un punto z_0, entonces f', f'', f''', etc., son también analíticas en z_0. Además, los valores de las derivadas $f^{(n)}(z_0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vienen dados por una fórmula similar a (1).

Teorema 16.4.2 Fórmula integral de Cauchy para derivadas

Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D, y C un contorno cerrado simple comprendido enteramente dentro de D. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

A continuación se demuestra (6) únicamente para el caso $n = 1$. El resto de la demostración puede completarse con el principio de inducción matemática.

Se comienza con la definición de derivada y (1):

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right] \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz. \end{aligned}$$

Antes de proceder se establecen algunos conceptos preliminares. Puesto que f es continua en C, está acotada; esto es, existe un número real M tal que $|f(z)| \leq M$ para cualquier punto

z de C. Asimismo, sea L la longitud de C y sea δ la distancia más corta entre los puntos de C y el punto z_0. Así, para cualquier punto z de C, se tiene que

$$|z - z_0| \geq \delta \quad \text{o} \quad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Por otra parte, si se elige $|\Delta z| \leq \delta/2$, entonces

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq \big||z - z_0| - |\Delta z|\big| \geq \delta - |\Delta z| \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{y así} \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{\delta}.$$

Ahora,

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\,dz\right| = \left|\oint_C \frac{-\Delta z f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - \Delta z)}\,dz\right| \leq \frac{2ML|\Delta z|}{\delta^3}.$$

Como esta última expresión tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$ se acaba de demostrar que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz. \qquad \equiv$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto, entonces sus derivadas de cualquier orden existen en ese punto y son continuas. En consecuencia, de

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

se concluye que las funciones reales u y v tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden en un punto de analiticidad.

Al igual que (1), en ocasiones (6) se utiliza para calcular integrales.

EJEMPLO 4 Uso de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Calcule $\oint_C \frac{z + 1}{z^4 + 4z^3}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = 1$.

Solución La inspección del integrando muestra que no es analítico en $z = 0$ ni en $z = -4$, únicamente $z = 0$ se encuentra dentro del contorno cerrado. Escribiendo el integrando como

$$\frac{z + 1}{z^4 + 4z^3} = \frac{\dfrac{z + 1}{z + 4}}{z^3},$$

se pueden identificar $z_0 = 0$, $n = 2$ y $f(z) = (z + 1)/(z + 4)$. Por medio de la regla del cociente, $f''(z) = -6/(z + 4)^3$ y con ayuda (6) se tiene que

$$\oint_C \frac{z + 1}{z^4 + 4z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{3\pi}{32} i. \qquad \equiv$$

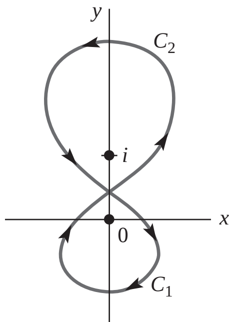


FIGURA 16.4.3 Contorno del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Uso de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Calcule $\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.4.3**.

Solución Aunque C no es un contorno cerrado simple se puede pensar en él como la unión de dos contornos cerrados simples C_1 y C_2, como se indica en la figura 16.4.3. Escribiendo

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= -\oint_{C_1} \frac{\dfrac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2,$$

se está en condiciones de usar tanto (1) como (6).

Para calcular I_1 se identifica $z_0 = 0$ y $f(z) = (z^3 + 3)/(z - i)^2$. Por medio de (1) se deduce que

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = -6\pi i.$$

Para calcular I_2 se identifica $z_0 = i$, $n = 1$, $f(z) = (z^3 + 3)/z$ y $f'(z) = (2z^3 - 3)/z^2$. De (6) se obtiene

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{\dfrac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = 2\pi i(3 + 2i) = 2\pi(-2 + 3i).$$

Finalmente, se obtiene

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + 2\pi(-2 + 3i) = 4\pi(-1 + 3i).$$ ≡

■ **Teorema de Liouville** Si se considera el contorno C como el círculo $|z - z_0| = r$ se deduce de (6) y de la desigualdad ML que

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}, \tag{7}$$

donde M es un número real tal que $|f(z)| \le M$ para cualquier punto z de C. El resultado (7), llamado **desigualdad de Cauchy**, se utiliza para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 16.4.3 Teorema de Liouville

Las únicas funciones enteras y acotadas son las constantes.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que f es una función entera y acotada, esto es, $|f(z)| \le M$ para cualquier z. Entonces, para cualquier punto z_0, (7) da $|f'(z_0)| \le M/r$. Tomando r arbitrariamente grande se puede hacer que $|f'(z_0)|$ sea tan pequeño como se desee. Esto significa que $f'(z_0) = 0$ para cualquier punto z_0 del plano complejo. Por lo tanto, f debe ser constante. ≡

■ **Teorema fundamental del álgebra** El teorema de Liouville permite demostrar, a su vez, un resultado aprendido en álgebra elemental:

Si $P(z)$ es un polinomio no constante, entonces la ecuación $P(z) = 0$ tiene al menos una raíz.

Este resultado se conoce como el **teorema fundamental del álgebra**. Para demostrarlo, supóngase que $P(z) \ne 0$ para cualquier z. Esto implica que el recíproco de P, $f(z) = 1/P(z)$, es una función entera. Ahora, ya que $|f(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, la función f debe estar acotada para cualquier z finita. Se deduce del teorema de Liouville que f es una constante y por lo tanto P es una constante. Pero esto es contradictorio con la hipótesis de que P *no* es un polinomio constante, por lo que se concluye que debe existir al menos un número z para el cual $P(z) = 0$.

16.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 24, utilice los teoremas 16.4.1 y 16.4.2, cuando así convenga, para calcular la integral indicada a lo largo del contorno o los contornos cerrados proporcionados.

1. $\oint_C \frac{4}{z-3i}\,dz$; $|z|=5$

2. $\oint_C \frac{z^2}{(z-3i)^2}\,dz$; $|z|=5$

3. $\oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}\,dz$; $|z|=4$

4. $\oint_C \frac{1+2e^z}{z}\,dz$; $|z|=1$

5. $\oint_C \frac{z^2-3z+4i}{z+2i}\,dz$; $|z|=3$

6. $\oint_C \frac{\cos z}{3z-\pi}\,dz$; $|z|=1.1$

7. $\oint_C \frac{z^2}{z^2+4}\,dz$; ***a)*** $|z-i|=2$, ***b)*** $|z+2i|=1$

8. $\oint_C \frac{z^2+3z+2i}{z^2+3z-4}\,dz$; ***a)*** $|z|=2$, ***b)*** $|z+5|=\frac{3}{2}$

9. $\oint_C \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4}\,dz$; $|z-3i|=1.3$

10. $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+\pi^2}\,dz$; $|z-2i|=2$

11. $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}\,dz$; $|z-i|=1$

12. $\oint_C \frac{z}{(z+i)^4}\,dz$; $|z|=2$

13. $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5}\,dz$; $|z|=1$

14. $\oint_C \frac{e^{-z}\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz$; $|z-1|=3$

15. $\oint_C \frac{2z+5}{z^2-2z}\,dz$; ***a)*** $|z|=\frac{1}{2}$, ***b)*** $|z+1|=2$, ***c)*** $|z-3|=2$, ***d)*** $|z+2i|=1$

16. $\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz$; ***a)*** $|z|=\frac{1}{2}$, ***b)*** $|z+1|=1$, ***c)*** $|z-1|=\frac{1}{2}$, ***d)*** $|z|=4$

17. $\oint_C \frac{z+2}{z^2(z-1-i)}\,dz$; ***a)*** $|z|=1$, ***b)*** $|z-1-i|=1$

18. $\oint_C \frac{1}{z^3(z-4)}\,dz$; ***a)*** $|z|=1$, ***b)*** $|z-2|=1$

19. $\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4}-\frac{z^4}{(z-i)^3}\right)dz$; $|z|=6$

20. $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3}-\frac{\operatorname{sen}^2 z}{(2z-\pi)^3}\right)dz$; $|z|=3$

21. $\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^2}\,dz$; $|z-2|=5$

22. $\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)}\,dz$; $|z-i|=\frac{3}{2}$

23. $\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2}\,dz$; C viene dado en la **FIGURA 16.4.4**

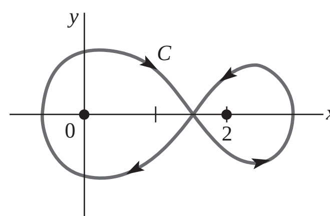


FIGURA 16.4.4 Contorno del problema 23

24. $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz$; C viene dado en la **FIGURA 16.4.5**

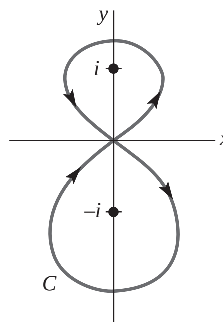


FIGURA 16.4.5 Contorno del problema 24

16 Ejercicios de repaso Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

Resuelva los problemas del 1 al 12 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso.

1. El sector definido por $-\pi/6 < \arg z < \pi/6$ es un dominio simplemente conexo. _____

2. Si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C, entonces f es analítica dentro de C y en C. _____

3. El valor de $\int_C \frac{z-2}{z}\,dz$ es el mismo para cualquier trayectoria C del semiplano derecho $\text{Re}(z) > 0$ entre $z = 1 + i$ y $z = 10 + 8i$. _____

4. Si g es entera, entonces $\oint_C \frac{g(z)}{z-i}\,dz = \oint_{C_1} \frac{g(z)}{z-i}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = 3$ y C_1 es la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$. _____

5. Si f es un polinomio y C es una curva cerrada simple, entonces $\oint_C f(z)\,dz =$ _____.

6. Si $f(z) = \oint_C \frac{\xi^2 + 6\xi - 2}{\xi - z}\,d\xi$, donde C es $|z| = 3$, entonces $f(1+i) =$ _____.

7. Si $f(z) = z^3 + e^z$ y C es el contorno $z = 8e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces $\oint_C \frac{f(z)}{(z+\pi i)^3}\,dz =$ _____.

8. Si f es entera y $|f(z)| \le 10$ para cualquier z, entonces $f(z) =$ _____.

9. $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}\,dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C que delimite a los puntos z_0 y z_1. _____

10. Si f es analítica dentro de y sobre el contorno cerrado simple C, y z_0 es un punto contenido en C, entonces

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz \text{ _____.}$$

11. $\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ ______} \\ 2\pi i, & \text{si } n \text{ ______} \end{cases}$
donde n es un entero y C es $|z| = 1$.

12. Si $|f(z)| \le 2$ sobre $|z| = 3$, entonces $\left|\oint_C f(z)\,dz\right| \le$ _____.

En los problemas 13 al 28, calcule la integral indicada utilizando las técnicas planteadas en este capítulo.

13. $\int_C (x+iy)\,dz$; C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.R.1**

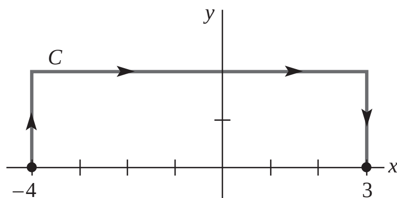


FIGURA 16.R.1 Contorno del problema 13

14. $\int_C (x-iy)\,dz$; C es el contorno mostrado en la figura 16.R.1

15. $\int_C |z^2|\,dz$; C es $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 2$

16. $\int_C e^{\pi z}\,dz$; C es el segmento de línea desde $z = i$ hasta $z = 1 + i$

17. $\oint_C e^{\pi z}\,dz$; C es la elipse $x^2/100 + y^2/64 = 1$

18. $\int_{3i}^{1-i} (4z - 6)\,dz$

19. $\int_C \text{sen}\, z\,dz$; C es $z(t) = t^4 + i(1+t^3)^2$, $-1 \le t < 1$

20. $\int_C (4z^3 + 3z^2 + 2z + 1)\,dz$; C es el segmento de línea desde 0 hasta $2i$

21. $\oint_C (z^{-2} + z^{-1} + z + z^2)\,dz$; C es el círculo $|z| = 1$

22. $\oint_C \frac{3z+4}{z^2-1}\,dz$; C es el círculo $|z| = 2$

23. $\oint_C \frac{e^{-2z}}{z^4}\,dz$; C es el círculo $|z-1| = 3$

24. $\oint_C \frac{\cos z}{z^3 - z^2}\,dz$; C es el círculo $|z| = \frac{1}{2}$

25. $\oint_C \frac{1}{2z^2 + 7z + 3}\,dz$; C es la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$

26. $\oint_C z \csc z\,dz$; C es el rectángulo de vértices $1+i$, $1-i$, $2+i$, $2-i$

27. $\oint_C \frac{z}{z+i}\,dz$; C es el contorno mostrado en la **FIGURA 16.R.2**

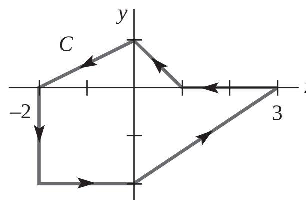


FIGURA 16.R.2 Contorno del problema 27

28. $\oint_C \frac{e^{i\pi z}}{2z^2 - 5z + 2}\,dz$; C es ***a)*** $|z| = 1$, ***b)*** $|z-3| = 2$, ***c)*** $|z+3| = 2$

29. Sea $f(z) = z^n g(z)$, donde n es un entero positivo, $g(z)$ es entera y $g(z) \ne 0$ para cualquier z. Sea C un círculo con centro en el origen. Calcule $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$.

30. Sea C el segmento de línea recta desde i hasta $2+i$. Demuestre que

$$\left|\int_C \text{Ln}(z+1)\,dz\right| \le \log_e 10 + \frac{\pi}{2}.$$

17 SERIES Y RESIDUOS

Estructura del capítulo

La fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas indica que si una función f es analítica en un punto z_0, entonces, dicho punto tiene derivadas de todos los órdenes. Como consecuencia del resultado anterior, en el presente capítulo se plantea que f puede desarrollarse siempre en una serie de potencias centrada en dicho punto. Por otro lado, si f no es analítica en un punto z_0, es posible desarrollarla aun en un tipo diferente de serie conocida como **serie de Laurent**. El concepto de serie de Laurent conduce al concepto de un **residuo**, el que a su vez lleva a otra forma de calcular integrales complejas.

17.1 Sucesiones y series

Introducción Gran parte de la teoría de sucesiones y series complejas es análoga a la existente en cálculo real. En esta sección se analizan las definiciones de convergencia y divergencia para sucesiones complejas y series infinitas complejas. Además, se proporcionan algunas pruebas para la convergencia de series infinitas. Se sugiere poner atención especial a lo expuesto sobre *series geométricas*, ya que este tipo de series son importantes en secciones posteriores de este capítulo.

Sucesiones Una **sucesión** $\{z_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos; en otras palabras, a cada entero $n = 1, 2, 3, \ldots$, se le asigna un número complejo z_n. Por ejemplo, la sucesión $\{1 + i^n\}$ es

$$\begin{array}{ccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i,\ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5,\ldots. \end{array} \tag{1}$$

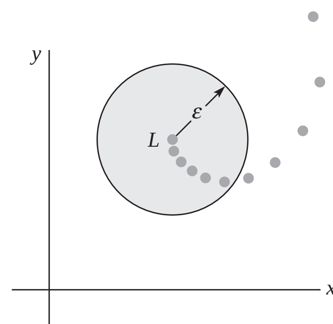


FIGURA 17.1.1 Si $\{z_n\}$ converge a L, todos excepto un número finito de términos se encuentran en una ε-vecindad de L

Se dice que si $\lim_{n\to\infty} z_n = L$ la sucesión $\{z_n\}$ es **convergente**. En otras palabras, $\{z_n\}$ **converge** al número L si, para cada número positivo ε, se encuentra un N tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Como se muestra en la **FIGURA 17.1.1**, cuando una sucesión $\{z_n\}$ converge a L, todos excepto un número finito de términos de la sucesión se hallan dentro de una ε-vecindad de L. La sucesión $\{1 + i^n\}$ ilustrada en (1) es divergente, puesto que el término general $z_n = 1 + i^n$ no tiende a un número complejo fijo cuando $n \to \infty$. De hecho, los primeros cuatro términos de esta sucesión se repiten infinitamente al incrementarse n.

EJEMPLO 1 Una sucesión convergente

La sucesión $\left\{\dfrac{i^{n+1}}{n}\right\}$ converge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i^{n+1}}{n} = 0.$$

Como se observa de $$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots,$$

y la **FIGURA 17.1.2**, los términos de la sucesión avanzan hacia el punto $z = 0$ en forma de espiral. ≡

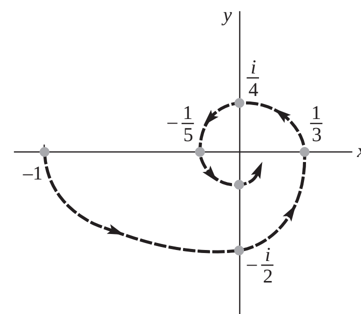


FIGURA 17.1.2 Los términos de la sucesión espiral se acercan a 0 en el ejemplo 1

El siguiente teorema debería ser intuitivo:

Teorema 17.1.1 **Criterio para la convergencia**

Una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número complejo L si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z_n)$ converge a $\operatorname{Re}(L)$ e $\operatorname{Im}(z_n)$ converge a $\operatorname{Im}(L)$.

EJEMPLO 2 Ilustración del teorema 17.1.1

La sucesión $\left\{\dfrac{ni}{n+2i}\right\}$ converge a i. Obsérvese que $\operatorname{Re}(i) = 0$ e $\operatorname{Im}(i) = 1$. Entonces, de

$$z_n = \frac{ni}{n+2i} = \frac{2n}{n^2+4} + i\,\frac{n^2}{n^2+4},$$

se observa que $\operatorname{Re}(z_n) = 2n/(n^2 + 4) \to 0$ e $\operatorname{Im}(z_n) = n^2/(n^2 + 4) \to 1$ cuando $n \to \infty$. ≡

Series Una **serie infinita** de números complejos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n,$$

converge. Si $S_n \to L$ cuando $n \to \infty$ se dice que la **suma** de la serie es L.

Serie geométrica Para la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots \tag{2}$$

el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}. \tag{3}$$

Al multiplicar S_n por z y restarle este resultado a S_n se obtiene $S_n - zS_n = a - az^n$. Al despejar S_n se obtiene

$$S_n = \frac{a(1 - z^n)}{1 - z}. \tag{4}$$

Como $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, siempre y cuando $|z| < 1$ se concluye de (4) que (2) converge a

$$\frac{a}{1 - z}$$

para $|z| < 1$; la serie diverge cuando $|z| \geq 1$. La serie geométrica especial

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{5}$$

y

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \tag{6}$$

válida para $|z| < 1$, es de utilidad particular en las siguientes dos secciones. Asimismo, en las demostraciones de los dos principales teoremas de este capítulo se utiliza

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} \tag{7}$$

o, en su forma alternativa,

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1 - z} \tag{8}$$

en las demostraciones de los dos principales teoremas de este capítulo.

EJEMPLO 3 Serie geométrica convergente

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{5^k} = \frac{1 + 2i}{5} + \frac{(1 + 2i)^2}{5^2} + \frac{(1 + 2i)^3}{5^3} + \cdots$$

es una serie geométrica con $a = (1 + 2i)/5$ y $z = (1 + 2i)/5$. Como $|z| = \sqrt{5}/5 < 1$, la serie converge y entonces se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{5^k} = \frac{\dfrac{1 + 2i}{5}}{1 - \dfrac{1 + 2i}{5}} = \frac{i}{2}.$$

≡

Teorema 17.1.2 **Condición necesaria para la convergencia**

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Una forma equivalente del teorema 17.1.2 es la conocida prueba del n-ésimo término para la divergencia de una serie infinita.

Teorema 17.1.3 La prueba del n-ésimo término para la divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (k + 5i)/k$ diverge puesto que $z_n = (n + 5i)/n \to 1$ cuando $n \to \infty$. La serie geométrica (2) diverge cuando $|z| \geq 1$, ya que, $\lim_{n\to\infty} |z^n|$ no existe en este caso.

Definición 17.1.1 Convergencia absoluta

Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge.

EJEMPLO 4 Convergencia absoluta

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (i^k/k^2)$ es absolutamente convergente puesto que $|i^k/k^2| = 1/k^2$ y la serie real $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ converge. De los cursos de cálculo recuerde que una serie real de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^p)$ se denomina una serie p, la cual converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$. ≡

Al igual que en cálculo real,

La convergencia absoluta implica convergencia.

Así, en el ejemplo 4, la serie absolutamente convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2} = i - \frac{1}{2^2} - \frac{i}{3^2} + \cdots$$

converge.

Las dos pruebas siguientes son las versiones complejas de las pruebas de la razón y de raíz encontradas en cálculo:

Teorema 17.1.4 Prueba de la razón

Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos no nulos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L. \tag{9}$$

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.
ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Teorema 17.1.5 Prueba de raíz

Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.
ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.
iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Fundamentalmente, se tiene interés en aplicar estas pruebas a las series de potencias.

■ **Series de potencias** El concepto de series de potencias es importante en el estudio de funciones analíticas. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \tag{11}$$

donde los coeficientes a_k son constantes complejas, se denomina **series de potencias** en $z - z_0$. Se dice que la serie de potencias (11) está **centrada en z_0**, y el punto complejo z_0 se conoce como el **centro** de la serie. En (11) es conveniente también definir $(z - z_0)^0 = 1$ incluso cuando $z = z_0$.

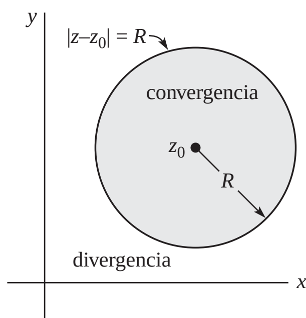


FIGURA 17.1.3 Una serie de potencias converge en todos los puntos dentro del círculo de convergencia

■ **Círculo de convergencia** Todas las series de potencias complejas tienen **radio de convergencia** R. En forma análoga al concepto de *intervalo* de convergencia en cálculo real, cuando $0 < R < \infty$, una serie de potencias compleja (11) tiene un **círculo de convergencia** definido por $|z - z_0| = R$. La serie de potencias converge absolutamente para todos los z que satisfagan $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$. Véase la **FIGURA 17.1.3**. El radio de convergencia R puede ser:

i) cero (en cuyo caso (11) converge únicamente en $z = z_0$),
ii) un número finito (en cuyo caso (11) converge en todos los puntos interiores del círculo $|z - z_0| = R$), o
iii) ∞ (en cuyo caso (11) converge para cualquier z).

Una serie de potencias puede converger en algunos, todos o ninguno de los puntos *del* círculo de convergencia.

EJEMPLO 5 Círculo de convergencia

Considérese la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} (z^{k+1}/k)$. Por medio de la prueba de la razón (9),

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{z^{n+2}}{n+1}}{\dfrac{z^{n+1}}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|z| = |z|.$$

Así pues, la serie converge absolutamente para $|z| < 1$. El círculo de convergencia es $|z| = 1$ y el radio de convergencia es $R = 1$. Obsérvese que en el círculo de convergencia, la serie no converge absolutamente, puesto que la serie de valores absolutos es la muy conocida serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que esto no significa que la serie diverja en el círculo de convergencia. De hecho, en $z = -1$, $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^{k+1}/k)$ es la serie armónica alternante convergente, y puede demostrarse que la serie converge en todos los puntos sobre la circunferencia $|z| = 1$ excepto en $z = 1$. ≡

Debería ser claro a partir del teorema 17.1.4 y del ejemplo 5 que para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, el límite (9) depende únicamente de los coeficientes a_k. Así, si

i) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \neq 0$, el radio de convergencia es $R = 1/L$;

ii) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, el radio de convergencia es ∞;

iii) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, el radio de convergencia es $R = 0$.

Pueden realizarse observaciones similares para la prueba de raíz (10) utilizando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

EJEMPLO 6 Radio de convergencia

Considérese la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(z - 1 - i)^k}{k!}$. Al identificar $a_n = (-1)^{n+1}/n!$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Así, el radio de convergencia es ∞; la serie de potencias con centro $1 + i$ converge completamente para todas las z. ≡

EJEMPLO 7 Radio de convergencia

Considérese la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k(z-2i)^k$. Con $a_n = \left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$, la prueba de raíz en la forma

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{2n+5} = 3$$

muestra que el radio de convergencia de la serie es $R = \frac{1}{3}$. El círculo de convergencia es $|z-2i| = \frac{1}{3}$; la serie converge absolutamente para $|z-2i| < \frac{1}{3}$. ≡

17.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 4, escriba los primeros cinco términos de la sucesión indicada.

1. $\{5i^n\}$

2. $\{2 + (-i)^n\}$

3. $\{1 + e^{n\pi i}\}$

4. $\{(1+i)^n\}$ [*Sugerencia:* Escríbalos en forma polar.]

En los problemas del 5 al 10, determine si la sucesión indicada converge o diverge.

5. $\left\{\frac{3ni+2}{n+ni}\right\}$

6. $\left\{\frac{ni+2^n}{3ni+5^n}\right\}$

7. $\left\{\frac{(ni+2)^2}{n^2 i}\right\}$

8. $\left\{\frac{n(1+i^n)}{n+1}\right\}$

9. $\left\{\frac{n+i^n}{\sqrt{n}}\right\}$

10. $\{e^{1/n} + 2(\tan^{-1}n)i\}$

En los problemas 11 y 12, demuestre que la sucesión indicada $\{z_n\}$ converge a un número complejo L calculando $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}(z_n)$ y $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}(z_n)$.

11. $\left\{\frac{4n+3ni}{2n+i}\right\}$

12. $\left\{\left(\frac{1+i}{4}\right)^n\right\}$

En los problemas 13 y 14, utilice la sucesión de sumas parciales para mostrar que la serie indicada es convergente.

13. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+2i} - \frac{1}{k+1+2i}\right]$

14. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i}{k(k+1)}$

En los problemas del 15 al 20, determine si la serie geométrica indicada es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

15. $\sum_{k=0}^{\infty}(1-i)^k$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}4i\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k$

18. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}i^k$

19. $\sum_{k=0}^{\infty}3\left(\frac{2}{1+2i}\right)^k$

20. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{(1+i)^{k-1}}$

En los problemas del 21 al 28, encuentre el círculo y el radio de convergencia de la serie de potencias indicada.

21. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$

22. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{i}{1+i}\right)^k z^k$

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k2^k}(z-1-i)^k$

24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(3+4i)^k}(z+3i)^k$

25. $\sum_{k=0}^{\infty}(1+3i)^k(z-i)^k$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^k}$

27. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$

28. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1+2i}{2}\right)^k(z+2i)^k$

29. Demuestre que la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{k2^k}$ no es absolutamente convergente sobre su círculo de convergencia. Determine al menos un punto de dicho círculo en el que la serie de potencias converja.

30. ***a***) Demuestre que la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ converge en todos los puntos de su círculo de convergencia.

b) Demuestre que la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}kz^k$ diverge en todos los puntos de su círculo de convergencia.

17.2 Serie de Taylor

Introducción La correspondencia entre un número complejo z del interior del círculo de convergencia y el número al que converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ tiene un único valor. En este sentido, una serie de potencias *define* o *representa* una función f; para una z específica

en el interior del círculo de convergencia, el número L al que converge la serie de potencias se define como el valor de f en z, esto es, $f(z) = L$. En esta sección se presentan algunos datos importantes sobre la naturaleza de esta función f.

En la sección anterior se plantea que todas las series de potencias tienen un radio de convergencia R. A lo largo de la argumentación de esta sección se plantea que una serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ tiene un radio R de convergencia que es *positivo* o *infinito*. Los siguientes tres teoremas ofrecen algunos elementos importantes sobre la naturaleza de una serie de potencias en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, $R \neq 0$.

Teorema 17.2.1 Continuidad

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ representa una función continua f en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$.

Teorema 17.2.2 Integración término a término

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ puede integrarse término a término en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$, para cualquier contorno C, que se encuentre completamente en el interior de dicho círculo.

Teorema 17.2.3 Derivación término a término

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ puede derivarse término a término en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$.

Serie de Taylor Supóngase que una serie de potencias representa una función f para $|z - z_0| < R$, siendo $R \neq 0$; esto es,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots. \tag{1}$$

Del teorema 17.2.3 se infiere que las derivadas de f son

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots \tag{2}$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)a_k(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(z - z_0) + \cdots \tag{3}$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k - 1)(k - 2)a_k(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \cdots \tag{4}$$

etc. Cada una de las series resultantes de la derivación tiene el mismo radio de convergencia que la serie original. Asimismo, como la serie de potencias original representa una función f derivable en el interior de su círculo de convergencia, se concluye que cuando $R \neq 0$:

Una serie de potencias representa a una función analítica en el interior de su círculo de convergencia.

Existe una relación entre los coeficientes a_k y las derivadas de f. Al calcular (1), (2), (3) y (4) en $z = z_0$ se obtienen

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = 1!a_1, \quad f''(z_0) = 2!a_2 \quad \text{y} \quad f'''(z_0) = 3!a_3,$$

respectivamente. En general, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ o

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ n \geq 0. \tag{5}$$

Cuando $n = 0$, la derivada cero se interpreta como $f(z_0)$ y $0! = 1$. Al sustituir (5) en (1) se obtiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{6}$$

Esta serie se denomina la **serie de Taylor** centrada en z_0 para f. Una serie de Taylor con centro en $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \tag{7}$$

se conoce como **serie de Maclaurin**.

Se ha visto que una serie de potencias con un radio de convergencia no nulo representa una función analítica. Por otro lado, si se tiene una función f que es analítica en algún dominio D, ¿puede representarse mediante una serie de potencias de las formas (6) y (7)? Puesto que una serie de potencias converge en un dominio circular, y un dominio D no es generalmente circular, la pregunta se convierte en: ¿puede desarrollarse f en *una o más* series de potencias que sean válidas en dominios circulares todos ellos contenidos en D? La pregunta se contesta afirmativamente en el siguiente teorema.

Teorema 17.2.4 Teorema de Taylor

Sea f analítica dentro de un dominio D y sea z_0 un punto en D. Entonces f tiene la representación serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \tag{8}$$

válida para el círculo más grande C, con centro en z_0 y radio R, comprendido enteramente dentro de D.

DEMOSTRACIÓN

Sea z un punto fijo dentro del círculo C y sea s la variable de integración. El círculo C se describe entonces por $|s - z_0| = R$; véase la **FIGURA 17.2.1**. Para comenzar, se utiliza la fórmula integral de Cauchy a fin de obtener el valor de f en z:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s - z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0) - (z - z_0)}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s - z_0}\left\{\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}}\right\} ds. \end{aligned} \tag{9}$$

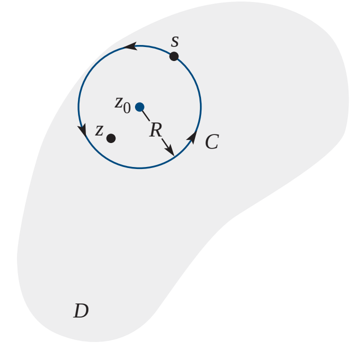


FIGURA 17.2.1 Contorno circular C utilizado en la demostración del teorema 17.2.4

Al reemplazar z por $(z - z_0)/(s - z_0)$ en (8) de la sección 17.1, se tiene

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{s - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z)(s - z_0)^{n-1}},$$

por lo que (9) resulta en

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s - z_0}\,ds + \frac{z - z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^2}\,ds + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^3}\,ds + \cdots \\ &\quad + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^n}\,ds + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\,ds. \end{aligned} \tag{10}$$

Al utilizar la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas, (10) se reescribe como

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n - 1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \end{aligned} \tag{11}$$

donde
$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\,ds.$$

La ecuación (11) se denomina fórmula de Taylor con resto R_n. Se desea mostrar a continuación que $R_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como f es analítica en D, $|f(z)|$ tiene un valor máximo M sobre el contorno C. Además, puesto que z está en el interior de C, se tiene que $|z - z_0| < R$ y, en consecuencia,

$$|s - z| = |s - z_0 - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| = R - d,$$

donde $d = |z - z_0|$ es la distancia entre z y z_0. La desigualdad ML da entonces

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds \right| \leq \frac{d^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{(R - d)R^n} \cdot 2\pi R = \frac{MR}{R - d}\left(\frac{d}{R}\right)^n.$$

Debido a que $d < R$, $(d/R)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $|R_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se deduce entonces que la serie infinita

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

converge a $f(z)$. En otras palabras, el resultado de (8) es válido para cualquier punto z interior a C. ≡

El radio de convergencia de una serie de Taylor se encuentra exactamente de la misma forma que en los ejemplos del 5 al 7 de la sección 17.1. Sin embargo, es mucho más simple observar que el radio de convergencia es la *distancia* desde el centro z_0 de la serie a la *singularidad aislada* más cercana a f. En la próxima sección se discute más a fondo este concepto; sin embargo, se puede adelantar que una singularidad aislada es un punto z_0 en el que f deja de ser analítica, pero es analítica en el resto de todos los puntos de *alguna* vecindad de z_0. Por ejemplo, $z = 5i$ es una singularidad aislada de $f(z) = 1/(z - 5i)$. Si la función f es entera, entonces el radio de convergencia de una serie de Taylor centrada en cualquier punto z_0 es necesariamente ∞. Utilizando (8) y esta última afirmación se puede decir que las representaciones de la serie de Maclaurin

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{12}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k + 1)!} \tag{13}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{14}$$

son válidas para cualquier z.

Si dos series de potencias con centro en z_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$$

representan la misma función y tienen el mismo radio de convergencia no nulo, entonces $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Dicho de otra manera, el desarrollo en serie de potencias de una función con centro en z_0 es *único*. En forma práctica, esto significa que un desarrollo de una serie de potencias para una función analítica f centrada en z_0 es el desarrollo de la serie de Taylor de la función, independientemente del método utilizado para obtenerla. Por ejemplo, (14) se obtiene derivando simplemente (13) término a término. La serie de Maclaurin para e^{z^2} se obtiene reemplazando el símbolo z de (12) por z^2.

EJEMPLO 1 Serie de Maclaurin

Encuentre el desarrollo de Maclaurin para $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^2}$.

Solución Desde luego, se puede comenzar calculando los coeficientes con (8). Sin embargo, se sabe de (5) de la sección 17.1 que para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots. \tag{15}$$

Derivando ambos lados del último resultado respecto a z se produce

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Como se está utilizando el teorema 17.2.3, el radio de convergencia de esta última serie es el mismo que el de la serie original, $R = 1$. ≡

EJEMPLO 2 Serie de Taylor

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ en una serie de Taylor de centro $z_0 = 2i$.

Solución A continuación se resuelve este problema de dos formas; se comienza utilizando (8). De las primeras derivadas,

$$f'(z) = \frac{1}{(1 - z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2 \cdot 1}{(1 - z)^3}, \quad f'''(z) = \frac{3 \cdot 2}{(1 - z)^4},$$

se concluye que $f^{(n)}(z) = n!/(1 - z)^{n+1}$ y por lo tanto $f^{(n)}(2i) = n!/(1 - 2i)^{n+1}$. Así, de (8) se obtiene la serie de Taylor

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - 2i)^{k+1}} (z - 2i)^k. \tag{16}$$

Puesto que la distancia desde el centro $z_0 = 2i$ hasta la singularidad más próxima $z = 1$ es $\sqrt{5}$, se concluye que el círculo de convergencia para la serie de potencias en (16) es $|z - 2i| = \sqrt{5}$. Esto se verifica por medio de la prueba de la razón explicada en la sección anterior.

Solución alterna En esta solución se utiliza de nuevo la serie geométrica (15). Sumando y restando $2i$ en el denominador de $1/(1 - z)$, se escribe

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - z + 2i - 2i} = \frac{1}{1 - 2i - (z - 2i)} = \frac{1}{1 - 2i} \frac{1}{1 - \dfrac{z - 2i}{1 - 2i}}.$$

Ahora se plantea $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - 2i}{1 - 2i}}$ como una serie de potencias utilizando (15) y reemplazando el símbolo z por $(z - 2i)/(1 - 2i)$:

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - 2i}\left[1 + \frac{z - 2i}{1 - 2i} + \left(\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right)^2 + \left(\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{1 - 2i} + \frac{1}{(1 - 2i)^2}(z - 2i) + \frac{1}{(1 - 2i)^3}(z - 2i)^2 + \frac{1}{(1 - 2i)^4}(z - 2i)^3 + \cdots.$$

Se deja al lector verificar que esta última serie sea exactamente la misma que (16). ≡

En (15) y (16) se representa la misma función $1/(1 - z)$ por medio de dos series de potencias diferentes. La primera serie

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

tiene cero de centro y uno de radio de convergencia. La segunda serie

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - 2i} + \frac{1}{(1 - 2i)^2}(z - 2i) + \frac{1}{(1 - 2i)^3}(z - 2i)^2 + \frac{1}{(1 - 2i)^4}(z - 2i)^3 + \cdots$$

tiene centro $2i$ y radio de convergencia $\sqrt{5}$. Los dos círculos de convergencia se ilustran en la **FIGURA 17.2.2**. El interior de la intersección de los dos círculos (parte sombreada) es la región donde *ambas* series convergen; en otras palabras, en un punto específico z^* de esta región, ambas series convergen al mismo valor $f(z^*) = 1/(1 - z^*)$. Fuera de la región sombreada, por lo menos una de las dos series debe divergir.

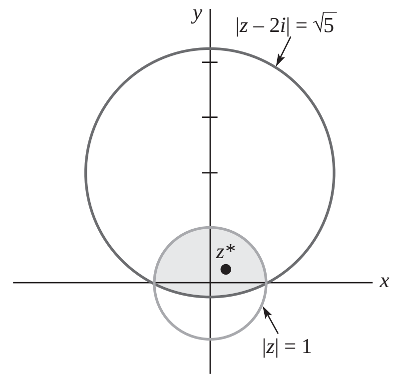


FIGURA 17.2.2 Las series (15) y (16) convergen dentro de la región sombreada

17.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 12, desarrolle la función indicada en una serie de Maclaurin. Indique cuál es el radio de convergencia de cada serie.

1. $f(z) = \dfrac{z}{1 + z}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{4 - 2z}$

3. $f(z) = \dfrac{1}{(1 + 2z)^2}$

4. $f(z) = \dfrac{z}{(1 - z)^3}$

5. $f(z) = e^{-2z}$

6. $f(z) = ze^{-z^2}$

7. $f(z) = \operatorname{senh} z$

8. $f(z) = \cosh z$

9. $f(z) = \cos \dfrac{z}{2}$

10. $f(z) = \operatorname{sen} 3z$

11. $f(z) = \operatorname{sen} z^2$

12. $f(z) = \cos^2 z$ [*Sugerencia:* Utilice una identidad trigonométrica.]

En los problemas del 13 al 22, desarrolle la función proporcionada en una serie de Taylor centrada en el punto indicado. Indique cuál es el radio de convergencia de cada serie.

13. $f(z) = 1/z,\ z_0 = 1$ **14.** $f(z) = 1/z,\ z_0 = 1 + i$

15. $f(z) = \dfrac{1}{3 - z},\ z_0 = 2i$ **16.** $f(z) = \dfrac{1}{1 + z},\ z_0 = -i$

17. $f(z) = \dfrac{z - 1}{3 - z},\ z_0 = 1$ **18.** $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z},\ z_0 = i$

19. $f(z) = \cos z,\ z_0 = \pi/4$ **20.** $f(z) = \operatorname{sen} z,\ z_0 = \pi/2$

21. $f(z) = e^z,\ z_0 = 3i$ **22.** $f(z) = (z - 1)e^{-2z},\ z_0 = 1$

En los problemas 23 y 24, utilice (7) para encontrar los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin para la función indicada.

23. $f(z) = \tan z$ **24.** $f(z) = e^{1/(1+z)}$

En los problemas 25 y 26, utilice fracciones parciales como ayuda para obtener la serie de Maclaurin para la función indicada. Indique cuál es el radio de convergencia de la serie.

25. $f(z) = \dfrac{i}{(z - i)(z - 2i)}$ **26.** $f(z) = \dfrac{z - 7}{z^2 - 2z - 3}$

En los problemas 27 y 28, determine, sin efectuar realmente el desarrollo, el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función proporcionada que está centrada en el punto indicado.

27. $f(z) = \dfrac{4 + 5z}{1 + z^2},\ z_0 = 2 + 5i$

28. $f(z) = \cot z,\ \ z_0 = \pi i$

En los problemas 29 y 30, desarrolle la función proporcionada en la serie de Taylor centrada en los puntos indicados. Señale cuál es el radio de convergencia de cada serie. Bosqueje la región en la cual ambas series convergen.

29. $f(z) = \dfrac{1}{2 + z},\ z_0 = -1,\ z_0 = i$

30. $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1 + i,\ z_0 = 3$

31. ***a***) Supóngase que la ramificación principal del logaritmo $f(z) = \operatorname{Ln} z = \log_e|z| + i \operatorname{Arg} z$ se desarrolla en una serie de Taylor con centro $z_0 = -1 + i$. Explique por qué $R = 1$ es el radio del círculo más grande centrado en $z_0 = -1 + i$, dentro del cual f es analítica.

b) Demuestre que en el interior del círculo $|z - (-1 + i)| = 1$ la serie de Taylor para f es

$$\operatorname{Ln} z = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{3\pi}{4}i - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1 + i}{2}\right)^k (z + 1 - i)^k.$$

c) Demuestre que el radio de convergencia para la serie de potencias del inciso *b*) es $R = \sqrt{2}$. Explique por qué esto no contradice el resultado del inciso *a*).

32. ***a***) Considérese que la función $f(z) = \operatorname{Ln}(1 + z)$. ¿Cuál es el radio del círculo más grande centrado en el origen dentro del cual f es analítica?

b) Desarrolle f en una serie de Maclaurin. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

c) Utilice el resultado del inciso *b*) a fin de hallar una serie de Maclaurin para $\operatorname{Ln}(1 - z)$.

d) Encuentre una serie de Maclaurin para $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right)$.

En los problemas 33 y 34, aproxime el valor de la expresión proporcionada utilizando el número indicado de términos de una serie de Maclaurin.

33. $e^{(1+i)/10}$, tres términos **34.** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1 + i}{10}\right)$, dos términos

35. En la sección 13.1 se define la función error como

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt.$$

Encuentre una serie de Maclaurin para $\operatorname{erf}(z)$.

36. Utilice la serie de Maclaurin para e^{iz} con el fin de demostrar la fórmula de Euler para una z compleja:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

17.3 Serie de Laurent

Introducción Si una función compleja f deja de ser analítica en un punto $z = z_0$, entonces se dice que este punto es una **singularidad** o un **punto singular** de la función. Por ejemplo, los números complejos $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de la función $f(z) = z/(z^2 + 4)$ ya que f es discontinua en cada uno de estos puntos. Recuérdese de la sección 15.6 que el valor principal del logaritmo, $\operatorname{Ln} z$, es analítico en todos los puntos excepto en aquellos del corte de ramificación asociado al eje x no positivo; esto es, el punto de ramificación $z = 0$, así como todos los números reales negativos son puntos singulares de $\operatorname{Ln} z$. Esta sección se concentra en un nuevo tipo de desarrollo de "serie de potencias" de f respecto a una **singularidad aislada** z_0. Esta nueva serie involucra potencias enteras negativas y no negativas de $z - z_0$.

Singularidades aisladas Supóngase que $z = z_0$ es una singularidad de una función compleja f. Se dice que el punto $z = z_0$ es una **singularidad aislada** de la función f si existe *alguna* vecindad suprimida, o disco abierto perforado, $0 < |z - z_0| < R$ de z_0 en donde f es analítica. Por ejemplo, se acaba de ver que $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de $f(z) = z/(z^2 + 4)$. Tanto $2i$ como $-2i$ son singularidades aisladas, puesto que f es analítica en todos los puntos de la vecindad definida por $|z - 2i| < 1$, excepto en $z = 2i$ y en cada punto de la vecindad definida por $|z - (-2i)| < 1$, excepto en $z = -2i$. En otras palabras, si f es analítica en la vecindad suprimida, $0 < |z - 2i| < 1$ y $0 < |z + 2i| < 1$. Por otro lado, el punto de ramifica-

ción $z = 0$ *no* es una singularidad aislada de Ln z, puesto que todas las vecindades de $z = 0$ deben contener puntos sobre el eje x negativo. Se dice que un punto singular $z = z_0$ de una función f es **no aislado** si *cualquier* vecindad de z_0 contiene por lo menos una singularidad de f diferente de z_0. Por ejemplo, el punto de ramificación $z = 0$ es una singularidad no aislada de Ln z, ya que cualquier vecindad de $z = 0$ contiene puntos sobre el eje real negativo.

Un nuevo tipo de serie Si $z = z_0$ es una singularidad de una función f, entonces ciertamente f no puede desarrollarse en una serie de potencias con z_0 como su centro. Sin embargo, respecto a una singularidad aislada $z = z_0$, es posible representar f por medio de un nuevo tipo de serie que involucra potencias enteras negativas y no negativas de $z - z_0$; esto es,

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Utilizando notación sumatoria, esta última expresión se escribe como la suma de dos series

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \tag{1}$$

Las dos series del lado derecho de (1) reciben nombres especiales. La parte con potencias negativas de $z - z_0$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

se denomina la **parte principal** de la serie (1) y converge para $|1/(z - z_0)| < r^*$ o, en forma equivalente, para $|z - z_0| > 1/r^* = r$. La parte formada por las potencias no negativas de $z - z_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

se denomina la **parte analítica** de la serie (1) y converge para $|z - z_0| < R$. Así, la suma de estas partes converge cuando z cumple con $|z - z_0| > r$ y $|z - z_0| < R$, es decir, cuando z es un punto de un dominio anular definido por $r < |z - z_0| < R$.

Sumando los enteros negativos y no negativos, (1) se escribe en forma compacta como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

El siguiente ejemplo ilustra una serie de la forma (1) cuya parte principal está formada por un número finito de términos no nulos, pero cuya parte analítica consiste en un número infinito de términos no nulos.

EJEMPLO 1 Un nuevo tipo de serie

La función $f(z) = (\text{sen } z)/z^3$ no es analítica en $z = 0$ y, por lo tanto, no puede desarrollarse en una serie de Maclaurin. Sin embargo, sen z es una función entera, y de (13) de la sección 17.2 se sabe que su serie de Maclaurin

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

converge para cualquier z. Dividiendo esta serie de potencias entre z^3 se obtiene la siguiente serie con potencias enteras negativas y no negativas de z:

$$f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots. \tag{2}$$

Esta serie converge para cualquier z excepto $z = 0$, o sea, para $0 < |z|$. ≡

Una representación en serie de una función f que tenga la forma dada en (1), por ejemplo (2), se denomina una **serie de Laurent** o un **desarrollo de Laurent** de f.

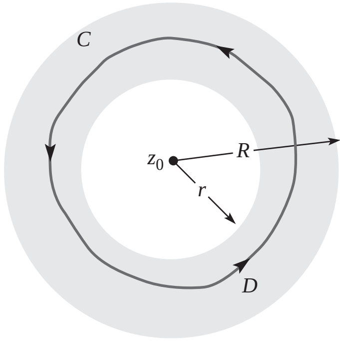


FIGURA 17.3.1 Contorno del teorema 17.3.1

Teorema 17.3.1 Teorema de Laurent

Sea f analítica dentro del dominio anular D definido por $r < |z - z_0| < R$. Entonces f tiene la representación en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{3}$$

que es válida para $r < |z - z_0| < R$. Los coeficientes a_k vienen dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{4}$$

donde C es una curva cerrada simple localizada enteramente dentro de D y que tiene a z_0 en su interior (véase la **FIGURA 17.3.1**).

DEMOSTRACIÓN

Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos de centro z_0 y radios R_1 y R_2, donde $r < r_1 < R_2 < R$. Sea z un punto fijo en D que también satisface $r_1 < |z - z_0| < R_2$; véase la **FIGURA 17.3.2**. Introduciendo un corte cruzado entre C_1 y C_2 se encuentra a partir de la fórmula integral de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\,ds. \tag{5}$$

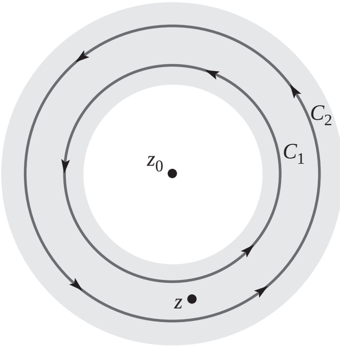


FIGURA 17.3.2 C_1 y C_2 son círculos concéntricos

Procediendo como en la demostración del teorema 17.2.4 se escribe

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \tag{6}$$

donde
$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \; k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Ahora, utilizando (5) y (8) de la sección 17.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(z - z_0) - (s - z_0)}\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z - z_0}\left\{\frac{1}{1 - \dfrac{s - z_0}{z - z_0}}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z - z_0}\left\{1 + \frac{s - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(s - z_0)^n}{(z - s)(z - z_0)^{n-1}}\right\} ds \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + R_n(z),
\end{aligned} \tag{8}$$

donde
$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-k+1}}\,ds, \; k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

y
$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^n}\oint_{C_1} \frac{f(s)(s - z_0)^n}{z - s}\,ds.$$

Ahora, sea d la distancia de z a z_0, esto es, $|z - z_0| = d$, y sea M el valor máximo de $|f(z)|$ en el contorno C_1. Como $|s - z_0| = r_1$,

$$|z - s| = |z - z_0 - (s - z_0)| \geq |z - z_0| - |s - z_0| = d - r_1.$$

La desigualdad *ML* lleva entonces a

$$|R_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i(z - z_0)^n}\oint_{C_1}\frac{f(s)(s - z_0)^n}{z - s}\,ds\right| \le \frac{1}{2\pi d^n}\cdot\frac{Mr_1^n}{d - r_1}\cdot 2\pi r_1 = \frac{Mr_1}{d - r_1}\left(\frac{r_1}{d}\right)^n.$$

Como $r_1 < d$, $(r_1/d)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $|R_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, se ha demostrado que

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s - z}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}, \tag{10}$$

donde los coeficientes a_{-k} vienen dados en (9). Al combinar (6) y (10) se observa que (5) produce

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}. \tag{11}$$

Finalmente, al sumar los enteros negativos y no negativos, (11) se escribe como $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Sin embargo, (7) y (9) se escriben como una integral simple:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(z - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

donde, a partir de (3) de la sección 16.2, se han reemplazado los contornos C_1 y C_2 por cualquier contorno cerrado simple C en D con z_0 en su interior. ≡

En el caso en que $a_{-k} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, la serie de Laurent (3) es una serie de Taylor. Debido a esto, un desarrollo de Laurent es una generalización de una serie de Taylor.

El dominio anular del teorema 17.3.1 definido por $r < |z - z_0| < R$ no necesita tener la forma de “anillo” ilustrada en la figura 17.3.2. Otros posibles dominios anulares son: *i*) $r = 0$, R finito; *ii*) $r \neq 0$, $R \to \infty$, y *iii*) $r = 0$, $R \to \infty$. En el primer caso, la serie converge en el dominio anular definido por $0 < |z - z_0| < R$, que corresponde al interior del círculo $|z - z_0| = R$, excepto el punto z_0. En el segundo caso, el dominio anular viene definido por $r < |z - z_0|$; en otras palabras, el dominio está formado por todos los puntos exteriores al círculo $|z - z_0| = r$. En el tercer caso, el dominio está definido por $0 < |z - z_0|$, lo que representa a todo el plano complejo exceptuando al punto z_0. La serie obtenida en (2) es válida para este último tipo de dominio.

En la práctica real, rara vez se utiliza la fórmula (4) para los coeficientes de una serie de Laurent. Como consecuencia, generalmente no es fácil hallar la serie de Laurent de una función en cierto dominio anular específico. A menudo se utilizan las series geométricas (5) y (6) de la sección 17.1 o, como se plantea en el ejemplo 1, otras series conocidas. Sin embargo, independientemente de la forma en que se obtiene un desarrollo de Laurent de una función *f*, aquélla es *la* serie de Laurent; esto es, la serie que se obtiene es única.

EJEMPLO 2 Desarrollos de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z - 1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para: ***a***) $0 < |z| < 1$, ***b***) $1 < |z|$, ***c***) $0 < |z - 1| < 1$ y ***d***) $1 < |z - 1|$.

Solución Los cuatro dominios anulares especificados se muestran en la **FIGURA 17.3.3**. En los incisos *a*) y *b*) se desea representar a *f* en una serie que involucre únicamente potencias enteras negativas y no negativas de *z*, mientras que en los incisos *c*) y *d*) se desea representar a *f* en una serie que contenga potencias enteras negativas y no negativas de $z - 1$.

a) Al escribir $$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - z},$$

se usa (5) de la sección 17.1:

$$f(z) = -\frac{1}{z}[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots].$$

La serie dentro de los corchetes converge para $|z| < 1$, pero una vez multiplicada por $1/z$, la serie resultante

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

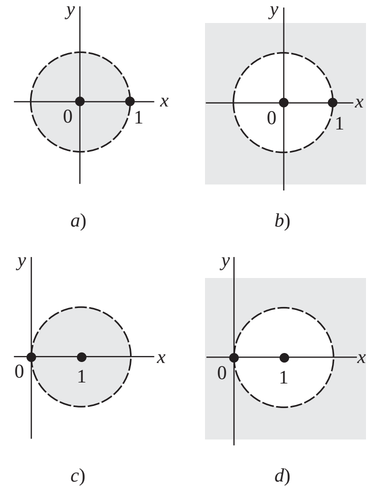


FIGURA 17.3.3 Dominios anulares para el ejemplo 2

b) Para obtener una serie que converja en $1 < |z|$ se comienza construyendo una serie que converja para $|1/z| < 1$. Con este objetivo, se reescribe la función *f* como

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

y se utiliza de nuevo (5) de la sección 17.1, reemplazando z por $1/z$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right].$$

La serie dentro de los corchetes converge para $|1/z| < 1$ o, en forma equivalente, para $1 < |z|$. Así, la serie de Laurent requerida es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots.$$

c) Aquí se tiene básicamente el mismo problema que en el inciso *a*), excepto porque se necesitan todas las potencias de $z - 1$. Para tal fin, se suma y se resta 1 en el denominador, y se aplica (6) de la sección 17.1 con z reemplazada por $z - 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1 - 1 + z)(z - 1)} \\ &= \frac{1}{z - 1}\frac{1}{1 + (z - 1)} \\ &= \frac{1}{z - 1}[1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \cdots] \\ &= \frac{1}{z - 1} - 1 + (z - 1) - (z - 1)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

La serie entre corchetes converge para $|z - 1| < 1$, por lo que esta última serie converge para $0 < |z - 1| < 1$.

d) Procediendo como en el inciso *b*) se escribe

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 1}\frac{1}{1 + (z - 1)} = \frac{1}{(z - 1)^2}\frac{1}{1 + \frac{1}{z - 1}} \\ &= \frac{1}{(z - 1)^2}\left[1 - \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{(z - 1)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{(z - 1)^3} + \frac{1}{(z - 1)^4} - \frac{1}{(z - 1)^5} + \cdots. \end{aligned}$$

Como la serie entre corchetes converge para $|1/(z - 1)| < 1$, la serie final converge para $1 < |z - 1|$. ≡

EJEMPLO 3 Desarrollos de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{(z - 1)^2(z - 3)}$ en una serie de Laurent que sea válida para: ***a***) $0 < |z - 1| < 2$ y ***b***) $0 < |z - 3| < 2$.

Solución ***a***) Al igual que en los incisos *c*) y *d*) del ejemplo 2, se requieren únicamente potencias de $z - 1$, por lo que se necesita expresar $z - 3$ en función de $z - 1$. Esto se consigue escribiendo

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2(z - 3)} &= \frac{1}{(z - 1)^2}\frac{1}{-2 + (z - 1)} \\ &= \frac{-1}{2(z - 1)^2}\frac{1}{1 - \frac{z - 1}{2}} \end{aligned}$$

y entonces al aplicar (5) de la sección 17.1 y reemplazar z por $(z - 1)/2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2(z-1)^2}\left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \cdots. \end{aligned} \tag{12}$$

b) Para obtener potencias de $z - 3$ se escribe $z - 1 = 2 + (z - 3)$ y

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{z-3}[2 + \ z - 3)]^{-2} = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{z-3}{2}\right]^{-2}.$$

En este punto se desarrolla $\left[1 + \frac{z-3}{2}\right]^{-2}$ en una serie de potencias utilizando el teorema general de los binomios:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{(-2)}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)\,(-4)}{3!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

La serie binomial es válida para $|(z - 3)/2| < 1$, o $|z - 3| < 2$. Al multiplicar esta serie por $1/4(z - 3)$ se tiene una serie de Laurent válida para $0 < |z - 3| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots.$$

≡

EJEMPLO 4 Un desarrollo de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ en una serie de Laurent que sea válida para $0 < |z| < 1$.

Solución Al aplicar (5) de la sección 17.1 se escribe

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{8z+1}{z}\frac{1}{1-z} = \left(8 + \frac{1}{z}\right)(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots).$$

Posteriormente, se multiplica la serie por $8 + 1/z$ y se agrupan los términos similares

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 + 9z + 9z^2 + \cdots.$$

La serie geométrica converge para $|z| < 1$. Tras multiplicar por $8 + 1/z$, la serie de Laurent resultante es válida para $0 < |z| < 1$. ≡

En los ejemplos anteriores, el punto en el centro del dominio anular de validez para cada serie de Laurent es una singularidad aislada de la función f. Al reexaminar el teorema 17.3.1 se ve que esto no necesita ser así.

EJEMPLO 5 Un desarrollo de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para $1 < |z - 2| < 2$.

Solución El dominio anular especificado se muestra en la **FIGURA 17.3.4**. El centro de este dominio, $z = 2$, es un punto de analiticidad de la función f. El objetivo es encontrar dos series que contengan potencias enteras de $z - 2$: una que converja en $1 < |z - 2|$ y otra en $|z - 2| < 2$. Para conseguir esto se comienza descomponiendo f en fracciones parciales:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = f_1(z) + f_2(z). \tag{13}$$

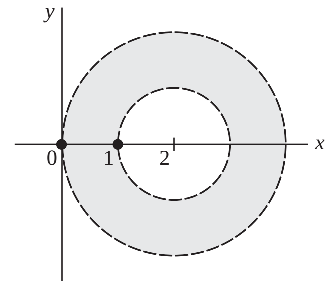


FIGURA 17.3.4 Dominio anular del ejemplo 5

A continuación,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{z} = -\frac{1}{2+z-2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-2}{2}+\frac{(z-2)^2}{2^2}-\frac{(z-2)^3}{2^3}+\cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^2}{2^3}+\frac{(z-2)^3}{2^4}-\cdots. \end{aligned}$$

Esta serie converge en $|(z-2)/2| < 1$ o en $|z-2| < 2$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} f_2(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} &= \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}} \\ &= \frac{1}{z-2}\left[1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^4}+\cdots \end{aligned}$$

converge en $|1/(z-2)| < 1$ o bien $1 < |z-2|$. Al sustituir entonces estos dos resultados en (13) se obtiene

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{(z-2)^4}+\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^2}{2^3}+\frac{(z-2)^3}{2^4}-\cdots.$$

Esta representación es válida para $1 < |z-2| < 2$. ≡

EJEMPLO 6 Un desarrollo de Laurent

Desarrolle $f(z) = e^{3/z}$ en una serie de Laurent que sea válida para $0 < |z|$.

Solución A partir de (12) de la sección 17.2 se sabe que para cualquier z finita,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots. \tag{14}$$

Al reemplazar z en (14) por $3/z$, con $z \neq 0$, se obtiene la serie de Laurent

$$e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots.$$

Esta serie es válida para $0 < |z|$. ≡

Comentarios

En conclusión, se hace hincapié en un resultado que es de particular importancia para las secciones 17.5 y 17.6. Al reemplazar la variable compleja s por el símbolo típico z, se observa que cuando $k = -1$ se tiene de la expresión (4) para los coeficientes de Laurent que

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

o, más importante, la integral puede escribirse como

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{15}$$

17.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

En los problemas del 1 al 6, desarrolle la función indicada en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

1. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $0 < |z|$

2. $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$, $0 < |z|$

3. $f(z) = e^{-1/z^2}$, $0 < |z|$

4. $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{z^2}$, $0 < |z|$

5. $f(z) = \dfrac{e^z}{z - 1}$, $0 < |z - 1|$

6. $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$, $0 < |z|$

En los problemas del 7 al 12, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{1}{z(z - 3)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

7. $0 < |z| < 3$ **8.** $|z| > 3$

9. $0 < |z - 3| < 3$ **10.** $|z - 3| > 3$

11. $1 < |z - 4| < 4$ **12.** $1 < |z + 1| < 4$

En los problemas del 13 al 16, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{1}{(z - 1)(z - 2)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

13. $1 < |z| < 2$ **14.** $|z| > 2$

15. $0 < |z - 1| < 1$ **16.** $0 < |z - 2| < 1$

En los problemas del 17 al 20, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{z}{(z + 1)(z - 2)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

17. $0 < |z + 1| < 3$ **18.** $|z + 1| > 3$

19. $1 < |z| < 2$ **20.** $0 < |z - 2| < 3$

En los problemas 21 y 22, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - z)^2}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

21. $0 < |z| < 1$ **22.** $|z| > 1$

En los problemas 23 y 24, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{1}{(z - 2)(z - 1)^3}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

23. $0 < |z - 2| < 1$ **24.** $0 < |z - 1| < 1$

En los problemas 25 y 26, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{7z - 3}{z(z - 1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

25. $0 < |z| < 1$ **26.** $0 < |z - 1| < 1$

En los problemas 27 y 28, desarrolle la función $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

27. $1 < |z - 1|$ **28.** $0 < |z - 2|$

17.4 Ceros y polos

Introducción Supóngase que $z = z_0$ es una singularidad aislada de una función f y que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{1}$$

es la representación de f como serie de Laurent válida para el disco abierto perforado $0 < |z - z_0| < R$. La sección anterior plantea que una serie de Laurent (1) está compuesta por dos partes. La parte de la serie (1) que tiene potencias negativas de $z - z_0$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \tag{2}$$

es la **parte principal** de la serie. En la siguiente argumentación se asignan diferentes nombres a la singularidad aislada $z = z_0$ según el número de términos de la parte principal.

Clasificación de los puntos singulares aislados Un punto singular aislado $z = z_0$ de una función compleja f se clasifica dependiendo de si la parte principal (2) de su desarrollo de Laurent (1) contiene cero, un número finito o un número infinito de términos.

i) Si la parte principal es cero, esto es, *todos* los coeficientes a_{-k} de (2) son cero, entonces $z = z_0$ se denomina una **singularidad removible**.

ii) Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ se denomina un **polo**. Si, para este caso, el último coeficiente no nulo de (2) es a_{-n}, donde $n \geq 1$, se dice entonces que $z = z_0$ es un **polo de orden *n***. Si $z = z_0$ es un polo de orden 1, entonces la parte principal (2) contiene exactamente un término de coeficiente a_{-1}. A un polo de orden 1 se le conoce comúnmente como **polo simple**.

iii) Si la parte principal (2) contiene un número infinito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ se denomina **singularidad esencial**.

La siguiente tabla sintetiza la forma de la serie de Laurent para una función f cuando $z = z_0$ es uno de los tipos anteriores de singularidad aislada. Desde luego, el valor de R en dicha tabla podría ser ∞.

$z = z_0$	Serie de Laurent
Singularidad removible	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Polo en orden n	$\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Polo simple	$\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Singularidad esencial	$\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

EJEMPLO 1 Discontinuidad removible

Procediendo como en (2) de la sección 17.3, se observa de

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \tag{3}$$

que $z = 0$ es una singularidad removible de la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. ≡

Si una función f tiene una singularidad removible en el punto $z = z_0$, entonces siempre es posible encontrar una definición apropiada para el valor de $f(z_0)$ de manera que f resulte analítica en el punto. Por ejemplo, como el lado derecho de (3) es 1 en $z = 0$, tiene sentido definir $f(0) = 1$. Con esta definición, la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ del ejemplo 1 es ahora analítica en $z = 0$.

EJEMPLO 2 Polos y singularidad esencial

a) Desde

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \overset{\substack{\text{parte principal} \\ \downarrow}}{\frac{1}{z}} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots,$$

para $0 < |z|$, se observa que $a_{-1} \neq 0$, por lo que $z = 0$ es un polo simple de la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^2$. La función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^3$ representada por la serie (2) de la sección 17.3 tiene un polo de orden 2 en $z = 0$.

b) En el ejemplo 3 de la sección 17.3 se muestra que el desarrollo de Laurent de $f(z) = 1/(z - 1)^2(z - 3)$, que es válida para $0 < |z - 1| < 2$, es

$$f(z) = \overbrace{-\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}}^{\text{parte principal}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots.$$

Como $a_{-2} \neq 0$ se concluye que $z = 1$ es un polo de orden 2.

c) Se observa de la serie de Laurent del ejemplo 6 de la sección 17.3 que la parte principal de la función $f(z) = e^{3/z}$ contiene un número infinito de términos. Así, $z = 0$ es una singularidad esencial.

En el inciso *b*) del ejemplo 2 de la sección 17.3, se muestra que la representación como serie de Laurent de $f(z) = 1/z(z - 1)$, que es válida para $1 < |z|$, es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots.$$

El punto $z = 0$ es una singularidad aislada de f y la serie de Laurent contiene un número infinito de términos con potencias enteras negativas de z. ¿Significa esto que $z = 0$ es una singularidad esencial de f? La respuesta es no. Para esta función en particular, se observa de la revisión de (1) que la serie de Laurent en la que estamos interesados es la que tiene un dominio anular $0 < |z| < 1$. Del inciso *a*) del mismo ejemplo se tiene que

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

es válida para $0 < |z| < 1$. De esta manera se ve que $z = 0$ es un polo simple.

Ceros Recuérdese que z_0 es un **cero** de una función f si $f(z_0) = 0$. Una función analítica f tienen un **cero de orden *n*** en $z = z_0$ si

$$f(z_0) = 0,\ \ f'(z_0) = 0,\ \ f''(z_0) = 0,\ \ \ldots,\ \ f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ \ \text{pero}\ \ f^{(n)}(z_0) \neq 0. \tag{4}$$

Por ejemplo, para $f(z) = (z - 5)^3$ se observa que $f(5) = 0, f'(5) = 0, f''(5) = 0$, pero $f'''(5) = 6$. Por ello, $z = 5$ es un cero de orden 3. Si una función analítica f tiene un cero de orden n en $z = z_0$, se concluye de (4) que el desarrollo de f como serie de Taylor centrada en z_0 debe tener la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots], \end{aligned}$$

donde $a_n \neq 0$.

EJEMPLO 3 Orden de un cero

La función analítica $f(z) = z$ sen z^2 tiene un cero en $z = 0$. Reemplazando z por z^2 en (13) de la sección 17.2 se obtiene

$$\text{sen}\, z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots$$

y entonces
$$f(z) = z\,\text{sen}\, z^2 = z^3\left[1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \cdots\right].$$

Por lo tanto, $z = 0$ es un cero de orden 3. ≡

Un cero z_0 de una función analítica no trivial f está *aislado* en el sentido de que existe alguna vecindad de z_0 para la cual $f(z) \neq 0$ en cualquier punto z de dicha vecindad, excepto en $z = z_0$. Como consecuencia, si z_0 es un cero de una función analítica no trivial f, entonces la función $1/f(z)$ tiene una singularidad aislada en el punto $z = z_0$. El siguiente resultado permite, en algunas circunstancias, determinar los polos de una función por simple inspección.

Teorema 17.4.1 Polo de orden *n*

Si las funciones f y g son analíticas en $z = z_0$ y f tiene un cero de orden n en $z = z_0$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces la función $F(z) = g(z)/f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = z_0$.

EJEMPLO 4 Orden de los polos

a) Al inspeccionar la función racional

$$F(z) = \frac{2z + 5}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)^4}$$

se observa que el denominador tiene ceros de orden 1 en $z = 1$ y $z = -5$, así como un cero de orden 4 en $z = 2$. Como el numerador no es cero en dichos puntos, se tiene del teorema 17.4.1 que F tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -5$, y un polo de orden 4 en $z = 2$.

b) En el ejemplo 3 se plantea que $z = 0$ es un cero de orden 3 de $f(z) = z$ sen z^2. Del teorema 17.4.1 se concluye que la función $F(z) = 1/(z\ \text{sen}\ z^2)$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$. ≡

De la argumentación anterior, debería ser intuitivamente claro que si una función tiene un polo en $z = z_0$, entonces $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$ desde cualquier dirección.

17.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

En los problemas 1 y 2, demuestre que $z = 0$ es una singularidad removible de la función indicada. Proporcione asimismo una definición de $f(0)$ tal que f sea analítica en $z = 0$.

1. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$ **2.** $f(z) = \dfrac{\text{sen } 4z - 4z}{z^2}$

En los problemas del 3 al 8, determine los ceros y sus órdenes para la función indicada.

3. $f(z) = (z + 2 - i)^2$ **4.** $f(z) = z^4 - 16$

5. $f(z) = z^4 + z^2$ **6.** $f(z) = z + \dfrac{9}{z}$

7. $f(z) = e^{2z} - e^z$ **8.** $f(z) = \text{sen}^2 z$

En los problemas del 9 al 12, el número proporcionado es un cero de la función indicada. Utilice una serie de Maclaurin o de Taylor para determinar el orden del cero.

9. $f(z) = z(1 - \cos z^2)$; $z = 0$

10. $f(z) = z - \text{sen } z$; $z = 0$

11. $f(z) = 1 - e^{z-1}$; $z = 1$

12. $f(z) = 1 - \pi i + z + e^z$; $z = \pi i$

En los problemas del 13 al 22, determine el orden de los polos para la función indicada.

13. $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$ **14.** $f(z) = 5 - \dfrac{6}{z^2}$

15. $f(z) = \dfrac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4}$ **16.** $f(z) = \dfrac{z - 1}{(z + 1)(z^3 + 1)}$

17. $f(z) = \tan z$ **18.** $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2}$

19. $f(z) = \dfrac{1 - \cosh z}{z^4}$ **20.** $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

21. $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$ **22.** $f(z) = \dfrac{\text{sen } z}{z^2 - z}$

23. Determine si $z = 0$ es una singularidad aislada o no aislada de $f(z) = \tan(1/z)$.

24. Demuestre que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = z^3 \text{ sen}(1/z)$.

17.5 Residuos y teorema del residuo

Introducción En la anterior sección se plantea que si la función compleja f tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0, entonces f posee una representación como serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

que converge para cualquier *z cercano a* z_0. Particularmente, dicha representación es válida en cierta vecindad de z_0, excluyendo al propio z_0, o disco abierto perforado, $0 < |z - z_0| < R$. La presente sección se centra en el coeficiente a_{-1} y en su importancia para el cálculo de integrales de contorno.

Residuo El coeficiente a_{-1} de $1/(z - z_0)$, de la serie de Laurent indicada anteriormente, se denomina **residuo** de la función f en la singularidad aislada z_0. Se utiliza entonces la notación

$$a_{-1} = \text{Res}\,(f(z), z_0)$$

para denotar el residuo de f en z_0. Es conveniente recordar que si la parte principal de la serie de Laurent que es válida para $0 < |z - z_0| < R$ contiene un número finito de términos, con a_{-n}, el último coeficiente no nulo, entonces z_0 es un polo de orden n; si la parte principal de la serie contiene un número infinito de términos con coeficientes no nulos, entonces z_0 es una singularidad esencial.

EJEMPLO 1 Residuos

a) En el ejemplo 2 de la sección 17.4 se plantea que $z = 1$ es un polo de orden 2 de la función $f(z) = 1/(z - 1)^2(z - 3)$. De la serie de Laurent indicada en dicho ejemplo se observa que el coeficiente de $1/(z - 1)$ es $a_{-1} = \text{Res}\,(f(z), 1) = -\frac{1}{4}$.

b) El ejemplo 6 de la sección 17.3 plantea que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = e^{3/z}$. De la serie de Laurent indicada en dicho ejemplo se observa que el coeficiente de $1/z$ es $a_{-1} = \text{Res}\,(f(z), 0) = 3$. ≡

Más adelante en esta sección se muestra por qué el coeficiente a_{-1} es tan importante. Mientras tanto se examinarán formas de obtener este número complejo cuando z_0 sea un *polo* de la función f sin necesidad de desarrollar f en una serie de Laurent en z_0. Se comienza con el residuo en un polo simple.

Teorema 17.5.1 Residuo en un polo simple

Si f tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}\,(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN

Como $z = z_0$ es un polo simple, el desarrollo de Laurent de f alrededor de este punto tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Al multiplicar ambos lados por $z - z_0$ y tomando entonces el límite cuando $z \to z_0$, se obtiene $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] = a_{-1} = \text{Res}\,(f(z), z_0)$. ≡

Teorema 17.5.2 Residuo en un polo de orden *n*

Si f tiene un polo de orden n en $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z). \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN

Como se considera que f tiene un polo de orden n, la expresión correspondiente para su desarrollo de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$ debe tener la forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots.$$

Al multiplicar esta última expresión por $(z - z_0)^n$:

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

y derivando entonces $n - 1$ veces:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z - z_0) + \cdots. \tag{3}$$

Como todos los términos del lado derecho que siguen al primero contienen potencias enteras positivas de $z - z_0$, el límite de (3) cuando $z \to z_0$ es

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) = (n-1)!a_{-1}.$$

Al despejar a_{-1} de esta última ecuación se obtiene (2). ≡

Obsérvese que (2) se reduce a (1) cuando $n = 1$.

EJEMPLO 2 Residuo en un polo

La función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ tiene un polo simple en $z = 3$ y un polo de orden 2 en $z = 1$. Utilice los teoremas 17.5.1 y 17.5.2 para encontrar los residuos.

Solución Como $z = 3$ es un polo simple, se utiliza (1):

$$\text{Res}\,(f(z), 3) = \lim_{z \to 3}(z - 3)\,f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z - 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ahora, en el polo de orden 2 se tiene de (2) que

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), 1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}(z - 1)^2 f(z) \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\frac{1}{z - 3} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{-1}{(z - 3)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

≡

Cuando f no es una función racional, el cálculo de los residuos por medio de (1) en algunas ocasiones puede ser tedioso. Sin embargo, es posible crear fórmulas alternativas para el residuo. En particular, supóngase que una función f se escribe como un cociente $f(z) = g(z)/h(z)$, donde g y h son analíticas en $z = z_0$. Si $g(z_0) \neq 0$ y si la función h tiene un cero de orden 1 en z_0, entonces f tiene un polo simple en $z = z_0$ y

Un método alternativo para calcular un residuo en un polo *simple*.

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{4}$$

Para ver este último resultado, se emplea (1), y el hecho de que $h(z_0) = 0$ y que el $\lim_{z \to z0}(h(z) - h(z_0))/(z - z_0)$ es una definición de la derivada $h'(z_0)$:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Para residuos en polos de orden mayor que 1, las fórmulas análogas son complicadas, razón por la que no se indican aquí.

EJEMPLO 3 Empleo de (4) para el cálculo de un residuo

El polinomio $z^4 + 1$ puede factorizarse como $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, donde z_1, z_2, z_3 y z_4 son las cuatro raíces distintas de la ecuación $z^4 + 1 = 0$. Del teorema 17.4.1 se deduce que la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

tiene cuatro polos simples. Así, de (10) de la sección 15.2 se tiene que $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$, $z_4 = e^{7\pi i/4}$. Para calcular los residuos, se utilizan (4) y la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), z_1) &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i \\ \text{Res}(f(z), z_2) &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i \\ \text{Res}(f(z), z_3) &= \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{-15\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i \\ \text{Res}(f(z), z_4) &= \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{-21\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i.\end{aligned}$$

≡

Teorema del residuo En este punto se llega a la justificación de la importancia del concepto de residuo. El siguiente teorema establece que, en ciertas circunstancias, se pueden calcular integrales complejas $\oint_C f(z)\,dz$ sumando los residuos en las singularidades aisladas de f dentro del contorno cerrado C.

Teorema 17.5.3 Teorema del residuo de Cauchy

Sea D un dominio simplemente conexo y C un contorno cerrado simple que se halla completamente dentro de D. Si una función f es analítica sobre y en el interior de C, excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del interior de C, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k). \tag{5}$$

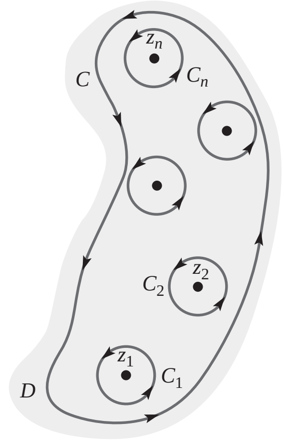


FIGURA 17.5.1 n puntos singulares en el interior del contorno C

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son círculos centrados en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, respectivamente, y que cada círculo C_k tiene un radio r_k lo suficientemente pequeño como para que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sean mutuamente disjuntos e interiores a la curva cerrada simple C; véase la **FIGURA 17.5.1**. Hay que recordar que (15) de la sección 17.3 implica que $\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k)$, el teorema 16.2.2 lleva entonces a

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$, donde

a) el contorno C es el rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$; y ***b***) el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución ***a***) Puesto que los polos $z = 1$ y $z = 3$ yacen dentro del cuadrado, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f(z), 1) + \operatorname{Res}(f(z), 3)].$$

Estos residuos están calculados en los ejemplos 2 y 3, por lo que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

b) Como únicamente el polo $z = 1$ yace dentro del círculo $|z| = 2$, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 5 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz$, donde el contorno C es el círculo $|z - i| = 2$.

Solución Al escribir $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ se observa que el integrando tiene polos simples en $-2i$ y $2i$. Ahora, como únicamente $2i$ se halla en el interior del contorno C, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2i).$$

Pero

$$\operatorname{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{2z+6}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{6+4i}{4i} = \frac{3+2i}{2i}.$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{3+2i}{2i}\right) = \pi(3+2i). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 6 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3}\, dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución Como $z^4 + 5z^3 = z^3(z + 5)$, se ve que el integrando tiene un polo de orden 3 en $z = 0$ y un polo simple en $z = -5$. Ya que únicamente $z = 0$ se halla en el interior del contorno indicado, se tiene de (5) y (2) que

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3}\, dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)\\ &= 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{e^z}{z^3(z + 5)}\\ &= \pi i \lim_{z\to 0} \frac{(z^2 + 8z + 17)e^z}{(z + 5)^3} = \frac{17\pi}{125} i.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 7 Cálculo por el teorema del residuo

Calcule $\oint_C \tan z\; dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución El integrando $\tan z = \operatorname{sen} z/\cos z$ tiene polos simples en los puntos donde $\cos z = 0$. En la sección 15.7 se establece que los únicos ceros para $\cos z$ son los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Como sólo $-\pi/2$ y $\pi/2$ se hallan en el interior del círculo $|z| = 2$, se tiene que

$$\oint_C \tan z\, dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Ahora, de (4) con $g(z) = \operatorname{sen} z$, $h(z) = \cos z$ y $h'(z) = -\operatorname{sen} z$, se observa que

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{-\operatorname{sen}(-\pi/2)} = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{-\operatorname{sen}(\pi/2)} = -1.$$

Por lo tanto,
$$\oint_C \tan z\, dz = 2\pi i[-1 - 1] = -4\pi i.$$

≡

EJEMPLO 8 Cálculo por el teorema del residuo

Calcule $\oint_C e^{3/z}\, dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 1$.

Solución Como se ha visto, $z = 0$ es una singularidad esencial del integrando $f(z) = e^{3/z}$, por lo que ni la fórmula (1) ni la (2) son aplicables para encontrar el residuo de f en dicho punto. Sin embargo, en el ejemplo 1 se plantea que la serie de Laurent de f en $z = 0$ resulta en $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 3$. Por lo tanto, de (5) se tiene

$$\oint_C e^{3/z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = 6\pi i.$$

≡

Comentarios

En la aplicación de las fórmulas en el límite (1) y (2) para el cálculo de residuos, puede obtenerse la forma indeterminada 0/0. Aunque no se va a demostrar aquí, debe resaltarse que la **regla de L'Hôpital** es válida en el análisis complejo. Si $f(z) = g(z)/h(z)$, donde g y h son analíticas en $z = z_0$, $g(z_0) = 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}.$$

17.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

En los problemas del 1 al 6, utilice una serie de Laurent para encontrar el residuo indicado.

1. $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; Res $(f(z), 1)$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)^3}$; Res $(f(z), 0)$

3. $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; Res $(f(z), 0)$

4. $f(z) = (z+3)^2 \operatorname{sen} \dfrac{2}{z+3}$; Res $(f(z), -3)$

5. $f(z) = e^{-2/z^2}$; Res $(f(z), 0)$

6. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-2)^2}$; Res $(f(z), 2)$

En los problemas del 7 al 16, utilice (1), (2) o (4) para encontrar el residuo en cada polo de la función proporcionada.

7. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$

8. $f(z) = \dfrac{4z+8}{2z-1}$

9. $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^3-2z^2}$

10. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

12. $f(z) = \dfrac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$

13. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$

14. $f(z) = \dfrac{e^z}{e^z-1}$

15. $f(z) = \sec z$

16. $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$

En los problemas del 17 al 20 utilice, donde sea apropiado, el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada a la largo de los contornos indicados.

17. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\,dz$

a) $|z| = \frac{1}{2}$ ***b)*** $|z| = \frac{3}{2}$ ***c)*** $|z| = 3$

18. $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}\,dz$

a) $|z| = 1$ ***b)*** $|z-2i| = 1$ ***c)*** $|z-2i| = 4$

19. $\displaystyle\oint_C z^3 e^{-1/z^2}\,dz$

a) $|z| = 5$ ***b)*** $|z+i| = 2$ ***c)*** $|z-3| = 1$

20. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z}\,dz$

a) $|z-2i| = 1$ ***b)*** $|z-2i| = 3$ ***c)*** $|z| = 5$

En los problemas del 21 al 32, utilice el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada a lo largo del contorno indicado.

21. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}\,dz$, C: $|z-3i| = 3$

22. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4}\,dz$, C: $|z-2| = \frac{3}{2}$

23. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$, C: $|z| = 2$

24. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}\,dz$, C es la elipse $16x^2 + y^2 = 4$

25. $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\,dz$, C: $|z| = 2$

26. $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz$, C: $|z| = 3$

27. $\displaystyle\oint_C \frac{\tan z}{z}\,dz$, C: $|z-1| = 2$

28. $\displaystyle\oint_C \frac{\cot \pi z}{z^2}\,dz$, C: $|z| = \frac{1}{2}$

29. $\displaystyle\oint_C \cot \pi z\,dz$, C es el rectángulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$

30. $\displaystyle\oint_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\,dz$, C es el rectángulo definido por $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$

31. $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz} + \operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}\,dz$, C: $|z-3| = 1$

32. $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)}\,dz$, C: $|z-1| = 1$

17.6 Cálculo de integrales reales

Introducción En esta sección se plantea cómo utilizar la teoría de residuos para calcular integrales *reales* como las siguientes:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx, \tag{3}$$

donde F en (1) y f en (2) y (3) son funciones racionales. Para la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en (2) y (3) se considera que los polinomios p y q no tienen factores en común.

■ **Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$** La idea básica consiste en convertir una integral de la forma (1) en una integral compleja donde el contorno C sea un círculo unitario centrado en el origen. Este contorno se parametriza por medio de $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Utilizando

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

se reemplazan $d\theta$, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$, respectivamente, por

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \tag{4}$$

La integral (1) se convierte entonces en

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right) \frac{dz}{iz},$$

donde C es $|z| = 1$.

EJEMPLO 1 Una integral trigonométrica real

Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}\, d\theta.$

Solución Al utilizar las sustituciones en (4) y simplificando posteriormente se llega a la integral de contorno

$$\frac{4}{i} \oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz.$$

Con la ayuda de la fórmula cuadrática se escribe

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{z}{(z - z_0)^2 (z - z_1)^2},$$

donde $z_0 = -2 - \sqrt{3}$ y $z_1 = -2 + \sqrt{3}$. Como únicamente z_1 se halla en el interior del círculo unitario C, se tiene que

$$\oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1).$$

Ahora, z_1 es un polo de orden 2, por lo que de (2) de la sección 17.5,

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}(z - z_1)^2 f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_0)^2}$$

$$= \lim_{z \to z_1} -\frac{z + z_0}{(z - z_0)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{4}{i} \oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

y finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

≡

■ **Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$** Cuando f es continua en $(-\infty, \infty)$ conviene recordar de cálculo que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ se define en función de dos límites particulares:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{0} f(x)\, dx + \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} f(x)\, dx. \tag{5}$$

Si existen ambos límites de (5) se dice que la integral es **convergente**; si uno o ambos límites no existen, la integral es **divergente**. En el caso de que se conozca (*a priori*) que una integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, ésta se calcula procesando un único límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Es importante notar que el límite simétrico de (6) puede existir aunque la integral impropia sea divergente. Por ejemplo, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ es divergente puesto que $\lim_{R\to\infty}\int_0^R x\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}R^2 = \infty$. Sin embargo, utilizando (6) se obtiene

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2}\right] = 0. \tag{7}$$

El límite en (6) se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral y se escribe

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

En (7) se muestra que V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$. En síntesis, cuando una integral de la forma (2) converge, su valor principal de Cauchy es el mismo que el valor de la integral. Si la integral diverge, puede tener todavía un valor principal de Cauchy.

Para calcular una integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$, donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, por medio de teoría de residuos se reemplaza x por la variable compleja z y se integra la función compleja f sobre un contorno cerrado C compuesto por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje real y por un semicírculo C_R de radio lo suficientemente grande para abarcar todos los polos de $f(z) = P(z)/Q(z)$ en el semiplano superior $\text{Re}(z) > 0$; véase la **FIGURA 17.6.1**. Por medio del teorema 17.5.3 se tiene

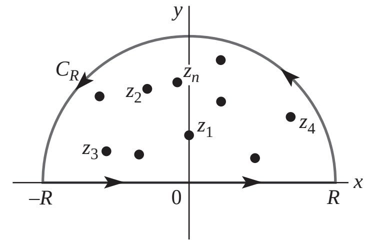


FIGURA 17.6.1 Contorno cerrado C compuesto por el semicírculo C_R y el intervalo $[-R, R]$

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f(z), z_k),$$

donde z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, denota los polos del semiplano superior. Si se demuestra que la integral $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to \infty$ se tiene entonces que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f(z), z_k). \tag{8}$$

EJEMPLO 2 V.P. de Cauchy para una integral impropia

Calcule el valor principal de Cauchy para

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$$

Solución Sea $f(z) = 1/(z^2+1)(z^2+9)$. Como

$$(z^2+1)(z^2+9) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i),$$

se plantea que C sea el contorno cerrado formado por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje x y el semicírculo C_R de radio $R > 3$. Como se observa de la **FIGURA 17.6.2**,

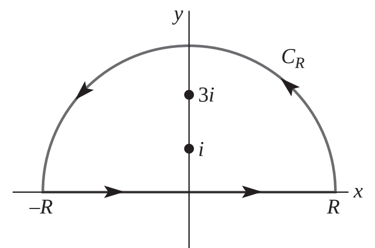


FIGURA 17.6.2 Contorno cerrado C del ejemplo 2

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx + \int_{C_R}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz$$

$$= I_1 + I_2$$

e $$I_1 + I_2 = 2\pi i[\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), 3i)].$$

En los polos simples $z = i$ y $z = 3i$ se encuentran, respectivamente,

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{1}{16i} \quad \text{y} \quad \text{Res}(f(z), 3i) = -\frac{1}{48i},$$

de forma que $$I_1 + I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right] = \frac{\pi}{12}. \tag{9}$$

Ahora se desea que $R \to \infty$ en (9). Antes de hacer esto se observa que en C_R,

$$|(z^2 + 1)(z^2 + 9)| = |z^2 + 1||z^2 + 9| \geq ||z|^2 - 1|\,||z|^2 - 9| = (R^2 - 1)(R^2 - 9),$$

por lo que de la desigualdad *ML* de la sección 16.1 se escribe

$$|I_2| = \left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)(R^2 - 9)}.$$

Este último resultado muestra que $|I_2| \to 0$ cuando $R \to \infty$, de lo cual se concluye que $\text{lím}_{R\to\infty} I_2 = 0$. De (9) se deduce que $\text{lím}_{R\to\infty} I_1 = \pi/12$; en otras palabras,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\,dx = \frac{\pi}{12} \quad \text{o} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\,dx = \frac{\pi}{12}. \qquad \equiv$$

Usualmente es tedioso tener que mostrar que la integral de contorno a lo largo de C_R tiende a cero cuando $R \to \infty$. Las siguientes son condiciones suficientes para que esto sea siempre cierto:

Teorema 17.6.1 Comportamiento de la integral cuando $R \to \infty$

Supóngase $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde el grado de $P(z)$ es n y el de $Q(z)$ es $m \geq n + 2$. Si C_R es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

En otras palabras, la integral a lo largo de C_R tiende a cero cuando $R \to \infty$ si el denominador de f es de una potencia mayor que la del numerador en por lo menos dos unidades. La demostración de esto se desarrolla de la misma forma que en el ejemplo 2. Obsérvese en dicho ejemplo que las condiciones estipuladas en el teorema 17.6.1se satisfagan, puesto que el grado de $P(z) = 1$ es 0 y el de $Q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 9)$ es 4.

EJEMPLO 3 V.P. de Cauchy para una integral impropia

Calcule el valor principal de Cauchy para $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\,dx$.

Solución Al inspeccionar el integrando se observa que se satisfacen las condiciones dadas en el teorema 17.6.1. Asimismo, del ejemplo 3 de la sección 17.5 se sabe que el semiplano superior f tiene polos simples en $z_1 = e^{\pi i/4}$ y $z_2 = e^{3\pi i/4}$. También se obtiene en dicho ejemplo que los residuos en estos polos son

$$\text{Res}\,(f(z), z_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i \qquad \text{y} \qquad \text{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,i.$$

Así, por (8),

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\,dx = 2\pi i[\text{Res}(f(z), z_1) + \text{Res}(f(z), z_2)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \qquad \equiv$$

Integrales de las formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx$

Se plantean integrales de este tipo al estudiar las transformadas de Fourier en la sección 13.4, por lo que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx$, donde $\alpha > 0$, se conocen como **integrales de Fourier**, las cuales aparecen como las partes real e imaginaria de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$. Al utilizar la fórmula de Euler $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx \tag{10}$$

siempre que ambas integrales del lado derecho converjan. Cuando $f(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ se pueden calcular las dos integrales al mismo tiempo considerando la integral $\int_C f(z)e^{i\alpha z}\,dz$, donde $\alpha > 0$ y el contorno C de nuevo está formado por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje real y por un contorno semicircular C_R de radio lo suficientemente grande como para abarcar a los polos de $f(z)$ en el semiplano superior.

Antes de proceder se indican, sin demostrar, las condiciones que son suficientes para que la integral de contorno a lo largo de C_R tienda a cero cuando $R \to \infty$:

Teorema 17.6.2 **Comportamiento de la integral cuando $R \to \infty$**
Supóngase $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde el grado de $P(z)$ es n y el de $Q(z)$ es $m \geq n + 1$. Si C_R es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\alpha > 0$, entonces $\int_{C_R} (P(z)/Q(z))e^{i\alpha z}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

EJEMPLO 4 Uso de la simetría

Calcule el valor principal de Cauchy para $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx.$

Solución Obsérvese en primer lugar que los límites de integración no son de $-\infty$ a ∞ como el método requiere. Esto se corrige observando que el integrando es una función impar de x, por lo que se puede escribir

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx. \tag{11}$$

Con $\alpha = 1$ se forma ahora la integral de contorno

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz}\, dz,$$

donde C es el mismo contorno mostrado en la figura 17.6.2. Por el teorema 17.5.3,

$$\int_{C_R} \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz}\, dz + \int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + 9} e^{ix}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i),$$

donde $f(z) = z/(z^2 + 9)$. De (4) de la sección 17.5,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i) = \left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{2}.$$

Así pues, considerando el teorema 17.6.2 se concluye que $\int_{C_R} f(z)e^{iz}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$ por lo que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 9} e^{ix}\, dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{2}\right) = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Pero por (10),

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 9} e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + 9}\, dx + i\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Al igualar las partes real e imaginaria de la línea anterior se obtiene el resultado adicional

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + 9}\, dx = 0 \quad \text{junto con} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{e^3}.$$

Finalmente, tomando en cuenta (11) se obtiene el valor de la integral prescrita:

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$ ≡

Contornos mellados Las integrales impropias de las formas (2) y (3) consideradas hasta este momento son continuas en el intervalo $(-\infty, \infty]$. En otras palabras, la función compleja $f(z) = P(z)/Q(z)$ no ha tenido polos sobre el eje real. En el caso de que f tenga polos en el eje real, se debe modificar el procedimiento empleado en los ejemplos del 2 al 4. Por ejemplo, para calcular $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ por residuos cuando $f(z)$ tiene un polo en $z = c$, donde c es un

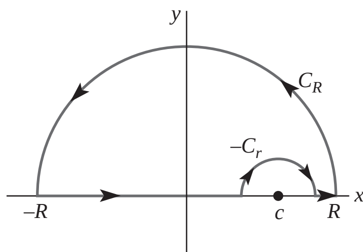


FIGURA 17.6.3 Contorno mellado

número real, se usa un **contorno mellado** tal como se ilustra en la **FIGURA 17.6.3**. El símbolo C_r denota un contorno semicircular centrado en $z = c$ y orientado en la dirección *positiva.* El siguiente teorema es importante para esta argumentación.

Teorema 17.6.3 Comportamiento de la integral cuando $r \to 0$

Supóngase que f tiene un polo simple $z = c$ sobre el eje real. Si C_r es el contorno definido por $z = c + re^{i\theta}$, donde $0 \le \theta \le \pi$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

DEMOSTRACIÓN

Como f tiene un polo simple en $z = c$, su serie de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + g(z),$$

donde $a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), c)$ y g es analítica en c. Al utilizar la serie de Laurent y la parametrización de C_r se tiene

$$\int_{C_r} f(z)\, dz = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta + ir\int_0^{\pi} g(c + re^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta = I_1 + I_2. \tag{12}$$

Primero, se observa que

$$I_1 = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = a_{-1}\int_0^{\pi} i\, d\theta = \pi i a_{-1} = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

Después, g es analítica en c y por lo tanto es continua en dicho punto y acotada en una vecindad del mismo; esto es, existe un $M > 0$ para el cual $|g(c + re^{i\theta})| \le M$. Por lo tanto,

$$|I_2| = \left| ir\int_0^{\pi} g(c + re^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta \right| \le r\int_0^{\pi} M\, d\theta = \pi r M.$$

De esta última desigualdad se deduce que $\lim_{r\to 0}|I_2| = 0$ y en consecuencia $\lim_{r\to 0} I_2 = 0$. El teorema se demuestra calculando el límite de (12) cuando $r \to 0$. ≡

EJEMPLO 5 Uso de un contorno mellado

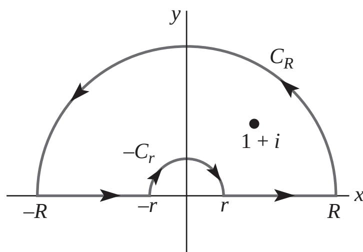


FIGURA 17.6.4 Contorno mellado de C para el ejemplo 5

Calcule el valor principal de Cauchy para $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx.$

Solución Como la integral es de la forma (3), se considera la integral de contorno $\oint_C e^{iz}\, dz/z(z^2 - 2z + 2)$. La función $f(z) = 1/z(z^2 - 2z + 2)$ tiene polos simples en $z = 0$ y en $z = 1 + i$ en el semiplano superior. El contorno C mostrado en la **FIGURA 17.6.4** está mellado en el origen. Al adoptar una notación obvia se tiene

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i), \tag{13}$$

donde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$. Al calcular los límites de (13) cuando $R \to \infty$ y cuando $r \to 0$ se encuentra a partir de los teoremas 17.6.2 y 17.6.3 que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx - \pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i).$$

Ahora,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i) = -\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i).$$

Por lo tanto,

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \pi i\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i\left(-\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i)\right).$$

Mediante $e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$, al simplificar e igualar las partes real e imaginaria, se tiene de la última igualdad que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 - 2x + 2)}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-1}(\operatorname{sen} 1 + \cos 1)$$

y

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[1 + e^{-1}(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)\right]. \qquad \equiv$$

17.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas del 1 al 10, calcule la integral trigonométrica indicada.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 0.5\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 - 6\cos\theta}\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **4.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\cos^2\theta}\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos\theta}\,d\theta$ [*Sugerencia:* Sea $t = 2\pi - \theta$.]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$ **7.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 + 4\cos\theta}\,d\theta$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3 - \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **9.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\cos\theta}\,d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 3}\,d\theta$

En los problemas del 11 al 30, calcule el valor principal de Cauchy para la integral impropia indicada.

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25}\,dx$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^3}\,dx$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)}$

19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 5}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 1}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^4 + 1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\,dx$

En los problemas 31 y 32, utilice un contorno mellado y residuos para comprobar el resultado proporcionado.

31. $\displaystyle\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$

32. $\displaystyle\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)}\,dx = \pi(1 - e^{-1})$

33. Compruebe el siguiente resultado general

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2 - 1})^3}, \quad a > 1$$

y utilícelo para verificar la solución del ejemplo 1.

34. Compruebe el siguiente resultado general

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right),\ a > b > 0$$

y utilícelo para verificar la solución del problema 7.

35. Utilice el contorno de la **FIGURA 17.6.5** para demostrar que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

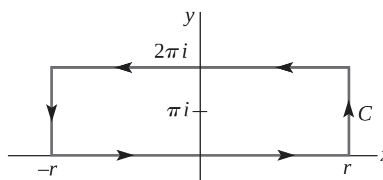


FIGURA 17.6.5 Contorno del problema 35

36. La temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa infinita está determinada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \frac{2y}{y^4 + 4}, \ y > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Utilice una transformada de Fourier y el método del residuo para demostrar que

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{senh}\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi}\operatorname{sen}\alpha y\,d\alpha.$$

11 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

Resuelva los problemas del 1 al 12 sin consultar el texto. Llene los espacios en blanco o conteste verdadero/falso.

1. Una función f es analítica en un punto z_0 si f puede desarrollarse en una serie de potencias convergente centrada en z_0. _____

2. Una serie de potencias representa una función continua en todos los puntos dentro y en su círculo de convergencia. _____

3. Para $f(z) = 1/(z - 3)$, la serie de Laurent que es válida para $|z| > 3$ es $z^{-1} + 3z^{-2} + 9z^{-3} + \cdots$. Como existe un número infinito de potencias negativas de $z = z - 0$, $z = 0$ es una singularidad esencial. _____

4. Las únicas singularidades posibles en una función racional son los polos. _____

5. La función $f(z) = e^{1/(z-1)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 1$. _____

6. La función $f(z) = z/(e^z - 1)$ tiene una singularidad removible en $z = 0$. _____

7. La función $f(z) = z(e^z - 1)$ posee un cero de orden 2 en $z = 0$. _____

8. La función $f(z) = (z + 5)/(z^3 \operatorname{sen}^2 z)$ tiene un polo de orden _____ en $z = 0$.

9. Si $f(z) = \cot \pi z$, entonces $\operatorname{Res}(f(z), 0) =$ _____.

10. La serie de Laurent para f que es válida para $0 < |z - 1|$ viene dada por

$$(z-1)^{-3} - \frac{(z-1)^{-1}}{3!} + \frac{(z-1)}{5!} - \frac{(z-1)^3}{7!} + \cdots.$$

De esta serie se observa que f tiene un polo de orden_____ en $z = 1$ y $\operatorname{Res}(f(z), 1) =$ _____.

11. El círculo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2+i)^{k+1}}$ es _____.

12. La serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ converge en $z = 2i$. _____

13. Encuentre un desarrollo de Maclaurin para $f(z) = e^z \cos z$. [*Sugerencia:* Utilice la identidad $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$.]

14. Muestre que la función $f(z) = 1/\operatorname{sen}(\pi/z)$ tiene un número infinito de puntos singulares. ¿Algunos de estos puntos singulares son puntos aislados?

En los problemas del 15 al 18, utilice resultados conocidos como ayuda para desarrollar la función proporcionada en una serie de Laurent que sea válida para la región anular indicada.

15. $f(z) = \dfrac{1 - e^{iz}}{z^4}$, $0 < |z|$

16. $f(z) = e^{z/(z-2)}$, $0 < |z - 2|$

17. $f(z) = (z - i)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{z - i}$, $0 < |z - i|$

18. $f(z) = \dfrac{1 - \cos z^2}{z^5}$, $0 < |z|$

19. Desarrolle $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 4z + 3}$ en una serie apropiada que sea válida para

a) $|z| < 1$ *b)* $1 < |z| < 3$
c) $|z| > 3$ *d)* $0 < |z - 1| < 2$.

20. Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{(z-5)^2}$ en una serie apropiada que sea válida para

a) $|z| < 5$ *b)* $|z| > 5$ *c)* $0 < |z - 5|$.

En los problemas del 21 al 30, utilice el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada sobre el contorno indicado.

21. $\displaystyle\oint_C \frac{2z + 5}{z(z+2)(z-1)^4}\,dz$, C: $|z + 2| = \frac{5}{2}$

22. $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{(z-1)^3(z^2+4)}\,dz$, C es la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$

23. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{2\operatorname{sen} z - 1}\,dz$, C: $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{3}$

24. $\displaystyle\oint_C \frac{z + 1}{\operatorname{senh} z}\,dz$, C es el rectángulo definido por $x = -1$, $x = 1$, $y = 4$, $y = -1$

25. $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4 + 2z^3 + 2z^2}\,dz$, C: $|z| = 4$

26. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^4 - 2z^2 + 4}\,dz$, C es el cuadrado definido por $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$

27. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(e^z - 1)}\,dz$, C: $|z| = 1$ [*Sugerencia:* Utilice la serie de Maclaurin para $z(e^z - 1)$.]

28. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z+1)(z-1)^{10}}\,dz$, C: $|z - 1| = 3$

29. $\displaystyle\oint_C \left[ze^{3/z} + \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)^3}\right] dz$, C: $|z| = 6$

30. $\displaystyle\oint_C \csc \pi z\,dz$, C es el rectángulo definido por $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$, $y = -1$, $y = 1$

En los problemas 31 y 32, calcule el valor principal de Cauchy para la integral impropia indicada.

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2}\,dx$, $a > 0$ [*Sugerencia:* Considere $e^{iz}/(z - ai)$.]

En los problemas 33 y 34, calcule la integral trigonométrica indicada.

33. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

34. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\,d\theta$

35. Utilice un contorno mellado para demostrar que

$$\text{V.P.} \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

36. Demuestre que $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = e^{-b^2/4a^2}\sqrt{\pi}/2a$ considerando la integral compleja $\oint_C e^{-a^2z^2} e^{ibz}\, dz$ a lo largo del contorno C mostrado en la **FIGURA 17.R.1**. Utilice el resultado conocido $\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/a$.

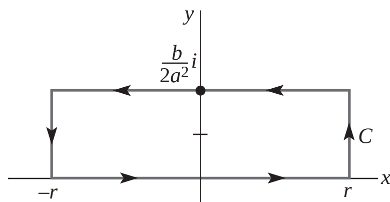


FIGURA 17.R.1 Contorno del problema 36

37. Puede mostrarse que el desarrollo de Laurent para $f(z) = e^{(u/2)(z-1/z)}$ que es válida para $0 < |z|$ es $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(u)z^k$, donde $J_k(u)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden k. Utilice (4) de la sección 17.3 y el contorno C: $|z| = 1$ para mostrar que los coeficientes $J_k(u)$ vienen dados por

$$J_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt - u \operatorname{sen} t)\, dt.$$

18 VECTORES

Estructura del capítulo

El concepto de **vector** suele abordarse en prácticamente todos los cursos de cálculo, así como en los de física e ingeniería. Para la mayoría de los lectores este capítulo representa, por lo tanto, un repaso de temas familiares como los productos escalar y vectorial. De cualquier forma, en la sección 18.6 se plantea el concepto abstracto de vector.

18.1 Vectores en el espacio 2D

Introducción En ciencias, matemáticas e ingeniería, se distinguen dos cantidades importantes: los **escalares** y los **vectores**. Un escalar es simplemente un número real o una cantidad que tiene *magnitud*. Por ejemplo, la longitud, la temperatura y la presión sanguínea se representan con números como 80 m, 20 °C y la relación sistólica/diastólica 120/80. Por su parte, un vector se describe generalmente como una cantidad que tiene tanto *magnitud* como *dirección*.

Vectores geométricos Geométricamente, un vector se representa por medio de un segmento de línea dirigido —esto es, por una flecha— y se denota con un símbolo en **negritas** o mediante un símbolo con una flecha encima, por ejemplo: $\mathbf{v}$, $\vec{u}$ o $\overrightarrow{AB}$. La **FIGURA 18.1.1** muestra ejemplos de cantidades vectoriales como el peso $\mathbf{w}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la fuerza retardante de fricción $\mathbf{F}_f$.

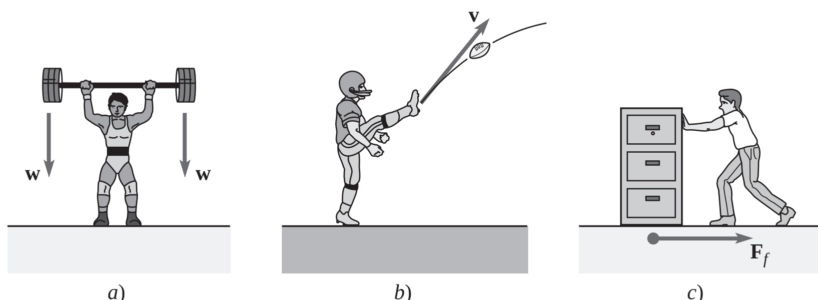


FIGURA 18.1.1 Ejemplos de cantidades vectoriales

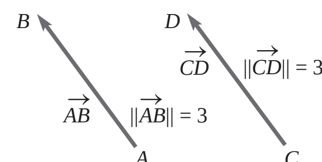


FIGURA 18.1.2 Vectores iguales

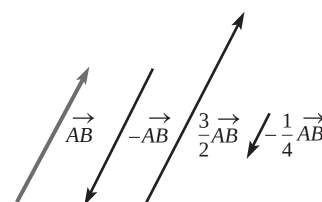


FIGURA 18.1.3 Vectores paralelos

Cuando se pregunta cuál es la dirección de **0** normalmente se responde que al vector cero se le puede asignar *cualquier* dirección. Específicamente, se necesita el **0** para poder tener un álgebra vectorial.

Notación y terminología Un vector cuyo punto inicial (u origen) es A y cuyo punto terminal (o destino) es B se escribe $\overrightarrow{AB}$. La magnitud de un vector se escribe $\|\overrightarrow{AB}\|$. Cuando dos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección se dice que son **iguales**. Así, en la **FIGURA 18.1.2**, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Los vectores son **libres**, lo cual significa que un vector puede moverse de una posición a otra siempre y cuando su magnitud y dirección no varíen. El **negativo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, denotado como $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud que $\overrightarrow{AB}$ pero posee dirección opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo escalar** de un vector, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que es $|k|$ veces más largo que $\overrightarrow{AB}$. Si $k > 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$; si $k < 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{AB}$. Cuando $k = 0$, se dice que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**. Dos vectores son **paralelos** si y sólo si, entre ellos son múltiplos escalares diferentes de cero. Véase la **FIGURA 18.1.3**.

Suma y resta Dos vectores pueden compartir un punto inicial común, como el punto A de la **FIGURA 18.1.4*a*)**. Así, si los vectores no paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados de un paralelogramo como el de la figura 18.1.4*b*), se dice que el vector que se halla en la diagonal principal, o $\overrightarrow{AD}$, es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Se escribe

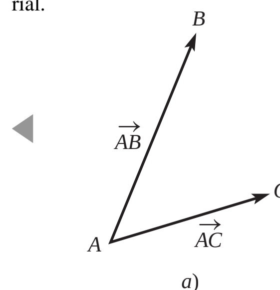
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

La **diferencia** entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define como

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}).$$

Como se ve en la **FIGURA 18.1.5*a*)**, la resta $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ se interpreta como la diagonal principal del paralelogramo cuyos lados son $\overrightarrow{AB}$ y $-\overrightarrow{AC}$. Sin embargo, como se muestra en la figura 18.1.5*b*), también es posible interpretar la misma resta vectorial como el tercer lado del triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. En esta segunda interpretación, se observa que la resta vectorial $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ apunta hacia el punto terminal del vector *del cual* se está restando el segundo vector. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ entonces

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$



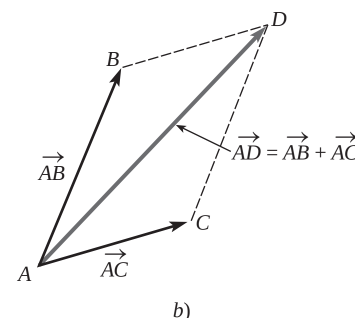


FIGURA 18.1.4 El vector $\overrightarrow{AD}$ es la suma de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

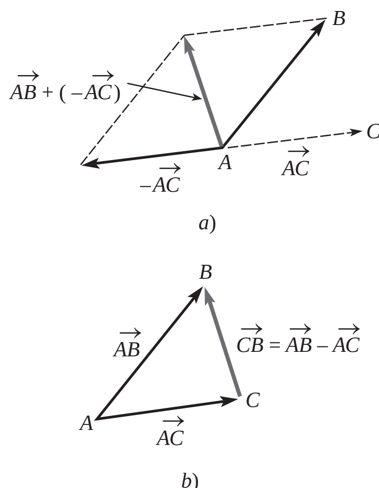


FIGURA 18.1.5 El vector $\overrightarrow{CB}$ es la resta de $\overrightarrow{AB}$ menos $\overrightarrow{AC}$

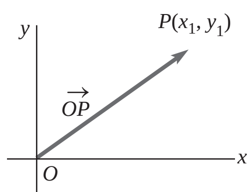


FIGURA 18.1.6 Vector de posición

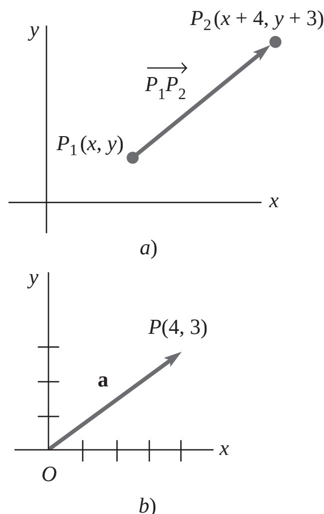


FIGURA 18.1.7 Gráficas de los vectores en el ejemplo 1

■ **Vectores en un plano coordenado** Para describir analíticamente un vector, supóngase —para el resto de esta sección— que los vectores considerados se encuentran en un **plano** coordenado bidimensional o **2D**. Al conjunto de todos los vectores en el plano se le denomina R^2. El vector mostrado en la **FIGURA 18.1.6**, con punto inicial en el origen O y punto terminal $P(x_1, y_1)$, se denomina el **vector de posición** del punto P y se escribe como

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

■ **Componentes** En general, un vector **a** en R^2 es cualquier par ordenado de números reales,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

Los números a_1 y a_2 se conocen como las **componentes** del vector **a**.

Como se mostrará en el primer ejemplo, el vector **a** no es necesariamente un vector de posición.

EJEMPLO 1 Vector de posición

El desplazamiento desde el punto inicial $P_1(x, y)$ al punto terminal $P_2(x + 4, y + 3)$ en la **FIGURA 18.1.7*a*)** es 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Como se observa en la figura 18.1.7*b*), la posición del vector de $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$ que emana desde el origen es equivalente al vector de desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2}$ de $P_1(x, y)$ a $P_2(x + 4, y + 3)$. ≡

Tanto la suma y resta de vectores, como la multiplicación de vectores por escalares, etc., se definen en función de sus componentes.

Definición 18.1.1 Suma, multiplicación escalar, igualdad

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores en R^2.

i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ (1)

ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ (2)

iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ (3)

■ **Resta** Utilizando (2), se define el **negativo** de un vector **b** como

$$-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle.$$

La **resta** o diferencia de dos vectores se define entonces como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle. \quad (4)$$

En la **FIGURA 18.1.8*a*)** se ilustra la suma de los vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la figura 18.1.8*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto terminal P_2, es la resta de los vectores de posición

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

Como se muestra en la figura 18.1.8*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse comenzando por el punto terminal de $\overrightarrow{OP_1}$ y finalizando en el punto terminal de $\overrightarrow{OP_2}$, o también como el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto terminal tiene coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Recuérdese que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales, puesto que tienen la misma magnitud y la misma dirección.

EJEMPLO 2 Suma y resta de dos vectores

Si $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 3 \rangle$, encuentre $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Solución Se utilizan (1), (2) y (4).

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 1 + (-6), 4 + 3 \rangle = \langle -5, 7 \rangle$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1 - (-6), 4 - 3 \rangle = \langle 7, 1 \rangle$$
$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 2, 8 \rangle + \langle -18, 9 \rangle = \langle -16, 17 \rangle.$$

≡

■ **Propiedades** La definición de un vector por medio de sus componentes se utiliza para verificar cada una de las siguientes **propiedades** de los vectores en R^2:

Teorema 18.1.1 Propiedades de los vectores

i)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$		← ley conmutativa
ii)	$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$		← ley asociativa
iii)	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$		← identidad aditiva
iv)	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$		← inverso aditivo
v)	$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$,	k es un escalar	
vi)	$(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$,	k_1 y k_2 son escalares	
vii)	$k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$,	k_1 y k_2 son escalares	
viii)	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$		
ix)	$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$		← vector cero

El **vector cero**, **0**, de las propiedades *iii*), *iv*) y *ix*) se define como

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle.$$

■ **Magnitud** La **magnitud**, **longitud** o **norma** de un vector **a** se denota como $\|\mathbf{a}\|$. Con base en el teorema de Pitágoras y la **FIGURA 18.1.9**, se define la magnitud de un vector

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \quad \text{como} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Claramente, $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ para cualquier vector **a**, y $\|\mathbf{a}\| = 0$ si y sólo si, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 6, -2 \rangle$, entonces $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

■ **Vectores unitarios** Un vector que tiene magnitud 1 se llama **vector unitario**. Puede obtenerse un vector unitario **u** en la misma dirección que un vector **a** distinto de cero al multiplicar **a** por el escalar positivo $k = 1/\|a\|$ (recíproco de su magnitud). En este caso podemos decir que $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$ es la **normalización** del vector **a**. La normalización del vector **a** es un vector unitario porque

$$\|\mathbf{u}\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\|\mathbf{a}\| = 1.$$

***Nota*:** A menudo es conveniente escribir el múltiplo escalar $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$ como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

EJEMPLO 3 Vectores unitarios

Dado $\mathbf{a} = \langle 2, -1 \rangle$, genere un vector unitario con la misma dirección que **a** y otro con dirección opuesta.

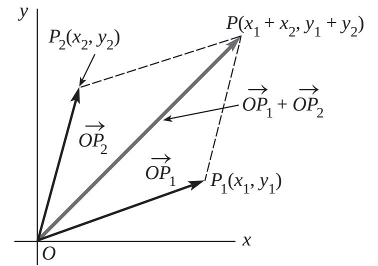
Solución La magnitud del vector **a** es $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Así, un vector unitario con la misma dirección que **a** es el múltiplo escalar

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$

Un vector unitario con la dirección opuesta a **a** es el negativo de **u**:

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle. \quad \equiv$$

Si **a** y **b** son vectores y c_1 y c_2 son escalares, entonces la expresión $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ se denomina una **combinación lineal** de **a** y **b**. Como se muestra a continuación, cualquier vector en R^2 puede escribirse como una combinación lineal de dos vectores especiales.



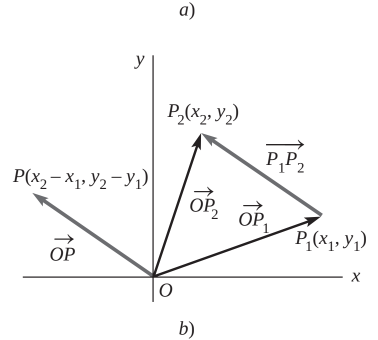


FIGURA 18.1.8 En *b*), $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{OP}$ son el mismo vector

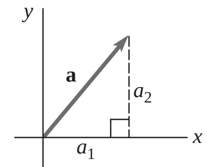


FIGURA 18.1.9 Un triángulo rectángulo

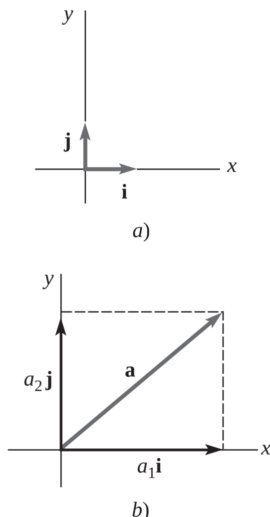


FIGURA 18.1.10 **i** y **j** forman una base para R^2

■ **Vectores i, j** Teniendo presentes (1) y (2), cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ puede escribirse como una suma:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle. \quad (5)$$

A los vectores unitarios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ usualmente se les asignan los símbolos especiales **i** y **j**. Véase la **FIGURA 18.1.10*a*)**. Así, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle,$$

entonces (5) se convierte en $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \quad (6)$$

Se dice que los vectores unitarios **i** y **j** forman una **base** para el sistema de vectores bidimensionales, puesto que cualquier vector **a** puede escribirse como una combinación lineal única de **i** y **j**. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector de posición, entonces la figura 18.1.10*b*) muestra que **a** es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$, que tienen al origen como punto inicial común y se halla sobre los ejes *x* y *y*, respectivamente. El escalar a_1 se llama la **componente horizontal** de **a**, y el escalar a_2 se denomina la **componente vertical** de **a**.

EJEMPLO 4 Operaciones vectoriales utilizando i y j

a) $\langle 4, 7 \rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
b) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
c) $\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| = \sqrt{2}$
d) $10(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$
e) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son paralelos, ya que **b** es un múltiplo escalar de **a**. Se observa que $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$. ≡

EJEMPLO 5 Gráficas de suma vectorial y de resta vectorial

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Graficar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución Las gráficas de $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ se ilustran en las **FIGURAS 18.1.11*a*)** y 18.1.11*b*), respectivamente.

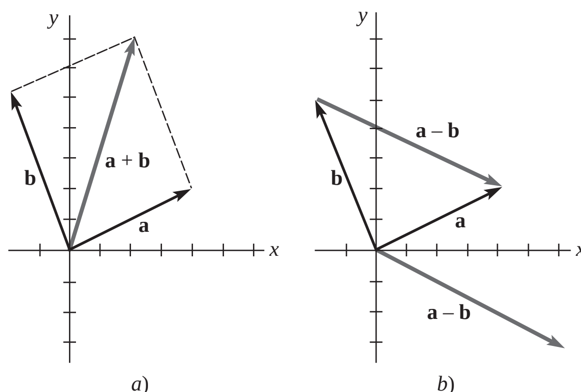


FIGURA 18.1.11 Gráficas de los vectores en el ejemplo 5

18.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-8, encuentre ***a***) 3**a**, ***b***) **a** + **b**, ***c***) **a** − **b**, ***d***) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ y ***e***) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$
3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5 \rangle$
4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j}$
5. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{j}$
6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$

7. $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$
8. $\mathbf{a} = \langle 7, 10\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 9-14, encuentre ***a*)** $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y ***b*)** $-3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

9. $\mathbf{a} = \langle 1, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1\rangle$
10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **11.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
12. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3\rangle$ **13.** $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3\rangle$
14. $\mathbf{a} = \langle 3, 1\rangle + \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 15-18, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Grafique $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su vector de posición correspondiente.

15. $P_1(3, 2)$, $P_2(5, 7)$ **16.** $P_1(-2, -1)$, $P_2(4, -5)$
17. $P_1(3, 3)$, $P_2(5, 5)$ **18.** $P_1(0, 3)$, $P_2(2, 0)$
19. Encuentre el punto terminal del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ si su punto inicial es $(-3, 10)$.
20. Encuentre el punto inicial del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -5, -1\rangle$ si su punto terminal es $\langle 4, 7\rangle$.
21. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.
***a*)** $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ ***b*)** $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$
***c*)** $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ ***d*)** $2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 3(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{12}\mathbf{j})$
***e*)** $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ ***f*)** $(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$
22. Determine un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ sean paralelos.

En los problemas 23 y 24, encuentre $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores dados.

23. $\mathbf{a} = \langle 5, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 3, 10\rangle$
24. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -2\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre un vector unitario ***a*)** con la misma dirección que **a**, y ***b*)** con dirección opuesta a **a**.

25. $\mathbf{a} = \langle 2, 2\rangle$ **26.** $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$
27. $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$ **28.** $\mathbf{a} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$

En los problemas 29 y 30, $\mathbf{a} = \langle 2, 8\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$. Encuentre un vector unitario con la misma dirección que el vector indicado.

29. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **30.** $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

En los problemas 31 y 32, encuentre un vector **b** que sea paralelo al vector dado y tenga la magnitud indicada.

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ **32.** $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\|\mathbf{b}\| = 3$
33. Encuentre un vector con dirección opuesta a $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, pero $\frac{3}{4}$ partes más largo.
34. Puesto que $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0\rangle$, encuentre un vector con la misma dirección que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, pero 5 veces más largo.

En los problemas 35 y 36, utilice la figura correspondiente para dibujar el vector indicado.

35. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **36.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$



FIGURA 18.1.12 Vectores para el problema 35

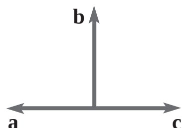


FIGURA 18.1.13 Vectores para el problema 36

En los problemas 37 y 38, exprese al vector **x** en función de los vectores **a** y **b**.

37.

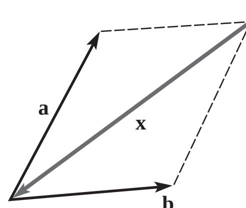


FIGURA 18.1.14 Vector **x** del problema 37

38.

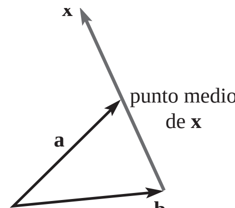


FIGURA 18.1.15 Vector **x** del problema 38

En los problemas 39 y 40, utilice la figura correspondiente para demostrar el resultado proporcionado.

39. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ **40.** $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

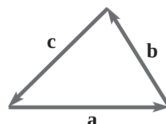


FIGURA 18.1.16 Vectores para el problema 39

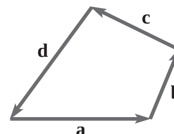


FIGURA 18.1.17 Vectores para el problema 40

En los problemas 41 y 42, exprese al vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ como una combinación lineal de los vectores **b** y **c** proporcionados.

41. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **42.** $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Se dice que un vector es tangente a una curva en un punto si es paralelo a la tangente en el punto. En los problemas 43 y 44, encuentre un vector unitario tangente a la curva proporcionada en el punto indicado.

43. $y - \frac{1}{4}x^2 + 1$, $(2, 2)$ **44.** $y = -x^2 + 3x$, $(0, 0)$
45. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza **F** formando un ángulo θ con respecto a la vertical. En la **FIGURA 18.1.18**, el vector **F** se descompone en sus componentes vectoriales $\mathbf{F}_g$, que es paralela al terreno, y $\mathbf{F}_n$, que es perpendicular al mismo. Con el propósito de que el pie no se deslice, la fuerza $\mathbf{F}_g$ debe contrarrestarse con la fuerza opuesta de fricción $\mathbf{F}_f$; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.
***a*)** Considere que $\|\mathbf{F}_f\| = \mu\|\mathbf{F}_n\|$, donde μ es el coeficiente de fricción, para mostrar que $\tan\theta = \mu$. El pie no se deslizará para ángulos menores o iguales a θ.
***b*)** Si $\mu = 0.6$ para un tacón de hule que golpea una banqueta de asfalto, encuentre el ángulo de "no deslizamiento".

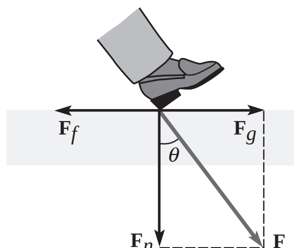


FIGURA 18.1.18 Vector **F** del problema 45

46. Un semáforo de 200 lb cuelga en equilibrio de dos cables. Como muestra la **FIGURA 18.1.19*b*)**, se considera que el peso del semáforo se representa por **w** y las fuerzas en los dos cables por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. De la figura 18.1.19*c*), se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

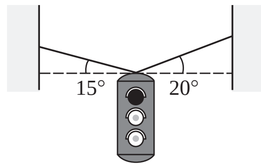
Observe el problema 39. Si

$\mathbf{w} = -200\mathbf{j}$

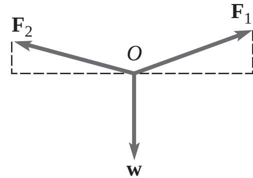
$\mathbf{F}_1 = (\|\mathbf{F}_1\| \cos 20°)\mathbf{i} + (\|\mathbf{F}_1\| \text{ sen } 20°)\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_2 = -(\|\mathbf{F}_2\| \cos 15°)\mathbf{i} + (\|\mathbf{F}_2\| \text{ sen } 15°)\mathbf{j}$,

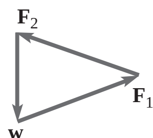
utilice (7) para determinar las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia*: Vuelva a leer el inciso *iii*) de la definición 18.1.1.]



a)



b)



c)

FIGURA 18.1.19 Tres vectores de fuerza del problema 46

47. Una carga eléctrica Q se distribuye uniformemente a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = a$. Véase la **FIGURA 18.1.20**. La fuerza total ejercida sobre la carga q en el eje x debida a la carga Q es $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ donde

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{L\, dy}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}$$

y

$$F_y = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{y\, dy}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Determine $\mathbf{F}$.

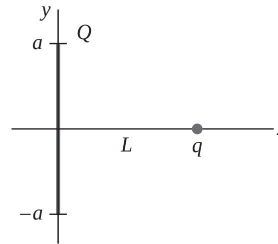


FIGURA 18.1.20 Carga sobre el eje x del problema 47

48. Utilizando vectores, muestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí. [*Sugerencia*: Suponga que M es el punto medio de una diagonal y N el punto medio de la otra.]

49. Utilizando vectores, muestre que el segmento de línea que se encuentra entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

50. Un avión sale de un aeropuerto localizado en el origen O y vuela 150 millas en la dirección 20° norte, desde el este, hacia la ciudad A. Desde A, el aeroplano vuela entonces 200 millas en la dirección 23° oeste, desde el norte, hacia la ciudad B. Desde B, el avión vuela 240 millas en la dirección 10° sur, desde el oeste, hacia la ciudad C. Exprese la ubicación de la ciudad C como un vector **r** tal como se muestra en la **FIGURA 18.1.21**. Encuentre la distancia desde O hasta C.

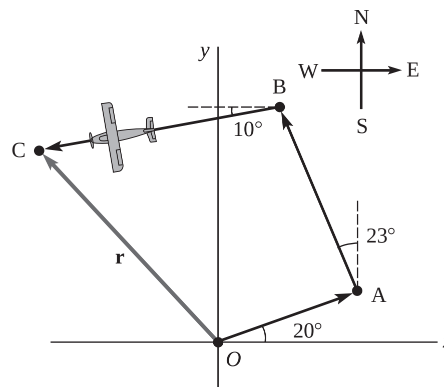


FIGURA 18.1.21 Avión del problema 50

18.2 Vectores en el espacio 3D

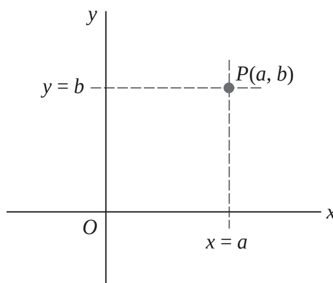


FIGURA 18.2.1 Coordenadas rectangulares en el espacio 2D

■ **Introducción** En el plano, o espacio 2D, una forma de describir la posición de un punto P es asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales, o perpendiculares, llamados los ejes y y x. Si P es el punto de intersección entre la línea $x = a$ (perpendicular al eje x) y la línea $y = b$ (perpendicular al eje y), se dice entonces que el **par ordenado** (a, b) son las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares** del punto. Véase la **FIGURA 18.2.1**. En esta sección se amplían los conceptos de coordenadas cartesianas y vectores a tres dimensiones.

■ **Sistema coordenado rectangular en el espacio 3D** En tres dimensiones, o **espacio 3D**, un sistema coordenado rectangular se construye utilizando tres ejes mutuamente ortogonales. El punto en el que estos ejes se intersecan se denomina el origen O. Estos ejes, mostrados en la **FIGURA 18.2.2*a***), se nombran de acuerdo con la llamada **regla de la mano derecha**: si los dedos de la mano derecha —apuntando en la dirección del eje x positivo— se doblan hacia

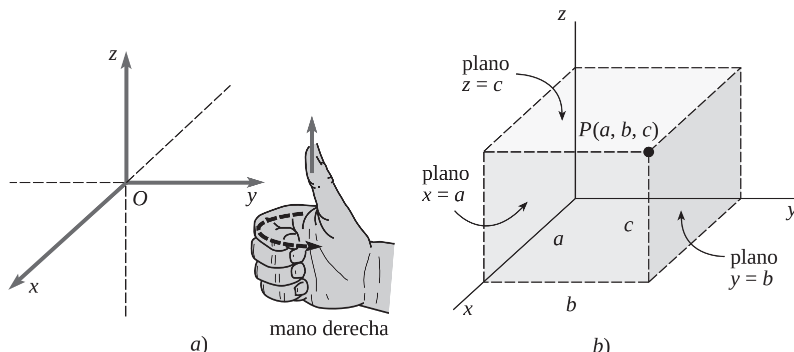


FIGURA 18.2.2 Coordenadas rectangulares en el espacio 3D

el eje y positivo, entonces el pulgar apuntará en la dirección de un nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se nombra como eje z. Las líneas punteadas de la figura 18.2.2*a*) representan al eje negativo. Ahora, si

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

son planos perpendiculares al eje x, eje y y eje z, respectivamente. Entonces, el punto P en el que estos planos se intersecan se representa por una **tripleta ordenada** de números (a, b, c) conocidos como las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares** del punto. Los números a, b y c son, a su vez, llamados las **coordenadas *x*, *y* y *z*** de $P(a, b, c)$. Véase la figura 18.2.2*b*).

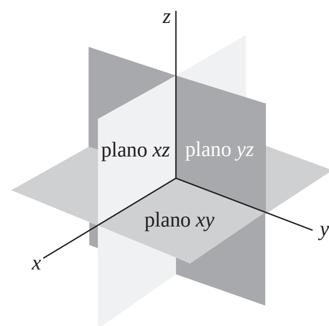


FIGURA 18.2.3 Octantes

Octantes Cada par de ejes coordenados determina un **plano coordenado**. Como se muestra en la **FIGURA 18.2.3**, los ejes x y y determinan al plano xy, los ejes x y z determinan al plano xz, etc. Los planos coordenados dividen al espacio 3D en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se denomina el **primer octante**. No existe consenso para la denominación de los otros siete octantes.

La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto, ya sea en un eje coordenado o en un plano coordenado. Como se ve en la tabla, se describe también, por ejemplo, el plano xy a través de la sencilla ecuación $z = 0$. Análogamente, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$.

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

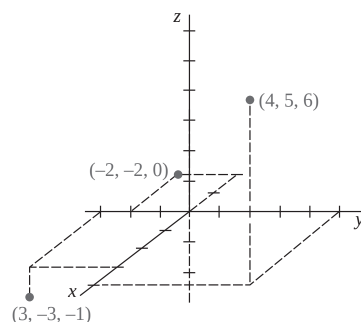


FIGURA 18.2.4 Puntos del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráficas de tres puntos

Grafique los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$ y $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos mostrados en la **FIGURA 18.2.4**, únicamente $(4, 5, 6)$ se encuentra en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ se encuentra en el plano xy. ≡

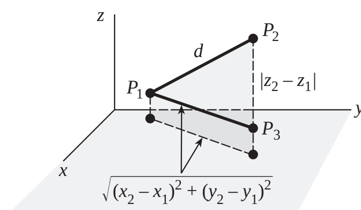


FIGURA 18.2.5 Distancia d entre dos puntos del espacio 3D

Fórmula de la distancia Para hallar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio 3D, considérese su proyección sobre el plano xy. Como se muestra en la **FIGURA 18.2.5**, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ se deduce a partir de la conocida fórmula de la distancia en el plano, y es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Si las coordenadas de P_3 son (x_2, y_2, z_1), entonces el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_2P_3$ lleva a

$$[d(P_1, P_2)]^2 = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

EJEMPLO 2 Distancia entre dos puntos

Encuentre la distancia entre $(2, -3, 6)$ y $(-1, -7, 4)$.

Solución Al seleccionar P_2 como $(2, -3, 6)$ y P_1 como $(-1, -7, 4)$, la fórmula (1) da

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$ ≡

■ **Fórmula del punto medio** La fórmula para determinar el punto medio de un segmento de línea entre dos puntos del espacio 3D se desarrolla de forma análoga a la del espacio 2D. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos, entonces las **coordenadas del punto medio** del segmento de línea que existe entre ellos son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{2}$$

EJEMPLO 3 Coordenadas de un punto medio

Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución De (2) se obtiene

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}, -5, 5\right). \qquad \equiv$$

FIGURA 18.2.6 Vector de posición

■ **Vectores en el espacio 3D** Un **vector a en el espacio 3D** es cualquier tripleta ordenada de números reales

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

donde a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector. El conjunto de todos los vectores del espacio 3D se denota por el símbolo R^3. El **vector de posición** de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio es el vector $\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto terminal es P. Véase la **FIGURA 18.2.6**.

Las definiciones por componentes de la suma, resta, multiplicación escalar, etc., son generalizaciones naturales de aquellas para vectores en R^2. Además, los vectores en R^3 poseen todas las propiedades enlistadas en el teorema 18.1.1.

Definición 18.2.1 Definiciones por componentes en el espacio 3D

Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en R^3.

i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
iv) Negativo: $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$
v) Resta: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
vi) Vector cero: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$
vii) Magnitud: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

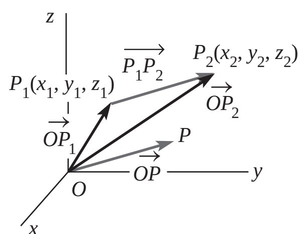


FIGURA 18.2.7 $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ son el mismo vector

Si $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ son los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle. \tag{3}$$

Al igual que en el espacio 2D, $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse tanto como un vector cuyo punto inicial es P_1 y cuyo punto terminal es P_2 o como un vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto terminal es

$$P(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Véase la **FIGURA 18.2.7**.

EJEMPLO 4 Vector entre dos puntos

Encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ si los puntos P_1 y P_2 están dados por $P_1(4, 6, -2)$ y P_2 $(1, 8, 3)$.

Solución Si los vectores de posición de los puntos son $\overrightarrow{OP_1} = \langle 4, 6, -2 \rangle$ y $\overrightarrow{OP_2} = \langle 1, 8, 3 \rangle$ entonces a partir de (3) se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle 1 - 4, 8 - 6, 3 - (-2) \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 5 Un vector unitario

Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 6\rangle$.

Solución Dado que un vector unitario tiene longitud 1, primero encontramos la magnitud de $\mathbf{a}$ y luego empleamos el hecho de que $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$. La magnitud de $\mathbf{a}$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$ es

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{7}\langle -2, 3, 6\rangle = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right\rangle \qquad \equiv$$

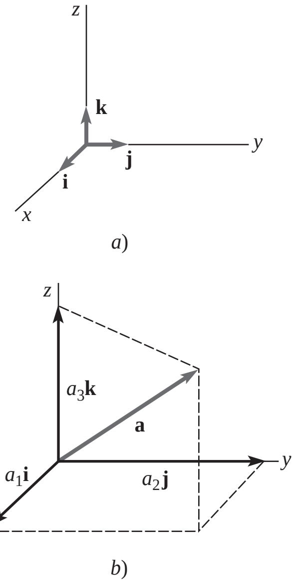


FIGURA 18.2.8 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ forman una base para R^3

■ **Los vectores i, j y k** Observamos en la sección anterior que el conjunto de dos vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ constituye una base para el sistema de vectores bidimensionales. Esto es, cualquier vector $\mathbf{a}$ en espacios 2D puede ser escrito como una combinación lineal de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. Asimismo, cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ en espacio 3D puede expresarse como una combinación lineal de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Para observar esto utilizamos *i*) y *ii*) de la definición 18.2.1 para escribir

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3\rangle &= \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle;\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ ilustrados en la **FIGURA 18.2.8*a*)** se denominan la **base estándar** para el sistema de vectores tridimensionales. En la figura 18.2.8*b*) observamos que un vector de posición $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$, los cuales se encuentran a lo largo de los ejes coordenados y tienen origen en un punto inicial común.

EJEMPLO 6 Uso de los vectores i, j, k

El vector $\mathbf{a} = \langle 7, -5, 13\rangle$ es el mismo que $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$. $\equiv$

Cuando la tercera dimensión se toma en cuenta, cualquier vector en el plano xy se describe en forma equivalente a un vector tridimensional que se halla sobre el plano coordenado $z = 0$. Aunque los vectores $\langle a_1, a_2\rangle$ y $\langle a_1, a_2, 0\rangle$ no son técnicamente iguales, se pasa por alto la diferencia. Esto es debido a que, por ejemplo, se denota $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 0, 0\rangle$ mediante el mismo símbolo $\mathbf{i}$. Pero para evitar cualquier confusión posible, en lo sucesivo los vectores se consideran siempre tridimensionales, y los símbolos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ representan únicamente $\langle 1, 0, 0\rangle$ y $\langle 0, 1, 0\rangle$, respectivamente. En forma similar, un vector en el plano xy o en el plano xz debe tener una componente nula. En el plano yz, un vector

$$\mathbf{b} = \langle 0, b_2, b_3\rangle \quad \text{se escribe} \quad \mathbf{b} = b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

En el plano xz, un vector

$$\mathbf{c} = \langle c_1, 0, c_3\rangle \quad \text{es lo mismo que} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_3\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 7 Vector en el plano *xz*

a) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ permanece en el plano xz y se puede escribir como $\mathbf{a} = \langle 5, 0, 3\rangle$.

b) $\|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}\| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ $\equiv$

EJEMPLO 8 Combinación lineal

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, encuentre $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Solución Se considera $\mathbf{b}$ un vector tridimensional por lo que se escribe, para destacarlo, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. De

$$5\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \quad \text{y} \quad 2\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$$

se tiene

$$\begin{aligned}5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \\ &= 13\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 48\mathbf{k}.\end{aligned} \qquad \equiv$$

18.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-6, grafique el punto dado. Utilice los mismos ejes coordenados.

1. (1, 1, 5) **2.** (0, 0, 4)
3. (3, 4, 0) **4.** (6, 0, 0)
5. (6, −2, 0) **6.** (5, −4, 3)

En los problemas 7-10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen las condiciones dadas.

7. $z = 5$ **8.** $x = 1$
9. $x = 2,\ y = 3$ **10.** $x = 4,\ y = -1,\ z = 7$
11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectangular cuyos lados son los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.
12. En la **FIGURA 18.2.9**, se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular cuyos lados son paralelos a los planos coordenados. Encuentre las coordenadas de los seis vértices restantes.

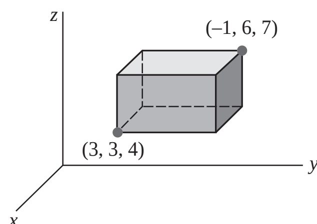


FIGURA 18.2.9 Paralelepípedo rectangular del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.
a) Si se dibujan líneas desde P que sean perpendiculares a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del punto localizado en la base de cada perpendicular?
b) Si se dibuja una línea que va de P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?
c) Encuentre el punto del plano $x = 3$ más cercano a P.
14. Determine una ecuación de un plano paralelo a un plano coordenado que contenga los pares de puntos proporcionados.
a) (3, 4, −5), (−2, 8, −5)
b) (1, −1, 1), (1, −1, −1)
c) (−2, 1, 2), (2, 4, 2)

En los problemas 15-20, describa la ubicación de los puntos $P(x, y, z)$ que satisface la ecuación o las ecuaciones dadas.

15. $xyz = 0$ **16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$
18. $(x - 2)(z - 8) = 0$
19. $z^2 - 25 = 0$ **20.** $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, encuentre la distancia entre los puntos proporcionados.

21. (3, −1, 2), (6, 4, 8) **22.** (−1, −3, 5), (0, 4, 3)
23. Encuentre la distancia desde el punto (7, −3, −4) hasta ***a)*** el plano yz y ***b)*** el eje x.
24. Encuentre la distancia desde el punto (−6, 2, −3) hasta ***a)*** el plano xz y ***b)*** el origen.

En los problemas 25-28, los tres puntos proporcionados forman un triángulo. Determine qué triángulos son isósceles y cuáles son triángulos rectángulos.

25. (0, 0, 0), (3, 6, −6), (2, 1, 2)
26. (0, 0, 0), (1, 2, 4), $(3, 2, \sqrt{2})$
27. (1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)
28. (1, 1, −1), (1, 1, 1), (0, −1, 1)

En los problemas 29 y 30, utilice la fórmula de la distancia para demostrar que los puntos proporcionados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0)$, $P_2(-2, -2, -3)$, $P_3(7, 10, 6)$
30. $P_1(2, 3, 2)$, $P_2(1, 4, 4)$, $P_3(5, 0, -4)$

En los problemas 31 y 32, encuentre la incógnita.

31. $P_1(x, 2, 3)$, $P_2(2, 1, 1)$; $d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$
32. $P_1(x, x, 1)$, $P_2(0, 3, 5)$; $d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 33 y 34, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea que une a los puntos proporcionados.

33. $(1, 3, \frac{1}{2})$, $(7, -2, \frac{5}{2})$ **34.** (0, 5, −8), (4, 1, −6)
35. Las coordenadas del punto medio del segmento de línea que une a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son (−1, −4, 8). Encuentre las coordenadas de P_1.
36. Sea P_3 el punto medio del segmento de línea entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea ***a)*** entre P_1 y P_3 y ***b)*** entre P_3 y P_2.

En los problemas 37-40, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

37. $P_1(3, 4, 5)$, $P_2(0, -2, 6)$ **38.** $P_1(-2, 4, 0)$, $P_2(6, \frac{3}{2}, 8)$
39. $P_1(0, -1, 0)$, $P_2(2, 0, 1)$ **40.** $P_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5)$, $P_2(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}, 12)$

En los problemas 41-48, $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 2, 6, 9\rangle$. Encuentre el vector o el escalar indicado.

41. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ **42.** $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$
43. $\mathbf{b} + 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{c})$ **44.** $4(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) - 6\mathbf{b}$
45. $\|\mathbf{a} + \mathbf{c}\|$ **46.** $\|\mathbf{c}\|\,\|2\mathbf{b}\|$
47. $\left\|\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right\| + 5\left\|\dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right\|$ **48.** $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$
49. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a $\mathbf{a} = \langle 10, -5, 10\rangle$.
50. Encuentre un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
51. Encuentre un vector $\mathbf{b}$ que sea 4 veces más largo que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y tenga su misma dirección.
52. Encuentre un vector $\mathbf{b}$ para el cual $\|\mathbf{b}\| = \frac{1}{2}$ y sea paralelo a $\mathbf{a} = \langle -6, 3, -2\rangle$ pero con dirección opuesta.
53. Utilizando los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se muestran en la **FIGURA 18.2.10**, dibuje el "vector promedio" $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

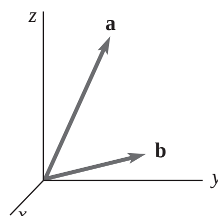


FIGURA 18.2.10 Vectores para el problema 53

18.3 Producto escalar

Introducción En esta sección y la siguiente, se consideran dos tipos de producto entre vectores, consecuencia del estudio de la mecánica y también la electricidad y el magnetismo. El primero de estos productos se conoce como **producto escalar**.

Formulación de componentes del producto escalar El producto escalar, definido a continuación, también se conoce como **producto interior**, o **producto punto**. El producto escalar de dos vectores **a** y **b** se denota por **a** · **b** y es un número real, o escalar, definido en términos de las componentes de los vectores.

Definición 18.3.1 Producto escalar de dos vectores

En espacio 2D el **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ es el número

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2. \tag{1}$$

En espacio 3D el **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es el número

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Producto escalar usando (2)

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces se deduce de (2) que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (10)(-\tfrac{1}{2}) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21.$$ ≡

EJEMPLO 2 Productos escalares de los vectores básicos

Dado que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, observamos de (2) que

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{3}$$

Similarmente, por (2)

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1. \tag{4}$$ ≡

Propiedades El producto escalar posee las siguientes propiedades.

Teorema 18.3.1 Propiedades del producto escalar

i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$ o $\mathbf{b} = 0$
ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ ← ley conmutativa
iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ ← ley distributiva
iv) $\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, k un escalar
v) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$
vi) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

DEMOSTRACIÓN

Todas las propiedades pueden demostrarse directamente de (2). Ilustramos probando los incisos *iii*) y *iv*).

Para demostrar el inciso *iii*) dejamos que $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot (\langle b_1, b_2, b_3\rangle + \langle c_1, c_2, c_3\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle\\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)\\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

← dado que la multiplicación de números reales es distributiva sobre la adición

Para demostrar el inciso *vi*) notamos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\mathbf{a}\|^2. \qquad \equiv$$

Téngase en cuenta que *vi*) del teorema 18.3.1 establece que la magnitud de un vector puede escribirse en términos del producto escalar:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

■ **Forma alternativa** El producto escalar de dos vectores también puede ser expresado en términos de las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos.

Teorema 18.3.2 **Forma alternativa del producto escalar**

El producto escalar de dos vectores **a** y **b** es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de tal manera que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Esta forma más geométrica es la que generalmente se usa como la definición del producto escalar en un curso de física.

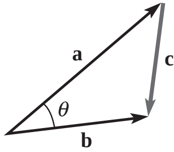


FIGURA 18.3.1 El vector **c** en la prueba del teorema 18.3.2

DEMOSTRACIÓN

Suponga que θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

es el tercer lado del triángulo indicado en la **FIGURA 18.3.1**. Por la ley de cosenos podemos escribir $\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$ o

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2). \tag{6}$$

Usando $\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad \|\mathbf{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$

y $\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$

el lado derecho de la ecuación (6) simplifica en $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Dado que ésta es la definición del producto escalar, observamos que $\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. ≡

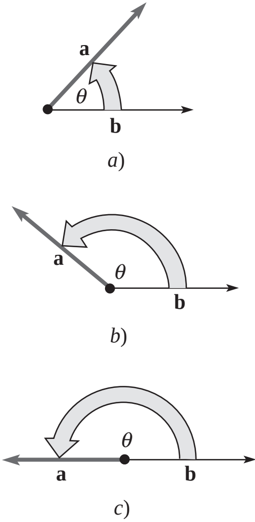


FIGURA 18.3.2 El ángulo θ en el producto escalar

La **FIGURA 18.3.2** ilustra tres casos del ángulo θ en (5). Si los vectores **a** y **b** no son paralelos, entonces θ es el *más pequeño* de los dos posibles ángulos entre ellos.

■ **Vectores ortogonales** Si **a** y **b** son vectores distintos de cero, entonces el teorema 18.3.2 implica que

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ si y sólo si θ es agudo,
ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ si y sólo si θ es obtuso, y
iii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$.

Pero en el último caso, el único número en $[0, \pi]$ para el cual $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Cuando $\theta = \pi/2$, decimos que los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**. Por lo tanto, se llega al siguiente resultado.

Teorema 18.3.3 **Criterio para vectores ortogonales**

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Dado que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = \langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 0(b_1) + 0(b_2) + 0(b_3) = 0$ para todo vector **b**, el vector cero se considera ortogonal a todo vector.

EJEMPLO 3 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

A partir del teorema 18.3.3, se concluye que **a** y **b** son ortogonales. ≡

En el ejemplo 1, de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ podemos concluir que los vectores $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ *no* son ortogonales. De (3) del ejemplo 2, vemos lo que es evidente en la figura 18.2.8, es decir, los vectores **i**, **j** y **k** constituyen un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Ángulo entre dos vectores Al igualar las dos formulaciones del producto escalar, (2) y (5), se determina el **ángulo entre dos vectores** a partir de

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}. \tag{7}$$

EJEMPLO 4 Ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución A partir de $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{27}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$, se observa de (7) que

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{42}}{9}$$

y entonces $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{42}/9) \approx 0.77$ radianes o $\theta \approx 43.9°$. ≡

Cosenos directores Para un vector no nulo $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ del espacio 3D, los ángulos α, β y γ que forma **a** con los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, respectivamente, se denominan **ángulos directores** de **a**. Véase la **FIGURA 18.3.3**. Ahora, de (7),

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{i}\|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{j}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{k}\|},$$

que se simplifican para llegar a

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}.$$

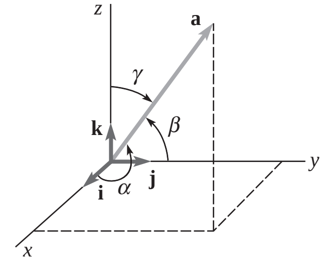


FIGURA 18.3.3 Ángulos directores α, β y γ

Se dice que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los **cosenos directores** de **a**. Los cosenos directores de un vector no nulo **a** son simplemente las componentes del vector unitario $(1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$:

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{k} = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k}.$$

Como la magnitud de $(1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$ es 1, de la anterior ecuación se tiene que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

EJEMPLO 5 Ángulos y cosenos directores

Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solución De $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, se observa que los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Los ángulos directores son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 1.27 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \alpha \approx 72.7°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.73 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \beta \approx 41.8°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.93 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \gamma \approx 53.4°.$$ ≡

Del ejemplo 5 se observa que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{45} + \frac{25}{45} + \frac{16}{45} = 1.$$

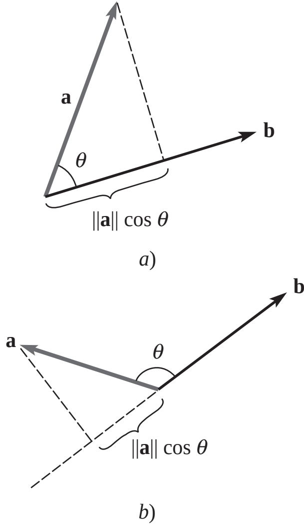


FIGURA 18.3.4 Componente de **a** sobre **b**

Componente de a sobre b La ley distributiva y (3) permiten expresar las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en términos del producto escalar:

$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

Simbólicamente, las componentes de **a** se escriben como

$$\text{comp}_\mathbf{i}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad \text{comp}_\mathbf{j}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad \text{comp}_\mathbf{k}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{9}$$

A continuación se ve que los resultados indicados en (9) se utilizan para encontrar la **componente de a sobre un vector arbitrario b**. Nótese que en cualquiera de los dos casos mostrados en la **FIGURA 18.3.4**,

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\cos\theta. \tag{10}$$

En la figura 18.3.4*b*), $\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} < 0$ ya que $\pi/2 < \theta \le \pi$. Ahora, escribiendo (10) como

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|},$$

se observa que

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\left(\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{11}$$

En otras palabras:

Para encontrar la componente de **a** *sobre un vector* **b***, se multiplica escalarmente* **a** *por un vector unitario con la dirección de* **b**.

EJEMPLO 6 Componente de un vector sobre otro vector

Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Encuentre $\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a}$ y $\text{comp}_\mathbf{a}\mathbf{b}$.

Solución Primero se genera un vector unitario con la dirección de **b**:

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}, \quad \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Entonces, a partir de (11) se tiene

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Modificando (11) consecuentemente, se tiene

$$\text{comp}_\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}\right).$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{29}, \quad \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

y $$\text{comp}_\mathbf{a}\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}.$$ ≡

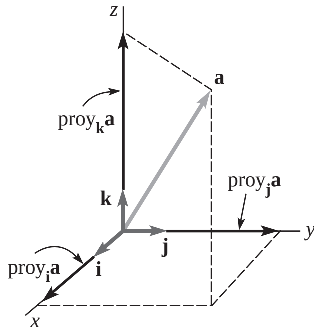


FIGURA 18.3.5 Proyecciones de **a** sobre **i**, **j** y **k**

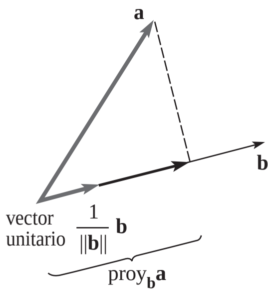


FIGURA 18.3.6 Proyección de **a** sobre **b**

Proyección de a sobre b Como se ilustra en la **FIGURA 18.3.5**, la **proyección** de un vector **a** en cualquiera de las direcciones determinadas por **i**, **j**, **k** es simplemente el *vector* resultante de multiplicar la componente de **a** en la dirección especificada por un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_\mathbf{i}\mathbf{a} = (\text{comp}_\mathbf{i}\mathbf{a})\mathbf{i} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_1\mathbf{i}$$

etc. La **FIGURA 18.3.6** muestra el caso general de la **proyección de a sobre b**:

$$\text{proy}_\mathbf{b}\mathbf{a} = (\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a})\left(\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}\right) = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b}. \tag{12}$$

EJEMPLO 7 Proyección de un vector sobre otro vector

Encuentre la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Grafique.

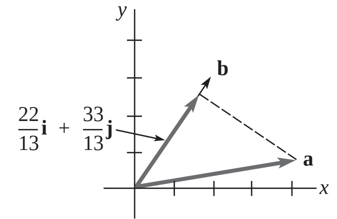


FIGURA 18.3.7 Proyección de **a** sobre **b** en el ejemplo 7

Solución En primer lugar, se calculan las componentes de **a** y **b**. Como $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{13}$, se encuentra a partir de (11) que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, de (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$

La gráfica de este vector se muestra en la **FIGURA 18.3.7**. ≡

Interpretación física del producto escalar Cuando una fuerza constante de magnitud F mueve a un objeto una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente $W = Fd$. Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ con respecto a la dirección del movimiento, entonces el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $\|\mathbf{d}\|$ que el cuerpo se mueve:

$$W = (\|\mathbf{F}\| \cos\theta)\, \|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{F}\|\, \|\mathbf{d}\| \cos\theta.$$

Véase la **FIGURA 18.3.8**. A partir del teorema 18.3.2 se concluye que si **F** causa un desplazamiento **d** de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \qquad (13)$$

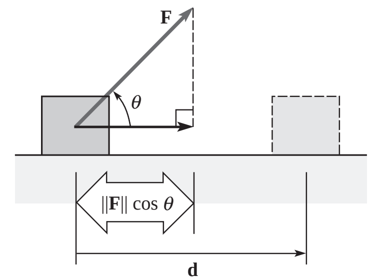


FIGURA 18.3.8 Trabajo realizado por una fuerza **F**

EJEMPLO 8 Trabajo realizado por una fuerza constante

Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ si su punto de aplicación sobre un bloque se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $\|\mathbf{F}\|$ se mide en newtons y $\|\mathbf{d}\|$ en metros.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

De (13) se tiene que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ N-m}.$$ ≡

18.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-12, $\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 5\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 3, 6, -1\rangle$. Encuentre el vector o el escalar indicado.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
5. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$
6. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
7. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
8. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$
9. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
10. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
11. $\left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$
12. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a}$

En los problemas 13 y 14, encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el menor ángulo entre **a** y **b** es el que se propone.

13. $\|\mathbf{a}\| = 10$, $\|\mathbf{b}\| = 5$, $\theta = \pi/4$
14. $\|\mathbf{a}\| = 6$, $\|\mathbf{b}\| = 12$, $\theta = \pi/6$

15. Determine qué pares de los siguientes vectores son ortogonales entre sí:
a) $\langle 2, 0, 1\rangle$ *b)* $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *d)* $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
e) $\langle 1, -1, 1\rangle$ *f)* $\langle -4, 3, 8\rangle$

16. Determine un escalar c de manera que los vectores proporcionados sean ortogonales entre sí.
a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c\rangle$

17. Encuentre un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1\rangle$ que sea ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1\rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2\rangle$.

18. Un rombo es un paralelogramo de ángulos oblicuos que tiene sus cuatro lados iguales. Utilice el producto escalar para mostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

19. Verifique que el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

es ortogonal al vector **a**.

20. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea de 45°.

En los problemas 21-24, encuentre el ángulo θ comprendido entre los vectores proporcionados.

21. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

22. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

23. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4\rangle$

24. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector proporcionado.

25. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **26.** $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

27. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3}\rangle$ **28.** $\mathbf{a} = \langle 5, 7, 2\rangle$

29. Encuentre el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ del cubo mostrado en la **FIGURA 18.3.9** y la arista AB. Determine el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ del cubo y la diagonal $\overrightarrow{AC}$.

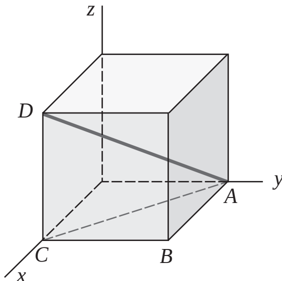


FIGURA 18.3.9 Diagonal del problema 29

30. Muestre que si los vectores no nulos **a** y **b** son ortogonales, entonces sus cosenos directores satisfacen

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

31. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 km al sur y 7 km al este de un aeropuerto. Véase la **FIGURA 18.3.10**. Encuentre los ángulos directores del avión.

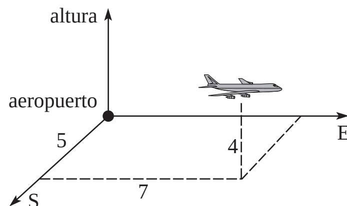


FIGURA 18.3.10 Avión del problema 31

32. Obtenga un vector unitario cuyos ángulos directores sean iguales con respecto a los tres ejes coordenados.

En los problemas 33-36, $\mathbf{a} = \langle 1, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 6, 3\rangle$. Encuentre el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ **34.** $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

35. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ **36.** $\text{comp}_{2\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los problemas 37 y 38, encuentre la componente del vector proporcionado en la dirección del origen al punto indicado.

37. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $P(3, 10)$

38. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1\rangle$, $P(1, -1, 1)$

En los problemas 39-42, encuentre la $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

39. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

40. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

41. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

42. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1\rangle$

En los problemas 43 y 44, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Encuentre el vector indicado.

43. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}\mathbf{a}$ **44.** $\text{proy}_{(\mathbf{a}-\mathbf{b})}\mathbf{b}$

45. Un trineo se jala horizontalmente sobre hielo con una cuerda atada a su parte frontal. El trineo se mueve 100 pies gracias a una fuerza de 20 libras que actúa en un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Encuentre el trabajo realizado.

46. Encuentre el trabajo realizado si el punto en el que la fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ se aplica a un objeto y éste se mueve de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Considere que $\|\mathbf{F}\|$ se mide en newtons y $\|\mathbf{d}\|$ en metros.

47. Un bloque de peso **w** se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza constante **F**, de magnitud de 30 newtons, en la dirección dada por el vector **d**. Véase la **FIGURA 18.3.11**. Considere que $\|\mathbf{d}\|$ se mide en metros.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso **w**?

b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza **F** si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

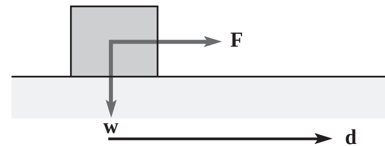


FIGURA 18.3.11 Bloque del problema 47

48. Una fuerza constante **F** de magnitud 3 lb se aplica al bloque mostrado en la **FIGURA 18.3.12**. **F** tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado en la dirección del movimiento, si el bloque se mueve desde $P_1(3, 1)$ hasta $P_2(9, 3)$. Considere que la distancia se mide en pies.

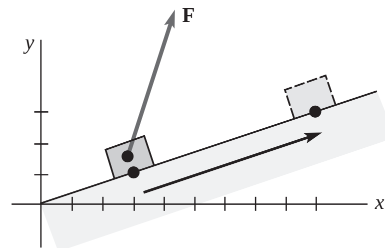


FIGURA 18.3.12 Bloque del problema 48

49. En la molécula de metano CH_4, los átomos de hidrógeno se localizan en los cuatro vértices de un tetraedro regular. Véase la **FIGURA 18.3.13**. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro de un átomo de carbono es de 1.10 angstroms (1 angstrom $= 10^{-10}$ m), y el ángulo de unión hidrógeno-carbono-hidrógeno es de $\theta = 109.5°$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, encuentre la distancia entre dos átomos de hidrógeno.

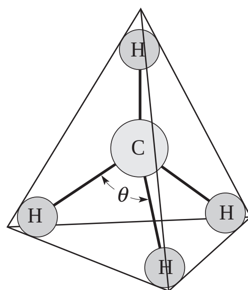


FIGURA 18.3.13 Molécula del problema

50. Utilice el producto escalar para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$.

51. Utilice el producto escalar para demostrar la desigualdad triangular $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$. [*Sugerencia*: Considere la propiedad *vi*) del producto escalar.]

52. Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la línea cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. [*Sugerencia*: Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes sobre la línea.]

53. Utilice el resultado del problema 52 y la **FIGURA 18.3.14** para mostrar que la distancia d desde un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una línea $ax + by + c = 0$ es

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

FIGURA 18.3.14 Distancia d en el problema

18.4 Producto vectorial

Introducción El producto escalar, presentado en la sección anterior, funciona tanto en los espacios de dos dimensiones como en el tridimensional y resulta en un *número*. Por otro lado, el **producto vectorial**, presentado en esta sección, sólo se define para vectores en los espacios 3D y resulta en otro *vector* en este mismo espacio.

Antes de proceder necesitamos los siguientes dos resultados de la teoría de determinantes.

Revisión de determinantes Un **determinante de orden 2** es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1}$$

Véanse las secciones 7.4 y 7.5 para una discusión completa de determinantes.

Un **determinante de orden 3** es el número definido en términos de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Esto se llama **expansión del determinante** a lo largo de la primera fila. Por ejemplo, de (1)

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-4)3 - (-2)5 = -2$$

y de (3)

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(0) - 5(12) + 4(8) = -28.$$

Forma de componentes del producto vectorial Como se hizo en la discusión del producto escalar, definimos el **producto vectorial** de dos vectores **a** y **b** en términos de las componentes de los vectores.

Definición 18.4.1 Producto vectorial de dos vectores

El **producto vectorial** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{3}$$

Los coeficientes de los vectores de la base en (3) se reconocen como determinantes de orden 2, así que (3) puede escribirse como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}. \quad (4)$$

Al comparar (4) con (2), observamos que el punto vectorial puede ser formalmente expresado como un determinante de orden 3 con los vectores unitarios **i**, **j** y **k** como entradas en la primera fila, y los componentes de **a** y **b** como entradas de la segunda y tercera filas, respectivamente:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

EJEMPLO 1 Producto vectorial empleando (4) y (5)

Sea $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución Empleamos (5) y desarrollamos el determinante a lo largo de la primera fila:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

≡

EJEMPLO 2 Producto vectorial de dos vectores de la base

Si $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, entonces

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

≡

Procediendo como en el ejemplo 2, se demuestra fácilmente que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad (6)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad (7)$$

e

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

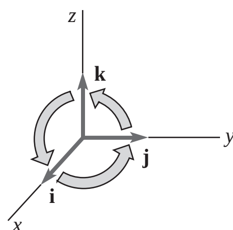


FIGURA 18.4.1 Mnemotécnico para productos vectoriales que implican a **i**, **j** y **k**

Los resultados en (6) pueden obtenerse empleando el mnemotécnico circular ilustrado en la **FIGURA 18.4.1**. Tenga en cuenta en (7), que si efectuamos el producto vectorial de dos vectores de la base en la dirección opuesta a la que se muestra en la figura 18.4.1, entonces obtenemos el negativo del vector correspondiente en (6). Los resultados en (6), (7) y (8) son casos especiales de *ii*) y *vi*) en el teorema 18.4.1.

Propiedades El siguiente teorema resume algunas de las propiedades importantes del producto vectorial.

Teorema 18.4.1 Propiedades del producto vectorial

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
v) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, k un escalar
vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
vii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
viii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

DEMOSTRACIÓN

Todas las propiedades pueden ser probadas directamente de (4) y (5).

Para demostrar el inciso *i*), dejamos $\mathbf{a} = \langle 0, 0, 0\rangle = \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$. Entonces de (5)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= [0(b_3) - 0(b_2)]\mathbf{i} - [0(b_3) - 0(b_1)]\mathbf{j} + [0(b_2) - 0(b_1)]\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Para demostrar el inciso *iii*) dejamos $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$. Entonces

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= [(a_2b_3 + a_2c_3) - (a_3b_2 + a_3c_2)]\mathbf{i} - [(a_1b_3 + a_1c_3) - (a_3b_1 + a_3c_1)]\mathbf{j}$$

$$+ [(a_1b_2 + a_1c_2) - (a_2b_1 + a_2c_1)]\mathbf{k}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

$$+ (a_2c_3 - a_3c_2)\mathbf{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\mathbf{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\mathbf{k}$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

≡

Puesto que el inciso *i*) del teorema 18.4.1 indica que el producto vectorial no es conmutativo, hay dos leyes distributivas en los incisos *iii*) y *iv*) del teorema.

Los incisos *vii*) y *viii*) del teorema 18.4.1 merecen especial atención. Al ver el teorema 18.3.3 observamos que *vii*) y *viii*) implican que el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{b}$. En el caso en que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores distintos de cero, entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a todo vector en el plano que contiene a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Puesto de otra manera

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *es ortogonal al plano que contiene* a $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$. (9)

Puede ver en la figura 18.4.1 y de los resultados en (6) que $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ es ortogonal al plano de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$; es decir, el plano xy, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ es ortogonal al plano yz, y $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$ es ortogonal al plano xz.

Los resultados en (6) y (7) nos dan una pista sobre la dirección a la que apunta el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Regla de la mano derecha Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ forman un **sistema de la mano derecha** o **triplete de mano derecha**. Esto significa que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en la dirección dada por la **regla de la mano derecha**:

Si los dedos de la mano derecha apuntan a lo largo del vector $\mathbf{a}$ *y luego se enrollan hacia el vector* $\mathbf{b}$*, entonces el pulgar dará la dirección de* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (10)

Véase la **FIGURA 18.4.2*a*)**. En la figura 18.4.2*b*), la regla de la mano derecha muestra la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$:

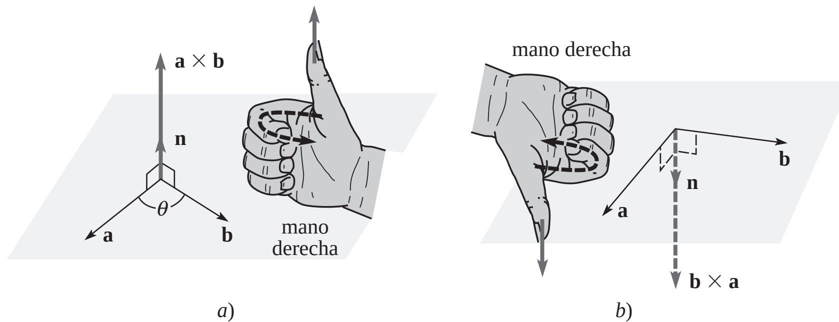


FIGURA 18.4.2 Regla de la mano derecha

Puesto que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector su magnitud $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ puede encontrarse de *vii*) de la definición 18.2.1. Como observamos en el siguiente teorema, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ también puede expresarse en términos del ángulo θ entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Teorema 18.4.2 **Magnitud del producto vectorial**

Para vectores distintos a cero **a** y **b**, si θ es el ángulo entre **a** y **b** ($0 \leq \theta \leq \pi$), entonces

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta. \tag{11}$$

DEMOSTRACIÓN

Calculamos por separado los cuadrados de los lados izquierdo y derecho de la ecuación (11) utilizando las formas componentes de **a** y **b**:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2 \\
&\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2, \\
(\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta)^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_3^2b_1^2 \\
&\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2.
\end{aligned}$$

Dado que ambos lados son iguales a la misma cantidad, deben ser iguales entre ellos, por lo que

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta)^2.$$

Finalmente, tomando la raíz cuadrada de ambos lados y utilizando el hecho de que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = \operatorname{sen} \theta$ dado que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$. ≡

Forma alternativa Combinando (9), (10) y el teorema 18.4.2 observamos para *cualquier* par de vectores **a** y **b** en R^3 que el producto vectorial tiene una forma alternativa

Esta forma más geométrica es la que generalmente se usa como la definición del producto vectorial en un curso de física.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta)\mathbf{n}, \tag{12}$$

donde **n** es un vector unitario dado por la regla de la mano derecha que es ortogonal al plano de **a** y **b**.

Vectores paralelos En la sección 18.1 vimos que dos vectores distintos a cero son paralelos si y sólo si uno es un múltiplo escalar distinto a cero del otro. Por lo tanto, dos vectores son paralelos si tienen las formas **a** y k**a**, donde **a** es cualquier vector y k es un escalar. Por las propiedades *v*) y *vi*) en el teorema 18.4.1, el producto vectorial de vectores paralelos debe ser **0**. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Teorema 18.4.3 **Criterio para vectores paralelos**

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Por supuesto, el teorema 18.4.3 se deduce también de (12) porque el ángulo entre los vectores paralelos **a** y **b** es $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

EJEMPLO 3 Vectores paralelos

Determine si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son vectores paralelos.

Solución Del producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

y del teorema 18.4.3 concluimos que **a** y **b** son vectores paralelos. ≡

Productos especiales El **producto escalar triple** de los vectores **a**, **b** y **c** es $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Utilizando las formas componentes de las definiciones de los productos escalar y vectorial, tenemos

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, observamos que el producto escalar triple puede ser escrito como un determinante de orden 3:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Utilizando (4), (5) y (2) de la sección 18.3 se puede demostrar que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \tag{14}$$

Véase el problema 61 en los ejercicios 18.4.

El **triple producto vectorial** de tres vectores **a**, **b** y **c** es

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

El triple producto vectorial está relacionado con el producto escalar por

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{15}$$

Véase el problema 59 en los ejercicios 18.4.

Áreas Dos vectores **a** y **b** distintos de cero y no paralelos pueden considerarse como los lados de un paralelogramo. El **área** ***A*** **de un paralelogramo** es

$$A = (\text{base})(\text{altura}).$$

De la **FIGURA 18.4.3*a*)** observamos que $A = \|\mathbf{b}\|(\|\mathbf{a}\|\operatorname{sen}\theta) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\operatorname{sen}\theta$

o

$$A = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|. \tag{16}$$

Igualmente de la figura 18.4.3*b*) observamos que el **área de un triángulo** con lados **a** y **b** es

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|. \tag{17}$$

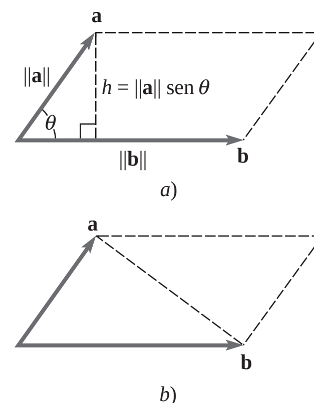


FIGURA 18.4.3 Áreas de un paralelogramo y un triángulo

EJEMPLO 4 Área de un triángulo

Halle el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ pueden tomarse como dos lados del triángulo. Como $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -\mathbf{i}+8\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$$

De (17) se observa que el área es

$$A = \frac{1}{2}\,|-\mathbf{i}+8\mathbf{j}-5\mathbf{k}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

≡

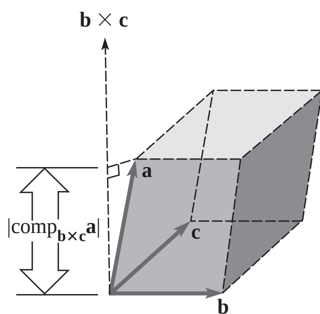


FIGURA 18.4.4 Paralelepípedo formado por tres vectores

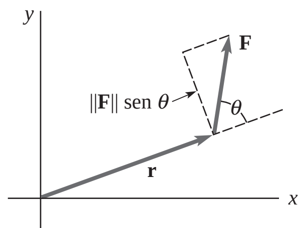


FIGURA 18.4.5 Una fuerza que actúa en el extremo de un vector

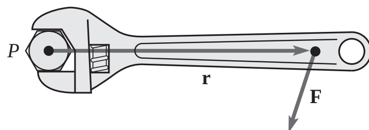


FIGURA 18.4.6 Una llave de tuercas aplicando momento de torsión a un tornillo

Volumen de un paralelepípedo Si los vectores **a**, **b** y **c** no yacen en el mismo plano, entonces el **volumen del paralelepípedo** con bordes **a**, **b** y **c** que se muestra en la **FIGURA 18.4.4** es

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= \|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|\,|\text{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}| \\ &= \|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|\left|\mathbf{a}\cdot\left(\frac{1}{\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|}\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\right| \end{aligned}$$

o

$$V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|. \tag{18}$$

Por lo tanto, el volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores.

Vectores coplanares Decimos que los vectores que yacen en el mismo plano son **coplanares**. Se ha visto que si los vectores **a**, **b** y **c** no son coplanares, es necesario que $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq 0$, ya que el volumen de un paralelepípedo con aristas **a**, **b** y **c** tiene volumen distinto de cero. Dicho de otro modo, esto significa que si $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$, entonces los vectores **a**, **b** y **c** son coplanares. Puesto que lo inverso de esta última afirmación también es válido, entonces tenemos

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0 \quad \textit{si y sólo si } \mathbf{a}, \mathbf{b} \textit{ y } \mathbf{c} \textit{ son coplanares.}$$

Interpretación física del producto vectorial En física una fuerza **F** que actúa en el extremo de un vector de posición **r**, como se muestra en la **FIGURA 18.4.5**, se dice que produce un **momento de torsión** $\boldsymbol{\tau}$ definido por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Por ejemplo, si $\|\mathbf{F}\| = 20$ N, $\|\mathbf{r}\| = 3.5$ m y $\theta = 30°$, entonces desde (11),

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = (3.5)(20) \text{ sen } 30° = 35 \text{ N-m}.$$

Si **F** y **r** están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ es hacia fuera de la página y perpendicular a ella (hacia el lector).

Como vemos en la **FIGURA 18.4.6**, cuando una fuerza **F** se aplica a una llave de tuercas, la magnitud del momento de torsión $\boldsymbol{\tau}$ es una medida del efecto de giro alrededor del punto pivote P y el vector $\boldsymbol{\tau}$ está a lo largo del eje del tornillo. En este caso $\boldsymbol{\tau}$ apunta hacia dentro de la página.

Comentarios

Al trabajar con vectores, se debe tener cuidado de no mezclar los símbolos · y × con los símbolos para la multiplicación ordinaria, y ser especialmente cuidadosos en el uso, o ausencia, de paréntesis. Por ejemplo, expresiones como

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}$$

no están bien definidas o carecen de significado.

18.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-10, encuentre $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$
3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4\rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3\rangle$
5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0\rangle$
8. $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$
9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6\rangle$
10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10\rangle$

En los problemas 11 y 12, encuentre $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$
12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los problemas 13 y 14, encuentre un vector que sea perpendicular tanto a **a** como a **b**.

13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$

En los problemas 15 y 16, verifique que $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$ y que $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

15. $\mathbf{a} = \langle 5, -2, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -7\rangle$

16. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

En los problemas 17 y 18, ***a)*** calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ seguida de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Y ***b)*** verifique los resultados del inciso ***a)*** por medio de (15) de esta sección.

17. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los problemas 19-36, encuentre el vector o el escalar *indicados* sin usar (5), (13) o (15).

19. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
20. $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$
21. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
22. $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
23. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$
24. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$
25. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$
26. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
27. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
28. $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$
29. $\|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})\|$
30. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
31. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
32. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$
33. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
34. $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
35. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$
36. $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los problemas 37-44, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre el vector o el escalar indicado.

37. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$
38. $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
39. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$
40. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$
41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
42. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
43. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
44. $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los problemas 45 y 46, ***a)*** verifique que el cuadrilátero proporcionado sea un paralelogramo, y ***b)*** encuentre el área del paralelogramo.

45.

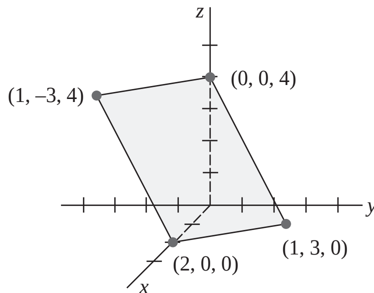


FIGURA 18.4.7 Paralelogramo del problema 45

46.

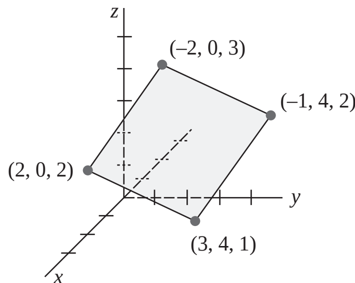


FIGURA 18.4.8 Paralelogramo del problema 46

En los problemas 47-50, halle el área del triángulo determinado por los puntos proporcionados.

47. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 1)$, $P_3(1, 1, 2)$
48. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(2, 2, 0)$
49. $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(-1, -1, 2)$
50. $P_1(1, 0, 3)$, $P_2(0, 0, 6)$, $P_3(2, 4, 5)$

En los problemas 51 y 52, encuentre el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores proporcionados son tres aristas.

51. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
52. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
53. Determine si los vectores $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ son coplanares.
54. Determine si los cuatro puntos $P_1(1, 1, -2)$, $P_2(4, 0, -3)$, $P_3(1, -5, 10)$ y $P_4(-7, 2, 4)$ se encuentran en el mismo plano.
55. Como se muestra en la **FIGURA 18.4.9**, el vector **a** se halla en el plano *xy* y el vector **b**, a lo largo del eje *z* positivo. Sus magnitudes son $\|\mathbf{a}\| = 6.4$ y $\|\mathbf{b}\| = 5$.
a) Utilice el teorema 18.4.2 para encontrar $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$.
b) Utilice la regla de la mano derecha para encontrar la dirección $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
c) Utilice el inciso ***b)*** para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

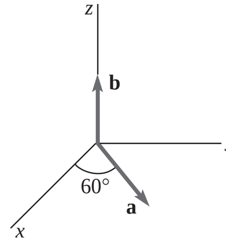


FIGURA 18.4.9 Vectores para el problema 55

56. Dos vectores **a** y **b** se encuentran en el plano *xz* de forma que el ángulo entre ellos es de 120°. Si $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{27}$ y $\|\mathbf{b}\| = 8$, encuentre todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
57. Una malla tridimensional es una colección de combinaciones enteras de tres vectores base no coplanares **a**, **b** y **c**. En cristalografía, una malla puede especificar las ubicaciones de los átomos en un cristal. Los estudios de difracción con rayos X de cristales utilizan la "malla recíproca", que tiene como base

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

a) Una determinada malla tiene vectores base $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Encuentre los vectores base para la malla recíproca.
b) La celda unitaria de la malla recíproca es el paralelepípedo con aristas **A**, **B** y **C**, mientras que la celda unitaria de la malla original es el paralelepípedo con aristas **a**, **b** y **c**. Muestre que el volumen de la celda unitaria de la malla recíproca es el recíproco del volumen de la celda unitaria de la malla original. [*Sugerencia*: Comience con $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y utilice (15).]

58. Utilice (4) para demostrar la propiedad *iii*) del producto vectorial.
59. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.
60. Demuestre o refute $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
61. Demuestre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.
62. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
63. Demuestre la **identidad de Lagrange**:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

64. ¿$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ implica que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
65. Muestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18.5 Líneas y planos en el espacio 3D

Introducción En esta sección se analiza cómo encontrar diversas ecuaciones de líneas y planos en el espacio 3D.

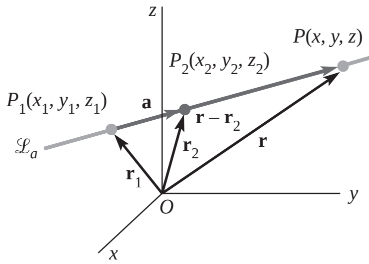


FIGURA 18.5.1 Línea que pasa por diferentes puntos en el espacio 3D

Líneas: ecuación vectorial Al igual que en el plano, dos puntos distintos cualesquiera del espacio 3D determinan una única línea entre ellos. Para encontrar una ecuación de la línea que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, se considera que $P(x, y, z)$ es *cualquier* punto sobre la línea. En la **FIGURA 18.5.1**, si de $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ y $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, se observa que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Así,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{1}$$

Si se escribe

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \tag{2}$$

entonces (1) implica que una **ecuación vectorial** para la línea $\mathscr{L}_a$ es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}.$$

El escalar t se llama **parámetro** y el vector distinto de cero **a** se denomina **vector director**; las componentes a_1, a_2 y a_3 del vector director **a** reciben el nombre de **números directores** de la línea.

Formulación alternativa de la ecuación vectorial.

Puesto que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ es también paralelo a $\mathscr{L}_a$, una ecuación vectorial alternativa para la línea es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$. Desde luego, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(-\mathbf{a})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(k\mathbf{a})$, ya que k es un escalar diferente de cero, son también ecuaciones para $\mathscr{L}_a$.

EJEMPLO 1 Ecuación vectorial de una línea

Encuentre una ecuación vectorial para la línea que pasa por (2, −1, 8) y (5, 6, −3).

Solución Defina $\mathbf{a} = \langle 2 - 5, -1 - 6, 8 - (-3)\rangle = \langle -3, -7, 11\rangle$. Las siguientes tres son posibles ecuaciones vectoriales para la línea:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 8\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{3}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{4}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle. \tag{5}$$

≡

Ecuaciones paramétricas Si se escribe (2) como

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle &= \langle x_2 + t(x_2 - x_1), y_2 + t(y_2 - y_1), z_2 + t(z_2 - z_1)\rangle \\ &= \langle x_2 + a_1t, y_2 + a_2t, z_2 + a_3t\rangle\end{aligned}$$

e igualando componentes, se obtiene

$$x = x_2 + a_1t, \quad y = y_2 + a_2t, \quad z = z_2 + a_3t. \tag{6}$$

Las ecuaciones en (6) se denominan **ecuaciones paramétricas** para la línea que pasa por P_1 y P_2. Al incrementar el parámetro t desde $-\infty$ hasta ∞, puede pensarse que el punto $P(x, y, z)$ traza la línea completa. Si el parámetro t se restringe a un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, entonces $P(x, y, z)$ traza un **segmento de línea** que comienza en el punto correspondiente a t_0 y finaliza en el punto correspondiente a t_1. Por ejemplo, en la figura 18.5.1, si $-1 \le t \le 0$, entonces $P(x, y, z)$ traza el segmento de línea que comienza en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y finaliza en $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas de una línea

Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea del ejemplo 1.

Solución A partir de (3), se tiene que

$$x = 2 - 3t, \quad y = -1 - 7t, \quad z = 8 + 11t. \tag{7}$$

Un conjunto alterno de ecuaciones paramétricas se obtiene a partir de (5):

$$x = 5 + 3t, \quad y = 6 + 7t, \quad z = -3 - 11t. \tag{8}$$

≡

Note que el valor $t = 0$ en (7) resulta en $(2, -1, 8)$, mientras que $t = -1$ debe utilizarse en (8), para obtener el mismo punto.

EJEMPLO 3 Vector paralelo a una línea

Encuentre un vector **a** que sea paralelo a la línea $\mathscr{L}_a$ cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4 + 9t$, $y = -14 + 5t$, $z = 1 - 3t$.

Solución Los coeficientes (o un múltiplo constante diferente de cero de los coeficientes) del parámetro en cada ecuación son las componentes de un vector paralelo a la línea. Así, $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathscr{L}_a$ y, por lo tanto, es un vector director de la línea. ≡

Ecuaciones simétricas A partir de (6) se observa que es posible eliminar el parámetro si se escribe

$$t = \frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}$$

siempre y cuando los tres números directores a_1, a_2 y a_3 no sean nulos. Se dice que las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3} \tag{9}$$

son **ecuaciones simétricas** para la línea que pasa por P_1 y P_2.

EJEMPLO 4 Ecuaciones simétricas de una línea

Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por $(4, 10, -6)$ y $(7, 9, 2)$.

Solución Defina $a_1 = 7 - 4 = 3$, $a_2 = 9 - 10 = -1$ y $a_3 = 2 - (-6) = 8$. A partir de (9) se obtienen ecuaciones simétricas para la línea

$$\frac{x - 7}{3} = \frac{y - 9}{-1} = \frac{z - 2}{8}.$$ ≡

Si uno de los números a_1, a_2 o a_3 es cero en (6), se utilizan las dos ecuaciones restantes para eliminar el parámetro t. Por ejemplo, si $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, entonces (6) conduce a

$$x = x_2 \qquad \text{y} \qquad t = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}.$$

En este caso,

$$x = x_2, \quad \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}$$

son ecuaciones simétricas para la línea.

EJEMPLO 5 Ecuaciones simétricas de una línea

Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por $(5, 3, 1)$ y $(2, 1, 1)$.

Solución Defina $a_1 = 5 - 2 = 3$, $a_2 = 3 - 1 = 2$ y $a_3 = 1 - 1 = 0$. De la explicación anterior, se tiene que las siguientes ecuaciones son simétricas para la línea

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - 3}{2}, \quad z = 1.$$

En otras palabras, las ecuaciones simétricas describen una línea en el plano $z = 1$. ≡

Una línea en el espacio también se determina especificando un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y un vector director no nulo **a**. Por el punto P_1, únicamente pasa una línea $\mathscr{L}_a$ paralela al vector dado. Si $P(x, y, z)$ es un punto sobre la línea $\mathscr{L}_a$, mostrada en la **FIGURA 18.5.2**, entonces, como antes,

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = t\mathbf{a} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}.$$

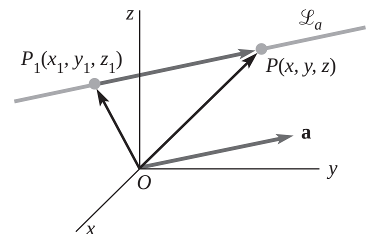


FIGURA 18.5.2 Línea determinada por un punto P y un vector **a**

EJEMPLO 6 Línea paralela a un vector

Escriba ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas para la línea que pasa por $(4, 6, -3)$ y es paralela a $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Con $a_1 = 5$, $a_2 = -10$ y $a_3 = 2$ se tiene inmediatamente

$$\textit{Vectoriales:} \quad \langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -3\rangle + t\langle 5, -10, 2\rangle$$

$$\textit{Paramétricas:} \quad x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t$$

$$\textit{Simétricas:} \quad \frac{x-4}{5} = \frac{y-6}{-10} = \frac{z+3}{2}.$$

≡

Planos: ecuación vectorial En la **FIGURA 18.5.3*a*)** se ilustra que a través de un punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pasan un número infinito de planos. Sin embargo, como se muestra en la figura 18.5.3*b*), si se especifican un punto P_1 y un vector $\mathbf{n}$, únicamente existe *un* plano $\mathcal{P}$ que contiene a P_1 con **n normal**, o perpendicular, al plano. Es más, si $P(x, y, z)$ es cualquier punto sobre $\mathcal{P}$, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, entonces, como se muestra en la figura 18.5.3*c*), $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ está en el plano. De esto se deduce que la **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{10}$$

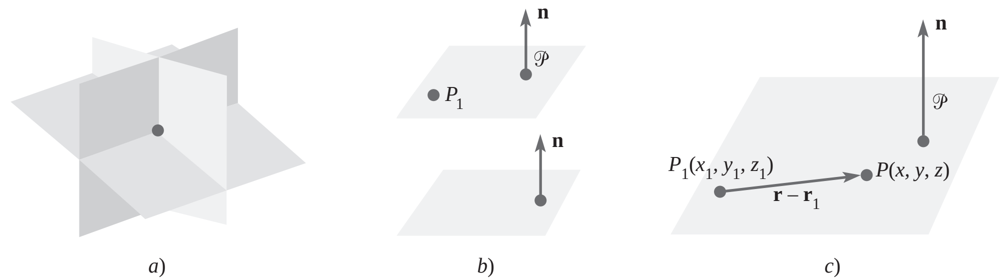


FIGURA 18.5.3 Vector **n** perpendicular a un plano

Ecuación cartesiana Específicamente, si el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces (10) conduce a la **ecuación cartesiana** del plano que contiene a $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \tag{11}$$

La ecuación (11) se llama a veces **forma punto-normal** de la ecuación de un plano.

EJEMPLO 7 Ecuación de un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene al punto $(4, -1, 3)$ con vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución Se deduce de inmediato de la forma punto normal (11) que una ecuación del plano es

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0.$$

≡

La ecuación (11) puede escribirse en todo caso como $ax + by + cz + d = 0$ utilizando la siguiente igualdad $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Inversamente, se demuestra a continuación que cualquier ecuación lineal de la forma

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{donde } a, b, c \text{ no sean ceros al mismo tiempo} \tag{12}$$

es un plano.

Teorema 18.5.1 Plano con vector normal

La gráfica de cualquier ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$, en la que a, b y c no son iguales a cero simultáneamente, es un plano cuyo vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación dada. Entonces, $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ que implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Reemplazando este último valor de d en la ecuación original se obtiene, tras simplificar, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, o, en términos vectoriales,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta última ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y al vector $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. ≡

EJEMPLO 8 Vector normal a un plano

Un vector normal al plano $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ es $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. ≡

Desde luego, cualquier múltiplo escalar no nulo de un vector normal es también perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 también determinan un plano.[1] Para obtener una ecuación del plano, únicamente se necesita formar dos vectores entre dos pares de puntos. Como se muestra en la **FIGURA 18.5.4**, su producto vectorial es un vector normal al plano que los contiene. Si $P(x, y, z)$ representa algún punto del plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (está en el plano, lo mismo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$). En consecuencia,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \tag{13}$$

es una ecuación vectorial del plano. No hay que memorizar esta fórmula. El procedimiento es el mismo que el de (10), excepto que el vector $\mathbf{n}$ normal al plano se obtiene a través del producto vectorial.

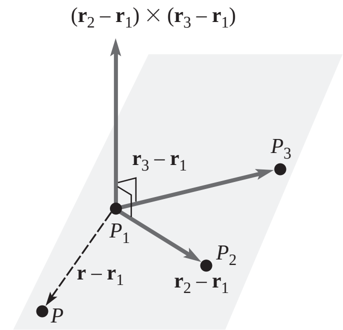


FIGURA 18.5.4 Los vectores $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ están en un plano, y su producto vectorial es normal al mismo plano

EJEMPLO 9 Tres puntos que determinan un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, 0, -1)$, $(3, 1, 4)$ y $(2, -2, 0)$.

Solución Se necesitan tres vectores. Emparejando los puntos como se muestra a la izquierda conduce a los vectores de la derecha; el orden en el que se resten entre sí es irrelevante.

$$\left.\begin{matrix}(1, 0, -1)\\(3, 1, 4)\end{matrix}\right\}\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad \left.\begin{matrix}(3, 1, 4)\\(2, -2, 0)\end{matrix}\right\}\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \left.\begin{matrix}(2, -2, 0)\\(x, y, z)\end{matrix}\right\}\mathbf{w} = (x - 2)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Ahora,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

es un vector normal al plano que contiene los puntos dados. Por consiguiente, una ecuación vectorial del plano es $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, la cual lleva a

$$-11(x - 2) - 3(y + 2) + 5z = 0 \quad \text{o} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0. \quad ≡$$

Gráficas La gráfica de (12) con una o incluso dos variables faltantes también es un plano. Por ejemplo, en la sección 18.2 se indica que las gráficas de

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

donde x_0, y_0, z_0 son constantes, representan planos perpendiculares a los ejes x, y, z, respectivamente. En general, para graficar un plano, se debe tratar de encontrar

i) las intersecciones x, y y z, si es necesario,
ii) la traza del plano sobre cada plano coordenada.

Una **traza** de un plano sobre un plano coordenada es la línea de intersección del plano con el plano coordenada.

[1] Cuando alguien se sienta a una mesa de cuatro patas que se balancea, se pregunta si vale la pena reemplazarla por una mesa de tres patas.

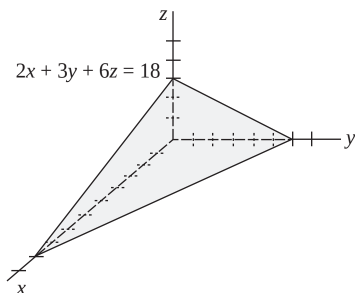


FIGURA 18.5.5 Plano del ejemplo 10

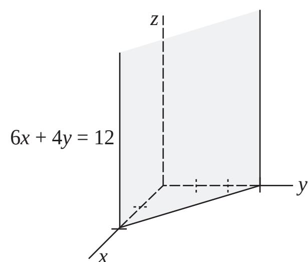


FIGURA 18.5.6 Plano del ejemplo 11

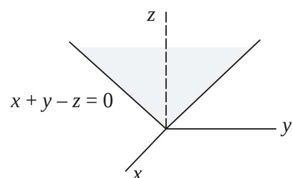


FIGURA 18.5.7 Plano del ejemplo 12

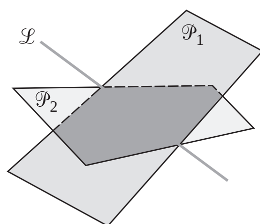


FIGURA 18.5.8 Los planos se intersecan en una línea

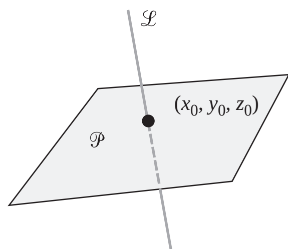


FIGURA 18.5.9 Punto de intersección entre un plano y una línea

EJEMPLO 10 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Si se establece que: $y = 0, z = 0$ se obtiene $x = 9$
$x = 0, z = 0$ se obtiene $y = 6$
$x = 0, y = 0$ se obtiene $z = 3$.

Como se indica en la **FIGURA 18.5.5**, se usan las intersecciones x, y y z (9, 0, 0), (0, 6, 0) y (0, 0, 3) para dibujar la gráfica del plano en el primer octante. ≡

EJEMPLO 11 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones, la gráfica de la ecuación es una línea que se interseca en $x = 2$ y en $y = 3$. Sin embargo, en tres dimensiones, esta línea es la traza de un plano sobre el plano coordenada xy. Como z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto sobre el plano siempre y cuando x y y se relacionen con la ecuación proporcionada. Como se muestra en la **FIGURA 18.5.6**, la gráfica es un plano paralelo al eje z. ≡

EJEMPLO 12 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Obsérvese en primer lugar que el plano pasa por el origen (0, 0, 0). Ahora, la traza del plano sobre el plano xz $(y = 0)$ es $z = x$, mientras que su traza sobre el plano yz $(x = 0)$ es $z = y$. Dibujando estas dos líneas, se obtiene la gráfica mostrada en la **FIGURA 18.5.7**. ≡

Dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que no son paralelos deben intersecarse en una línea $\mathcal{L}$. Véase la **FIGURA 18.5.8**. El ejemplo 13 ilustra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas para la línea de intersección. En el ejemplo 14 se observa cómo encontrar un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) de un plano $\mathcal{P}$ y una línea $\mathcal{L}$. Véase la **FIGURA 18.5.9**.

EJEMPLO 13 Línea de intersección de dos planos

Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 1 \\ x - y - z &= 5. \end{aligned}$$

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se elige arbitrariamente una variable, por ejemplo, $z = t$, y se resuelve para x y y a partir de

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 - 4t \\ x - y &= 5 + t. \end{aligned}$$

Al realizar esto, se encuentra que $x = 14 + 7t$, $y = 9 + 6t$, $z = t$. Éstas son ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de los planos dados. ≡

EJEMPLO 14 Punto de intersección de una línea con un plano

Encuentre el punto de intersección del plano $3x - 2y + z = -5$ y la línea $x = 1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4t$.

Solución Si (x_0, y_0, z_0) denota el punto de intersección, entonces se debe tener $3x_0 - 2y_0 + z_0 = -5$ y $x_0 = 1 + t_0$, $y_0 = -2 + 2t_0$, $z_0 = 4t_0$, para cualquier número t_0. Sustituyendo estas últimas ecuaciones en la ecuación del plano se tiene

$$3(1 + t_0) - 2(-2 + 2t_0) + 4t_0 = -5 \quad \text{o} \quad t_0 = -4.$$

De las ecuaciones paramétricas para la línea, se obtiene entonces $x_0 = -3$, $y_0 = -10$ y $z_0 = -16$. El punto de intersección es $(-3, -10, -16)$. ≡

Comentarios

En el habla cotidiana, las palabras *ortogonal*, *perpendicular* y *normal* se usan indistintamente en el sentido de que dos objetos se tocan, cruzan o colindan a un ángulo de 90°. Pero en los años recientes ha surgido una convención no escrita para el empleo de estos términos en contextos matemáticos específicos. Como regla general, se dice que dos vectores son *ortogonales*, dos líneas (o dos planos) son *perpendiculares* y que un vector es *normal* a un plano.

18.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación vectorial para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

1. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$ **2.** $(0, 4, 5), (-2, 6, 3)$
3. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ **4.** $(10, 2, -10), (5, -3, 5)$
5. $(1, 1, -1), (-4, 1, -1)$ **6.** $(3, 2, 1), (\frac{5}{2}, 1, -2)$

En los problemas 7-12, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

7. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$ **8.** $(2, 0, 0), (0, 4, 9)$
9. $(1, 0, 0), (3, -2, -7)$ **10.** $(0, 0, 5), (-2, 4, 0)$
11. $(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ **12.** $(-3, 7, 9), (4, -8, -1)$

En los problemas 13-18, encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

13. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$ **14.** $(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}), (1, 3, \frac{1}{4})$
15. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$ **16.** $(-5, -2, -4), (1, 1, 2)$
17. $(5, 10, -2), (5, 1, -14)$ **18.** $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10})$

En los problemas 19-22, encuentre ecuaciones paramétricas y simétricas para la línea que pasa por el punto dado y es paralela al vector proporcionado.

19. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{a} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$
20. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
21. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
22. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{a} = \langle 12, -5, -6 \rangle$
23. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(6, 4, -2)$ y es paralela a la línea $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.
24. Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por $(4, -11, -7)$ y es paralela a la línea $x = 2 + 5t$, $y = -1 + \frac{1}{3}t$, $z = 9 - 2t$.
25. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(2, -2, 15)$ y es paralela al plano xz y al plano xy.
26. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(1, 2, 8)$ y es ***a)*** paralela al eje y y ***b)*** perpendicular al plano xy.
27. Muestre que las líneas dadas por $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6 \rangle + t\langle -3, -3, -3 \rangle$ son las mismas.
28. Sean $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$ líneas con vectores directores **a** y **b**, respectivamente. $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$ son ortogonales si **a** y **b** son ortogonales, y paralelas si **a** y **b** son paralelas. Determine cuáles de las siguientes líneas son ortogonales y cuáles paralelas.
a) $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2 \rangle + t\langle 9, -12, 6 \rangle$
b) $x = 1 + 9t$, $y = 12t$, $z = 2 - 6t$
c) $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 4t$
d) $x = 5 + t$, $y = 4t$, $z = 3 + \frac{5}{2}t$
e) $x = 1 + t$, $y = \frac{3}{2}t$, $z = 2 - \frac{3}{2}t$
f) $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 6}{4} = \dfrac{z - 3}{-2}$

En los problemas 29 y 30, determine los puntos de intersección de la línea proporcionada con los tres planos coordenados.

29. $x = 4 - 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 9 + 3t$
30. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{z - 4}{2}$

En los problemas 31-34, determine si las líneas proporcionadas se intersecan. Si es así, encuentre el punto de intersección.

31. $x = 4 + t$, $y = 5 + t$, $z = -1 + 2t$
$x = 6 + 2s$, $y = 11 + 4s$, $z = -3 + s$
32. $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$
$x = 2 - s$, $y = 1 + s$, $z = 6s$
33. $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = 1 + t$
$x = 4 + s$, $y = 1 + s$, $z = 1 - s$
34. $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 8 + 2t$
$x = 2 + 2s$, $y = -2 + 3s$, $z = -2 + 8s$

El ángulo entre dos líneas $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$ es el ángulo entre sus vectores directores **a** y **b**. En los problemas 35 y 36, encuentre el ángulo comprendido entre las líneas proporcionadas.

35. $x = 4 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2t$
$x = 5 + 2s$, $y = 1 + 3s$, $z = 5 - 6s$
36. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 5}{7} = \dfrac{z - 1}{-1}$; $\dfrac{x + 3}{-2} = y - 9 = \dfrac{z}{4}$

En los problemas 37 y 38, las líneas proporcionadas se hallan sobre el mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto indicado y es perpendicular a dicho plano.

37. $x = 3 + t$, $y = -2 + t$, $z = 9 + t$
$x = 1 - 2s$, $y = 5 + s$, $z = -2 - 5s$; $(4, 1, 6)$
38. $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z}{4}$
$\dfrac{x + 4}{6} = \dfrac{y - 6}{4} = \dfrac{z - 10}{8}$; $(1, -1, 0)$

En los problemas 39-44, encuentre una ecuación del plano que contenga el punto proporcionado y sea perpendicular al vector indicado.

39. $(5, 1, 3)$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
40. $(1, 2, 5)$; $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
41. $(6, 10, -7)$; $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
42. $(0, 0, 0)$; $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

43. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$; $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

44. $(-1, 1, 0)$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas 45-50, encuentre, si es posible, una ecuación de un plano que contenga los puntos proporcionados.

45. $(3, 5, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(-1, -1, 4)$

46. $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 3, -1)$

47. $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, -1)$

48. $(0, 0, 3)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 6)$

49. $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 1)$, $(7, 4, 3)$

50. $(2, 1, 2)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, -5)$

En los problemas 51-60, encuentre una ecuación del plano que satisfaga las condiciones dadas.

51. Que contenga a $(2, 3, -5)$ y sea paralela a $x + y - 4z = 1$

52. Que contenga al origen y sea paralela a $5x - y + z = 6$

53. Que contenga a $(3, 6, 12)$ y sea paralela al plano xy

54. Que contenga a $(-7, -5, 18)$ y sea perpendicular al eje y

55. Que contenga a las líneas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$

56. Que contenga a las líneas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, 1, -3\rangle$

57. Que contenga a las líneas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$

58. Que contenga al punto $(4, 0, -6)$ y a la línea $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$

59. Que contenga a $(2, 4, 8)$ y sea perpendicular a la línea $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$

60. Que contenga a $(1, 1, 1)$ y sea perpendicular a la línea que pasa por $(2, 6, -3)$ y $(1, 0, -2)$

61. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ planos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente. $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son ortogonales si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son ortogonales, y paralelos si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son paralelos. Determine cuáles de los siguientes planos son ortogonales y cuáles paralelos.

a) $2x - y + 3z = 1$ ***b***) $x + 2y + 2z = 9$

c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$ ***d***) $-5x + 2y + 4z = 0$

e) $-8x - 8y + 12z = 1$ ***f***) $-2x + y - 3z = 5$

62. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que contenga a $(-4, 1, 7)$ y sea perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.

63. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la línea $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.

a) $4x + y + 2z = 1$ ***b***) $2x - 3y + z = 4$

c) $10x - 15y - 5z = 2$ ***d***) $-4x + 6y + 2z = 9$

64. Determine cuáles de los siguientes planos son paralelos a la línea $(1 - x)/2 = (y + 2)/4 = z - 5$.

a) $x - y + 3z = 1$ ***b***) $6x - 3y = 1$

c) $x - 2y + 5z = 0$ ***d***) $-2x + y - 2z = 7$

En los problemas 65-68, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de los planos dados.

65. $5x - 4y - 9z = 8$, $x + 4y + 3z = 4$

66. $x + 2y - z = 2$, $3x - y + 2z = 1$

67. $4x - 2y - z = 1$, $x + y + 2z = 1$

68. $2x - 5y + z = 0$, $y = 0$

En los problemas 69-72, encuentre el punto de intersección del plano y la línea proporcionados.

69. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$

70. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$

71. $x + y - z = 8$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 1 + t$

72. $x - 3y + 2z = 0$; $x = 4 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 5t$

En los problemas 73 y 74, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto indicado y es paralela a los planos proporcionados.

73. $x + y - 4z = 2$, $2x - y + z = 10$; $(5, 6, -12)$

74. $2x + z = 0$, $-x + 3y + z = 1$; $(-3, 5, -1)$

En los problemas 75 y 76, encuentre una ecuación del plano que contenga a la línea proporcionada y sea ortogonal al plano indicado.

75. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

76. $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los problemas 77-82, grafique la ecuación proporcionada.

77. $5x + 2y + z = 10$

78. $3x + 2z = 9$

79. $-y - 3z + 6 = 0$

80. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

81. $-x + 2y + z = 4$

82. $x - y - 1 = 0$

18.6 Espacios vectoriales

Introducción En las secciones precedentes se estuvo trabajando con puntos y vectores de los espacios 2D y 3D. Los matemáticos del siglo XIX, en particular los matemáticos ingleses Arthur Cayley (1821-1895) y James Joseph Sylvester (1814-1897), así como el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), se dieron cuenta de que los conceptos de *punto* y *vector* podrían generalizarse. Se descubrió que los vectores se podían describir, o definir, por medios analíticos más que geométricos. Esto fue un hito realmente significativo en la historia de las matemáticas. No hay necesidad de detenerse en tres dimensiones; ordenamientos en cuádruplas $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$, quíntuplas $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$ y n-uplas $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ de números reales pueden tratarse como vectores, al igual que los pares ordenados $\langle a_1, a_2\rangle$ y las tripletas ordenadas $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, en las que la única diferencia es la pérdida de habilidad para visualizar segmentos dirigidos de línea o flechas en espacios 4D, 5D o nD.

Espacio *n* En términos formales, un **vector en el espacio *n*** es cualquier *n*-upla ordenada $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ de números reales llamados componentes de **a**. El conjunto de todos los vectores en el espacio *n* se denota como R^n. Los conceptos de suma vectorial, multiplicación escalar, igualdad, etc., enlistados en la definición 18.2.1 se mantienen en R^n en forma natural. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, entonces la suma y la multiplicación escalar en el espacio *n* se definen como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n \rangle \quad \text{y} \quad k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, \dots, ka_n \rangle. \tag{1}$$

El **vector cero** en R^n es $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$. La noción de **longitud** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ en el espacio *n* es únicamente una extensión del concepto para los espacios 2D y 3D:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

La longitud de un vector también se denomina su **norma**. Un **vector unitario** es uno cuya norma es 1. Para un vector no nulo **a**, al proceso de construir un vector unitario **u** multiplicando **a** por el recíproco de su norma, esto es, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$, se le conoce como **normalizar** a **a**. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2, -1 \rangle$, entonces $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$ y un vector unitario es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\mathbf{a} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}} \right\rangle.$$

El **producto interior estándar**, también conocido como el **producto interior euclidiano** o **producto escalar** o **producto punto** de dos vectores *n* $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ es el número real definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \cdot \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \tag{2}$$

Se dice que los dos vectores no nulos **a** y **b** en R^n son **ortogonales** si y sólo si, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Por ejemplo, $\mathbf{a} = \langle 3, 4, 1, -6 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, \frac{1}{2}, 1, 1 \rangle$ son ortogonales en R^4 puesto que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = 0$.

Espacio vectorial Incluso, es factible ir más allá de la noción de un vector como una *n*-upla ordenada en R^n. Un vector puede definirse como cualquier cosa que se quiera: una *n*-upla ordenada, un número, un arreglo de números o incluso una función. Empero, se está particularmente interesado en vectores que sean elementos de un conjunto especial llamado **espacio vectorial**. Existen dos tipos de objetos fundamentales para la noción de espacio vectorial: los **vectores** y los **escalares**, así como dos operaciones algebraicas análogas a las proporcionadas en (1). Para un conjunto de vectores se desea poder sumar dos vectores en este conjunto y obtener otro vector del mismo conjunto; de igual manera, se desea poder multiplicar un vector por un escalar y obtener otro vector del mismo conjunto. Para determinar si un conjunto de objetos es un espacio vectorial se debe verificar que el conjunto posea estas dos operaciones algebraicas junto con otras propiedades. Estas propiedades, los *axiomas* de un espacio vectorial, se indican a continuación.

Definición 18.6.1 Espacio vectorial

Sea *V* un conjunto de elementos sobre el cual se definen dos operaciones llamadas **suma vectorial** y **multiplicación escalar**. Entonces, se dice que *V* es un **espacio vectorial** si se satisfacen las siguientes diez propiedades.

Axiomas para la suma vectorial:

i) Si **x** y **y** se encuentran en *V*, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en *V*.
ii) Para todos los **x**, **y** en *V*, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. ← ley conmutativa
iii) Para todos los **x**, **y**, **z** en *V*, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$. ← ley asociativa
iv) Existe un vector único **0** en *V* tal que
$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$. ← vector cero
v) Para cada **x** en *V*, existe un vector $-\mathbf{x}$ tal que
$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$. ← negativo de un vector

Axiomas para la multiplicación escalar:

vi) Si *k* es cualquier escalar y **x** está en *V*, entonces $k\mathbf{x}$ está en *V*.
vii) $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$ ← ley distributiva
viii) $(k_1 + k_2)\mathbf{x} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}$ ← ley distributiva
ix) $k_1(k_2\mathbf{x}) = (k_1k_2)\mathbf{x}$
x) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

En esta breve introducción a los vectores abstractos, se consideran los escalares de la definición 18.6.1 como números reales. En este caso, V se refiere a un **espacio vectorial real**, aunque no se sobreutilizará este término. Cuando los escalares pueden ser números complejos, se tiene un **espacio vectorial complejo**. Como las propiedades *i*)-*viii*) son los prototipos para los axiomas de la definición 18.6.1, es claro que R^2 es un espacio vectorial. Es más, como los vectores en R^3 y R^n tienen estas mismas propiedades, se concluye que R^3 y R^n también son espacios vectoriales. Los axiomas *i*) y *vi*) se denominan **axiomas de clausura**, y se dice que un espacio vectorial V está cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación escalar. Obsérvese, también, que conceptos tales como *longitud* y *producto interior* no son parte de la estructura axiomática de un espacio vectorial.

EJEMPLO 1 Comprobación de los axiomas de clausura

Determine si los conjuntos ***a***) $V = \{1\}$ y ***b***) $V = \{0\}$ son espacios vectoriales bajo suma ordinaria y multiplicación por números reales.

Solución ***a***) Para este sistema que consta de un solo elemento, muchos de los axiomas dados en la definición 18.6.1 se violan. En particular, los axiomas *i*) y *vi*) de clausura no se satisfacen. Ni la suma $1 + 1 = 2$ ni el múltiplo escalar $k \cdot 1 = k$, para $k \neq 1$, están en V. Por consiguiente, V no es un espacio vectorial.

b) En este caso, los axiomas de clausura se satisfacen puesto que $0 + 0 = 0$ y $k \cdot 0 = 0$ para cualquier número real k. Los axiomas conmutativos y asociativos se satisfacen, puesto que $0 + 0 = 0 + 0$ y $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$. Es fácil verificar que los axiomas restantes también se satisfacen. Por lo tanto, V es un espacio vectorial. ≡

Al espacio vectorial $V = \{0\}$ se le llama **espacio vectorial cero** o **trivial**.

Cuando se tiene el primer contacto con la noción de un vector abstracto, se debe tener la precaución de no considerar los nombres *suma* vectorial y *multiplicación* escalar muy literalmente. Estas operaciones se *definen*, y como tales se deben aceptar como son, aun cuando no tengan ninguna semejanza con el uso común de la suma ordinaria y multiplicación en, digamos, R, R^2, R^3 o R^n. Por ejemplo, la suma de dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ podría ser $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Tras esta advertencia, considérese el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Un ejemplo de un espacio vectorial

Considérese el conjunto V de números reales positivos. Si x y y denotan números reales positivos, entonces se escriben vectores en V como $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{y} = y$. Ahora, la *suma* de vectores se define como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy$$

y la *multiplicación escalar* se define como

$$k\mathbf{x} = x^k.$$

Determine si V es un espacio vectorial.

Solución A continuación se analizan los diez axiomas.

i) Para $\mathbf{x} = x > 0$ y $\mathbf{y} = y > 0$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy > 0$. Así, la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ se encuentra en V; V está cerrada bajo la suma.

ii) Como la multiplicación de números reales positivos es conmutativa, se tiene que para todos los $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{y} = y$ en V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy = yx = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. Así, la suma es conmutativa.

iii) Para todos los $\mathbf{x} = x$, $\mathbf{y} = y$, $\mathbf{z} = z$ en V,

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = x(yz) = (xy)z = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Así, la suma es asociativa.

iv) Como $\mathbf{1} + \mathbf{x} = 1x = x = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{1} = x1 = x = \mathbf{x}$, el vector $\mathbf{0}$ es $\mathbf{1} = 1$.

v) Si se define $-\mathbf{x} = \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = x\frac{1}{x} = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0} \text{ y } (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \frac{1}{x}x = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, el negativo de un vector es su recíproco.

vi) Si k es cualquier escalar y $\mathbf{x} = x > 0$ es cualquier vector, entonces $k\mathbf{x} = x^k > 0$. Así, V está cerrado bajo la multiplicación escalar.

vii) Si k es cualquier escalar, entonces

$$k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (xy)^k = x^k y^k = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}.$$

viii) Para los escalares k_1 y k_2,

$$(k_1 + k_2)\mathbf{x} = x^{(k_1+k_2)} = x^{k_1} x^{k_2} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}.$$

ix) Para los escalares k_1 y k_2,

$$k_1(k_2\mathbf{x}) = (x^{k_2})^{k_1} = x^{k_1 k_2} = (k_1 k_2)\mathbf{x}.$$

x) $1\mathbf{x} = x^1 = x = \mathbf{x}$.

Puesto que todos los axiomas de la definición 18.6.1 se satisfacen, se concluye que V es un espacio vectorial. ≡

A continuación se enuncian algunos espacios vectoriales importantes (se han mencionado ya algunos de éstos anteriormente). Las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar son las operaciones usuales asociadas con el conjunto.

- El conjunto R de números reales
- El conjunto R^2 de pares ordenados
- El conjunto R^3 de tripletas ordenadas
- El conjunto R^n de n-uplas ordenadas
- El conjunto P_n de polinomios de grado menor o igual a n
- El conjunto P de todos los polinomios
- El conjunto de funciones f definidas sobre la línea real completa
- El conjunto $C[a, b]$ de funciones reales f continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$
- El conjunto $C(-\infty, \infty)$ de funciones reales f continuas sobre la línea real completa
- El conjunto $C^n[a, b]$ de todas las funciones reales f para las cuales existen $f, f', f''\ldots$, $f^{(n)}$ y son continuas en el intervalo $[a, b]$

Subespacio Puede suceder que un subconjunto de vectores W de un espacio vectorial V sea en sí mismo un espacio vectorial.

Definición 18.6.2 Subespacio

Si un subconjunto W de un espacio vectorial V es en sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar definidas en V, entonces W se denomina un **subespacio** de V.

Cada espacio vectorial V tiene por lo menos dos subespacios: el mismo V y el subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$; $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio ya que el vector cero debe ser un elemento en cualquier espacio vectorial.

Para mostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio, no es preciso demostrar que los diez axiomas de la definición 18.6.1 se satisfacen. Como todos los vectores de W están también en V, deben satisfacer axiomas tales como *ii*) y *iii*). En otras palabras, W hereda de V la mayoría de las propiedades de un espacio vectorial. Como lo indica el próximo teorema, únicamente se necesitan comprobar los dos axiomas de clausura para demostrar que un subconjunto W es un subespacio de V.

Teorema 18.6.1 Criterios para un subespacio

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y sólo si, W está cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación escalar definidas en V:

i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en W, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en W.

ii) Si $\mathbf{x}$ está en W y k es cualquier escalar, entonces $k\mathbf{x}$ está en W.

EJEMPLO 3 Subespacio

Supóngase que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones continuas reales definidas en la línea real completa. Entonces se sabe, a partir del cálculo, que $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y $k\mathbf{f}$, para cualquier número real k, son funciones continuas reales. De esto se puede concluir que $C(-\infty, \infty)$ es un subespacio del espacio vectorial de funciones reales definidas en la línea real completa. ≡

EJEMPLO 4 Subespacio

El conjunto P_n de polinomios de grado menor o igual a n es un subespacio de $C(-\infty, \infty)$, es decir, el conjunto de funciones reales continuas sobre la línea real completa. ≡

Siempre es una buena idea tener visualizaciones concretas de los espacios vectoriales y los subespacios. Los subespacios del espacio vectorial R^3 de vectores tridimensionales pueden visualizarse fácilmente pensando en un vector como un punto (a_1, a_2, a_3). Desde luego, $\{0\}$ y el mismo R^3 son subespacios; otros subespacios son todas las líneas que pasan por el origen, y todos los planos que también pasan por el origen. Las líneas y los planos deben pasar por el origen ya que $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ tiene que ser un elemento de cualquier subespacio.

Definición 18.6.3 Independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es **linealmente independiente** si las únicas constantes que satisfacen la ecuación

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

son $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Si el conjunto de vectores no es linealmente independiente, entonces se dice que es **linealmente dependiente**.

En R^3, los vectores $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ son linealmente independientes puesto que la ecuación $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$ es la misma que

$$k_1\langle 1, 0, 0\rangle + k_2\langle 0, 1, 0\rangle + k_3\langle 0, 0, 1\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{o} \quad \langle k_1, k_2, k_3\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle.$$

Por igualdad de vectores, inciso *ii*) de la definición 18.2.1, se concluye que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$. En la definición 18.6.3, la dependencia lineal significa que existen constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *no todas cero* tales que $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Por ejemplo, en R^3 los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 5, 2, 7\rangle$ son linealmente dependientes ya que (3) se satisface cuando $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ y $k_3 = -1$:

$$3\langle 1, 1, 1\rangle + \langle 2, -1, 4\rangle - \langle 5, 2, 7\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{o} \quad 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Se observa que dos vectores son linealmente independientes si ninguno es un múltiplo escalar del otro.

Base Cualquier vector en R^3 puede escribirse como una combinación lineal de los vectores linealmente independientes **i**, **j** y **k**. En la sección 18.2 se muestra que estos vectores forman una **base** para el sistema de vectores tridimensionales.

Definición 18.6.4 Base para un espacio vectorial

Considérese un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ en un espacio vectorial V. Si el conjunto B es linealmente independiente, y si cada vector en V puede expresarse como una combinación lineal de dichos vectores, entonces se dice que B es una **base** para V.

Bases estándar Aunque no es posible demostrarlo aquí, cada espacio vectorial tiene una base. El espacio vectorial P_n de todos los polinomios de grado menor o igual a n tiene la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ya que cualquier vector (polinomio) $p(x)$ de grado n o menor puede escribirse como la combinación lineal $p(x) = c_nx^n + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$. Un espacio vectorial puede tener muchas bases. Se mencionó que el conjunto de vectores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base para R^3. Sin embargo, puede demostrarse que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$$

es un conjunto linealmente independiente (véase el problema 23 en los ejercicios 18.6) y, además, cada vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ puede expresarse como una combinación lineal $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$. Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es otra base para R^3. En efecto, cualquier conjunto de *tres* vectores linealmente independientes es una base para ese espacio. Sin embargo, el conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se conoce como la **base estándar** para R^3. La base estándar para el espacio P_n es, desde luego, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Para el espacio vectorial R^n, la base estándar está conformada por los n vectores

$$\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle,\ \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \langle 0, 0, 0, \ldots, 1\rangle. \tag{4}$$

Si B es una base para el espacio vectorial V, entonces para cualquier vector $\mathbf{v}$ en V existen escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_2 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n. \tag{5}$$

Los escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, de la combinación lineal (5) se denominan **coordenadas de v relativas a la base *B***. En R^n, la notación n-upla $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ para un vector $\mathbf{a}$ significa que los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las coordenadas de $\mathbf{a}$ *relativas a la base estándar* con las $\mathbf{e}_i$ siguiendo el orden preciso dado en (4).

Lea la última frase varias veces.

Dimensión Si un espacio vectorial V tiene una base B que consta de n vectores, entonces se puede demostrar que *cualquier* base para ese espacio debe contener n vectores. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 18.6.5 Dimensión de un espacio vectorial

Se dice que el número de vectores en una base B de un espacio vectorial V es la **dimensión** del espacio.

EJEMPLO 5 Dimensiones de algunos espacios vectoriales

***a*)** De acuerdo con la intuición, las dimensiones de los espacios vectoriales R, R^2, R^3 y R^n son, a su vez, 1, 2, 3 y n.

***b*)** Puesto que existen $n + 1$ vectores en la base estándar $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, la dimensión del espacio vectorial P_n de polinomios de grado menor o igual a n es $n + 1$.

***c*)** El espacio vectorial cero $\{\mathbf{0}\}$ requiere de especial consideración. Este espacio contiene únicamente a $\mathbf{0}$, y como $\{\mathbf{0}\}$ es un conjunto linealmente dependiente, no es una base. En este caso, se acostumbra tomar el conjunto vacío como la base y *definir* la dimensión de $\{\mathbf{0}\}$ como cero. ≡

Si la base de un espacio vectorial V contiene un número finito de vectores, entonces se dice que el espacio vectorial es de **dimensión finita**; de otro modo, será de **dimensión infinita**. El espacio funcional $C^n(I)$ de funciones diferenciables continuamente n veces sobre un intervalo I es un ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

Ecuaciones diferenciales lineales Considere la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

sobre un intervalo I en el que los coeficientes son continuos y $a_n(x) \neq 0$ para cada x en el intervalo. Una solución y_1 de (6) es necesariamente un vector en el espacio vectorial $C^n(I)$. Asimismo, sabemos que si y_1 y y_2 son soluciones de (6), entonces la suma $y_1 + y_2$ y cualquier múltiplo escalar ky_1 también son soluciones. Como el conjunto solución está cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar, se concluye a partir del teorema 18.6.1 que el conjunto solución de (6) es un subespacio de $C^n(I)$. Por lo tanto, el conjunto solución de (6) merece llamarse el **espacio solución** de la ecuación diferencial. También se sabe que si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son soluciones linealmente independientes de (6), entonces la solución general de la ecuación diferencial es la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x).$$

Recuerde que por medio de esta solución general puede encontrarse cualquier solución de la ecuación, especificando las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Por lo tanto, el conjunto linealmente independiente de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una base para el espacio de solución. La dimensión de este espacio de solución es n.

EJEMPLO 6 Dimensión de un espacio solución

La solución general de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden $y'' + 25y = 0$ es $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$. Una base para el espacio solución son los vectores linealmente independientes $\{\cos 5x, \operatorname{sen} 5x\}$. El espacio solución es bidimensional. ≡

El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea no es un espacio vectorial. Varios axiomas del espacio vectorial no se satisfacen; de forma más notoria, el conjunto de soluciones no contiene un vector cero. En otras palabras, $y = 0$ no es una solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea.

Claro Si S denota a un conjunto cualquiera de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio vectorial V, entonces el conjunto de *todas* las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en S,

$$\{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n\},$$

donde k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son escalares, se denomina **claro** de los vectores y se escribe Claro(S) o Claro($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$). Se deja como ejercicio demostrar que Claro(S) es un subespacio del espacio vectorial V. Véase el problema 33 en los ejercicios 18.6. Se dice que Claro(S) es un subespacio del *claro* de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Si $V =$ Claro(S), entonces se dice que S es un **conjunto puente** para el espacio vectorial V, o que S funciona como **claro** de V. Por ejemplo, cada uno de los tres conjuntos

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$$

son conjuntos puente para el espacio vectorial R^3. Obsérvese sin embargo que los primeros dos conjuntos son linealmente independientes, mientras que el tercer conjunto es dependiente. Con estos nuevos conceptos, se pueden replantear las definiciones 18.6.4 y 18.6.5 de la siguiente forma:

Un conjunto S de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *de un espacio vectorial V es una* **base** *para V si S es linealmente independiente, y además es un conjunto puente para V. El número de vectores de este conjunto puente S es la* **dimensión** *del espacio V.*

Comentarios

i) Supóngase que V es un espacio vectorial real arbitrario. Si existe un producto interior definido sobre V, no necesita parecerse en lo más mínimo al producto interior estándar, o euclidiano, definido sobre R^n. Por ejemplo, en el capítulo 10 se trabajará con un producto interior que es una integral definida. Un producto interior que *no* es el euclidiano se denota a través del símbolo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Véanse los problemas 30, 31 y 38*b*) en los ejercicios 18.6.

ii) Un espacio vectorial V sobre el cual se ha definido un producto interior se denomina un **espacio con producto interior**. Un espacio vectorial V puede tener más de un producto interior definido en él. Por ejemplo, un producto interior no euclidiano definido sobre R^2 sería $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2$, donde $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$. Véanse los problemas 37 y 38*a*) en los ejercicios 18.6.

iii) Gran parte de los desarrollos en otros capítulos de este texto se realizan en un **espacio vectorial de dimensión infinita**. Como tal, se necesita ampliar la definición de independencia lineal de un conjunto finito de vectores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ dada en la definición 18.6.3 para un conjunto infinito:

Se dice que un conjunto infinito de vectores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ *es* **linealmente independiente** *si todos los subconjuntos finitos del conjunto S son linealmente independientes. Si el conjunto S no es linealmente independiente entonces es* **linealmente dependiente**.

Se observa que si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces todo el conjunto S es linealmente dependiente.

El espacio vectorial P de todos los polinomios tiene la base estándar $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$. El conjunto infinito B es linealmente independiente. P es otro ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

18.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1-10, determine si el conjunto proporcionado es un espacio vectorial. Si no, mencione por lo menos un axioma que no se satisfaga. Considere que la suma vectorial y la multiplicación escalar son las operaciones ordinarias definidas en cada conjunto, a menos que se indique lo contrario.

1. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$
2. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_2 = 3a_1 + 1$
3. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde la multiplicación escalar se define como $k\langle a_1, a_2\rangle = \langle ka_1, 0\rangle$
4. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_1 + a_2 = 0$

5. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2, 0\rangle$
6. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 + b_1 + 1, a_2 + b_2 + 1\rangle$$
$$k\langle a_1, a_2\rangle = \langle ka_1 + k - 1, ka_2 + k - 1\rangle$$

7. El conjunto de números reales, con la suma definida como $\mathbf{x} + \mathbf{y} = x - y$
8. El conjunto de números complejos $a + bi$, donde $i^2 = -1$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$k(a + bi) = ka + kbi, \text{ donde } k \text{ es un número real}$$

9. El conjunto de arreglos de números reales $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} & a_{11} + b_{11} \\ a_{22} + b_{22} & a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$$
$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

10. El conjunto de todos los polinomios de grado 2.

En los problemas 11-16, determine si el conjunto proporcionado es un subespacio del espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$.

11. Todas las funciones f tales que $f(1) = 0$
12. Todas las funciones f tales que $f(0) = 1$
13. Todas las funciones no negativas f
14. Todas las funciones f tales que $f(-x) = f(x)$
15. Todas las funciones f diferenciables
16. Todas las funciones f que tengan la forma $f(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

En los problemas 17-20, determine si el conjunto proporcionado es un subespacio del espacio vectorial indicado.

17. Polinomios de la forma $p(x) = c_3x^3 + c_1x$; P_3
18. Polinomios p que son divisibles entre $x - 2$; P_2
19. Todos los vectores unitarios; R^3
20. Las funciones f tales que $\int_e^b f(x)\,dx = 0$; $C[a, b]$
21. En el espacio 3D, una línea que pasa por el origen puede escribirse como $S = \{(x, y, z) | x = at, y = bt, z = ct$, siendo a, b, c números reales$\}$. Muestre que S es un subespacio de R^3, si la suma y la multiplicación escalar son las mismas que para los vectores (x, y, z).
22. En el espacio 3D un plano que pasa por el origen puede escribirse como $S = \{(x, y, z) | ax + by + cz = 0$, siendo a, b, c números reales$\}$. Muestre que S es un subespacio de R^3.
23. Los vectores $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$ forman una base para el espacio vectorial R^3.
    a) Muestre que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son linealmente independientes.
    b) Exprese el vector $\mathbf{a} = \langle 3, -4, 8\rangle$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.
24. Los vectores $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x - 1$ forman una base para el espacio vectorial P_1.
    a) Muestre que $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son linealmente independientes.
    b) Exprese el vector $p(x) = 5x + 2$ como una combinación lineal de $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

En los problemas 25-28, determine si los vectores proporcionados son linealmente independientes o linealmente dependientes.

25. $\langle 4, -8\rangle, \langle -6, 12\rangle$ o R^2
26. $\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 2, 5\rangle$ o R^2
27. $1, (x + 1), (x + 1)^2$ o P_2
28. $1, (x + 1), (x + 1)^2, x^2$ o P_2
29. Explique por qué $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 3}$ es un vector en $C[0, 3]$, pero no un vector en $C[-3, 0]$.
30. Un espacio vectorial V sobre el cual se ha definido un producto interior, o producto escalar, se denomina **espacio con producto interior**. Un producto interior para el espacio vectorial $C[a, b]$ está dado por

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Calcule $C[0, 2\pi]$ en $(x, \text{sen } x)$.

31. La **norma** de un vector en un espacio con producto interior se define en función de éste. Para el producto interior proporcionado en el problema 30, la norma de un vector está dada por $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. En $C[0, 2\pi]$ calcule $\|x\|$ y $\|\text{sen } x\|$.
32. Encuentre una base para el espacio de soluciones de

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

33. Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cualquier conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Muestre que Claro$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ es un subespacio de V.

≡ Problemas para razonar

34. Comente: ¿es R^2 un subespacio de R^3? ¿Son R^2 y R^3 subespacios de R^4?
35. En el problema 9 se debió haber demostrado que el conjunto M_{22} de arreglos de 2×2 de números reales

$$M_{22} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\},$$

o **matrices**, es un espacio vectorial con suma vectorial y multiplicación escalar definidas en dicho problema. Encuentre una base para M_{22}. ¿Cuál es la dimensión de M_{22}?

36. Considere un conjunto ortogonal finito de vectores no nulos $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en R^n. Comente: ¿es este conjunto linealmente independiente o linealmente dependiente?
37. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces los axiomas de un producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ son:
    i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
    ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, donde k es un escalar
    iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
    iv) $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

    Muestre que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2$, donde $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$, es un producto interior sobre R^2.
38. ***a)*** Encuentre un par de vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^2 que no sean ortogonales con respecto al producto interior euclidiano o estándar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, pero que sean ortogonales con respecto al producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ del problema 37.
    b) Encuentre un par de funciones no nulas f y g en $C[0, 2\pi]$ que sean ortogonales con respecto al producto interior (f, g) dado en el problema 30.

18.7 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Introducción En la sección 18.6 se plantea que un espacio vectorial V puede tener muchas bases diferentes. Conviene recordar que las características que definen a cualquier base $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio vectorial V son

- el conjunto B es linealmente independiente, y
- el conjunto B funciona como claro para el espacio.

En este contexto, la palabra *claro* significa que todos los vectores del espacio se expresan como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Por ejemplo, cada vector $\mathbf{u}$ en R^n se escribe como una combinación lineal de los vectores de la base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, donde

$$\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle, \quad \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \langle 0, 0, 0, \ldots, 1\rangle.$$

Esta base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es también un ejemplo de **base ortonormal**, esto es, los $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son mutuamente ortogonales y son vectores unitarios, o sea,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, i \neq j \quad \text{y} \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta sección se concentra en bases ortonormales para R^n y examina un procedimiento con el cual es posible transformar o convertir cualquier base B de R^n en una base ortonormal.

EJEMPLO 1 Base ortonormal para R^3

El conjunto de tres vectores

$$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, \mathbf{w}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle, \mathbf{w}_3 = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \tag{1}$$

es linealmente independiente en R^3. Por lo tanto, $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base para R^3. Utilizando el producto interior estándar, o producto escalar, definido sobre R^3, se observa que

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0, \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_3 = 0, \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{w}_1\| = 1, \|\mathbf{w}_2\| = 1, \|\mathbf{w}_3\| = 1.$$

Por lo que B es una base ortonormal. ≡

Una base B para R^n no necesita ser ortogonal, ni los vectores base necesitan ser unitarios. De hecho, *cualquier* conjunto linealmente independiente de n vectores sirve como base para el espacio vectorial n-dimensional R^n. Por ejemplo, se puede mostrar de forma directa que los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$$

en R^3 son linealmente independientes y, por lo tanto, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base para R^3. Obsérvese que B no es una base ortogonal.

Generalmente, la base más conveniente para un espacio vectorial V resulta ser una base ortonormal para dicho espacio. Una de las ventajas que tienen las bases ortonormales sobre cualquier otra base para R^n es la relativa facilidad con la que se obtienen las coordenadas de un vector $\mathbf{u}$ respecto de dicha base.

Teorema 18.7.1 Coordenadas relativas a una base ortonormal

Supóngase que $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es una base ortonormal para R^n. Si $\mathbf{u}$ es cualquier vector en R^n, entonces

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n.$$

DEMOSTRACIÓN

El vector $\mathbf{u}$ está en R^n, por lo que es un elemento del conjunto $\mathrm{Sg}(B)$. En otras palabras, existen escalares reales k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $\mathbf{u}$ puede expresarse como la combinación lineal

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_n\mathbf{w}_n.$$

Los escalares k_i son las coordenadas de $\mathbf{u}$ relativas a la base B, y pueden encontrarse calculando el producto escalar de $\mathbf{u}$ con cada uno de los vectores base:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i = (k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_n\mathbf{w}_n) \cdot \mathbf{w}_i = k_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_i) + k_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_i) + \cdots + k_n(\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_i). \quad (2)$$

Como B es ortonormal, $\mathbf{w}_i$ es ortogonal a todos los vectores en B con excepción del mismo $\mathbf{w}_i$. Esto es, $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = 0$, $i \neq j$ para $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i = \|\mathbf{w}_i\|^2 = 1$. Por lo tanto, a partir de (2), se obtiene $k_i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ≡

EJEMPLO 2 Coordenadas de un vector en R^3

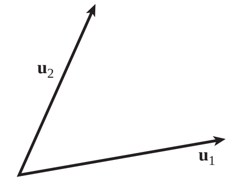
Encuentre las coordenadas del vector $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 9\rangle$ con respecto a la base ortonormal B para R^3 proporcionada en (1) del ejemplo 1. Escriba $\mathbf{u}$ en función de la base B.

Solución A partir del teorema 18.7.1, las coordenadas de $\mathbf{u}$ relativas a la base B en (1) del ejemplo 1 son simplemente

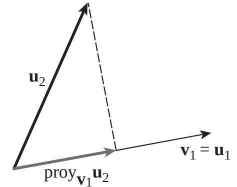
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = \frac{10}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_3 = -\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

Por lo que se escribe

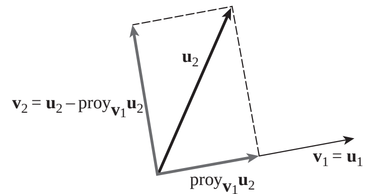
$$\mathbf{u} = \frac{10}{\sqrt{3}}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{w}_2 - \frac{11}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_3.$$ ≡



a) Vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ linealmente independientes



b) Proyección de $\mathbf{u}_2$ sobre $\mathbf{v}_1$



c) $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales

FIGURA 18.7.1 Los vectores ortogonales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se definen en términos de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt El procedimiento conocido como **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt** es un algoritmo directo para generar una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para cualquier base dada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para R^n. Entonces, se genera una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ mediante la normalización de los vectores de la base ortogonal B'. La idea fundamental en el proceso de ortogonalización es la proyección vectorial y, por ende, se sugiere la revisión de dicho concepto en la sección 18.3. Asimismo, para lograr cierta visión geométrica del proceso, se comienza con R^2 y R^3.

Construcción de una base ortogonal para R^2 El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para R^n es una secuencia de pasos; en cada paso se construye un vector $\mathbf{v}_i$ que es ortogonal al vector del paso precedente. La transformación de una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ consta de dos pasos. Véase la **FIGURA 18.7.1*a*)**. El primer paso es simple: únicamente se elige uno de los vectores de B, digamos $\mathbf{u}_1$, y se renombra como $\mathbf{v}_1$. A continuación, como se muestra en la figura 18.7.1*b*), se proyecta el vector restante $\mathbf{u}_2$ de B sobre el vector $\mathbf{v}_1$ y se define un segundo vector que es $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2$. Recuérdese de (12) de la sección 18.3 que $\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 = \left(\dfrac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$. Como se ve en la figura 18.7.1*c*), los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (3)$$

son ortogonales. Para verificar esto, se sugiere revisar la ortogonalidad de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ demostrando que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

EJEMPLO 3 Proceso de Gram-Schmidt en R^2

El conjunto $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, donde $\mathbf{u}_1 = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 1\rangle$, es una base para R^2. Transforme B en una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

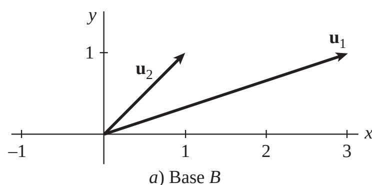
Solución Se selecciona $\mathbf{v}_1$ como $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{v}_1 = \langle 3, 1\rangle$. Entonces, a partir de la segunda ecuación de (3), con $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 4$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 10$, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \langle 1, 1\rangle - \frac{4}{10}\langle 3, 1\rangle = \left\langle -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle.$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\langle 3, 1\rangle, \langle -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\rangle\}$ es una base ortogonal para R^2. El último paso consiste en normalizar los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right\rangle.$$

La base B se muestra en la **FIGURA 18.7.2*a*)**, y la nueva base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ se muestra con las flechas en la figura 18.7.2*b*). ≡



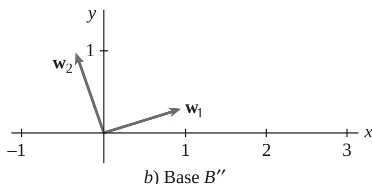


FIGURA 18.7.2 Las dos bases del ejemplo 3

En el ejemplo 3 se puede seleccionar cualquier vector de $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ como el vector $\mathbf{v}_1$. Sin embargo, eligiendo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1\rangle$, se obtiene una base ortonormal diferente; esto es, $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$ y $\mathbf{w}_2 = \langle 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\rangle$. Véanse los problemas 5-8 de los ejercicios 18.7.

Construcción de una base ortogonal para R^3

Ahora supóngase que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base para R^3. Entonces, el conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

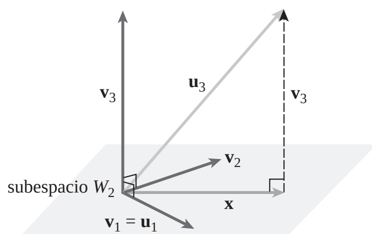


FIGURA 18.7.3 Los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ obtenidos del proceso de Gram-Schmidt

Es una base ortogonal para R^3. De nuevo, si esto no se ve claramente, calcúlese $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$.

Puesto que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de la lista (4) son ortogonales por la forma en que se generaron, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ debe ser linealmente independiente (véase el problema 36 de los ejercicios 18.6). Así, $W_2 = \text{Sg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ es necesariamente un subespacio bidimensional de R^3. Ahora, el vector $\mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$ es un vector en W_2, porque es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Al vector $\mathbf{x}$ se le denomina la **proyección ortogonal** de $\mathbf{u}_3$ sobre el subespacio W_2 y se denota generalmente como $\mathbf{x} = \text{proy}_{W_2}\mathbf{u}_3$. En la **FIGURA 18.7.3**, $\mathbf{x}$ es el vector negro remarcado. Obsérvese, también, que $\mathbf{x}$ es la suma de dos proyecciones. Utilizando (12) de la sección 18.3, se escribe

$$\mathbf{x} = \text{proy}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_3} + \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{u}_3}. \tag{5}$$

La diferencia $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{x}$. En efecto, $\mathbf{v}_3$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y a todos los vectores en W_2. Ésta es precisamente la misma idea de (3). En ese contexto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es la proyección de $\mathbf{u}_2$ sobre el subespacio unidimensional $W_1 = \text{Sg}(\mathbf{v}_1)$ de R^2. Análogamente a (5), se tiene

$$\mathbf{x} = \text{proy}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2}. \tag{6}$$

EJEMPLO 4 Proceso de Gram-Schmidt en R^3

El conjunto $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 1, 2, 2\rangle, \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 0\rangle$$

es una base para R^3. Transforme B en una base ortonormal B''.

Solución Se elige $\mathbf{v}_1$ como $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle$. Entonces, de la segunda ecuación de (4), con $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 5$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \langle 1, 2, 2\rangle - \frac{5}{3}\langle 1, 1, 1\rangle = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle.$$

Ahora con $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{3}$ y $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{2}{3}$, la tercera ecuación de (4) da por resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \langle 1, 1, 0\rangle - \frac{2}{3}\langle 1, 1, 1\rangle + \frac{1}{2}\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle \\ &= \langle 1, 1, 0\rangle + \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle + \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\rangle \\ &= \left\langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.\end{aligned}$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle, \langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$ es una base ortogonal para R^3. Como en el ejemplo 3, la tarea se concluye normalizando cada vector en B'. Utilizando $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{6}/3$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}/2$ y $\mathbf{w}_i = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, se encuentra que una base ortonormal para R^3 es $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \quad \mathbf{w}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle, \quad \mathbf{w}_3 = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle.$$

Se reconoce que el conjunto B'' es la base ortonormal para R^3 examinada en el ejemplo 1. ≡

Esta sección concluye con un teorema que resume el caso más general del proceso de Gram-Schmidt para R^n. Este proceso de ortogonalización se usa sobre cualquier conjunto S linealmente independiente, por lo que se utiliza para encontrar bases ortonormales en subespacios de R^n.

Teorema 18.7.2 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, con $m \leq n$, una base para el subespacio W_m de R^n. Entonces $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= \mathbf{u}_m - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_{m-1}}{\mathbf{v}_{m-1} \cdot \mathbf{v}_{m-1}}\right)\mathbf{v}_{m-1},\end{aligned}$$

es una base ortogonal para W_m. Una base ortonormal para W_m es

$$B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} = \left\{\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \ldots, \frac{1}{\|\mathbf{v}_m\|}\mathbf{v}_m\right\}.$$

Comentarios

Si bien los razonamientos anteriores se han centrado en R^n, el proceso de ortogonalización resumido en (7) del teorema 18.7.2 es válido para todos los espacios vectoriales V sobre los cuales se defina un producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. En este caso, se reemplaza el símbolo R^n de (7) con las palabras "un espacio V con producto interior" y cada símbolo de producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ con $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Véase los problemas 17 y 18 de los ejercicios 18.7.

18.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 y 2, verifique que la base B para el espacio vectorial proporcionado sea ortonormal. Utilice el teorema 18.7.1 para encontrar las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ relativo a la base B. Después escriba $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de los vectores base.

1. $B = \left\{\left\langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right\rangle, \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\rangle\right\}, \quad R^2; \quad \mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$

2. $B = \left\{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle, \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle\right\}, \quad R^3; \quad \mathbf{u} = \langle 5, -1, 6\rangle$

En los problemas 3 y 4, verifique que la base B del espacio vectorial proporcionado sea ortogonal. Utilice el teorema 18.7.1 como una ayuda en la búsqueda de las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ relativas a la base B. Después escriba $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de los vectores base.

3. $B = \{\langle 1, 0, 1\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle -1, 0, 1\rangle, \; R^3;$ $\mathbf{u} = \langle 10, 7, -13\rangle$

4. $B = \{\langle 2, 1, -2, 0\rangle, \langle 1, 2, 2, 1\rangle, \langle 3, -4, 1, 3\rangle, \langle 5, -2, 4, -9\rangle\}, R^4; \mathbf{u} = \langle 1, 2, 4, 3\rangle$

En los problemas 5-8, utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (3) para transformar la base proporcionada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Después, genere una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

a) En primer lugar, construya B'' utilizando $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1$.
b) A continuación construya B'' utilizando $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2$.
c) Dibuje B y cada base B''.

5. $B = \{\langle -3, 2\rangle, \langle -1, -1\rangle\}$ **6.** $B = \{\langle -3, 4\rangle, \langle -1, 0\rangle\}$
7. $B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ **8.** $B = \{\langle 5, 7\rangle, \langle 1, -2\rangle\}$

En los problemas 9-12, utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (4) para transformar la base proporcionada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ para R^3 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. A continuación genere una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3\}$.

9. $B = \{\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 1, 2, 2\rangle, \langle 2, 2, 1\rangle\}$
10. $B = \{\langle -3, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 0\rangle, \langle -1, 4, 1\rangle\}$
11. $B = \{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle, \langle -1, 1, -\frac{1}{2}\rangle, \langle -1, \frac{1}{2}, 1\rangle\}$
12. $B = \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 9, -1, 1\rangle, \langle -1, 4, -2\rangle\}$

En los problemas 13 y 14, los vectores proporcionados funcionan como claro para un subespacio W de R^3. Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a fin de construir una base ortonormal para dicho subespacio.

13. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 5, 2\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle -2, 1, 1\rangle$

14. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 2, 3\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 3, 4, 1\rangle$

En los problemas 15 y 16, los vectores proporcionados funcionan como claro para un subespacio W de R^4. Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a fin de construir una base ortonormal para dicho subespacio.

15. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, -1, 1, -1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 1, 3, 0, 1\rangle$
16. $\mathbf{u}_1 = \langle 4, 0, 2, -1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 2, 1, -1, 1\rangle, \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, -1, 0\rangle$

En los problemas 17 y 18, un producto interior definido sobre el espacio vectorial P_2 de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 está dado por

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para transformar la base proporcionada B de P_2 en una base ortogonal B'.

17. $B = \{1, x, x^2\}$
18. $B = \{x^2 - x, x^2 + 1, 1 - x^2\}$

Para el producto interior (p, q) definido para P_2 en los problemas 17 y 18, la norma $\|p(x)\|$ de un polinomio p se define como

$$\|p(x)\|^2 = (p, p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)\, dx.$$

Utilice esta norma en los problemas 19 y 20.

19. Construya una base ortonormal B'' a partir del B' obtenido en el problema 17.
20. Construya una base ortonormal B'' a partir del B' obtenido en el problema 18.

En los problemas 21 y 22, sea $p(x) = 9x^2 - 6x + 5$ un vector en P_2. Utilice el teorema 18.7.1 y la base ortonormal B'' indicada para encontrar las coordenadas $p(x)$ relativas a B''. A continuación escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los vectores base.

21. B'' del problema 19 **22.** B'' del problema 20

☰ Problemas para razonar

23. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 1, 3\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 1, 4, 1\rangle \text{ y } \mathbf{u}_3 = \langle 1, 10, -3\rangle,$$

es linealmente dependiente en R^3, puesto que $\mathbf{u}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$. Comente qué es lo que se espera de la aplicación a estos vectores del proceso de Gram-Schmidt en (4). A continuación, desarrolle el proceso de ortogonalización.

18 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

Conteste los problemas 1-30 sin revisar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso.

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10\rangle$ y $\langle -10, -15, 25\rangle$ son paralelos. _______
2. En el espacio 3D, tres puntos diferentes cualesquiera determinan un plano. _______
3. La línea $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$, $z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. _______
4. Los vectores no nulos **a** y **b** son paralelos si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. _______
5. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, el ángulo entre **a** y **b** es obtuso. _______
6. Si **a** es un vector unitario, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. _______
7. El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo. _______
8. El punto terminal del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ se encuentra en el punto terminal de **a**. _______
9. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ _______
10. Si **a**, **b**, **c** y **d** son vectores coplanares no nulos, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$. _______
11. La suma de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es _______.
12. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores no nulos **a** y **b** son _______.
13. $(-\mathbf{k}) \times (5\mathbf{j}) =$ _______
14. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ _______
15. $\|-12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\| =$ _______
16. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ __________
17. Un vector normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es _______.
18. El plano $x + 3y - z = 5$ contiene el punto $(1, -2,$ _______$)$.
19. El punto de intersección de la línea $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y - z = 13$ es _______.
20. Un vector unitario que tiene dirección opuesta a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ es _______.
21. Si $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 5, -4\rangle$ y P_1 tiene coordenadas $(2, 1, 7)$, entonces las coordenadas de P_2 son _______.
22. El punto medio del segmento de línea comprendido entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas _______.
23. Si $\|\mathbf{a}\| = 7.2$, $\|\mathbf{b}\| = 10$, y el ángulo entre **a** y **b** es 135°, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _______.
24. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 2\rangle$, entonces $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}) =$ _______.
25. Las intersecciones *x*, *y* y *z* del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente, _______.
26. El ángulo θ comprendido entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ es _______.
27. El área de un triángulo del cual dos lados son $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 2\rangle$ es _______.
28. Una ecuación del plano que contiene a $(3, 6, -2)$ y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ es _______.
29. La distancia del plano $y = -5$ al punto $(4, -3, 1)$ es _______.
30. Los vectores $\langle 1, 3, c\rangle$ y $\langle -2, -6, 5\rangle$ son paralelos para $c =$ _____ y ortogonales para $c =$ ______.
31. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular tanto a $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
32. Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$.

En los problemas 33-36, sean $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$. Encuentre el número o el vector indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
34. $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
35. $\text{proy}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
36. $\text{proy}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$
37. Sea **r** el vector de posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio; y sea **a** un vector constante. Determine la superficie descrita por ***a)*** $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$ y ***b)*** $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.
38. Utilice el producto escalar para determinar si los puntos $(4, 2, -2)$, $(2, 4, -3)$ y $(6, 7, -5)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
39. Encuentre las ecuaciones simétricas para la línea que pasa por el punto $(7, 3, -5)$ y es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.
40. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto $(5, -9, 3)$ y es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.
41. Muestre que las líneas $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s$, $y = -4 + s$, $z = -1 + s$ se intersecan ortogonalmente.
42. Encuentre una ecuación del plano que contenga los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$ y $(1, 0, 2)$.
43. Encuentre una ecuación del plano que contenga las líneas $x = t$, $y = 4t$, $z = -2t$ y $x = 1 + t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$.
44. Encuentre una ecuación del plano que contenga a $(1, 7, -1)$ y sea perpendicular a la línea de intersección entre $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.
45. Una fuerza constante de 10 N en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ mueve un bloque sobre una superficie sin fricción desde P_1 $(4, 1, 0)$ hasta P_2 $(7, 4, 0)$. Suponga que la distancia se mide en metros. Encuentre el trabajo realizado.
46. En el problema 45, encuentre el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ actúa simultáneamente a la fuerza original.
47. El agua que sale de una manguera contra incendios ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ de 200 libras de magnitud. Véase la **FIGURA 18.R.1**. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_3$ que un bombero debe ejercer para sostener la manguera en un ángulo de 45° con relación a la horizontal?

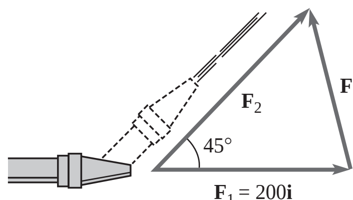


FIGURA 18.R.1 Manguera extintora del problema 47

48. Una bola uniforme que pesa 50 libras está soportada por dos planos sin fricción como se muestra en la **FIGURA 18.R.2**. Sea $\mathbf{F}_1$ la fuerza ejercida sobre el balón por el plano de soporte $\mathcal{P}_1$ y $\mathbf{F}_2$ la fuerza ejercida por el plano $\mathcal{P}_2$. Como el balón se encuentra en equilibrio, se debe tener $\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{w} = -50\mathbf{j}$. Encuentre las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia:* Considere que las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son normales a los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}$, respectivamente, y actúan a lo largo de líneas que pasan por el centro C del balón. Localice el origen de un sistema coordenado bidimensional en C.]

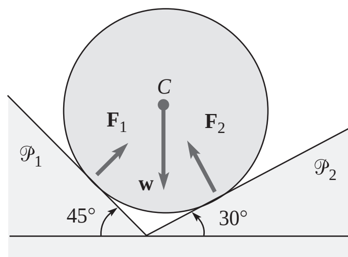


FIGURA 18.R.2 Balón soportado del problema 48

49. Determine si el conjunto de vectores $\langle a_1, 0, a_3 \rangle$ es un espacio vectorial bajo la suma y la multiplicación escalar definidas por

$$\langle a_1, 0, a_3\rangle + \langle b_1, 0, b_3\rangle = \langle a_1 + b_1, 0, a_3 + b_3\rangle$$
$$k\langle a_1, 0, a_3\rangle = \langle ka_1, 0, a_3\rangle$$

es un espacio vectorial.

50. Determine si los vectores $\langle 1, 1, 2\rangle$, $\langle 0, 2, 3\rangle$ y $\langle 0, 1, -1\rangle$ son linealmente independientes en R^3.

51. Determine si el conjunto de polinomios en P_n que satisfacen la condición $d^2p/dx^2 = 0$ es un subespacio de P_n. Si así es, encuentre una base para el subespacio.

52. Recuérdese que la intersección de dos conjuntos W_1 y W_2 es el conjunto de todos los elementos comunes a ambos, y que la unión de W_1 y W_2 es el conjunto de elementos que están en W_1 o W_2. Considere que W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre o refute, por medio de un contraejemplo, las siguientes proposiciones:

a) $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.
b) $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

CÁLCULO VECTORIAL

19

Estructura del capítulo

En el capítulo 18 se estudiaron las propiedades de los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional. En éste se combinan conceptos vectoriales con cálculo diferencial e integral.

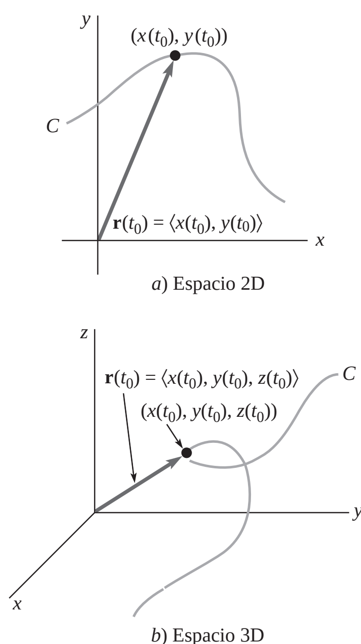


FIGURA 19.1.1 Curvas definidas mediante funciones vectoriales

19.1 Funciones vectoriales

Introducción Recuérdese que una **curva** C en el plano xy es simple y sencillamente un conjunto de pares ordenados (x, y). Se dice que C es una **curva paramétrica** si las coordenadas x y y de un punto de la curva se definen por medio de un par de funciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, continuas en el intervalo $a \leq t \leq b$. El concepto de curva paramétrica se extiende también al espacio 3D. Una **curva paramétrica en el espacio**, o **curva espacial**, es un conjunto de tripletas ordenadas (x, y, z), donde

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \tag{1}$$

son continuas en un intervalo $a \leq t \leq b$. En esta sección se combinan los conceptos de curvas paramétricas y vectores.

Funciones con valores vectoriales En ciencias e ingeniería a menudo es conveniente introducir un vector $\mathbf{r}$ cuyas componentes sean funciones de un parámetro t. Se dice que

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k},$$

son **funciones con valores vectoriales** o bien **funciones vectoriales**. Como se muestra en la **FIGURA 19.1.1**, para un determinado valor paramétrico, digamos t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el vector de posición de un punto P sobre una curva C. En otras palabras, al variar el parámetro t, se puede imaginar la curva C como si se hubiera trazado con el movimiento de la punta de la flecha de $\mathbf{r}(t)$.

En la sección 18.5 se presenta un ejemplo de ecuaciones paramétricas, así como la función vectorial de una curva espacial, cuando se estudia la línea en el espacio tridimensional.

EJEMPLO 1 Hélice circular

Grafique la curva trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$. Eliminando el parámetro t de las dos primeras ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\,t)^2 = 2^2$$

se observa que un punto de la curva se halla sobre el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Tal como se ve en la **FIGURA 19.1.2** y en la tabla adjunta, al incrementarse el valor de t, la curva se enrolla de manera ascendente para formar una espiral o **hélice circular**.

t	x	y	z
0	2	0	0
$\pi/2$	0	2	$\pi/2$
π	-2	0	π
$3\pi/2$	0	-2	$3\pi/2$
2π	2	0	2π
$5\pi/2$	0	2	$5\pi/2$
3π	-2	0	3π
$7\pi/2$	0	-2	$7\pi/2$
4π	2	0	4π
$9\pi/2$	0	2	$9\pi/2$

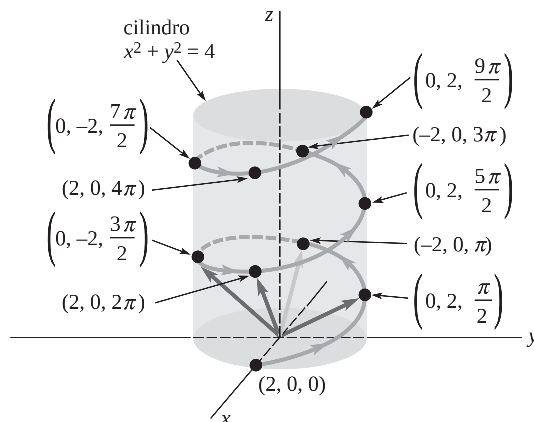


FIGURA 19.1.2 Hélice circular del ejemplo 1 ≡

La curva del ejemplo 1 es un caso especial de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

que describe a una **hélice elíptica**. Cuando $a = b$, la hélice es circular. La **inclinación** de una hélice se define como el número $2\pi c$. Los problemas 9 y 10 de los ejercicios 19.1 ilustran otros dos tipos de hélices.

EJEMPLO 2 Círculo en un plano

Grafique la curva trazada mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de esta curva son $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 3$. Al igual que en el ejemplo 1, se observa que cualquier punto de la curva debe hallarse también en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que cualquier punto tiene como coordenada z el valor constante $z = 3$, resulta que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza un círculo 3 unidades por encima del plano xy. Véase la **FIGURA 19.1.3**. ≡

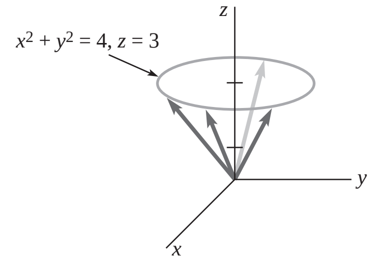


FIGURA 19.1.3 Curva del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Curva de intersección

Encuentre la función vectorial que describe a la curva C resultante de la intersección del plano $y = 2x$ con el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución En primer lugar, se parametriza la curva C de intersección haciendo $x = t$. Entonces se tiene que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. A partir de estas ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 2t$, $z = 9 - 5t^2$, se observa que $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}$ es una función vectorial que describe la traza en el plano $y = 2x$ del paraboloide. Véase la **FIGURA 19.1.4**.

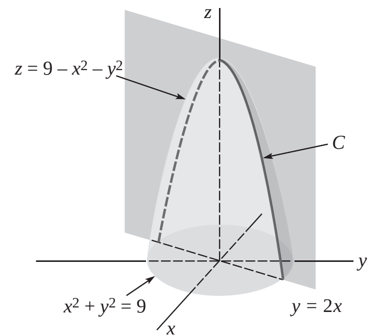


FIGURA 19.1.4 Curva del ejemplo 3

■ **Límites, continuidad y derivadas** El concepto fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones que la componen.

Definición 19.1.1 Límite de una función vectorial

Si existen los $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$, entonces

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle.$$

Desde luego, la notación $t \to a$ de la definición 19.1.1 puede reemplazarse por $t \to a^+$, $t \to a^-$, $t \to \infty$ o $t \to -\infty$.

Como consecuencia inmediata de la definición 19.1.1, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 19.1.1 Propiedades de los límites

Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

i) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c es un escalar

ii) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

iii) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$.

Definición 19.1.2 Continuidad de una función vectorial

Se dice que una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en $t = a$ si

i) $\mathbf{r}(a)$ está definida, *ii)* existe $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)$ *iii)* $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

En forma equivalente, $\mathbf{r}(t)$ es continua en $t = a$ si y sólo si las funciones f, g y h que la componen son continuas en dicho punto.

Definición 19.1.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial **r** es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \tag{2}$$

para todos los t en los que exista el límite.

La derivada de **r** también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra en forma práctica que la derivada de una función vectorial se obtiene derivando las funciones que la componen.

Teorema 19.1.2 Derivación de las componentes

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, donde f, g y h son derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.$$

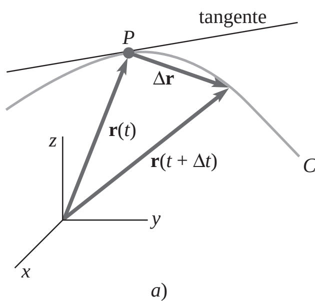
DEMOSTRACIÓN

De (2) se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle\Big]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle.$$

Calculando el límite de cada componente se obtiene el resultado deseado. ≡



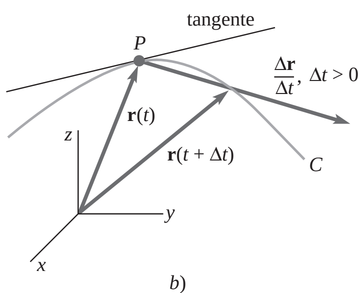


FIGURA 19.1.5 El vector $\mathbf{r}'(t)$ es tangente a la curva C en P

■ **Curvas suaves** Cuando las funciones componentes de una función vectorial **r** tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para cualquier t en el intervalo abierto (a, b), entonces se dice que **r** es una **función suave**, y a la curva C trazada por **r** se le denomina **curva suave**.

■ **Interpretación geométrica de r′(*t*)** Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ no es **0** en el punto P, puede dibujarse entonces de manera *tangencial a la curva* en P. Como se observa en la **FIGURA 19.1.5**, los vectores

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

son paralelos. Si se considera que existe $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ parece razonable concluir que cuando $\Delta t \to 0$, $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ son cercanos y, por ende, la posición límite del vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es la línea tangente en P. Desde luego, la línea tangente en P se *define* como la línea que pasa por P y es paralela a $\mathbf{r}'(t)$.

EJEMPLO 4 Vectores tangentes

Grafique la curva C trazada por un punto P cuya posición viene dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, donde $0 \le t \le 2\pi$. Grafique también $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución Eliminando el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$ y $y = \operatorname{sen} t$, donde $0 \le t \le 2\pi$, se encuentra que C es la parábola $x = 1 - 2y^2$, donde $-1 \le x \le 1$. De $\mathbf{r}'(t) = -2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ se encuentra que

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

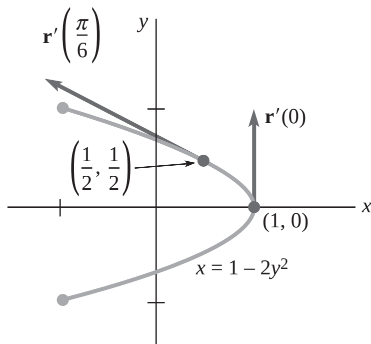


FIGURA 19.1.6 Vectores tangentes del ejemplo 4

Estos vectores se dibujan en la **FIGURA 19.1.6**, tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente. ≡

EJEMPLO 5 Línea tangente

Encuentre ecuaciones paramétricas de la línea tangente en $t = 3$ a la gráfica de la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$.

Solución La función vectorial que proporciona la posición de un punto P de la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$$

que es tangente a C en el punto cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k};$$

esto es, $P(9, 6, -21)$. Utilizando las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, se observa que las ecuaciones paramétricas de la línea tangente son $x = 9 + 6t$, $y = 6 + 5t$, $z = -21 - 7t$. ≡

Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también derivando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, se tiene

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 6 Derivada de una función de vectorial

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}.$$ ≡

Teorema 19.1.3 Regla de la cadena

Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial derivable y $s = u(t)$ es una función escalar derivable, entonces la derivada de $\mathbf{r}(s)$ respecto a t es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'(s)u'(t).$$

EJEMPLO 7 Regla de la cadena

Si $\mathbf{r}(s) = \cos 2s\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2s\,\mathbf{j} + e^{-3s}\mathbf{k}$, donde $s = t^4$, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [-2\operatorname{sen} 2s\,\mathbf{i} + 2\cos 2s\,\mathbf{j} - 3e^{-3s}\mathbf{k}]4t^3$$
$$= -8t^3\operatorname{sen}(2t^4)\mathbf{i} + 8t^3\cos(2t^4)\mathbf{j} - 12t^3e^{-3t^4}\mathbf{k}.$$ ≡

Se dejan como ejercicio los detalles de la demostración del siguiente teorema.

Teorema 19.1.4 Reglas de derivación

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ funciones vectoriales derivables y $u(t)$ una función escalar derivable.

i) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

ii) $\frac{d}{dt}[u(t)\mathbf{r}_1(t)] = u(t)\mathbf{r}_1'(t) + u'(t)\mathbf{r}_1(t)$

iii) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

iv) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)$.

¡Precaución! ▶ Puesto que el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, se debe cumplir estrictamente el orden con que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aparecen en el inciso *iv*) del teorema 19.1.4.

Integrales de funciones vectoriales Si f, g y h son integrables, entonces las integrales indefinida y definida de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ se puntualizan, respectivamente, por medio de

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otra función vectorial $\mathbf{R} + \mathbf{c}$ tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 8 Integral de una función vectorial

Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\,\mathbf{k}$,

entonces
$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int 6t^2\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k}$$

$$= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\,\mathbf{j} + [2\,\mathrm{sen}\,4t + c_3]\,\mathbf{k}$$

$$= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,4t\,\mathbf{k} + \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. ≡

Longitud de una curva espacial Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ es una función suave, entonces se puede demostrar que la **longitud** de la curva suave trazada por $\mathbf{r}$ está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt. \quad (3)$$

Longitud de arco como parámetro Una curva en el plano o en el espacio se parametriza en términos de la longitud de arco s.

EJEMPLO 9 De vuelta al ejemplo 1

Considérese la hélice del ejemplo 1. Como $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$, a partir de (3) se tiene que la longitud de la curva desde $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}t,$$

donde u se utiliza como una variable temporal para la integración. Empleando $t = s/\sqrt{5}$, se obtiene una ecuación vectorial de la hélice, que es función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}. \quad (4)$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$f(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad g(s) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad h(s) = \frac{s}{\sqrt{5}}.$$ ≡

La derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ respecto al parámetro t es un vector tangente a la curva trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si dicha curva se parametriza en términos de la longitud de arco s, entonces $\mathbf{r}'(s)$ *es un vector tangente unitario*. Para ver esto, considere una curva descrita por $\mathbf{r}(s)$, donde s es la longitud de arco. Con base en (3), la longitud de la curva desde $\mathbf{r}(0)$ hasta $\mathbf{r}(s)$ es $s = \int_0^s \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$. La derivada de esta última ecuación respecto a s lleva a $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

19.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas del 1 al 10, grafique la curva trazada por la función vectorial proporcionada.

1. $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t \geq 0$
2. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k};\ t \geq 0$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k};\ t \geq 0$
4. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}\rangle$
6. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3\operatorname{senh} t\mathbf{j}$
7. $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2\cos t\rangle;\ 0 \leq t \leq \pi/2$
8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\operatorname{sen} t, t^2\rangle$

En los problemas del 11 al 14, encuentre la función vectorial que describe a la curva C resultante de la intersección entre las superficies proporcionadas. Bosqueje la curva C. Utilice el parámetro indicado.

11. $z = x^2 + y^2,\ y = x;\ x = t$
12. $x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ y = 2x;\ x = t$
13. $x^2 + y^2 = 9,\ z = 9 - x^2;\ x = 3\cos t$
14. $z = x^2 + y^2,\ z = 1;\ x = \operatorname{sen} t$
15. Puesto que $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\mathbf{k}$, encuentre $\lim_{t\to 0^+}\mathbf{r}(t)$.
16. Puesto que $\lim_{t\to a} r_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, encuentre:
a) $\lim\limits_{t\to a}[-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
b) $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$.

En los problemas del 17 al 20, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial proporcionada.

17. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \mathbf{j},\ t > 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \operatorname{sen} t, t + \cos t\rangle$
19. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
20. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1}t\mathbf{k}$

En los problemas del 21 al 24, grafique la curva C descrita por $\mathbf{r}$ y dibuje $\mathbf{r}'$ en el valor indicado de t.

21. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 6\operatorname{sen} t\mathbf{j};\ t = \pi/6$
22. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t = -1$
23. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{4}{1+t^2}\mathbf{k};\ t = 1$
24. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k};\ t = \pi/4$

En los problemas 25 y 26, encuentre ecuaciones paramétricas de la línea tangente a la curva proporcionada en el valor indicado de t.

25. $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3;\ t = 2$
26. $x = t^3 - t,\ y = \dfrac{6t}{t+1},\ z = (2t+1)^2;\ t = 1$

En los problemas del 27 al 32, encuentre la derivada indicada. Considere que todas las funciones vectoriales son derivables.

27. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)]$
28. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(t\mathbf{r}(t))]$
29. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))]$
30. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times(\mathbf{r}_2(t)\times\mathbf{r}_3(t))]$
31. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]$
32. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas del 33 al 36, calcule la integral proporcionada.

33. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$
34. $\displaystyle\int_{0}^{4}(\sqrt{2t+1}\mathbf{i} - \sqrt{t}\mathbf{j} + \operatorname{sen}\pi t\mathbf{k})\,dt$
35. $\displaystyle\int(te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$
36. $\displaystyle\int\frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los problemas del 37 al 40, halle una función vectorial $\mathbf{r}$ que satisfaga las condiciones indicadas.

37. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k};\ r(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
38. $\mathbf{r}'(t) = t\operatorname{sen} t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j};\ \mathbf{r}(0) = \frac{2}{3}\mathbf{i}$
39. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k};\ \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j},\ \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$
40. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k};$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas del 41 al 44, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial proporcionada sobre el intervalo indicado.

41. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 2\pi$
42. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t\operatorname{sen} t\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq \pi$
43. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos 2t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 3\pi$
44. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 1$
45. Exprese la ecuación vectorial de un círculo $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j}$ en función de la longitud de arco s. Verifíquese que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.
46. Si $\mathbf{r}(s)$ es la función vectorial dada en (4), verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.
47. Suponiendo que $\mathbf{r}$ es una función vectorial derivable en la que $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ para cualquier t, demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para cualquier t.
48. En el problema 47, describa geométricamente el tipo de curva C para el que $\|\mathbf{r}(t)\| = c$.

≡ Problemas misceláneos

49. Demuestre el teorema 19.1.4*ii*).
50. Demuestre el teorema 19.1.4*iii*).
51. Demuestre el teorema 19.1.4*iv*).
52. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{v}\cdot\int_a^b\mathbf{r}(t)\,dt$.

19.2 Movimiento sobre una curva

Introducción En la sección anterior se explicó que tanto la primera como la segunda derivadas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ se obtienen derivando sus funciones componentes f, g y h. En esta sección se da una interpretación física de los vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

Velocidad y aceleración Supóngase que un cuerpo o una partícula se mueven a lo largo de una curva C de forma que su posición en el tiempo t está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$. Si sus funciones componentes f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar $\|\mathbf{v}(t)\|$ es la **rapidez** de la partícula. Como

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

la rapidez se relaciona con la longitud de arco s por medio de $s'(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. En otras palabras, la longitud de arco viene dada por $s = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{v}(t)\|\,dt$. También se deduce, a partir de las argumentaciones de la sección 19.1, que si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula en C en el tiempo t_1, entonces se puede dibujar $\mathbf{v}(t_1)$ *tangente a C en P*. Observaciones similares son válidas para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$.

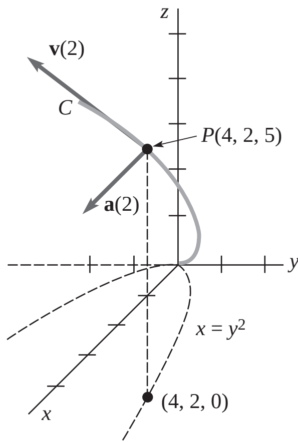


FIGURA 19.2.1 Vectores de velocidad y de aceleración del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Vectores de velocidad y aceleración

La posición de una partícula en movimiento viene dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\,\mathbf{k}$. Grafique la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ y dibuje los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Como $x = t^2$ y $y = t$, la trayectoria de la partícula se encuentra por encima de la parábola $x = y^2$. Para $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula se encuentra en el punto $P(4, 2, 5)$. Entonces,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de forma que $\mathbf{v}(2) = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}(2) = 2\,\mathbf{i}$. Estos vectores se muestran en la **FIGURA 19.2.1**. ≡

Si una partícula se mueve con rapidez constante c, entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad $\mathbf{v}$. Para ilustrar esto, nótese que $\|\mathbf{v}\|^2 = c^2$ o también $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = c^2$. Derivando ambos lados respecto a t se obtiene, con la ayuda del teorema 19.1.4*iii*):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Así, $$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{o también} \quad \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0 \ \text{para cualquier } t.$$

EJEMPLO 2 Vectores de velocidad y aceleración

Supóngase que la función vectorial del ejemplo 2 de la sección 19.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique el vector de velocidad y el de aceleración en $t = \pi/4$.

Solución Recuerde que $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula se encuentra en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. Entonces,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

Puesto que la rapidez es $\|\mathbf{v}(t)\| = 2$ para cualquier instante t, se concluye a partir de la argumentación previa a este ejemplo que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique esto último.) Como muestra la **FIGURA 19.2.2**, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se dibujan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular y $\mathbf{a}(\pi/4)$ se dirige hacia el centro del círculo a lo largo de un radio. ≡

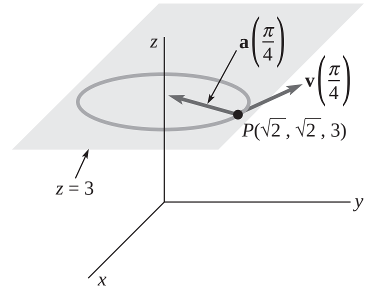


FIGURA 19.2.2 Vectores de velocidad y de aceleración del ejemplo 2

■ **Aceleración centrípeta** Para un movimiento circular en el plano, descrito por $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, donde r_0 y ω son constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Se dice entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Véase la **FIGURA 19.2.3**. Se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$ cuando $v = \|\mathbf{v}(t)\|$ y $a = \|\mathbf{a}(t)\|$.

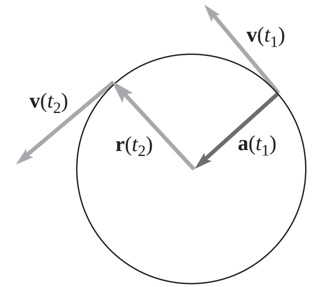


FIGURA 19.2.3 Movimiento circular

■ **Movimiento curvilíneo sobre un plano** Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales se relacionan con el movimiento curvilíneo sobre un plano. Por ejemplo, el movimiento planetario y el de los proyectiles se verifican sobre un plano.

El análisis del movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance* inicia con la aceleración gravitacional escrita en forma vectorial: $\mathbf{a}(t) = -g\,\mathbf{j}$.

Si se lanza un proyectil como se muestra en la **FIGURA 19.2.4**, con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int (-g\,\mathbf{j})\,dt = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{c}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos\theta)\,\mathbf{i} + (-gt + v_0 \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}.$$

Al integrar de nuevo y utilizando $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\theta)t\,\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + s_0\right]\mathbf{j}.$$

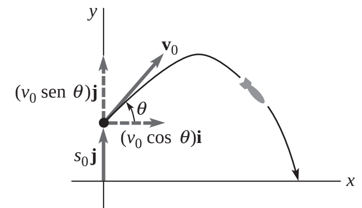
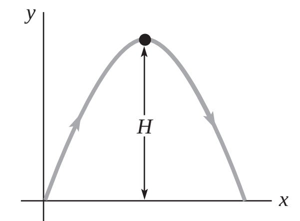


FIGURA 19.2.4 Trayectoria de un proyectil

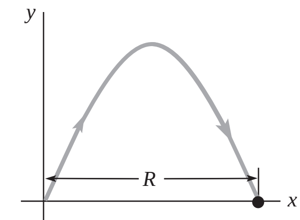
Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas que definen la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + s_0. \tag{1}$$

Desde luego, es interesante encontrar la altura máxima H y el alcance R del proyectil. Como se muestra en la **FIGURA 19.2.5**, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y de $x(t)$, respectivamente.



a) **Altura máxima *H***: Encuentre t_1 para el cual $y'(t_1) = 0$; $H = y_{máx} = y(t_1)$



b) **Alcance *R***: Encuentre $t_1 > 0$ para el cual $y(t_1) = 0$; $R = x_{máx} = x(t_1)$

FIGURA 19.2.5 Altura máxima y alcance de un proyectil

EJEMPLO 3 Trayectoria de una granada

Desde el nivel del terreno, se dispara una granada con una rapidez inicial de 768 pies/s y un ángulo de elevación de 30°. Encuentre: ***a***) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la granada, ***b***) la altitud máxima conseguida, ***c***) el alcance de la granada y ***d***) la rapidez en el impacto.

Solución

a) Inicialmente, se tiene que $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y que

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30°)\,\mathbf{i} + (768 \operatorname{sen} 30°)\,\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 384\,\mathbf{j}. \tag{2}$$

Al integrar $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizando (2) se tiene

$$\mathbf{v}(t) = (384)\sqrt{3}\mathbf{i} + (-32t + 384)\,\mathbf{j}. \tag{3}$$

* El proyectil se dispara o se arroja sin tener impulso propio. Cuando se analizan movimientos balísticos de *largo alcance*, debe considerarse la curvatura de la Tierra.

Al integrar de nuevo se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\,\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\,\mathbf{j}.$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la granada son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \qquad y(t) = -16t^2 + 384t. \tag{4}$$

***b*)** De (4) se observa que $dy/dt = 0$ cuando $-32t + 384 = 0$; esto es, $t = 12$. Así, la altura máxima H alcanzada por la granada es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ pies}.$$

***c*)** De (4) se observa que $y(t) = 0$ cuando $-16t(t - 24) = 0$; esto es, $t = 0$ o $t = 24$. El alcance R es entonces

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ pies}.$$

***d*)** De (3) se obtiene la rapidez con que se impacta la granada:

$$\|\mathbf{v}(24)\| = \sqrt{(-384)^2 + (384\sqrt{3})^2} = 768 \text{ pies/s}. \equiv$$

Comentarios

Se ha visto que la razón con la que cambia la longitud del arco ds/dt es la misma que la rapidez $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Sin embargo, como se observará en la siguiente sección, esto *no* implica que la *aceleración escalar* d^2s/dt^2 sea igual que $\|\mathbf{a}(t)\| = \|\mathbf{r}''(t)\|$. Véase el problema 20 de los ejercicios 19.2.

19.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas del 1 al 8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración para el instante de tiempo indicado. Encuentre la rapidez para dicho instante.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j};\ t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j};\ t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\,\mathbf{j};\ t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j};\ t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k};\ t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k};\ t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 1$

9. Suponiendo que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, ¿en qué puntos la partícula toca al plano xy? ¿Cuál es su aceleración y su velocidad en dichos puntos?

10. Suponiendo que una partícula se mueve en el espacio de forma que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para cualquier instante t, describa su trayectoria.

11. Una granada se dispara desde el nivel del terreno con una rapidez inicial de 480 pies/s y un ángulo de elevación de 30°. Encuentre:

***a*)** la función vectorial y las ecuaciones paramétricas que definen la trayectoria de la granada,

***b*)** la altitud máxima conseguida,

***c*)** el alcance de la granada y

***d*)** la rapidez en el impacto.

12. Resuelva de nuevo el problema 11 si la granada se dispara con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación, pero desde una loma de 1 600 pies de altura.

13. Un automóvil usado se empuja con una rapidez de 4 pies/s por un acantilado de 81 pies de altura y cae al mar. Encuentre la rapidez con la que el coche golpea el agua.

14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del terreno con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los posibles ángulos de elevación que permiten un alcance de 490 m.

15. Un jugador de futbol americano lanza una “bomba” de 100 yardas con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto en que se suelta?

16. Un jugador lanza un balón con un ángulo de 60° con respecto a la horizontal y después con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal; ambos lanzamientos tienen la misma rapidez inicial. Demuestre que el alcance del balón es el mismo en los dos casos. Generalice este resultado para cualquier ángulo $0 < \theta < \pi/2$ con el que se suelte.

17. Al mismo tiempo que el proyectil de un cañón se dispara hacia un objetivo, éste se deja caer desde el estado de reposo. Demuestre que el proyectil atinará al objetivo a la mitad de

su caída. Véase la **FIGURA 19.2.6**. [*Sugerencia:* Considere que el origen se encuentra en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y del objetivo, respectivamente, ¿existe un instante para el que $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

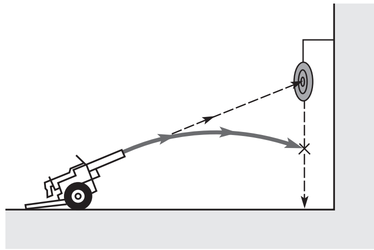


FIGURA 19.2.6 Cañón del problema 17

18. En las maniobras de campo del ejército, los paquetes de abastecimiento y el equipo resistente se dejan caer simplemente desde aviones que vuelan horizontalmente con una rapidez y una altitud bajas. Un avión de abastecimiento vuela horizontalmente a una altura de 1 024 pies sobre un objetivo que tiene velocidad constante de 180 mph. Utilice (1) para determinar la distancia horizontal que un paquete de abastecimiento viaja en relación con el punto desde el cual fue soltado. ¿A qué ángulo α respecto a la horizontal debería soltarse el paquete de abastecimiento, de forma que alcance el objetivo indicado en la **FIGURA 19.2.7**?

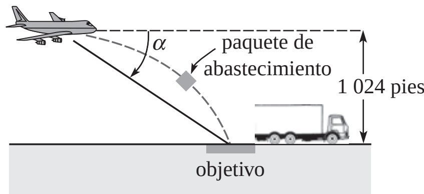


FIGURA 19.2.7 Avión de abastecimiento del problema 18

19. Supóngase que $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se mueve en un círculo de radio r_0 sobre el plano xy. Si $\|\mathbf{v}(t)\| = v$, demuestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = \|\mathbf{a}(t)\| = v^2/r_0$.

20. El movimiento de una partícula en el espacio se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $\|\mathbf{v}(t)\|$.

b) Calcule $s = \int_0^t \|\mathbf{v}(t)\|\, dt$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso *a*).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq \|\mathbf{a}(t)\|$.

21. El **peso efectivo** w_e de una masa m en el ecuador terrestre se define como $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 19. Determine el peso efectivo de una persona de 192 libras si el radio de la Tierra es de 4 000 millas, $g = 32$ pies/s^2 y $v = 1\,530$ pies/s.

22. Considérese a una ciclista que se desplaza por una pista circular plana de radio r_0. Si m es la masa combinada de la ciclista y la bicicleta, llene los espacios en blanco de la **FIGURA 19.2.8**. [*Sugerencia:* Utilice el problema 19 y fuerza = masa × aceleración; suponga que las direcciones son hacia arriba y hacia la izquierda.] El vector **U** resultante indica la dirección en que la ciclista debe inclinarse para evitar la caída. Encuentre el ángulo ϕ de la vertical con el que la ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

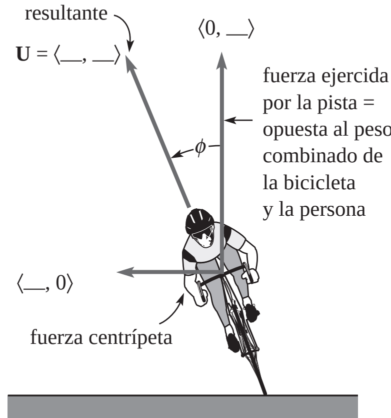


FIGURA 19.2.8 Ciclista del problema 22

23. Utilice los resultados obtenidos en (1) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

24. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial v_0 desde el nivel del terreno, con un ángulo de elevación θ. Utilice (1) para demostrar que la altura máxima y el alcance del proyectil son, respectivamente,

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}.$$

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio del **campo de velocidad** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, donde las componentes v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z + 1)\mathbf{k}$, encuentre $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia:* Utilice separación de variables.]

26. Supóngase que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley de Newton del movimiento se escribe vectorialmente como

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina **momento lineal**. El momento angular de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\mathbf{r}$ es su vector de posición. Si el torque de la partícula respecto al origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que $\boldsymbol{\tau}$ es la rapidez con la que cambia el momento angular.

27. Supóngase que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional **F** que el Sol, de masa M, ejerce sobre un planeta de masa m es igual a

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\,\mathbf{u}.$$

F es una **fuerza central**, o sea, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición **r** del planeta. Aquí, k es la constante gravitacional, $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de **r**, y el signo menos indica que **F** es una fuerza de atracción, es decir, una fuerza dirigida hacia el Sol. Véase la **FIGURA 19.2.9**.

a) Utilice el problema 26 para demostrar que el torque que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es **0**.

b) Explique por qué el momento angular **L** de un planeta es constante.

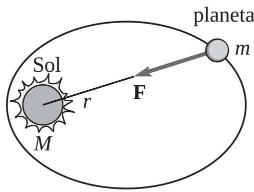


FIGURA 19.2.9 Fuerza **F** del problema 27

28. *(El siguiente problema podría representar un reto.)* En este problema el estudiante debe utilizar las propiedades de las secciones 18.4 y 19.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**: la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco. Se supone que el Sol tiene una masa M y se localiza en el origen, $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve por la atracción gravitacional del Sol, y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

a) Utilice el problema 27 y la segunda ley de Newton del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -kM\frac{\mathbf{u}}{r^2}.$$

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

d) Del inciso *c*) se deduce que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.

e) Demuestre que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y, en consecuencia, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

f) Utilice los incisos *a*), *e*) y *d*) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

g) Al integrar el resultado del inciso *f*) respecto a *t*, se obtiene $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde $\mathbf{d}$ es otro vector constante. Efectúe el producto escalar en ambos lados de esta última expresión por el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 18.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM)\cos\theta},$$

donde $c = \|\mathbf{c}\|$, $d = \|\mathbf{d}\|$ y θ es el ángulo entre $\mathbf{d}$ y $\mathbf{r}$.

h) Explique por qué el resultado del inciso *g*) demuestra la primera ley de Kepler.

i) En el perihelio* los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares entre sí y tienen magnitudes r_0 y v_0, respectivamente. Utilice esta información y los incisos *d*) y *g*) para demostrar que $c = r_0v_0$ y que $d = r_0v_0^2 - kM$.

* Éste es el punto de la órbita donde el cuerpo se encuentra más cercano al Sol.

19.3 Curvatura y componentes de la aceleración

■ Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional generada por la traza de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$. En esta sección se considera con mayor detalle el vector de aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ presentado en la sección anterior. Pero antes de hacer esto, es preciso revisar una cantidad escalar denominada la **curvatura** de una curva.

■ Una definición Se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva C y, en consecuencia,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \qquad (1)$$

es un vector **unitario tangente**. Pero, recordando la parte final de la sección 19.1, si C se parametriza con la longitud de arco s, entonces $d\mathbf{r}/ds$ también proporciona un vector unitario tangente a la curva. La cantidad $\|\mathbf{r}'(t)\|$ de (1) se relaciona con la longitud de arco s por medio de $ds/dt = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Como la curva C es suave, y se sabe que $ds/dt > 0$. Así, por la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y así} \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}(t). \qquad (2)$$

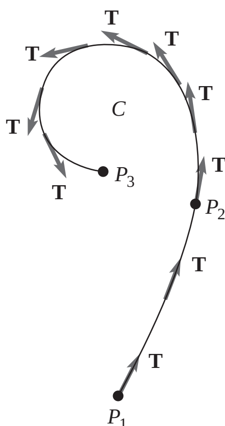


FIGURA 19.3.1 Vectores unitarios tangentes

Ahora supóngase que C tiene la forma mostrada en la **FIGURA 19.3.1**. Al incrementarse s, $\mathbf{T}$ se mueve a lo largo de C, cambiando de dirección pero no de magnitud (es siempre de magnitud unitaria). A lo largo del tramo de la curva comprendido entre P_1 y P_2, el vector $\mathbf{T}$ varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3, donde C se dobla más notoriamente, el cambio en la dirección de la tangente $\mathbf{T}$ es más pronunciado. Se utiliza la *razón* con la cual el vector unitario $\mathbf{T}$ cambia su dirección respecto a la longitud del arco como un indicador de la curvatura de una curva suave C.

Definición 19.3.1 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C. Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector unitario tangente, entonces la **curvatura** de C en un punto es

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|. \tag{3}$$

El símbolo κ de (3) es la letra griega *kappa*. Puesto que las curvas no se parametrizan generalmente por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t. Utilizando de nuevo la regla de la cadena, se escribe

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a.

Solución Un círculo puede describirse por medio de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$. Entonces, de $\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}$ y de $\|\mathbf{r}'(t)\| = a$, se tiene

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

Entonces, de (4) la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}}{a} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$

El resultado de (5) muestra que la curvatura en un punto de un círculo es el recíproco del radio del círculo, e indica un hecho que está de acuerdo con nuestra intuición: un círculo con radio pequeño se curva más que otro con un radio grande. Véase la **FIGURA 19.3.2**. ≡

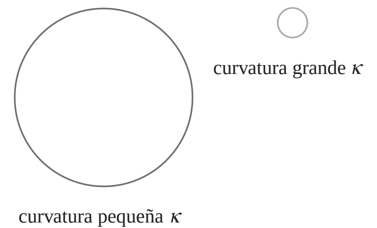


FIGURA 19.3.2 Curvatura de un círculo en el ejemplo 1

Componentes tangencial y normal de la aceleración Supóngase que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o en el tridimensional a lo largo de una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces, la velocidad de la partícula en C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, mientras que su rapidez es $ds/dt = v = \|\mathbf{v}(t)\|$. Así, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}$. Derivando esta última expresión respecto a t se obtiene la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Además se deduce que, al aplicar el teorema 19.1.4*iii*), la derivada de $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ conduce a que $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por lo tanto, en un punto P de C los vectores $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $\|d\mathbf{T}/dt\| \neq 0$, el vector

$$\mathbf{N}(t) = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|} \tag{7}$$

es un vector unitario normal en P a la curva C con la dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ también se denomina vector **normal principal**. Pero como la curvatura es $\kappa = \dfrac{\|dT/dt\|}{v}$, se deduce de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$. Así, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{8}$$

Al reescribir (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T}, \tag{9}$$

se observa que el vector de aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Véase la **FIGURA 19.3.3**. Las funciones escalares $a_T = dv/dt$

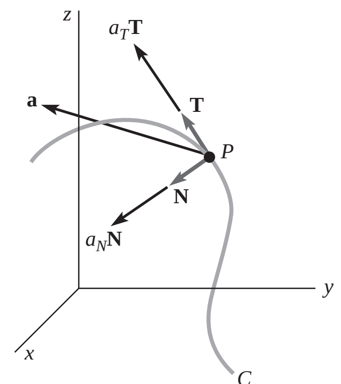


FIGURA 19.3.3 Componentes de la aceleración

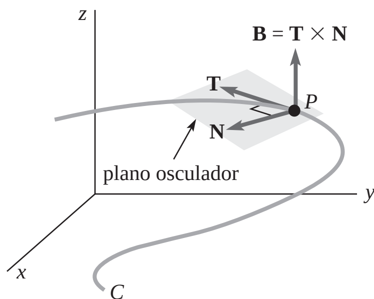


FIGURA 19.3.4 Plano osculador

y $a_N = \kappa v^2$ se denominan **componente tangencial** y **componente normal de la aceleración**, respectivamente. Nótese que la componente tangencial de la aceleración es resultado de un cambio en la *magnitud* de la velocidad **v**, mientras que la componente normal de la aceleración es consecuencia de un cambio en la *dirección* de **v**.

■ Vector binormal Un tercer vector unitario definido por medio de

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

se denomina vector **binormal**. Los tres vectores unitarios **T**, **N** y **B** forman un conjunto de vectores ortogonales entre sí que siguen la regla de la mano derecha, y se denominan el **triedro del movimiento**. El plano de **T** y **N** se denomina **plano osculador**;* el plano de **N** y **B**, **plano normal**, y el plano de **T** y **B**, **plano rectificador**. Véase la **FIGURA 19.3.4**.

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales **T**, **N** y **B** pueden pensarse como un sistema de coordenadas móvil de mano derecha puesto que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \qquad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \qquad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t).$$

Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **marco TNB**.

EJEMPLO 2 Vectores tangente, normal y binormal

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores **T**, **N** y **B** y la curvatura.

Solución Como $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, entonces $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{13}$ y, por lo tanto, de (1) se ve que un vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

A continuación, se tiene

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Así pues, (7) proporciona la normal principal

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\, t\,\mathbf{j}.$$

Ahora, el vector binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\, t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\text{sen}\, t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\, t\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Finalmente, mediante $\|d\mathbf{T}/dt\| = 2/\sqrt{13}$ y $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{13}$, se obtiene a partir de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$

≡

El hecho de que la curvatura del ejemplo 2 sea constante no es sorprendente, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

■ Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura Realizando el producto escalar o el producto vectorial, el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con (9), es posible obtener fórmulas explícitas para las componentes tangencial y normal de la aceleración y para la curvatura que involucren a $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$. Obsérvese que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}}_{0}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}}_{1}) = a_T v$$

* Literalmente, esto significa el plano del "beso".

conduce a la componente tangencial de la aceleración

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{10}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T} \times \mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T} \times \mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N v \mathbf{B}.$$

Como $\|\mathbf{B}\| = 1$, la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{11}$$

Despejando de (11) la curvatura se tiene

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}. \tag{12}$$

EJEMPLO 3 Curvatura de una curva 3D

Se dice que la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una "curva 3D". Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t. Encuentre también la curvatura.

Solución $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$

Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = t + 2t^3$ y $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$, se tiene de (10) que

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Ahora,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Entonces, (11) lleva a

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}} = \sqrt{\frac{t^4 + 4t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1}}.$$

De (12) se infiere que la curvatura de la curva 3D viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

≡

Radio de curvatura El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P de una curva C es el radio de un círculo que en ese punto se "ajusta" a la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina el **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene en P la misma línea tangente que la curva C, y su centro se halla del lado cóncavo de C. Por ejemplo, como se muestra en la **FIGURA 19.3.5**, un automóvil que se mueva sobre una pista curva puede, en cualquier instante, representarse como si se moviera sobre un círculo de radio ρ. Por lo tanto, la componente normal de su aceleración $a_N = \kappa v^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Así, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, se determina la rapidez v con la que el automóvil puede recorrer una curva con peralte sin deslizarse. (Ésta es la idea esencial del problema 22 de los ejercicios 19.2.)

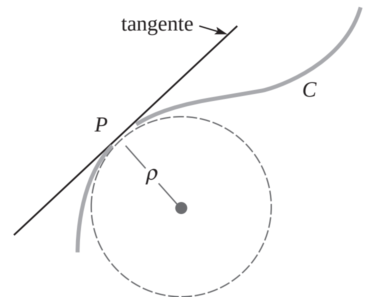


FIGURA 19.3.5 Radio de curvatura

Comentarios

Al reescribir (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T},$$

se observa que la denominada aceleración escalar d^2s/dt^2, referida en la última observación, es la componente tangencial de la aceleración a_T.

19.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 y 2, encuentre el vector unitario tangente para la función de posición proporcionada.

1. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t - \text{sen } t)\mathbf{i} + (t \text{ sien } t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};\ t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \text{ sen } t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Utilice el procedimiento señalado en el ejemplo 2 para encontrar $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ y κ asociados al movimiento sobre una hélice circular genérica descrita por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \text{ sen } t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$.
4. Utilice el procedimiento señalado en el ejemplo 2 para demostrar, en la curva 3D del ejemplo 3, que en el instante $t = 1$:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los problemas 5 y 6, encuentre en el punto correspondiente al valor indicado de t una ecuación del plano osculador para la curva espacial proporcionada.

5. La hélice circular del ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. La curva 3D del ejemplo 3; $t = 1$

En los problemas del 7 al 16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1} t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\,\mathbf{i} + 5 \text{ sen } t\,\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \text{senh } t\,\mathbf{j}$
15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$
17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + b \text{ sen } t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
18. ***a***) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + b \text{ sen } t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
    b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.
19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [*Sugerencia:* Utilice (2) de la sección 18.5.]
20. Encuentre la curvatura en $t = \pi$ para el cicloide descrito por

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \text{sen } t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\ a > 0.$$

21. Sea C una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segunda derivada. Demuestre que la curvatura en un punto viene dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = F(x)$, la fórmula para κ del problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en qué punto la curva es "más afilada".

23. $y = x^2$; $(0, 0)$, $(1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
25. Comente cómo es la curvatura cerca de un punto de inflexión de $y = F(x)$.
26. Demuestre que $\|\mathbf{a}(t)\|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

19.4 Derivadas parciales

Introducción En esta sección se consideran funciones de dos o más variables y se plantea cómo encontrar la rapidez instantánea con la que cambian tales funciones, esto es, la derivada, respecto a cada variable.

■ **Funciones de dos variables** Como vio en sus cursos de cálculo, una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un subconjunto del plano xy un único número z del conjunto R de números reales. Dicho conjunto de pares ordenados (x, y) se llama **dominio** de la función y al conjunto de valores correspondientes de z se le llama **rango**. Una función de dos variables se escribe usualmente como $z = f(x, y)$. Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función, y a z se le llama **variable dependiente**. La **gráfica** de una función $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio tridimensional; véase la **FIGURA 19.4.1**.

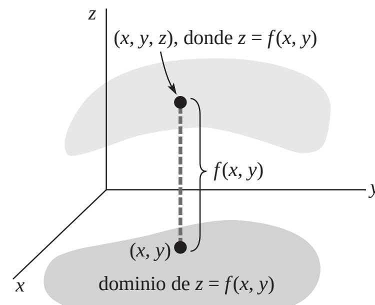


FIGURA 19.4.1 Función de dos variables

■ **Curvas de nivel** Para una función $z = f(x, y)$, las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para un c adecuado, se denominan **curvas de nivel** de f. Se utiliza la palabra *nivel* debido a que se puede interpretar la ecuación $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección, o traza, de $z = f(x, y)$ y el plano (horizontal o nivel) $z = c$; véase la **FIGURA 19.4.2**.

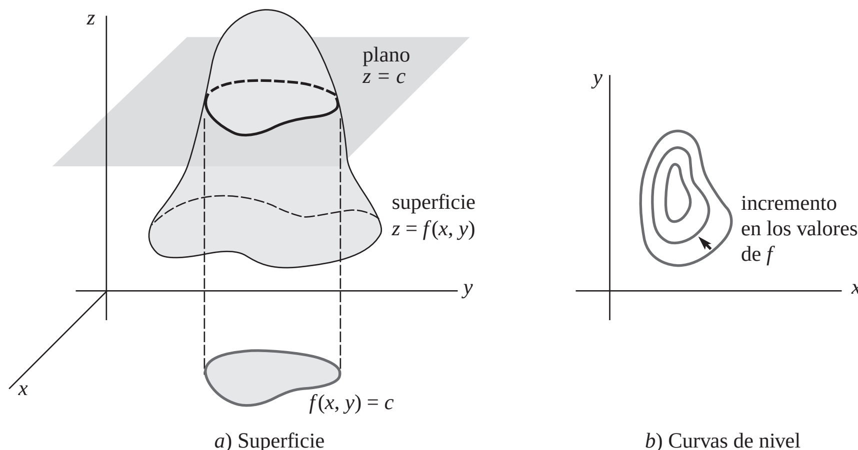


FIGURA 19.4.2 Superficie y curvas de nivel

EJEMPLO 1 Curvas de nivel

Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$ se definen por $y^2 - x^2 = c$. Como se muestra en la **FIGURA 19.4.3**, para $c > 0$ o $c < 0$, los miembros de esta familia de curvas son hipérbolas. Para $c = 0$, se obtienen las líneas $y = x$ y $y = -x$.

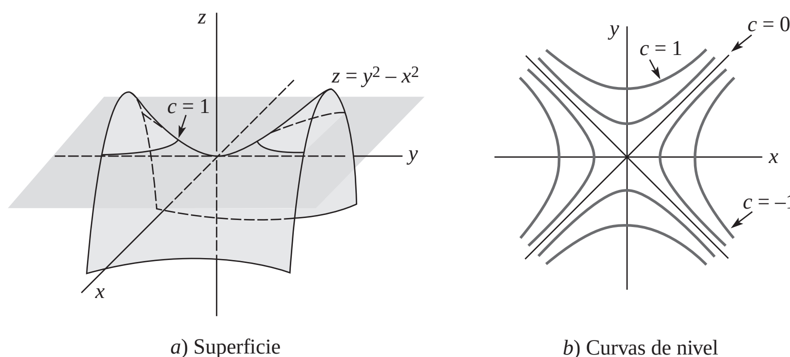


FIGURA 19.4.3 Superficie y curvas de nivel en el ejemplo 1 ≡

■ **Funciones de tres o más variables** Las funciones de tres o más variables se definen de forma análoga a las funciones de dos variables. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada tripleta ordenada de números reales (x, y, z) de un subconjunto del espacio tridimensional un único número w del conjunto R de números reales. Se escribe $w = F(x, y, z)$.

■ **Superficies de nivel** Aunque no se puede dibujar una gráfica de una función de tres variables $w = F(x, y, z)$, sí es posible dibujar las superficies definidas por $F(x, y, z) = c$ para

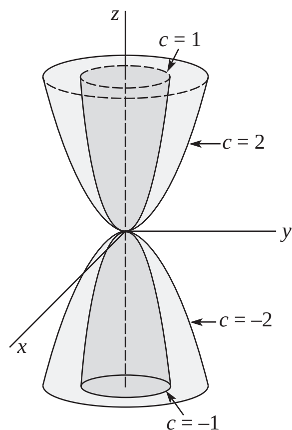


FIGURA 19.4.4 Superficies de nivel del ejemplo 2

valores adecuados de c. Estas superficies se denominan **superficies de nivel**. Dicha expresión es un tanto desafortunada, ya que las superficies de *nivel* no están usualmente niveladas.

EJEMPLO 2 Superficies de nivel

Describa las superficies de nivel para la función $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$.

Solución Para $c \neq 0$ las superficies de nivel vienen dadas por

$$\frac{x^2 + y^2}{z} = c \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = cz.$$

Algunos miembros de esta familia de paraboloides se muestran en la **FIGURA 19.4.4**. ≡

Derivadas parciales La derivada de una función de una variable $y = f(x)$ está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exactamente de la misma forma, se puede definir la derivada de una función de dos variables respecto a *cada* variable. Si $z = f(x, y)$, entonces la **derivada parcial respecto a x** es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{1}$$

y la **derivada parcial respecto a y** es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \tag{2}$$

siempre y cuando existan cada uno de los límites.

En (1), la variable y no cambia durante el proceso de obtención del límite; esto es, y se mantiene constante. En forma similar, en (2) la variable x se mantiene constante. Las dos derivadas parciales (1) y (2) representan entonces la *rapidez con la que cambia f* respecto a x y y, respectivamente. En forma práctica:

Para calcular $\partial z/\partial x$, se utilizan las leyes de la derivación ordinaria considerando a y constante.
Para calcular $\partial z/\partial y$, se utilizan las leyes de la derivación ordinaria considerando a x constante.

EJEMPLO 3 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Se mantiene fija y y se manipulan las constantes en forma acostumbrada. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2y^2 - 8x.$$

Considerando x constante, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y + 6y^5.$$ ≡

Símbolos alternativos Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se representan comúnmente por medio de símbolos alternativos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

Derivadas de orden superior y mixtas Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son a su vez funciones de x y y. En consecuencia, se pueden calcular **segundas derivadas** y **derivadas parciales** de orden superior. De hecho, es posible encontrar la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ respecto a y, y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ respecto a x. Estos últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, para $z = f(x, y)$:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Derivadas parciales mixtas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Símbolos alternativos Las derivadas parciales de segundo y tercer órdenes se denotan por f_{xx}, f_{yy}, f_{xxx}, etc. La notación tipo subíndice para segundas derivadas parciales mixtas es f_{xy} o f_{yx}. Obsérvese que

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Aunque no se demuestra aquí, si una función f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces el orden en que éstas se realicen es irrelevante; esto es,

$$f_{xy} = f_{yx}. \tag{3}$$

Funciones de tres o más variables Las tasas con la que cambia una función de tres variables $w = F(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z son $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. Para calcular, digamos, $\partial w/\partial x$, se deriva respecto a x en forma acostumbrada manteniendo *tanto* y como z constantes. De esta manera se extiende el proceso de derivación parcial a funciones de cualquier número de variables.

EJEMPLO 4 Derivadas parciales

Si $F(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y$, entonces las derivadas parciales respecto a x, y y t son, respectivamente,

$$F_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6y,$$
$$F_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y,$$
$$F_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y.$$

≡

Regla de la cadena La regla de la cadena para funciones de una variable establece que si $y = f(u)$ es una función de u derivable, y $u = g(x)$ es una función de x derivable, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

Para una función compuesta de dos variables $z = f(u, v)$, donde $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$, se esperaría naturalmente tener *dos* fórmulas análogas a (4), puesto que se pueden calcular tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$. La **regla de la cadena** para funciones de dos variables se sintetiza como sigue:

Teorema 19.4.1 **Regla de la cadena**

Si $z = f(u, v)$ es derivable y $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

EJEMPLO 5 Regla de la cadena

Si $z = u^2 - v^3$ donde $u = e^{2x-3y}$, $v = \text{sen}(x^2 - y^2)$, encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Como $\partial z/\partial u = 2u$ y $\partial z/\partial v = -3v^2$, se deduce a partir de (5) que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u(2e^{2x-3y}) - 3v^2[2x\cos(x^2 - y^2)] = 4ue^{2x-3y} - 6xv^2\cos(x^2 - y^2) \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u(-3e^{2x-3y}) - 3v^2[(-2y)\cos(x^2 - y^2)] = -6ue^{2x-3y} + 6yv^2\cos(x^2 - y^2). \tag{7}$$ ≡

Desde luego, en el ejemplo 5 se podrían haber sustituido las expresiones para u y v en la función original y entonces encontrar las derivadas parciales directamente. De la misma forma, las respuestas (6) y (7) se expresan en términos de x y y.

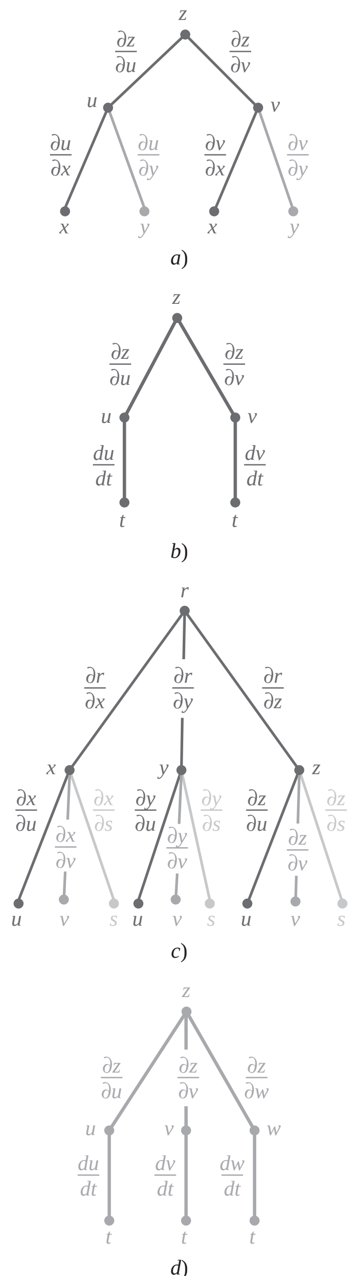


FIGURA 19.4.5 Diagramas de árbol

■ **Caso especial** Si $z = f(u, v)$ es derivable y $u = g(t)$ y $v = h(t)$ son funciones de una única variable t y derivables, entonces el teorema 19.4.1 implica que la derivada ordinaria dz/dt es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{8}$$

■ **Generalizaciones** Los resultados proporcionados en (5) y (8) se generalizan inmediatamente a cualquier número de variables. Si $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y cada una de las variables $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces, bajo las mismas consideraciones que las del teorema 19.4.1, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \tag{9}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. En forma semejante, si las u_i, $i = 1, \ldots, n$, son funciones derivables de una única variable t, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{10}$$

■ **Diagramas de árbol** Los resultados de (5) pueden memorizarse con ayuda de un **diagrama de árbol**. Los puntos del primer diagrama en la **FIGURA 19.4.5*a*)** indican el hecho de que z depende de u y v; u y v dependen, a su vez, de x y y. Para calcular $\partial z/\partial x$, por ejemplo, se lee de izquierda a derecha y se siguen las *dos* trayectorias poligonales en gris que llevan desde z hasta x, se multiplican las derivadas parciales de cada trayectoria, y entonces se suman los productos. El resultado dado en (8) viene representado por medio del segundo diagrama de árbol en la figura 19.4.5*b*).

Se utilizarán diagramas de árbol en los próximos dos ejemplos para ilustrar los casos especiales de (9) y (10).

EJEMPLO 6 Utilización de diagramas de árbol

Si $r = x^2 + y^5z^3$ y $x = uve^{2s}$, $y = u^2 - v^2s$, $z = \text{sen}(uvs^2)$, encuentre $\partial r/\partial s$.

Solución A partir de las trayectorias en gris del diagrama de árbol adjunto, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= 2x(2uve^{2s}) + 5y^4z^3(-v^2) + 3y^5z^2(2uvs\cos(uvs^2)).\end{aligned}$$ ≡

EJEMPLO 7 Utilización de diagramas de árbol

Si $z = u^2v^3w^4$ donde $u = t^2$, $v = 5t - 8$, $w = t^3 + t$, encuentre dz/dt.

Solución En este caso el diagrama de árbol de la figura 19.4.5*d*) indica que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\\ &= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).\end{aligned}$$

Solución alternativa Derive $z = t^4(5t - 8)^3(t^3 + t)^4$ por medio de la regla del producto. ≡

Comentarios

Si $w = F(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, entonces, en forma análoga a (3), las derivadas parciales mixtas son iguales a:

$$F_{xyz} = F_{yzx} = F_{zyx}, \qquad F_{xxy} = F_{yxx} = F_{xyx},$$

y así sucesivamente.

19.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas del 1 a 6, bosqueje algunas de las curvas de nivel asociadas con la función proporcionada.

1. $f(x, y) = x + 2y$ **2.** $f(x, y) = y^2 - x$

3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

4. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

5. $f(x, y) = e^{y-x^2}$ **6.** $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los problemas del 7 a 10, describa, sin graficar, las superficies de nivel.

7. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$

8. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

9. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$

10. $F(x, y, z) = 4y - 2z + 1$

11. Grafique algunas de las superficies de nivel asociadas con $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.

12. Puesto que

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intersecciones x, y y z de la superficie de nivel que pasa por $(-4, 2, -3)$.

En los problemas del 13 a 32, encuentre las derivadas parciales de primer orden de la función proporcionada.

13. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$ **14.** $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$

15. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$

16. $z = \tan(x^3y^2)$

17. $z = \dfrac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$ **18.** $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$

19. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$ **20.** $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$

21. $z = \cos^2 5x + \operatorname{sen}^2 5y$ **22.** $z = e^{x^2 \tan^{-1} y^2}$

23. $f(x, y) = xe^{x^3y}$ **24.** $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{\phi}$

25. $f(x, y) = \dfrac{3x - y}{x + 2y}$ **26.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$

27. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$ **28.** $h(r, s) = \dfrac{\sqrt{r}}{s} - \dfrac{\sqrt{s}}{r}$

29. $w = 2\sqrt{xy} - ye^{y/z}$ **30.** $w = xy \ln xz$

31. $F(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw\cos(ut^2) + (2x^2t)^4$

32. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)^{r^4s^5}$

En los problemas 33 y 34, verifique que la función proporcionada satisface la **ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

33. $z = \ln(x^2 + y^2)$ **34.** $z = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$

En los problemas 35 y 36, verifique que la función proporcionada satisface la **ecuación de onda**:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

35. $u = \cos at \operatorname{sen} x$ **36.** $u = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

37. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la **ecuación de difusión**:

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

38. La presión P generada por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, donde k es una constante, T es la temperatura y V es el volumen. Encuentre:

a) la rapidez con la que cambia P respecto a V,

b) la rapidez con la que cambia V respecto a T y

c) la rapidez con la que cambia T respecto a P.

En los problemas del 39 al 48, utilice la regla de la cadena para encontrar las derivadas parciales indicadas.

39. $z = e^{uv^2}$; $u = x^3$, $v = x - y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

40. $z = u^2\cos 4v$; $u = x^2y^3$, $v = x^3 + y^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

41. $z = 4x - 5y^2$; $x = u^4 - 8v^3$, $y = (2u - v)^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

42. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$; $x = \dfrac{u}{v}$, $y = \dfrac{v^2}{u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

43. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}$; $u = e^{-t}\operatorname{sen}\theta$, $v = e^{-t}\cos\theta$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

44. $w = \tan^{-1}\sqrt{uv}$; $u = r^2 - s^2$, $v = r^2s^2$; $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$

45. $R = rs^2t^4$; $r = ue^{v^2}$, $s = ve^{-u^2}$, $t = e^{u^2v^2}$; $\dfrac{\partial R}{\partial u}, \dfrac{\partial R}{\partial v}$

46. $Q = \ln(pqr)$; $p = t^2\operatorname{sen}^{-1}x$, $q = \dfrac{x}{t^2}$, $r = \tan^{-1}\dfrac{x}{t}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial t}$

47. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \ln(rs + tu)$,
$y = \dfrac{t}{u}\cosh rs$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial u}$

48. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t$; $p = \phi e^{3\theta}$, $q = \cos(\phi + \theta)$, $r = \phi\theta^2$,
$t = 2\phi + 8\theta$; $\dfrac{\partial s}{\partial \phi}, \dfrac{\partial s}{\partial \theta}$

En los problemas del 49 al 52, utilice (8) para encontrar la derivada indicada.

49. $z = \ln(u^2 + v^2)$; $u = t^2$, $v = t^{-2}$; $\dfrac{dz}{dt}$

50. $z = u^3v - uv^4$; $u = e^{-5t}$, $v = \sec 5t$; $\dfrac{dz}{dt}$

51. $w = \cos(3u + 4v)$; $u = 2t + \dfrac{\pi}{2}$, $v = -t - \dfrac{\pi}{4}$; $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\pi}$

52. $w = e^{xy}$; $x = \dfrac{4}{2t + 1}$, $y = 3t + 5$; $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0}$

53. Si $u = f(x, y)$ donde $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, demuestre que la **ecuación de Laplace** $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ conduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

54. La ecuación de estado de Van der Waals para el gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dV/dt representan la rapidez con la que cambian la temperatura y el volumen, respectivamente, utilice la regla de la cadena para encontrar dP/dt.

55. La ecuación de estado para un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, donde P, V y T son presión, volumen y temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como una función de P y T, y también define a T como una función de V y P, demuestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial T}}{\dfrac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial T}{\partial V}}.$$

56. El voltaje en un conductor se incrementa con una rapidez de 2 volts/min y la resistencia decrece a razón de un ohm/min. Utilice $I = E/R$ y la regla de la cadena para encontrar la rapidez con la cual la corriente que pasa por el conductor está cambiando cuando $R = 50$ ohms y $E = 60$ volts.

57. La longitud del lado x del triángulo de la **FIGURA 19.4.6** se incrementa a razón de 0.3 cm/s; el lado y se incrementa a razón de 0.5 cm/s, y el ángulo θ entre ellos se incrementa a razón de 0.1 rad/s. Utilice la regla de la cadena para encontrar la rapidez con la que el área del triángulo está cambiando en el instante $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

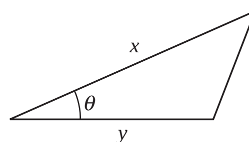


FIGURA 19.4.6 Triángulo del problema 57

58. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional, de forma que sus coordenadas en cualquier instante son $x = 4\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ y $z = 5t$, donde $t \geq 0$. Utilice la regla de la cadena para encontrar la rapidez con que cambia en el instante $t = 5\pi/2$ segundos; su distancia al origen está dada por

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

19.5 Derivada direccional

Introducción En la sección anterior se planteó que para una función f de dos variables x y y, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ proporcionan la pendiente de la tangente a la traza, o curva de intersección entre la superficie definida por $z = f(x, y)$ y los planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes coordenados x y y. En forma equivalente, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ se interpreta como la rapidez con que cambia la función f en la dirección dada por el vector **i**, y $\partial z/\partial y$ como la rapidez con que cambia la función f en la dirección **j**. No existe razón para centrar la atención únicamente en dos direcciones. En esta sección se plantea cómo encontrar la rapidez con la que cambia una función derivable en *cualquier* dirección; véase la **FIGURA 19.5.1**.

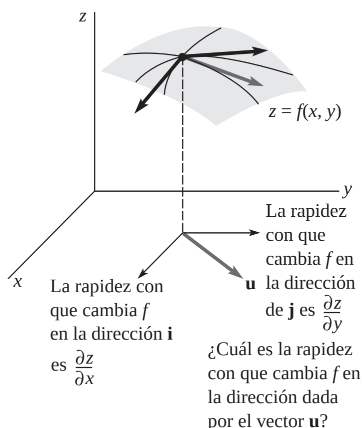


FIGURA 19.5.1 Una dirección arbitraria se denota por medio del vector **u**

El gradiente de una función En esta sección y la siguiente, resulta conveniente introducir un nuevo vector basado en la derivación parcial. Cuando se aplica el **operador diferencial vectorial**

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{o} \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

a una función derivable $z = f(x, y)$ o $w = F(x, y, z)$, se dice que los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \tag{1}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k} \tag{2}$$

son los **gradientes** de las funciones respectivas. El símbolo ∇, una delta mayúscula griega invertida, se denomina "del" o "nabla". Al vector ∇f se le lee usualmente "gradiente de f".

EJEMPLO 1 Gradiente

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución De (1), $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j}$, por lo que

$$\nabla f(x, y) = -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}.$$ ≡

EJEMPLO 2 Gradiente en un punto

Si $F(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, encuentre $\nabla F(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución De (2), $\nabla F(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$ y por lo tanto

$$\nabla F(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$ ≡

Generalización de la derivación parcial Supóngase que $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es un vector unitario en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje x en su lado positivo y es paralelo al vector $\mathbf{v}$ desde $(x, y, 0)$ hasta $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Además, supóngase que el plano perpendicular al plano xy que contiene dichos puntos corta a la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. La pregunta es: ¿cuál es la pendiente de la línea tangente a C en un punto P de coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por $\mathbf{v}$?; véase la **FIGURA 19.5.2**.

De la figura se puede ver que $\Delta x = h\cos\theta$ y $\Delta y = h\operatorname{sen}\theta$, de forma que la pendiente de la línea secante indicada es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{3}$$

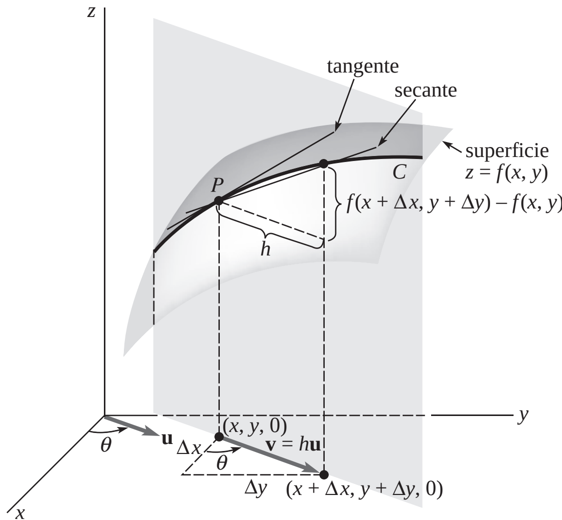


FIGURA 19.5.2 C es la curva de intersección entre la superficie y el plano determinado por el vector $\mathbf{v}$

Se espera que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (3) conforme $h \to 0$. Esta pendiente es la rapidez con la que cambia f en el punto P, en la dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}$. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 19.5.1 Derivada direccional

La **derivada direccional** de $z = f(x, y)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h} \tag{4}$$

siempre y cuando exista dicho límite.

Obsérvese que (4) es en realidad una generalización de la derivación parcial, ya que

$$\theta = 0 \quad \text{implica que} \quad D_{\mathbf{i}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{implica que} \quad D_{\mathbf{j}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Método para el cálculo de la derivada direccional Si bien (4) podría utilizarse para hallar $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ para una función determinada, como de costumbre se busca un procedimiento más eficiente. El siguiente teorema muestra de qué manera el concepto de gradiente de una función desempeña un papel fundamental en el cálculo de una derivada direccional.

Teorema 19.5.1 Cálculo de una derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función de x y y derivable, y $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN

Considérense x, y y θ fijos, de forma que $g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ sea una función de una variable. Se desea comparar el valor de $g'(0)$ calculado por dos métodos diferentes. En primer lugar, mediante la definición de derivada,

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{6}$$

En segundo lugar, por la regla de la cadena,

$$g'(t) = f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\cos\theta) + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\operatorname{sen}\theta) \tag{7}$$

$$= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Aquí, los subíndices 1 y 2 se refieren a las derivadas parciales de $f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ respecto a $x + t\cos\theta$ y a $y + t\operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Cuando $t = 0$, se observa que $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$ son simplemente x y y, por lo que (7) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta. \tag{8}$$

Comparando (4), (6) y (8) se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= [f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}] \cdot (\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$
≡

EJEMPLO 3 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en el punto (1, 1) y en la dirección de un vector unitario cuyo ángulo con el eje x en su lado positivo es $\pi/6$.

Solución Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + 6y$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 6x$, se tiene que

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\,\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, 1) = 10\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j}.$$

Ahora, para $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ se convierte en $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Por lo tanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{u} = (10\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6.$$
≡

EJEMPLO 4 Derivada direccional

Considérese el plano perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la línea tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en el punto $(2, 1, 17)$ y con dirección hacia Q?

Solución Se quiere obtener $D_{\mathbf{u}}\, f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Pero como $\overrightarrow{PQ}$ no es un vector unitario, se propone $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$. Ahora,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por lo tanto, la pendiente requerida es

$$D_{\mathbf{u}}\, f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}. \qquad \equiv$$

Funciones de tres variables Para una función $w = f(x, y, z)$ la derivada direccional se define como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - F(x, y, z)}{h},$$

donde α, β y γ son los ángulos directores del vector $\mathbf{u}$ medidos en relación con los ejes x, y y z en sus lados positivos, respectivamente.* Pero de la misma forma que antes, se puede demostrar que

$$D_{\mathbf{u}} F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{u}. \tag{9}$$

Obsérvese que como $\mathbf{u}$ es un vector unitario, a partir de (10) de la sección 18.3 se deduce que

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(x, y) \qquad \text{y} \qquad D_{\mathbf{u}} F(x, y, z) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla F(x, y, z).$$

Por otra parte, (9) revela que

$$D_{\mathbf{k}} F(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

EJEMPLO 5 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $F(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en el punto $(1, -1, 2)$ en la dirección de $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Se tiene $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 8xy$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4x^2$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$ de forma que

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Como $\|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\| = 7$, entonces $\mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$ es un vector unitario en la dirección indicada. De (9) se deduce que

$$D_{\mathbf{u}} F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}. \qquad \equiv$$

Valor máximo de la derivada direccional Sea f una función de dos o de tres variables. Puesto que (5) y (9) expresan a la derivada direccional como un producto escalar, se observa de (5) del teorema 18.3.2 que

$$D_{\mathbf{u}} f = \|\nabla f\|\, \|\mathbf{u}\| \cos\phi = \|\nabla f\| \cos\phi, \qquad (\|\mathbf{u}\| = 1),$$

---

* Obsérvese que el numerador de (4) puede escribirse como

$$f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta) - f(x, y),$$

donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

donde ϕ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. Como $0 \leq \phi \leq \pi$, se tiene que $-1 \leq \cos\phi \leq 1$ y, en consecuencia, $-\|\nabla f\| \leq D_{\mathbf{u}} f \leq \|\nabla f\|$. En otras palabras:

El valor máximo de una derivada direccional es $\|\nabla f\|$ *y ocurre cuando* $\mathbf{u}$ *tiene la misma dirección que* ∇f (*cuando* $\cos\phi = 1$), (10)

y

El valor mínimo de una derivada direccional es $-\|\nabla f\|$ *y ocurre cuando* $\mathbf{u}$ *y* ∇f *tienen direcciones opuestas* (*cuando* $\cos\phi = -1$). (11)

EJEMPLO 6 Máximo/mínimo de la derivada direccional

En el ejemplo 5, el valor máximo de la derivada direccional de F en el punto $(1, -1, 2)$ es $\|\nabla F(1, -1, 2)\| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$. ≡

Puntos gradientes en la dirección del incremento más rápido de *f* Expresados de otra forma, (10) y (11) exponen que:

El vector gradiente ∇f *apunta en la dirección en la cual f se incrementa de forma más rápida, mientras que* $-\nabla f$ *apunta en la dirección del decremento más rápido de f.*

EJEMPLO 7 Dirección de la subida más empinada

Todos los años se organiza una carrera ciclística en Los Ángeles hacia la cima de una colina, utilizando una carretera famosa por ser la más empinada de la ciudad. Para entender por qué un ciclista con un mínimo de sentido común zigzagueará en su camino ascendente, supóngase que la gráfica de $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $0 \leq z \leq 4$, mostrada en la **FIGURA 19.5.3*a*)** es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

Así, el ascenso más empinado por la colina es una carretera recta cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Como $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$, un ciclista zigzagueará o buscará una dirección $\mathbf{u}$ diferente de ∇f, con el objetivo de reducir esta componente. ≡

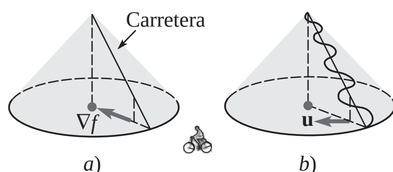


FIGURA 19.5.3 Modelo de una colina en el ejemplo 7

EJEMPLO 8 Dirección de enfriamiento más rápido

La temperatura en una caja rectangular se puede aproximar por

$$T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

Si un mosquito se localiza en $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ¿en qué dirección debería volar para enfriarse lo más rápido posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\,\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\,\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, $\nabla T(\frac{1}{2}, 1, 1) = \frac{1}{4}\mathbf{k}$. Para enfriarse más rápidamente, el mosquito debería volar en la dirección de $-\frac{1}{4}\mathbf{k}$; esto es, debería volar hacia la base de la caja, donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$. ≡

19.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas del 1 al 4, calcule el gradiente para la función proporcionada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$ **2.** $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$

3. $F(x, y, z) = \dfrac{xy^2}{z^3}$ **4.** $F(x, y, z) = xy\cos yz$

En los problemas del 5 al 8, encuentre el gradiente de la función proporcionada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; $(2, 4)$
6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; $(3, 2)$
7. $F(x, y, z) = x^2z^2 \operatorname{sen} 4y$; $(-2, \pi/3, 1)$
8. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $(-4, 3, 5)$

En los problemas 9 y 10, utilice la definición 19.5.1 para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ si **u** forma el ángulo indicado con el eje x en su lado positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30°$

10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45°$

En los problemas del 11 al 20, encuentre la derivada direccional de la función proporcionada en el punto dado y en la dirección indicada.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; $(-1, 1)$, $\theta = \pi/6$

12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; $(3, -1)$, $\theta = \pi/4$

13. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(2, -2)$, $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$; $(2, -1)$, $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; en el punto $(3, 2)$, en la dirección de $(5, 3)$

16. $f(x, y) = x^2 \tan y$; en el punto $(\frac{1}{2}, \pi/3)$, en la dirección del eje x en su lado negativo

17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; $(1, -1, 1)$, $\langle 0, 3, 3\rangle$

18. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}$; $(2, 4, -1)$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; en el punto $(-2, 2, 1)$, en la dirección del eje z negativo

20. $F(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; en el punto $(4, -4, 2)$, en dirección hacia el origen

En los problemas 21 y 22, considérese el plano que pasa por los puntos P y Q, perpendicular al plano xy. Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado respecto a la curva de intersección de este plano; grafique además la función dada en la dirección de Q.

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2)$, $Q(0, 1)$; $(4, 2, 4)$

22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1)$, $Q(-1, 6)$; $(1, 1, -3)$

En los problemas del 23 al 26, encuentre un vector que proporcione la dirección en la que la función dada se incrementa más rápidamente en el punto indicado. Encuentre, también, la rapidez máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$; $(0, \pi/4)$

24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; $(5, 5)$

25. $F(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; $(1, 2, -1)$

26. $F(x, y, z) = xyz$; $(3, 1, -5)$

En los problemas del 27 al 30, encuentre un vector que proporcione la dirección en la que la función dada decrece más rápidamente en el punto indicado. Encuentre, también, la rapidez mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6})$

28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $(2, -2)$

29. $F(x, y, z) = \sqrt{xze^y}$; $(16, 0, 9)$

30. $F(x, y, z) = \ln \dfrac{xy}{z}$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

31. Encuentre la derivada o las derivadas direccionales de $f(x, y) = x + y^2$ en el punto $(3, 4)$ en la dirección de un vector que sea tangente en $(2, 1)$ a la gráfica $2x^2 + y^2 = 9$.

32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es cero en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

33. Supóngase que $\nabla f(a, b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario **u** de forma que:

a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$,

b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un máximo y

c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un mínimo.

34. Suponga que $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?

35. *a)* Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) y en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ del inciso *a*), encuentre $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.

36. Considérese el potencial gravitacional

$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde G y m son constantes. Demuestre que U se incrementa o decrece de forma más rápida a lo largo de una línea que pasa por el origen.

37. Si $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y$, encuentre todos los puntos para los cuales $\|\nabla f\| = 0$.

38. Supóngase que

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7, \quad D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3$$

$$\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}.$$

Encuentre $\nabla f(a, b)$.

39. Considérese la placa rectangular mostrada en la **FIGURA 19.5.4**. La temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que debería tomar un insecto, que comienza su recorrido en el punto $(4, 2)$, para enfriarse lo más rápido posible.

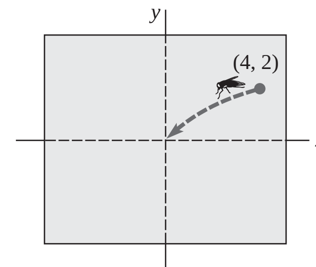


FIGURA 19.5.4 Insecto del problema 39

40. En el problema 39, obsérvese que $(0, 0)$ es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria, que comienza en el punto $(4, 2)$, del insecto que en la búsqueda de un sitio frío lo llevará al origen. Si $\langle x(t), y(t)\rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, utilice entonces el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$. ¿A qué se debe esto? [*Sugerencia:* Recuerde la separación de variables.]

41. La temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica rectangular está dada por $T(x, y) = 100 - 2x^2 - y^2$. Encuentre la trayectoria que seguirá una partícula que comienza en el punto $(3, 4)$ y busca calor moviéndose en la dirección en que la temperatura se incrementa más rápidamente.

42. La temperatura T en un punto (x, y, z) del espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen. Se sabe que $T(0, 0, 1) = 500$. Encuentre la rapidez con la que cambia T en el punto $(2, 3, 3)$ y en dirección hacia $(3, 1, 1)$. ¿En dirección a qué punto, desde $(2, 3, 3)$, se incrementa más rápidamente la temperatura T? ¿Cuál es la máxima velocidad con la que cambia T en el punto $(2, 3, 3)$?

43. Encuentre una función f tal que

$$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}.$$

44. Sean f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} funciones continuas, y **u** y **v** vectores unitarios. Demuestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.

En los problemas del 45 al 48, suponga que f y g son funciones de dos variables derivables. Demuestre la identidad indicada.

45. $\nabla(cf) = c\,\nabla f$

46. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

47. $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\nabla f$

48. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

49. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ y

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

demuestre que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

19.6 Planos tangentes y líneas normales

Introducción El concepto de gradiente de una función de dos o más variables se introdujo en la sección anterior como ayuda para calcular derivadas direccionales. En esta sección se proporciona una interpretación geométrica del vector gradiente.

Interpretación geométrica del gradiente (funciones de dos variables) Supóngase que $f(x, y) = c$ es la curva de nivel de la función diferencial $z = f(x, y)$ que pasa por un punto específico $P(x_0, y_0)$; esto es, $f(x_0, y_0) = c$.

Si esta curva de nivel se parametriza a través de las funciones derivables

$$x = g(t),\ y = h(t) \qquad \text{tales que} \qquad x_0 = g(t_0),\ y_0 = h(t_0),$$

entonces la derivada de $f(g(t), h(t)) = c$ respecto a t es

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{1}$$

Cuando se introducen los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j},$$

(1) se convierte en $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Específicamente, en $t = t_0$, se tiene

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{2}$$

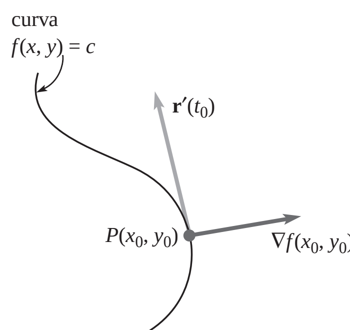


FIGURA 19.6.1 El gradiente es perpendicular al vector tangente de P

Así, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Esto se interpreta como que

∇f es perpendicular a la curva de nivel en P.

Véase la **FIGURA 19.6.1**.

EJEMPLO 1 Gradiente en un punto

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por el punto (2, 3). Grafique el gradiente en dicho punto.

Solución Como $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Por lo tanto,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La **FIGURA 19.6.2** muestra la curva de nivel y $\nabla f(2, 3)$. ≡

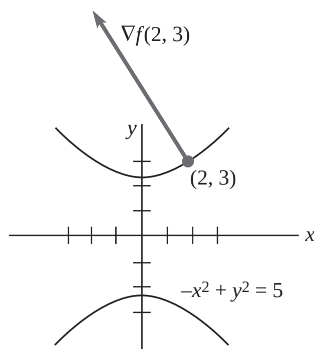


FIGURA 19.6.2 Gradiente del ejemplo 1

Interpretación geométrica del gradiente (funciones de tres variables) Procediendo de la misma forma, sea $F(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función derivable $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones derivables $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C de la superficie para la cual $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$, $z_0 = h(t_0)$, entonces la derivada de $F(f(t), g(t), h(t)) = 0$ implica que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

o $$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = 0. \tag{3}$$

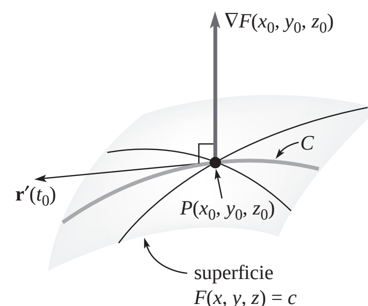


FIGURA 19.6.3 El gradiente es perpendicular a la superficie de nivel en P

En particular, en $t = t_0$, (3) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)\cdot\mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{4}$$

Así, cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento es válido para cualquier curva derivable que pase por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie, se concluye que

∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en P.

Véase la **FIGURA 19.6.3**.

EJEMPLO 2 Gradiente en un punto

Encuentre la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Grafique el gradiente en dicho punto.

Solución Como $F(1, 1, 1) = 3$, la superficie de nivel que pasa por el punto (1, 1, 1) es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. El gradiente de la función es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k},$$

por lo que, en el punto dado, $\nabla F(1, 1, 1) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. La superficie de nivel y $\nabla F(1, 1, 1)$ se ilustran en la **FIGURA 19.6.4.** ≡

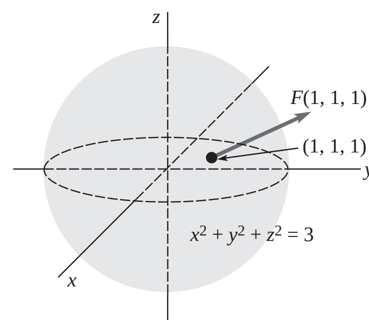


FIGURA 19.6.4 Gradiente del ejemplo 2

Plano tangente Un problema básico del cálculo diferencial consiste en encontrar la ecuación de una línea tangente a la gráfica de una función. En el espacio tridimensional, el problema análogo es encontrar la ecuación de un **plano tangente** a una superficie. Se supone, de nuevo, que $w = F(x, y, z)$ es una función derivable y que $F(x, y, z) = c$ es una superficie.

Definición 19.6.1 Plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la gráfica de $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. El **plano tangente** en P es aquel que pasa por P y es perpendicular a ∇F calculado en P.

Entonces, si $P(x, y, z)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ son puntos del plano tangente y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ son sus respectivos vectores de posición, entonces la ecuación vectorial del plano tangente es $\nabla F(x_0, y_0, z_0)\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Véase la **FIGURA 19.6.5**. Este último resultado se sintetiza como sigue:

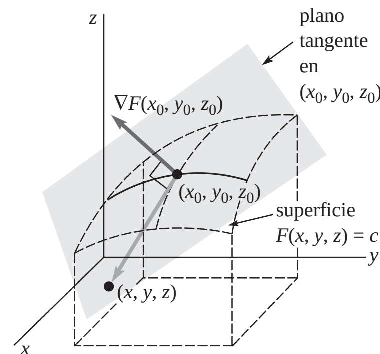


FIGURA 19.6.5 El plano tangente es perpendicular al gradiente en P

Teorema 19.6.1 Ecuación del plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es $\mathbf{0}$. Entonces, la ecuación del plano tangente en P es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{5}$$

EJEMPLO 3 Ecuación del plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $x^2 - 4y^2 + z^2 = 16$ en el punto (2, 1, 4).

Solución Definiendo $F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + z^2$, la superficie proporcionada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(2, 1, 4) = 16$ que pasa por el punto (2, 1, 4). Entonces, $F_x(x, y, z) = 2x$, $F_y(x, y, z) = -8y$ y $F_z(x, y, z) = 2z$, de forma que

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(2, 1, 4) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

De (5) se tiene que la ecuación del plano tangente es

$$4(x - 2) - 8(y - 1) + 8(z - 4) = 0 \quad \text{o} \quad x - 2y + 2z = 8. \qquad \equiv$$

Superficies dadas por $z = f(x, y)$ Para una superficie expresada explícitamente por una función derivable $z = f(x, y)$, se define $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ o $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Así, un punto (x_0, y_0, z_0) se halla sobre la gráfica $z = f(x, y)$ si y sólo si, se encuentra también en la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Esto se deduce de $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$.

EJEMPLO 4 Ecuación del plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$ en el punto $(1, -1, 5)$.

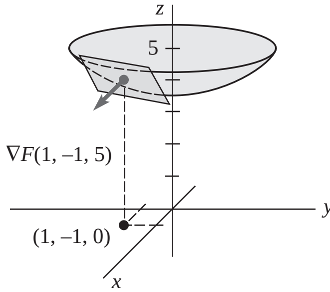


FIGURA 19.6.6 Plano tangente del ejemplo 4

Solución Se define $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z + 4$ de forma que la superficie de nivel de F que pasa por el punto dado es $F(x, y, z) = F(1, -1, 5)$ o $F(x, y, z) = 0$. Entonces, $F_x = x$, $F_y = y$ y $F_z = -1$, de modo que

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Así, de (5) la ecuación deseada es

$$(x + 1) - (y - 1) - (z - 5) = 0 \quad \text{o} \quad -x + y + z = 7.$$

Véase la **FIGURA 19.6.6**. ≡

Línea normal Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es $\mathbf{0}$. La línea que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se denomina la **línea normal** a la superficie en P. La línea normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en P.

EJEMPLO 5 Línea normal a una superficie

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea normal a la superficie del ejemplo 4 en el punto $(1, -1, 5)$.

Solución Un vector director para la línea normal en el punto $(1, -1, 5)$ es $\nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. De aquí se deduce que $x = 1 + t$, $y = -1 - t$ y $z = 5 - t$. ≡

Expresada en forma de ecuaciones simétricas, la recta normal a una superficie $F(x, y, z) = c$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

En el ejemplo 5, debe comprobar que las ecuaciones simétricas de la recta normal en $(1, -1, 5)$ son

$$x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 5}{-1}.$$

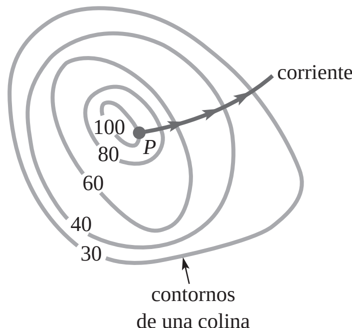


FIGURA 19.6.7 La corriente es perpendicular a los contornos

Comentarios

El flujo del agua que cae por una colina elige una trayectoria en la dirección del mayor cambio en altitud. La **FIGURA 19.6.7** muestra los contornos, o curvas de nivel, de una colina. Como aparece en la figura, una corriente que comienza en el punto P seguirá una trayectoria perpendicular a los contornos. Después de leer las secciones 19.5 y 19.6, el estudiante debe ser capaz de explicar por qué sucede de este modo.

19.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas del 1 al 12, bosqueje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Bosqueje el gradiente en dicho punto.

1. $f(x, y) = x - 2y$; $(6, 1)$ **2.** $f(x, y) = \dfrac{y + 2x}{x}$; $(1, 3)$

3. $f(x, y) = y - x^2$; $(2, 5)$ **4.** $f(x, y) = x^2 + y^2$; $(-1, 3)$

5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; $(-2, -3)$

6. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$; $(2, 2)$

7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$; $(1, 1)$

8. $f(x, y) = \dfrac{y - 1}{\operatorname{sen} x}$; $(\pi/6, \frac{3}{2})$

9. $F(x, y, z) = y + z$; $(3, 1, 1)$

10. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; $(1, 1, 3)$

11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $(3, 4, 0)$

12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$; $(0, -1, 1)$

En los problemas 13 y 14, encuentre los puntos de la superficie proporcionada en los cuales el gradiente es paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2$; $4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

14. $x^3 + y^2 + z = 15$; $27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas del 15 al 24, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación proporcionada en el punto indicado.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $(-2, 2, 1)$

16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8$; $(2, 4, 1)$

17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$; $(6, 2, 3)$

18. $xy + yz + zx = 7$; $(1, -3, -5)$

19. $z = 25 - x^2 - y^2$; $(3, -4, 0)$

20. $xz = 6$; $(2, 0, 3)$

21. $z = \cos(2x + y)$; $(\pi/2, \pi/4, -1/\sqrt{2})$

22. $x^2y^3 + 6z = 10$; $(2, 1, 1)$

23. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

24. $z = 8e^{-2y} \operatorname{sen} 4x$; $(\pi/24, 0, 4)$

En los problemas 25 y 26, encuentre los puntos de la superficie proporcionada en los cuales el plano tangente es paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7$; $2x + 4y + 6z = 1$

26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33$; $8x + 4y + 6z = 5$

27. Encuentre los puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.

28. Encuentre los puntos de la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los que el plano tangente es paralelo a: *a*) el plano *xz*, *b*) el plano *yz* y *c*) el plano *xy*.

En los problemas 29 y 30, demuestre que la segunda ecuación corresponde a la ecuación del plano tangente a la gráfica de la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0).

29. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

30. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

31. Demuestre que todos los planos tangentes a la gráfica de $z^2 = x^2 + y^2$ pasan por el origen.

32. Demuestre que la suma de las intersecciones *x*, *y* y *z* de todos los planos tangentes a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, donde $a > 0$, es el número *a*.

En los problemas 33 y 34, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea normal en el punto indicado. En los problemas 35 y 36, encuentre ecuaciones simétricas para la línea normal.

33. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$; $(1, -1, 1)$

34. $z = 2x^2 - 4y^2$; $(3, -2, 2)$

35. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3)$

36. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(3, 4, 5)$

37. Demuestre que todas las líneas normales a la gráfica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasan por el origen.

38. Se dice que dos superficies son **ortogonales** en un punto *P* de intersección si sus líneas normales en *P* son ortogonales. Demuestre que las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en *P* si y sólo si, $F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$.

En los problemas 39 y 40, utilice el resultado del problema 38 para demostrar que las superficies proporcionadas son ortogonales en un punto de intersección.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $z = 1/xy^2$

19.7 Divergencia y rotacional

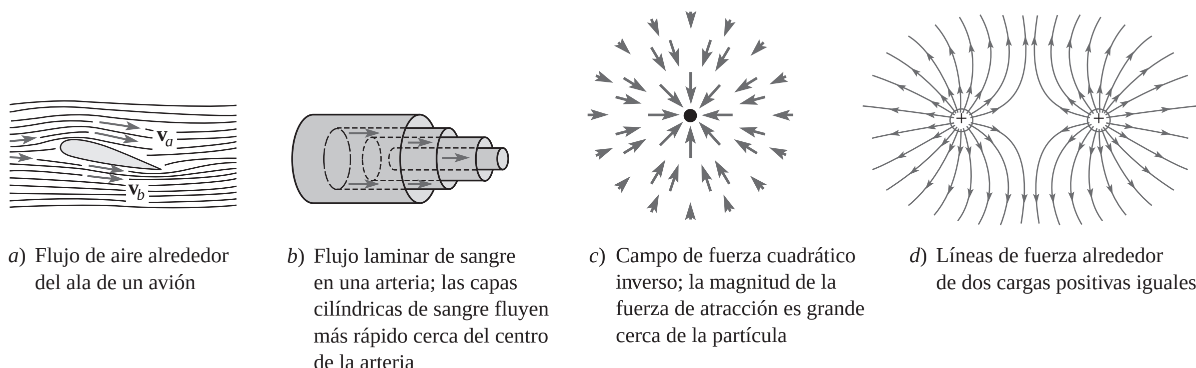
Introducción En la sección 19.1 se presentó el concepto de función vectorial de una variable. En esta sección se examinan funciones vectoriales de dos y tres variables.

Campos vectoriales Las funciones vectoriales de dos y tres variables,

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

también se denominan **campos vectoriales**. Por ejemplo, el movimiento del viento o de un fluido puede describirse por medio de un *campo de velocidad*, puesto que es posible asignar a cada punto un vector que representa la velocidad de una partícula en el punto; véase la **FIGURA 19.7.1*a*)** y ***b*)**. El concepto de *campo de fuerza* desempeña un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo; véase la **FIGURA 19.7.1*c*)** y ***d*)**.



a) Flujo de aire alrededor del ala de un avión

b) Flujo laminar de sangre en una arteria; las capas cilíndricas de sangre fluyen más rápido cerca del centro de la arteria

c) Campo de fuerza cuadrático inverso; la magnitud de la fuerza de atracción es grande cerca de la partícula

d) Líneas de fuerza alrededor de dos cargas positivas iguales

FIGURA 19.7.1 Campos vectoriales diversos

EJEMPLO 1 Campo vectorial bidimensional

Grafique el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución Una forma consiste simplemente en escoger puntos en el plano xy y graficar entonces el vector $\mathbf{F}$ en dichos puntos. Por ejemplo, en (1, 1) se dibujaría el vector $\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Para el campo vectorial dado es posible dibujar sistemáticamente vectores de la misma longitud. Obsérvese que $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que vectores de la misma longitud k deben hallarse a lo largo de la curva definida por $\sqrt{x^2 + y^2} = k$; esto es, en cualquier punto del círculo $x^2 + y^2 = k^2$ un vector debería tener longitud k. Por simplicidad, se eligen círculos que contienen algunos puntos con coordenadas enteras. Por ejemplo, para $k = 1$, $k = \sqrt{2}$ y $k = 2$, se tiene:

$x^2 + y^2 = 1$: en los puntos $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$, los vectores correspondientes $\mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}, \mathbf{i}$ tienen la misma longitud 1.

$x^2 + y^2 = 2$: en los puntos $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ los vectores correspondientes $-\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}$ tienen la misma longitud $\sqrt{2}$.

$x^2 + y^2 = 4$: en los puntos $(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$ los vectores correspondientes $2\mathbf{j}, -2\mathbf{i}, -2\mathbf{j}, 2\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 2.

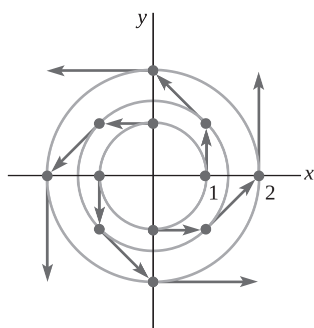


FIGURA 19.7.2 Campo vectorial del ejemplo 1

La **FIGURA 19.7.2** muestra los vectores en estos puntos. ≡

En la sección precedente se vio que el operador nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

combinado con una función escalar $\phi\,(x, y, z)$ produce un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

denominado gradiente de ϕ o un campo gradiente. El operador nabla también se combina con un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ en dos formas diferentes: en un caso, generando otro campo vectorial y en el otro produciendo una función escalar. A continuación se supondrá que P, Q y R tienen derivadas parciales continuas.

Definición 19.7.1 Rotacional

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

En la práctica, rot **F** se calcula a partir del producto vectorial del operador nabla con el vector **F**:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (1)$$

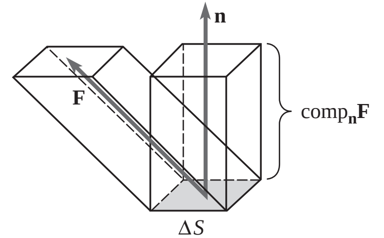


FIGURA 19.7.3 Flujo de un fluido a través del elemento de área ΔS

Existe otra combinación de derivadas parciales de las funciones que componen a un campo vectorial que se presenta frecuentemente en ciencias e ingeniería. Antes de plantear la siguiente definición, deben considerarse estos antecedentes.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces, como se muestra en la **FIGURA 19.7.3**, el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo (esto es, el **flujo** del campo vectorial **F** que atraviesa el área ΔS) se aproxima por

$$(\text{altura})(\text{área de la base}) = (\text{comp}_\mathbf{n}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,\Delta S, \quad (2)$$

donde **n** es un vector unitario normal a la superficie. Considérese ahora el paralelepípedo rectangular mostrado en la **FIGURA 19.7.4**. Para calcular el flujo total que sale de **F** a través de sus seis caras se calcula primero el flujo total que sale de las caras paralelas. El área de la cara F_1 es $\Delta x\,\Delta z$ y su vector unitario normal saliente es $-\mathbf{j}$, por lo que, según (2), el flujo de **F** que atraviesa a F_1 es aproximadamente

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = -Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z.$$

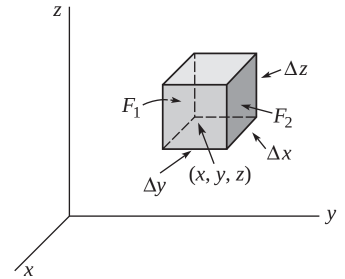


FIGURA 19.7.4 ¿Cuál es el flujo total del campo vectorial que circula a través de este elemento?

El flujo que sale de la cara F_2, cuyo vector normal saliente es **j**, se aproxima por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = Q(x, y + \Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z.$$

En consecuencia, el flujo total que sale de estas caras paralelas es

$$Q(x, y + \Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z + (-Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z) = [Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]\,\Delta x\,\Delta z. \quad (3)$$

Al multiplicar (3) por $\Delta y/\Delta y$ y recordando la definición de una derivada parcial, se tiene para Δy pequeñas,

$$\frac{Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)}{\Delta y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Argumentando de igual forma, se observa que las contribuciones al flujo total que sale del paralelepípedo a través de las dos caras paralelas al plano yz, y de las dos caras paralelas al plano xy son, respectivamente,

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Sumando los resultados, se observa que el flujo neto de **F** que sale del paralelepípedo es aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Al dividir la última expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta z$ se obtiene el flujo de **F** que sale por unidad de volumen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

A esta combinación de derivadas parciales se le asigna un nombre especial.

Definición 19.7.2 Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Obsérvese que div **F** se escribe también en términos del operador nabla como:

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} R(x, y, z). \quad (4)$$

EJEMPLO 2 Rotacional y divergencia

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\,\mathbf{i} + 4x^5y^2z\,\mathbf{j} - y^4z^6\,\mathbf{k}$, encuentre ***a***) rot **F**, ***b***) div **F** y ***c***) div(rot **F**).

Solución ***a***) De (1),

$$\text{rot}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix}$$

$$= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}.$$

b) De (4),

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^5y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^4z^6)$$

$$= 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5.$$

c) De la definición 19.7.2 y del inciso *a*) encontramos

$$\text{div(rot}\, \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(-4y^3z^6 - 4x^5y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-4z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(20x^4y^2z - 3x^2y^2)$$

$$= 0 - 20x^4y^2 + 0 + 20x^4y^2 = 0.$$ ≡

Se propone al lector que demuestre las siguientes dos importantes propiedades. Si *f* es una función escalar con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{rot(grad}\, f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (5)$$

También, si **F** es un campo vectorial que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div(rot}\, \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (6)$$

Véanse el inciso *c*) del ejemplo 2 y los problemas 29 y 30 de los ejercicios 19.7.

■ **Interpretaciones físicas** Maxwell* introdujo la palabra *rotacional* en sus estudios de campos electromagnéticos. Sin embargo, el rotacional se entiende fácilmente en conexión con el flujo de fluidos. Si un instrumento con paletas, como el que se muestra en la **FIGURA 19.7.5**, se inserta en el flujo de un fluido, entonces el rotacional del campo de velocidad **F** es una medida de la tendencia del fluido a hacer girar el dispositivo alrededor de su eje vertical w. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se dice entonces que el flujo del fluido es **irrotacional**, y ello significa que se encuentra libre de vórtices o remolinos que provoquen la rotación de las paletas.† En la **FIGURA 19.7.6**, el eje w de las paletas se dirige hacia afuera de la página.

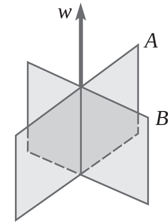
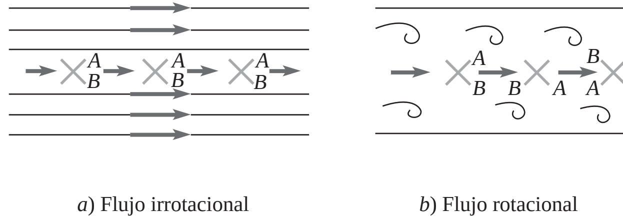


FIGURA 19.7.5 Instrumento con palas

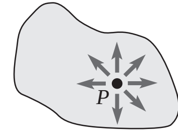


a) Flujo irrotacional *b*) Flujo rotacional

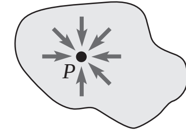
FIGURA 19.7.6 Flujo irrotacional en *a*); flujo rotacional en *b*)

En los antecedentes que conducen a la definición 19.7.2 se observa que la divergencia de un campo de velocidad **F** cerca de un punto $P(x, y, z)$ es el flujo por unidad de volumen. Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, se dice entonces que P es una **fuente** para **F**, ya que existe un flujo neto saliente del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) < 0$, entonces se dice que P es un **hundimiento** para **F**, puesto que existe un flujo neto entrante del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) = 0$, no existen ni fuentes ni hundimientos cerca de P; véase la **FIGURA 19.7.7**.

La divergencia de un campo vectorial se interpreta también como una medida de la rapidez con la que cambia la densidad del fluido en un punto. En otras palabras, div **F** es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el fluido es **incompresible**. En teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el campo vectorial **F** es **solenoidal**.



a) div $\mathbf{F}(P) > 0$; P es una fuente



b) div $\mathbf{F}(P) < 0$; P es un hundimiento

FIGURA 19.7.7 P es una fuente en *a*); P es un hundimiento en *b*)

* James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés.
† En inglés se utiliza la palabra *curl*, empleándose el símbolo curl **F** en lugar de rot **F**.

19.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas del 1 al 6, grafique algunos vectores representativos del campo vectorial proporcionado.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$

En los problemas del 7 al 16, encuentre el rotacional y la divergencia del campo vectorial proporcionado.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = 10yz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + 6x^3\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (3z^2 + y^2)\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)^3\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + xye^{2y}\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^3y^2 - xy)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\,\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + z \cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los problemas del 17 al 24, verifique la igualdad proporcionada; suponga que **a** es un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

17. div $\mathbf{r} = 3$
18. rot $\mathbf{r} = \mathbf{0}$
19. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
20. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
22. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
23. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
24. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$

En los problemas del 25 al 32, verifique la igualdad proporcionada. Considere la continuidad de todas las derivadas parciales.

25. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

26. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$

27. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

28. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

29. $\text{rot}(\text{grad}\, f) = \mathbf{0}$

30. $\text{div}(\text{rot}\, \mathbf{F}) = 0$

31. $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot}\, \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot}\, \mathbf{G}$

32. $\text{rot}(\text{rot}\, \mathbf{F} + \text{grad}\, f) = \text{rot}(\text{rot}\, \mathbf{F})$

33. Demuestre que

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Esto se conoce como **laplaciano**, y también se escribe como $\nabla^2 f$.

34. Demuestre que $\nabla \cdot (f\nabla f) = f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2$, donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano, definido en el problema 33. [*Sugerencia:* Véase el problema 27.]

35. Encuentre rot(rot **F**) para el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + 4yz^2\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$.

36. ***a***) Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, demuestre que $\text{rot}(\text{rot}\, \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \text{grad}(\text{div}\, \mathbf{F})$, donde

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2(P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}.$$

b) Utilice la igualdad del inciso *a*) para obtener el resultado del problema 35.

37. Se dice que cualquier función escalar f es **armónica** si $\nabla^2 f = 0$. Verifique que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ es armónica excepto en el origen. $\nabla^2 f = 0$ se le denomina la **ecuación de Laplace**.

38. Verifique que

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{2}{x^2 y^2 - 1}\right), \quad x^2 + y^2 \neq 1$$

satisface la ecuación de Laplace para dos variables

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

39. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de una masa m_1 y sea m_2 una masa localizada en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3}\,\mathbf{r},$$

verifique que $\text{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\text{div}\, \mathbf{F} = 0$, donde $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

40. Supóngase que un cuerpo rota con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje. Si **r** es el vector de posición de un punto P sobre el cuerpo medido desde el origen, entonces el vector velocidad lineal **v** de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; véase la **FIGURA 19.7.8**. Si $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\,\mathbf{i} + \omega_2\,\mathbf{j} + \omega_3\,\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\, \mathbf{v}$.

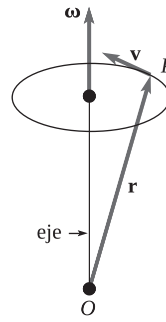


FIGURA 19.7.8 Cuerpo rotatorio del problema 40

En los problemas 41 y 42, suponga que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial proporcionado es solenoidal. [*Sugerencia:* Véase el problema 31.]

41. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$

42. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f\nabla g)$

43. El campo vectorial de velocidad para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro viene dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathbf{j}\right]$$

donde A es una constante positiva; véase la **FIGURA 19.7.9**.

a) Demuestre que cuando el punto (x, y) se encuentra lejos del origen, $\mathbf{F}(x, y) \approx A\,\mathbf{i}$.

b) Demuestre que **F** es irrotacional.

c) Demuestre que **F** es incompresible.

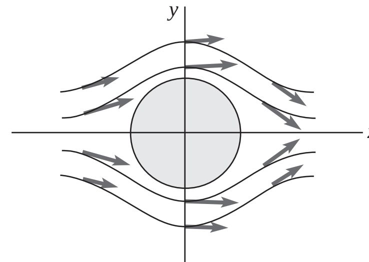


FIGURA 19.7.9 Campo vectorial del problema 43

44. Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ representan los campos eléctrico y magnético en un espacio vacío, entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\text{div}\, \mathbf{E} = 0, \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div}\, \mathbf{H} = 0, \qquad \text{rot}\, \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Utilice la igualdad del problema 36*a*) para demostrar que **E** y **H** satisfacen

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

45. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2 yz\mathbf{i} - xy^2 z\mathbf{j} + (z + 5x)\mathbf{k}$. Explique por qué **F** no es el rotacional de otro campo vectorial **G**.

19.8 Integrales de línea

Introducción El concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, la *integración de una función definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función definida a lo largo de una curva.* Con este propósito se necesita introducir cierta terminología sobre curvas.

Terminología Supóngase que C es una curva parametrizada por medio de $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $a \le t \le b$, y A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente. Se dice que:

i) C es una **curva suave** si f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no nulos simultáneamente en el intervalo abierto (a, b).

ii) C es **suave por tramos** si está formada por un número finito de curvas suaves C_1, $C_2, \ldots, C_n$ unidas en sus extremos, esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.

iii) C es una **curva cerrada** si $A = B$.

iv) C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza consigo misma.

v) Si C no es una curva cerrada, entonces la **dirección positiva** de C es la que corresponde a los valores crecientes de t.

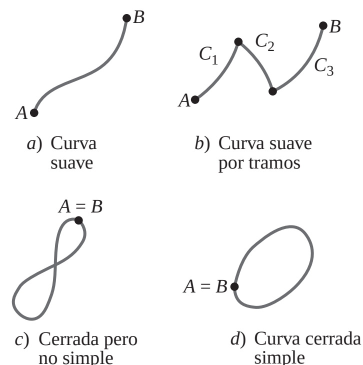


FIGURA 19.8.1 Curvas diversas

La **FIGURA 19.8.1** ilustra cada uno de los tipos de curva definidos en *i*)-*iv*).

Esta misma terminología se utiliza para las curvas espaciales. Por ejemplo, una curva C definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, donde $a \le t \le b$, es suave si f', g' y h' son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente nulas en (a, b).

Integral definida Antes de definir la integración a lo largo de una curva, se revisan los cinco pasos que conducen a la definición de la integral definida.

1. Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.
2. Se efectúa una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. La partición se denota como P en la **FIGURA 19.8.2*a*)**.
3. Sea $\|P\|$ la longitud del subintervalo más largo. Al número $\|P\|$ se le denomina la **norma** de la partición P.
4. Se elige un punto de muestra x_k^* en cada subintervalo. Véase la figura 19.8.2*b*).
5. Se genera la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$.

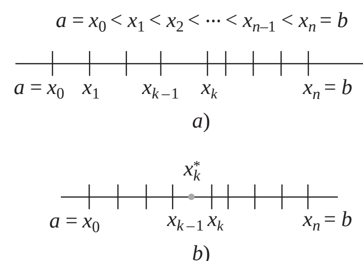


FIGURA 19.8.2 Punto de muestra en el subintervalo k-ésimo

La integral definida de una función de una única variable está dada por el límite de una suma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Integrales de línea en el plano Los siguientes cinco pasos análogos llevan a la definición de tres **integrales de línea*** en el plano.

1. Sea $z = G(x, y)$ una función definida en alguna región que contiene a la curva suave C definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$.
2. Divídase C en n subarcos de longitudes Δs_k de acuerdo con la partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$. Sean Δx_k y Δy_k las longitudes de las proyecciones de cada subarco sobre los ejes x y y, respectivamente.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición o la longitud del subarco más largo.
4. Escójase un punto (x_k^*, y_k^*) de cada subarco. Véase la **FIGURA 19.8.3**.
5. Genere las sumas.

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

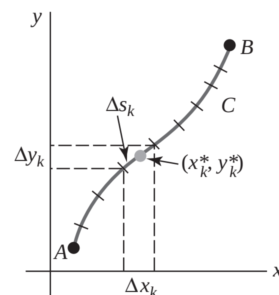


FIGURA 19.8.3 Punto de muestra en el subarco k-ésimo

* La elección del nombre es desafortunada; uno más apropiado sería **integrales de curva**.

Definición 19.8.1 Integrales de línea en el plano

Sea G una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene a una curva suave C.

i) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A a B respecto a x** es

$$\int_C G(x, y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k.$$

ii) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A a B respecto a y** es

$$\int_C G(x, y)\,dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.$$

iii) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A hasta B respecto a la longitud del arco** es

$$\int_C G(x, y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

Puede demostrarse que si $G(x, y)$ es continua en C, entonces las integrales definidas en *i*), *ii*) y *iii*) existen efectivamente. En lo que sigue se considerará que existe siempre continuidad en G.

■ **Método de evaluación (curva definida paramétricamente)** Las integrales de línea de la definición 19.8.1 pueden calcularse de dos formas: ya sea que la curva C se defina paramétricamente o bien mediante una función explícita. En cualquier caso, la idea básica es convertir la integral de línea a una integral definida por una única variable. Si C es una curva suave parametrizada por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces simplemente en la integral se reemplazan x y y por las funciones $f(t)$ y $g(t)$, y la derivada apropiada dx, dy o ds por $f'(t)\,dt$, $g'(t)\,dt$ o $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$. La expresión $ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$ se denomina **diferencial de longitud de arco**. La integración se desarrolla respecto a la variable t en la forma usual:

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(f(t), g(t))\,f'(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(f(t), g(t))\,g'(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(f(t), g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt. \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de integrales de línea

Calcule ***a***) $\int_C xy^2\,dx$, ***b***) $\int_C xy^2\,dy$ y ***c***) $\int_C xy^2\,ds$ en el cuarto de círculo C definido por $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi/2$. Véase la **FIGURA 19.8.4**.

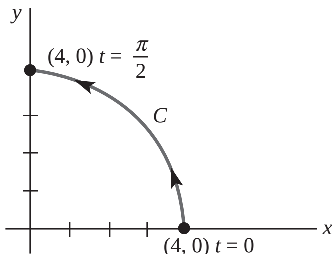


FIGURA 19.8.4 Curva C del ejemplo 1

Solución ***a***) De (1),

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(-4\,\text{sen}\,t\,dt)}^{dx}$$

$$= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 t\cos t\,dt$$

$$= -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

b) De (2),

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\text{sen}^2 2t\;dt \qquad \leftarrow \text{identidades trigonométricas}$$

$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt$$

$$= 32\left[t - \frac{1}{4}\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

c) De (3),

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}\,dt}^{ds}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos t\,dt$$

$$= 256\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

≡

■ **Método de evaluación (curva definida por una función explícita)** Si la curva C se define por medio de una función explícita $y = f(x)$, $a \le x \le b$, se puede utilizar x como un parámetro. Con $dy = f'(x)\,dx$ y $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, las anteriores integrales de línea se convierten, respectivamente, en

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(x, f(x))\,dx, \tag{4}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(x, f(x))\,f'(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(x, f(x))\sqrt{1 + [\,f'(x)]^2}\;dx. \tag{6}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *suave por tramos C* se define como la *suma* de las integrales sobre las diversas curvas suaves cuya unión comprende a C. Por ejemplo, si C está formada por las curvas suaves C_1 y C_2, entonces

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_{C_1} G(x, y)\,ds + \int_{C_2} G(x, y)\,ds.$$

■ **Notación** En muchas aplicaciones, las integrales de línea aparecen como una suma

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy.$$

Es común escribir esta suma como una integral sin paréntesis, de la siguiente forma

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{o simplemente} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{7}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *cerrada* C se denota frecuentemente por

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy.$$

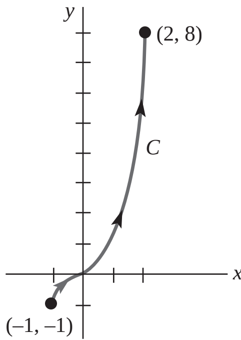


FIGURA 19.8.5 Curva C del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Curva definida por una función explícita

Calcule $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C viene dada por $y = x^3$, $-1 \le x \le 2$.

Solución La curva C se ilustra en la **FIGURA 19.8.5** y está definida por la función explícita $y = x^3$. Por lo tanto, se puede utilizar x como parámetro. Utilizando $dy = 3x^2\,dx$, se tiene

$$\int_C xy\,dx + x^2\,dy = \int_{-1}^{2} x\overbrace{(x^3)}^{y}dx + x^2\overbrace{(3x^2\,dx)}^{dy}$$

$$= \int_{-1}^{2} 4x^4\,dx$$

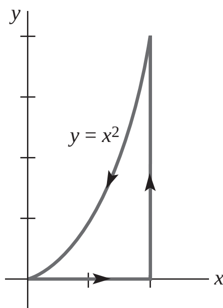
$$= \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{132}{5}.$$ ≡

EJEMPLO 3 Curva definida paramétricamente

Calcule $\oint_C x\,dx$, donde C es el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución De (1),

$$\oint_C x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos t\,(-\operatorname{sen} t\,dt) = \frac{1}{2}\cos^2 t\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0.$$ ≡



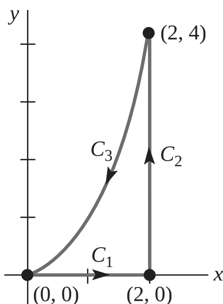


FIGURA 19.8.6 Curva C del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Curva cerrada

Calcule $\oint_C y^2\,dx - x^2\,dy$ en la curva cerrada C que se muestra en la **FIGURA 19.8.6*a*)**.

Solución Puesto que C es suave por tramos, la integral se expresa como una suma de integrales. Simbólicamente, se escribe

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las curvas mostradas en la figura 19.8.6*b*). En C_1, se utiliza x como parámetro. Como $y = 0$, $dy = 0$; entonces,

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$

En C_2, se utiliza y como parámetro. Desde $x = 2$, $dx = 0$, y se tiene

$$\int_{C_2} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy$$

$$= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16.$$

Finalmente, en C_3 se utiliza de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$, se tiene que $dy = 2x\,dx$ y, entonces,

$$\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx)$$

$$= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_2^0 = \frac{8}{5}.$$

Por lo tanto, $$\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = 0 - 16 + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$$ ≡

Es importante tener en cuenta que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C, siempre y cuando C venga dada con la misma orientación que todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen a la curva; véase el problema 37 de los ejercicios 19.8. Además, hay que recordar que $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ para integrales definidas. Las integrales de línea poseen una propiedad similar. Supóngase, como muestra la **FIGURA 19.8.7**, que $-C$ denota a la curva que tiene la orientación opuesta a la de C. Entonces, se puede demostrar que

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy,$$

o de manera equivalente,

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, en el inciso *a*) del ejemplo 1, $\int_{-C} xy^2\,dx = 64$.

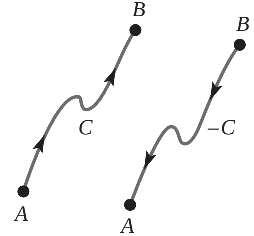


FIGURA 19.8.7 Curvas con orientación opuesta

■ **Integrales de línea en el espacio** Las integrales de línea de una función G de tres variables, $\int_C G(x, y, z)\,dx$, $\int_C G(x, y, z)\,dy$ y $\int_C G(x, y, z)\,ds$, se definen en forma análoga a la definición 19.9.1. Sin embargo, a esa lista se añade una cuarta **integral de línea a lo largo de una curva espacial *C* respecto a *z***:

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta z_k. \tag{9}$$

■ **Método de cálculo** Si C es una curva suave del espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \le t \le b$, entonces la integral en (9) se calcula utilizando

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))\,h'(t)\,dt.$$

Las integrales $\int_C G(x, y, z)\,dx$ y $\int_C G(x, y, z)\,dy$ se calculan en modo semejante. La integral de línea respecto a la longitud del arco es

$$\int_C G(x, y, z)\,ds = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt.$$

Al igual que en (7), en el espacio tridimensional las integrales de línea se manejan a menudo como una suma:

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

EJEMPLO 5 Integral de línea en una curva del espacio tridimensional

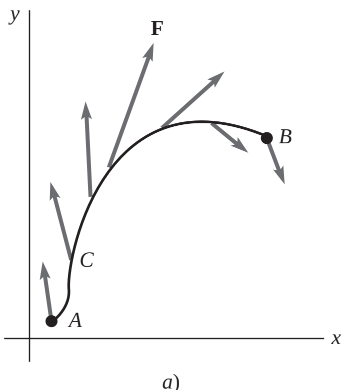
Calcule $\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$, donde C es la hélice $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Sustituyendo las expresiones para x, y y z junto con $dx = -2\,\text{sen}\,t\,dt$, $dy = 2\cos t\,dt$, $dz = dt$, se tiene

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} (\underbrace{-4\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}_{\text{fórmula del ángulo doble}})\,dt + t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt$$

$$= \left(2\,\text{sen}\,2t + \frac{t^2}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$ ≡



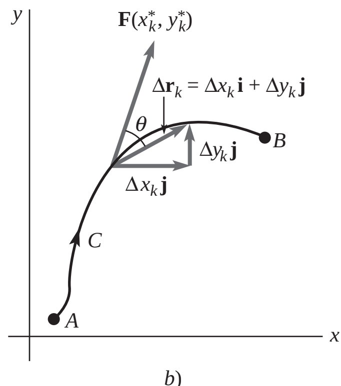


FIGURA 19.8.8 Campo de fuerza **F** que varía a lo largo de la curva *C*

Se puede utilizar el concepto de función vectorial de varias variables para escribir una integral general de línea en forma compacta. Por ejemplo, suponiendo que la función vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ se encuentra definida sobre una curva C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, y suponiendo que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de los puntos de C, entonces la derivada de $\mathbf{r}(t)$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j},$$

nos lleva a definir $d\mathbf{r} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{F}(x, y) \cdot d\,\mathbf{r} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ se escribe

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

En forma similar, para una integral de línea sobre una curva espacial,

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}, \tag{11}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$.

Trabajo En la sección 18.3 se plantea que el trabajo W realizado por una fuerza constante **F** que induce el desplazamiento **d** en línea recta de un objeto es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. En cursos introductorios de cálculo o física, se muestra entonces que el trabajo realizado al mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ por una fuerza $F(x)$, que varía en magnitud pero no en dirección, viene dado por la integral definida $W = \int_a^b F(x)\,dx$. En general, un campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ que actúa en todos los puntos de una curva suave C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, varía tanto en magnitud como en dirección; véase la **FIGURA 19.8.8*a*)**. Si A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente, la pregunta es: ¿cuál es el trabajo realizado por **F** al moverse su punto de aplicación a lo largo de C desde A hasta B? Para responder tal cuestión, supóngase que C se divide en n subarcos de longitudes Δs_k; $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)$ es una fuerza constante en cada subarco. Si, como se muestra en la figura 19.8.8*b*), la longitud del vector $\Delta\mathbf{r}_k = (x_k - x_{k-1})\mathbf{i} + (y_k - y_{k-1})\mathbf{j} = \Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j}$ es una aproximación a la longitud del subarco k-ésimo, entonces el trabajo realizado por **F** sobre el subarco es, aproximadamente

$$\begin{aligned}(\|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\| \cos\theta)\,\|\Delta\mathbf{r}_k\| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta\mathbf{r}_k \\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

Sumando estos elementos de trabajo y pasando al límite, se define naturalmente el **trabajo realizado por F a lo largo de *C*** como la integral de línea

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{o} \quad W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{12}$$

Desde luego, (12) se puede extender a campos de fuerza que actúan en puntos de una curva espacial. En este caso, el trabajo $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se define como en (11).

Ahora, puesto que
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

se sustituye $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds$, donde $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es una tangente unitaria a C. Por lo tanto,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C \text{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\,ds. \tag{13}$$

En otras palabras:

El trabajo realizado por una fuerza **F** *a lo largo de una curva C se debe completamente al componente tangencial de* **F**.

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por una fuerza

Encuentre el trabajo realizado por: ***a)*** $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y ***b)*** $\mathbf{F} = \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ a lo largo de la curva C trazada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

Solución ***a)*** La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ proporciona las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \le t \le \pi$, que se reconocen como un semicírculo. Como muestra la **FIGURA 19.8.9**, el campo de fuerza $\mathbf{F}$ es perpendicular a C en todos los puntos. Puesto que las componentes tangenciales de $\mathbf{F}$ son 0, el trabajo realizado a lo largo de C es 0. Para apreciar esto, se utiliza (12):

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^\pi (\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j}) \cdot (-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt$$

$$= \int_0^\pi (-\cos t\,\text{sen}\, t + \text{sen}\, t\cos t)\, dt = 0.$$

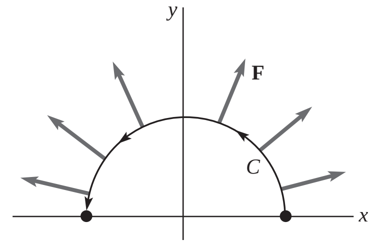


FIGURA 19.8.9 Campo de fuerzas en *a*) del ejemplo 6

b) En la **FIGURA 19.8.10**, los vectores en negro son las proyecciones de $\mathbf{F}$ sobre los vectores tangentes unitarios. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot (-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt$$

$$= \int_0^\pi \left(-\frac{3}{4}\text{sen}\, t + \frac{1}{2}\cos t\right) dt$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\, t\right)\Big]_0^\pi = -\frac{3}{2}.$$

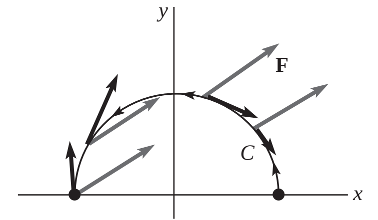


FIGURA 19.8.10 Campo de fuerzas en *b*) del ejemplo 6

Las unidades del trabajo dependen de las unidades de $\|\mathbf{F}\|$ y de las unidades de distancia. ≡

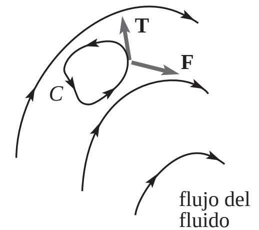


FIGURA 19.8.11 ¿Rodea el campo de velocidad a la curva C?

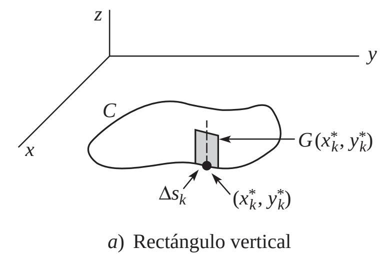
■ **Circulación** Se dice que una integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de una curva cerrada simple C es la **circulación** de $\mathbf{F}$ alrededor de C; esto es,

$$\text{circulación} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

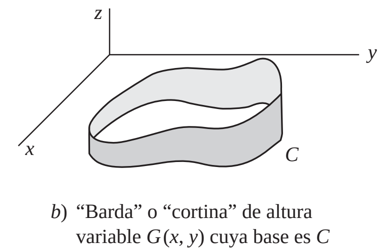
En particular, si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces la circulación es una medida de la cantidad con la que el fluido tiende a rodear a la curva C rotando, o circulando, alrededor de ella. Por ejemplo, si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$ para todo (x, y) de C, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$, y la curva no se mueve. Por otro lado, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significa que el fluido tiende a rotar a C en sentido contrario al de las manecillas del reloj y en el sentido de la manecillas del reloj, respectivamente; véase la **FIGURA 19.8.11**.

Comentarios

En el caso de dos variables, la integral de línea respecto a la longitud de arco $\int_C G(x, y)\, ds$ se interpreta geométricamente cuando $G(x, y) \ge 0$ en C. En la definición 19.8.1, el símbolo Δs_k representa la longitud del subarco k-ésimo de la curva C. Pero de la figura que acompaña a esa definición, se tiene la aproximación $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Con esta interpretación de Δs_k se observa de la **FIGURA 19.8.12*a*)** que el producto $G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k$ es el área de un rectángulo vertical de altura $G(x_k^*, y_k^*)$ y ancho Δs_k. La integral $\int_C G(x, y)\, ds$ representa entonces al área de un lado de una "barda" o "cortina" que se extiende desde la curva C en el plano xy hasta la gráfica de $G(x, y)$ correspondiente a los puntos (x, y) de C; véase la figura 19.8.12*b*).



a) Rectángulo vertical



b) "Barda" o "cortina" de altura variable $G(x, y)$ cuya base es C

FIGURA 19.8.12 Una interpretación geométrica de una integral de línea

19.8 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas del 1 al 4, calcule $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$ y $\int_C G(x, y)\, ds$ en la curva C indicada.

1. $G(x, y) = 2xy$; $x = 5 \cos t$, $y = 5 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi/4$

2. $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$

3. $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \le x \le 0$

4. $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{2/3}$, $1 \le x \le 8$

En los problemas 5 y 6, calcule $\int_C G(x, y, z)\, dx$, $\int_C G(x, y, z)\, dy$, $\int_C G(x, y, z)\, dz$ y $\int_C G(x, y, z)\, ds$ de la curva C indicada.

5. $G(x, y, z) = z$; $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi/2$

6. $G(x, y, z) = 4xyz$; $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$, $0 \le t \le 1$

En los problemas del 7 al 10, calcule $\int_C (2x + y)\, dx + xy\, dy$ entre los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ de la curva C proporcionada.

7. $y = x + 3$

8. $y = x^2 + 1$

9.

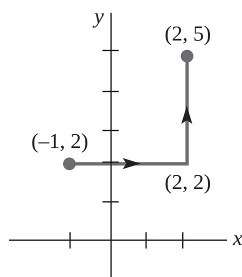


FIGURA 19.8.13 Curva C para el problema 9

10.

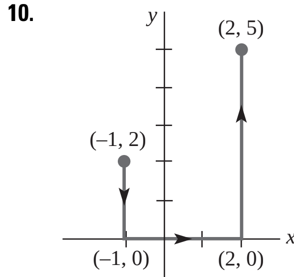


FIGURA 19.8.14 Curva C para el problema 10

En los problemas del 11 al 14, calcule $\int_C y\, dx + x\, dy$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ de la curva C proporcionada.

11. $y = x^2$

12. $y = x$

13. C está formada por segmentos de línea desde $(0, 0)$ hasta $(0, 1)$ y desde $(0, 1)$ hasta $(1, 1)$.

14. C está formada por segmentos de línea desde $(0, 0)$ hasta $(1, 0)$ y desde $(1, 0)$ hasta $(1, 1)$.

15. Calcule $\int_C (6x^2 + 2y^2)\, dx + 4xy\, dy$, donde C viene dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

16. Calcule $\int_C -y^2\, dx + xy\, dy$, donde C viene dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

17. Calcule $\int_C 2x^3 y\, dx + (3x + y)\, dy$, donde C viene dada por $x = y^2$ desde $(1, -1)$ hasta $(1, 1)$.

18. Calcule $\int_C 4x\, dx + 2y\, dy$, donde C viene dada por $x = y^3 + 1$ desde $(0, -1)$ hasta $(9, 2)$.

En los problemas 19 y 20, calcule $\oint_C (x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy$ para la curva cerrada C que se proporciona.

19.

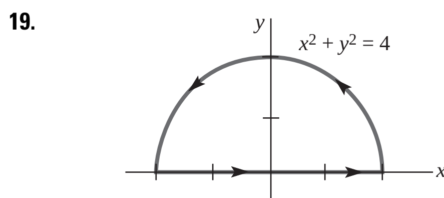


FIGURA 19.8.15 Curva cerrada C para el problema 19

20.

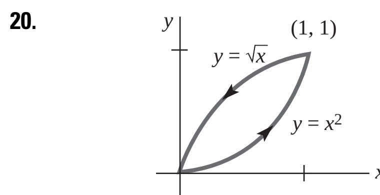


FIGURA 19.8.16 Curva cerrada C para el problema 20

En los problemas 21 y 22, calcule $\oint_C x^2 y^3\, dx - xy^2\, dy$ para la curva cerrada C que se proporciona.

21.

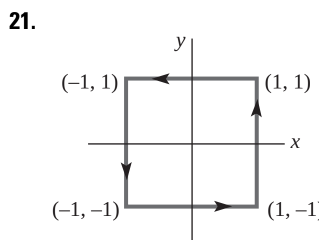


FIGURA 19.8.17 Curva cerrada C para el problema 21

22.

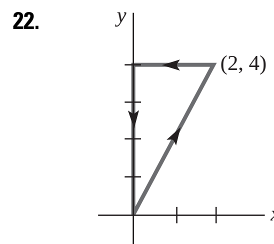


FIGURA 19.8.18 Curva cerrada C para el problema 22

23. Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)\, ds$, donde C viene dada por

$$x = 5 \cos t, \quad y = 5 \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

24. Calcule $\int_{-C} y\, dx - x\, dy$, donde C viene dada por

$$x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

En los problemas del 25 al 28, calcule $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(6, 8, 5)$ para la curva C proporcionada.

25. C está formada por los segmentos de línea desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 3, 4)$ y desde $(2, 3, 4)$ hasta $(6, 8, 5)$.

26. $x = 3t$, $y = t^3$, $z = \frac{5}{4}t^2$, $\quad 0 \le t \le 2$

27.

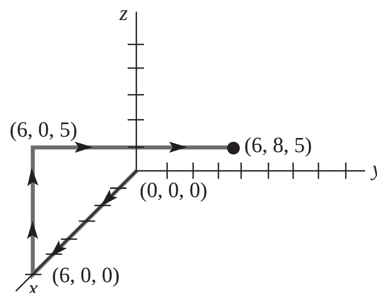


FIGURA 19.8.19 Curva cerrada C para el problema 27

28.

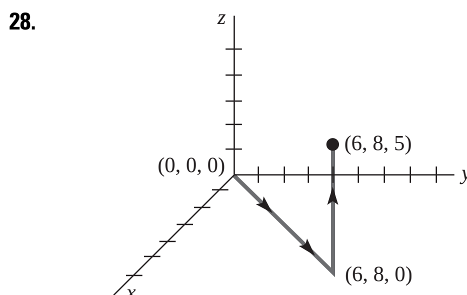


FIGURA 19.8.20 Curva cerrada C para el problema 28

En los problemas 29 y 30, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \ln 2$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

31. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ desde $(1, 0)$ hasta $(e, 1)$.

32. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva suave por tramos que consta de dos segmentos de línea, desde $(-2, 2)$ hasta $(0, 0)$ y desde $(0, 0)$ hasta $(2, 3)$.

33. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (6y - 2x)\mathbf{j}$ que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj y rodea una vez al triángulo cuyos vértices son $(1, 1)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$.

34. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ desde $t = 1$ hasta $t = 3$.

35. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo definido por $x^2 + y^2 = 9$.

36. En un campo de fuerzas cuadrado inverso $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,* encuentre el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la línea desde $(1, 1, 1)$ hasta $(3, 3, 3)$.

37. Verifique que la integral de línea $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tiene el mismo valor de C para cada una de las siguientes parametrizaciones:

C: $x = 2t + 1$, $\quad y = 4t + 2$, $\quad 0 \leq t \leq 1$
C: $x = t^2$, $\quad y = 2t^2$, $\quad 1 \leq t \leq \sqrt{3}$
C: $x = \ln t$, $\quad y = 2\ln t$, $\quad e \leq t \leq e^3$.

38. Considere las tres curvas entre $(0, 0)$ y $(2, 4)$:

C_1: $x = t$, $\quad y = 2t$, $\quad 0 \leq t \leq 2$
C_2: $x = t$, $\quad y = t^2$, $\quad 0 \leq t \leq 2$
C_3: $x = 2t - 4$, $\quad y = 4t - 8$, $\quad 2 \leq t \leq 3$.

Demuestre que $\int_{C1} xy\,ds = \int_{C3} xy\,ds$, pero que $\int_{C1} xy\,ds \neq \int_{C2} xy\,ds$. Explique por qué.

39. Considérese que una curva suave C viene descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$. Sean la aceleración, velocidad y rapidez dadas por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ y $v = \|\mathbf{v}\|$, respectivamente. Utilizando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, demuestre que, en ausencia de fricción, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa constante m desde el punto A en $t = a$ hasta el punto B en $t = b$ es igual al cambio en energía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2.$$

[*Sugerencia:* Considere $\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.]

40. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por unidad de longitud), entonces $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$ es la masa del alambre. Encuentre la masa de un alambre que tenga la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia del eje y.

41. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable vienen dadas por $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$, donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\,ds, \quad M_x = \int_C y\rho(x, y)\,ds$$

y

$$M_y = \int_C x\rho(x, y)\,ds.$$

Encuentre el centro de masa del alambre del problema 40.

42. Un campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y)$ actúa en todos los puntos de la curva C, la cual es la unión de C_1, C_2 y C_3 ilustrada en la **FIGURA 19.8.21**. $\|\mathbf{F}\|$ se mide en libras y la distancia se mide en pies, utilizando la escala mostrada en la figura. Utilice los vectores representativos mostrados para obtener un valor aproximado del trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C. [*Sugerencia:* Utilice $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$.]

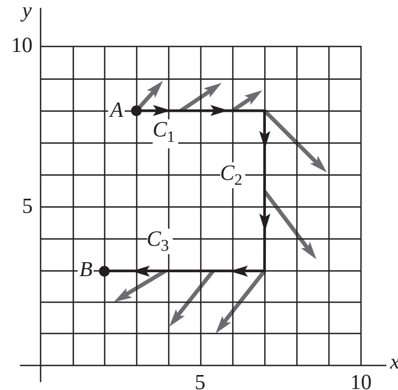


FIGURA 19.8.21 Campo de fuerzas del problema 42

* Obsérvese que la magnitud de $\mathbf{F}$ es inversamente proporcional a $\|\mathbf{r}\|^2$.

19.9 Independencia de la trayectoria

■ **Introducción** En esta sección nos referimos a una curva suave por tramos C entre un punto inicial A y un punto terminal B como una **trayectoria de integración** o simplemente una **trayectoria**. Comenzamos la discusión teniendo en cuenta las integrales de línea en el espacio bidimensional. Recordemos, en (10) de la sección 19.8 observamos que si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial en el espacio bidimensional y una trayectoria C es definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, entonces una integral de línea puede escribirse como

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Generalmente el valor de una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende en la trayectoria de integración. Dicho de otra forma, si C_1 y C_2 son dos trayectorias distintas

entre los mismos puntos A y B, entonces esperamos que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sin embargo, hay una excepción importante. Como observamos en esta sección, integrales de línea que involucran cierto tipo de campo vectorial **F** no dependen en la trayectoria C, sino únicamente en los puntos extremos $A = (f(a), g(a))$ y $B = (f(b), g(b))$ de la trayectoria.

Nota: Para evitar una repetición innecesaria suponemos siempre que las funciones componentes del campo vectorial **F** son continuas en alguna región de los espacios bidimensionales o tridimensionales, sus funciones componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en la región, y que la trayectoria C de integración está completamente en la región.

EJEMPLO 1 Una integral independiente de la trayectoria

La integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ tiene el mismo valor para todas las trayectoria C entre (0, 0) y (1, 1) mostradas en la **FIGURA 19.9.1**. De los problemas del 11 al 14 de los ejercicios 19.8 recuerde que en estas trayectorias

$$\int_C y\,dx + x\,dy = 1.$$

También se le insta a comprobar $\int_C y\,dx + x\,dy = 1$ en las curvas $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = \sqrt{x}$ entre (0, 0) y entre (1, 1). La relevancia de todo esto es sugerir que la integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ no depende de la trayectoria que une estos dos puntos. Continuamos esta discusión en los ejemplos 2 y 3.

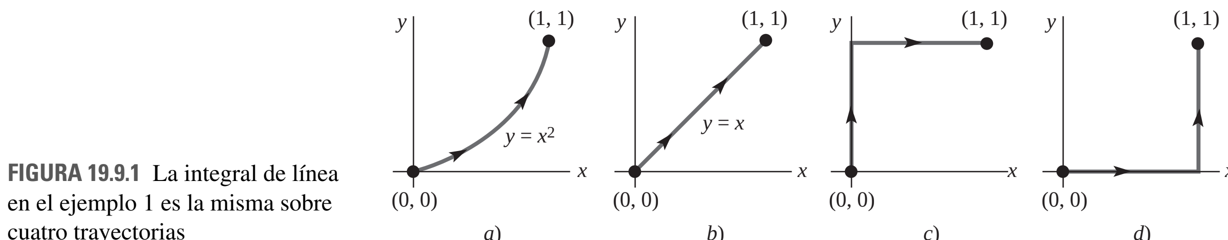


FIGURA 19.9.1 La integral de línea en el ejemplo 1 es la misma sobre cuatro trayectorias

Campos vectoriales conservativos Antes de proceder, necesitamos presentar un tipo especial de campo vectorial **F** llamado **campo conservativo**.

Definición 19.9.1 Campo vectorial conservativo

Se dice que una función vectorial **F** en los espacios bidimensionales o tridimensionales es **conservativa** si **F** puede escribirse como el gradiente de una función escalar ϕ. La función ϕ recibe el nombre de **función potencial** de **F**.

En otras palabras, **F** es conservativo si existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Un campo vectorial conservativo también se denomina **campo vectorial gradiente**.

EJEMPLO 2 Campo vectorial conservativo

La integral en el ejemplo 1 puede interpretarse como una integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de la trayectoria C. Si $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, entonces $\int_C y\,dx + x\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Ahora considere la función $\phi(x, y) = xy$. El gradiente de la función escalar ϕ es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Debido a que $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ llegamos a la conclusión de que $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo y que ϕ es una función potencial de **F**. ≡

Por supuesto, no todo campo vectorial es un campo conservativo, aunque muchos campos vectoriales encontrados en la física son conservativos. Para los propósitos presentes, la importancia de los campos vectoriales conservativos se hará evidente a medida que continuemos nuestro estudio de integrales de línea.

Independencia de trayectoria Si el valor de una integral de línea es el mismo para *toda* trayectoria en una región que conecta el punto inicial A y el punto terminal B, entonces se

dice que la integral es **independiente de la trayectoria**. En otras palabras, una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ a lo largo de C es independiente de la trayectoria si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cualesquiera de las dos trayectorias C_1 y C_2 entre A y B.

Un teorema fundamental El siguiente teorema establece una importante relación entre el valor de una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y el hecho de que su trayectoria de integración C está dentro de un campo vectorial $\mathbf{F}$ conservativo. Además, ofrece un medio para evaluar estas integrales de línea de una manera que es similar al teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una antiderivada de $f'(x)$. En el siguiente teorema, conocido como **teorema fundamental para integrales de línea**, el gradiente $\nabla\phi$ de una función escalar ϕ desempeña el papel de la derivada $f'(x)$ en (1).

Teorema 19.9.1 Teorema fundamental

Supongamos que C es una trayectoria en una región abierta R del plano xy y se define mediante $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en R y ϕ es una función potencial de $\mathbf{F}$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A), \tag{2}$$

donde $A = (x(a), y(a))$ y $B = (x(b), y(b))$.

DEMOSTRACIÓN

Demostraremos el teorema para una trayectoria continua C. Puesto que ϕ es una función potencial de $\mathbf{F}$ tenemos

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Luego, usando $\mathbf{r}'(t) = (dx/dt)\mathbf{i} + (dy/dt)\mathbf{j}$ podemos escribir la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria C como

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt.\end{aligned}$$

En vista de la regla de la cadena [véase (8) en sección 19.4],

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

resulta que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}dt \\ &= \phi(x(t), y(t))\Big]_a^b \\ &= \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A).\end{aligned}$$

≡

Para curvas suaves por tramos, la demostración anterior debe modificarse teniendo en cuenta cada arco continuo de la curva C.

El teorema 19.9.1 muestra que si **F** es un campo vectorial conservativo en una región abierta en los espacios bidimensionales o tridimensionales, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende únicamente en los puntos inicial y terminal A y B de la trayectoria C, y no en la propia C. En otras palabras, las integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria. Tales integrales comúnmente se escriben

$$\text{A}\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

EJEMPLO 3 De vuelta al ejemplo 1

Calcule $\int_C ydx + xdy$, donde C es una trayectoria con punto inicial (0, 0) y punto terminal (1, 1).

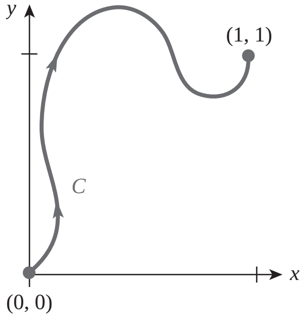


FIGURA 19.9.2 Curva suave por tramos del ejemplo 3

Solución La trayectoria C mostrada en la **FIGURA 19.9.2** representa cualquier curva continua por secciones con puntos inicial y terminal (0, 0) y (1, 1). Acabamos de ver que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo definido en cada punto del plano xy y que $\phi(x, y) = xy$ es una función potencial de **F**. Por lo tanto, en vista de (2) y (3) del teorema 19.9.1, podemos escribir

$$\int_C y\,dx + x\,dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$$

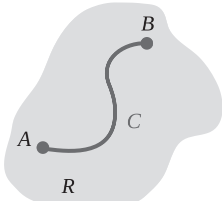
$$= xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)}$$

$$= 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1. \qquad \equiv$$

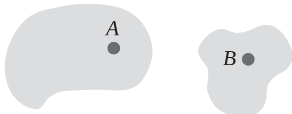
Empleando el teorema fundamental del cálculo (1), *toda* antiderivada $f'(x)$ puede usarse como $f(x) + K$, donde K es una constante. Del mismo modo, una función potencial para el campo vectorial en el ejemplo 2 es $\phi(x, y) = (xy) + K$ donde K es una constante. Podemos pasar por alto esta constante cuando usamos (2) del teorema 19.9.1 dado que

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (\phi(B) + K) - (\phi(A) + K) = \phi(B) - \phi(A).$$

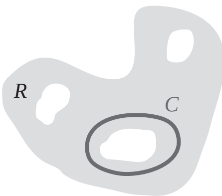
Algo de terminología Decimos que una región (en el plano o en el espacio) es **conexa** si cada par de puntos A y B en la región pueden unirse por una curva suave por tramos que se encuentre completamente en la región. Una región R en el plano está **simplemente conexa** si está conexa y cada curva C simple cerrada situada enteramente dentro de la región puede encogerse, o contraerse, en un punto sin salir de R. La última condición significa que si C es cualquier curva cerrada simple situada enteramente en R, entonces la región en el interior de C también está enteramente en R. En pocas palabras, una región simplemente conexa no tiene hoyos. La región R en la **FIGURA 19.9.3*a*)** es una región simplemente conexa. En la figura 19.9.3*b*) la región R mostrada no está conexa, o **desconexa**, dado que A y B no pueden ser unidos por una curva suave por tramos C que se encuentre en R. La región en la figura 19.9.3*c*) está conexa pero no simplemente conexa porque tiene tres hoyos en ella. La curva representativa C en la figura rodea uno de los huecos, y por lo tanto no puede ser encogida a un punto sin abandonar la región. Se dice que esta última región se encuentra **múltiplemente conexa**. Por último, se dice que una región R está **abierta** si no contiene puntos frontera.



a) Región R conexa



b) R no está conexa



c) Región R múltiplemente conexa

FIGURA 19.9.3 Regiones en el plano

En una región abierta y conexa R, las nociones de independencia de trayectoria y de campo vectorial conservativo son equivalentes. Esto significa: si **F** es conservativo en R, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C, e inversamente, si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces **F** es conservativo.

Expresamos esto formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 19.9.2 Conceptos equivalentes

En una región abierta y conexa R, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C si y sólo si el campo vectorial **F** es conservativo en R.

DEMOSTRACIÓN

Si **F** es conservativo en R, entonces ya hemos visto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C como consecuencia del teorema 19.9.1.

Por conveniencia demostramos lo inverso para una región R en el plano. Suponga que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en R y que (x_0, y_0) y (x, y) son puntos arbitrarios en la región R. Considere que la función $\phi(x, y)$ está definida como

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde C es una trayectoria arbitraria en R de (x_0, y_0) a (x, y) y $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Véase la **FIGURA 19.9.4*a***). Ahora elija un punto (x_1, y), $x_1 \neq x$, de manera que el segmento de recta de (x_1, y) a (x, y) esté en R. Véase la figura 19.9.4*b*). Entonces por la independencia de la trayectoria podemos escribir

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

dado que la primera integral no depende de x. Pero en el segmento de recta entre (x_1, y) y (x, y), y es constante por lo que $dy = 0$. Por consiguiente, $\int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx$. Por la forma de derivada del teorema fundamental del cálculo tenemos entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx = P(x, y).$$

Del mismo modo podemos mostrar que $\partial\phi/\partial y = Q(x, y)$. Por lo tanto, de

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$$

concluimos que **F** es conservativo. ≡

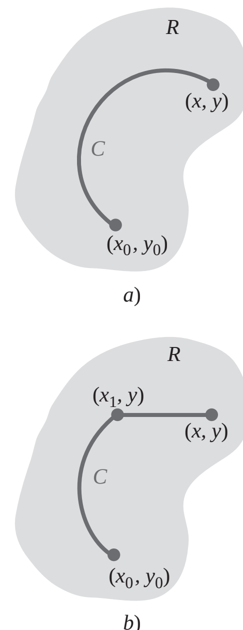


FIGURA 19.9.4 Región R en la demostración del teorema 19.9.2

■ **Integrales alrededor de trayectorias cerradas** Recuerde de la sección 19.8: una trayectoria, o curva, C está cerrada cuando su punto inicial A es el mismo que su punto terminal B. Si C es una curva paramétrica definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces C está **cerrada** cuando $A = B$; esto es, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 19.9.1.

Teorema 19.9.3 Conceptos equivalentes

En una región abierta conexa R, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R.

DEMOSTRACIÓN

Primero mostramos que si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R. Para observar esto vamos a suponer que A y B son cualesquiera dos puntos en C y que $C = C_1 \cup C_2$, donde C_1 es una trayectoria de A a B y C_2 es una trayectoria de B a A. Véase la **FIGURA 19.9.5*a***). Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4)$$

donde $-C_2$ es ahora una trayectoria de A a B. Debido a la independencia de la trayectoria $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Así (4) implica que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

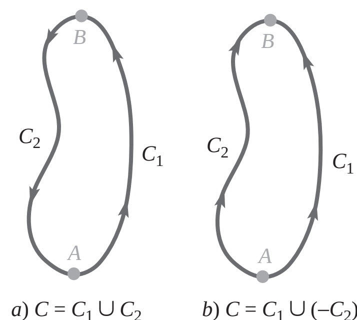


FIGURA 19.9.5 Trayectorias en la demostración del teorema 19.9.3

A continuación, demostramos lo inverso: si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Considere que C_1 y C_2 representan cualesquiera dos trayectorias de A a B y por ello $C = C_1 \cup (-C_2)$ es una trayectoria cerrada. Véase la figura 19.9.5*b*). Se deduce de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ o

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En consecuencia, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. ≡

Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo definido sobre una región abierta conexa y que C es una trayectoria cerrada que se encuentra enteramente en la región. Cuando los resultados de los teoremas anteriores se juntan concluimos que

$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Leftrightarrow \text{independencia de trayectoria} \Leftrightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (5)$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ en (5) se lee "equivalente a" o "si y sólo si".

Prueba para un campo conservativo Las implicaciones en (5) muestran que si la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de trayectoria, entonces el campo vectorial no es conservativo. Pero existe un camino más sencillo para determinar si $\mathbf{F}$ es conservativo. El siguiente teorema es una prueba para un campo vectorial conservativo que usa las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema 19.9.4 Prueba para un campo conservativo

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta R, y que P y Q son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en R. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (6)$$

para todo (x, y) en R. Inversamente, si la igualdad (6) se mantiene para todo (x, y) en una región simplemente conexa R, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es conservativo en R.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Demostramos la primera mitad del teorema. Supongamos que las funciones componentes del campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R. Puesto que $\mathbf{F}$ es conservativo existe una función potencial ϕ tal que

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Así $P = \partial\phi/\partial x$ y $Q = \partial\phi/\partial y$. Ahora

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.$$

De la continuidad de las derivadas parciales tenemos $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ como se quería demostrar. ≡

EJEMPLO 4 Uso del teorema 19.9.4

El campo vectorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ en el ejemplo 2 es continuo y tiene funciones componentes con primeras derivadas parciales continuas en toda la región abierta R que consiste en el plano xy completo. Con las identificaciones $P = y$ y $Q = x$ se deduce de (6) del teorema 19.9.4,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

≡

EJEMPLO 5 Uso del teorema 19.9.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y^3)\mathbf{i} + (x + 5y)\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, encontramos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ para todos los puntos en el plano, se deduce del teorema 19.9.4 que **F** es no conservativo. ≡

EJEMPLO 6 Uso del teorema 19.9.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -ye^{-xy}\mathbf{i} - xe^{-xy}\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Encontramos con $P = -ye^{-xy}$ y $Q = -xe^{-xy}$ que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xye^{-xy} - e^{-xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Las componentes de **F** son continuas y tienen derivadas parciales continuas. Por lo tanto (6) se cumple en todo el plano xy, el cual es una región simplemente conexa. De lo inverso en el teorema 19.9.4 podemos concluir que **F** es conservativo. ≡

Tenemos una pregunta muy importante que responder en esta sección:

Si **F** *es un campo vectorial conservativo, ¿cómo se determina una función potencial ϕ para* **F***?* (7)

En el siguiente ejemplo damos una respuesta a la pregunta planteada en (7).

EJEMPLO 7 Integral que es independiente de la trayectoria

a) Demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 6xy + 6)\mathbf{i} + (2xy - 3x^2 - 2y)\mathbf{j}$, es independiente de la trayectoria C entre $(-1, 0)$ y $(3, 4)$.

b) Encuentre una función potencial ϕ para **F**.

c) Calcule $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Solución ***a)*** Identificando $P = y^2 - 6xy + 6$ y $Q = 2xy - 3x^2 - 2y$, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

El campo vectorial **F** es conservativo porque (6) se cumple en todo el plano xy y como consecuencia la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria entre cualesquiera puntos A y B en el plano.

b) Ya que **F** es conservativo existe una función potencial ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 - 6xy + 6 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y. \tag{8}$$

Empleando integración parcial sobre la primera expresión en (8), resulta

$$\phi = \int (y^2 - 6xy + 6)dx = xy^2 - 3x^2y + 6x + g(y), \tag{9}$$

En la integración parcial con respecto a x, la variable y se trata como una constante. De la misma forma, en una integración parcial con respecto a y, tratamos a x como una constante.

donde $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora tomamos la derivada parcial de (9) con respecto a y y la igualamos con la segunda expresión en (8):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 + g'(y) = 2xy - 3x^2 - 2y.$$

De la última igualdad encontramos que $g'(y) = -2y$. Integrando nuevamente se obtiene $g(y) = -y^2 + C$, donde C es una constante. Por lo tanto

$$\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2 + C. \tag{10}$$

***c*)** Podemos usar ahora el teorema 19.9.2 y la función potencial (10) (sin la constante) para evaluar la integral de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2)\Big]_{(-1,0)}^{(3,4)}$$

$$= (48 - 108 + 18 - 16) - (-6) = -52. \qquad \equiv$$

Nota: Puesto que se mostró que la integral en el ejemplo 7 es independiente de la trayectoria en el inciso *a*), podemos evaluarla sin encontrar una función potencial. Se puede integrar a lo largo de *cualquier curva conveniente C* que conecte los puntos dados. En particular, la recta $y = x + 1$ es una curva con esa característica. Usando x como un parámetro tenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2 - 2y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{3} [(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6]\,dx + [2x(x+1) - 3x^2 - 2(x+1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 4x + 5)\,dx = -52.$$

Campo vectorial conservativo en el espacio tridimensional Para un campo vectorial conservativo tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y una curva espacial continua por secciones $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, la forma básica de (2) es la misma:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a)) = \phi(B) - \phi(A). \tag{11}$$

Si C es una curva espacial, una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria siempre que el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

sea conservativo. El análogo tridimensional del teorema 19.9.4 es como sigue: si $\mathbf{F}$ es conservativo y si P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta de espacio tridimensional, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{12}$$

A la inversa, si (12) se cumple en toda una región apropiada del espacio tridimensional, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

La necesidad de (12) puede verse de (5) de la sección 19.7. Si $\mathbf{F}$ es conservativa entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y rot $\nabla\phi =$ rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; esto es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Igualando a cero las tres componentes del vector rot $\mathbf{F}$, se obtiene (12).

EJEMPLO 8 Integral que es independiente de la trayectoria

***a*)** Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

es independiente de la trayectoria C entre (1, 1, 1) y (2, 1, 4).

***b*)** Calcule $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

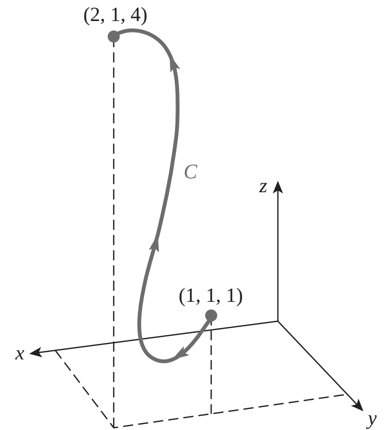


FIGURA 19.9.6 Trayectoria C representativa del ejemplo 8

Solución ***a*)** Con las identificaciones

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + yz)\mathbf{i} + (x + 3z^3 + xz)\mathbf{j} + (9yz^2 + xy - 1)\mathbf{k},$$

$$P = y + yz, Q = x + 3z^3 + xz \quad \text{y} \quad R = 9yz^2 + xy - 1,$$

vemos que las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

se cumplen en todo el espacio tridimensional. De (12) concluimos que **F** es conservativo y por ello la integral es independiente de la trayectoria.

***b*)** La trayectoria C que se ilustra en la **FIGURA 19.9.6** representa cualquier trayectoria con puntos inicial y terminal (1, 1, 1) y (2, 1, 4). Para evaluar la integral mostramos de nuevo cómo encontrar una función potencial $\phi(x, y, z)$ para **F** utilizando integración parcial.

Primero sabemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R.$$

Al integrar la primera de estas tres ecuaciones con respecto a x, se obtiene

$$\phi = xy + xyz + g(y, z)$$

La derivada de esta última expresión con respecto a y debe ser ahora igual a la función Q:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3 \quad \text{implica} \quad g = 3yz^3 + h(z).$$

Consecuentemente,

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z)$$

La derivada parcial de esta última expresión con respecto a z debe ser ahora igual a la función R:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1.$$

A partir de esto obtenemos $h'(z) = -1$ y $h(z) = -z + K$. Descartando K, podemos escribir

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z \tag{13}$$

Por último, de (11) y la función potencial (13) obtenemos

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

$$= (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big]_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194.$$ ≡

Conservación de la energía En un campo de fuerza conservativo **F**, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la posición B es la misma para todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es *cero*. Véase el problema 29 en los ejercicios 19.9. Por esta razón, tal campo de fuerza también se dice que es **conservativo**. En un campo conservativo **F** se cumple la **ley de conservación de la energía mecánica**:

Para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo, energía cinética + energía potencial = constante.

Véase el problema 31 en los ejercicios 19.9.

Una fuerza friccionante como la resistencia del aire es **no conservativa**. Las fuerzas no conservativas son *disipativas* en cuanto a que su acción reduce la energía cinética sin un aumento correspondiente en la energía potencial. Enunciado de otra manera, si el trabajo realizado $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende de la trayectoria, entonces **F** es no conservativo.

19.9 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas del 1 al 10, demuestre que la integral proporcionada es independiente de la trayectoria. Calcúlela de dos maneras: ***a***) encuentre una función potencial ϕ y entonces use el teorema 19.9.1 y ***b***) use cualquier trayectoria conveniente entre los puntos extremos de la trayectoria.

1. $\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2\,dx + y^2\,dy$

2. $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + x^2\,dy$

3. $\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$

4. $\int_{(0,0)}^{(\pi/2,0)} \cos x \cos y\,dx + (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$

5. $\int_{(4,1)}^{(4,4)} \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$ sobre cualquier trayectoria que no cruce al eje x.

6. $\int_{(1,0)}^{(3,4)} \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre cualquier trayectoria que no pase por el origen.

7. $\int_{(1,2)}^{(3,6)} (2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy$

8. $\int_{(-1,1)}^{(0,0)} (5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy$

9. $\int_{(0,0)}^{(2,8)} (y^3 + 3x^2y)\,dx + (x^3 + 3y^2x + 1)\,dy$

10. $\int_{(-2,0)}^{(1,0)} (2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\,dy$

En los problemas del 11 al 16, determine si el campo vectorial dado es un campo conservativo. Si es así, encuentre una función potencial ϕ para **F**.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \operatorname{sen} xy^2\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

En los problemas 17 y 18, encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$ a lo largo de la curva indicada.

17.

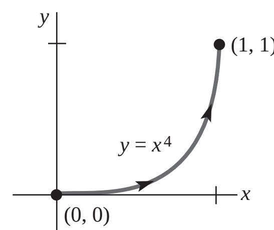


FIGURA 19.9.7 Curva para el problema 17

18.

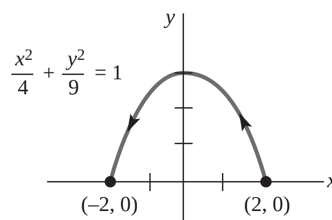


FIGURA 19.9.8 Curva para el problema 18

En los problemas del 19 al 24, demuestre que la integral proporcionada es independiente de la trayectoria; calcúlela.

19. $\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

20. $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$

21. $\int_{(1,0,0)}^{(2,\pi/2,1)} (2x \operatorname{sen} y + e^{3z})\,dx + x^2 \cos y\,dy + (3xe^{3z} + 5)\,dz$

22. $\int_{(1,2,1)}^{(3,4,1)} (2x + 1)\,dx + 3y^2\,dy + \dfrac{1}{z}\,dz$

23. $\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} e^{2z}\,dx + 3y^2\,dy + 2xe^{2z}\,dz$

24. $\displaystyle\int_{(2\,2,\,3,\,1)}^{(0,\,0,\,0)} 2xz\,dx + 2yz\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$

En los problemas 25 y 26, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - yz \operatorname{sen} x)\,\mathbf{i} + (x + z \cos x)\,\mathbf{j} + y \cos x\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 + \cos t)^2\,\mathbf{j} + 4 \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2 - e^z)\,\mathbf{i} + (2y - 1)\,\mathbf{j} + (2 - xe^z)\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $(-1, 1, -1)$ a $(2, 4, 8)$

27. La ley cuadrática inversa de la atracción gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 está dada por $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\,\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

28. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xy^3z\,\mathbf{i} + 12x^2y^2z\,\mathbf{j} + 4x^2y^3\,\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ desde $(2, 0, 0)$ hasta $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. Desde $(2, 0, 0)$ hasta $(0, 2, \pi/2)$. [*Sugerencia:* Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo.]

29. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, demuestre que el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria simple cerrada es cero.

30. Una partícula en el plano es atraída hacia el origen con una fuerza $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^n\mathbf{r}$, donde n es un entero positivo y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición de la partícula. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

31. Supóngase que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo con función potencial ϕ. En física, a la función $p = -\phi$ se le denomina **energía potencial**. Puesto que $\mathbf{F} = -\nabla p$, la segunda ley de Newton se convierte en

$$m\mathbf{r}'' = -\nabla p \qquad \text{o} \qquad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}.$$

Integrando $m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla p \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ respecto a t, derive la ley de la conservación de energía mecánica: $\frac{1}{2}\,mv^2 + p =$ constante. [*Sugerencia:* Véase el problema 39 de los ejercicios 19.8.]

32. Supóngase que C es una curva suave entre los puntos A (en $t = a$) y B (en $t = b$) y que p es la energía potencial definida en el problema 31. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo y $K = \frac{1}{2}\,mv^2$ es la energía cinética, demuestre que $p(B) + K(B) = p(A) + K(A)$.

19.10 Integrales dobles

Introducción En la sección 19.8 se plantean los cinco pasos que llevan a la definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. A continuación, se plantean los pasos análogos que conducen al concepto de *integral definida bidimensional*, conocida simplemente como la **integral doble** de una función f de dos variables.

1. Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región cerrada y acotada R.
2. Por medio de una retícula de líneas verticales y horizontales paralelas a los ejes coordenados, se hace una partición P de R compuesta de n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k que se encuentran completamente en R.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición o la longitud de la diagonal más larga de R_k.
4. Elíjase un punto (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k. Véase la **FIGURA 19.10.1**.
5. Genérese la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$.

Entonces, se tiene la siguiente definición:

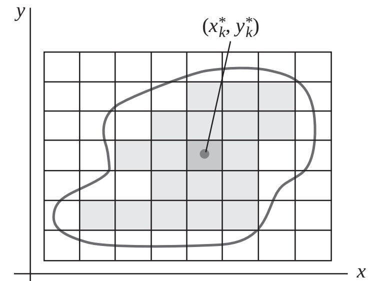


FIGURA 19.10.1 Punto de muestra en el rectángulo k-ésimo

Definición 19.10.1 La integral doble

Sea f una función de dos variables definida en una región cerrada R. Entonces, la **integral doble de f sobre R** viene dada por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k. \tag{1}$$

Integrabilidad Si existe el límite en (1), se dice que f es **integrable** sobre R, y que R es la **región de integración**. Cuando f es continua en R, entonces f es necesariamente integrable sobre R.

Área Cuando $f(x, y) = 1$ en R, entonces $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ simplemente proporciona el **área** A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \tag{2}$$

Volumen Si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces, como se muestra en la **FIGURA 19.10.2**, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ se interpreta como el volumen de un prisma rectangular de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y base de área ΔA_k. La suma de volúmenes $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ es una aproximación al **volumen** V del sólido *por encima* de la región R y *por debajo* de la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \to 0$, si existe, da el volumen exacto de este sólido; esto es, si f no es negativo en R, entonces

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA. \tag{3}$$

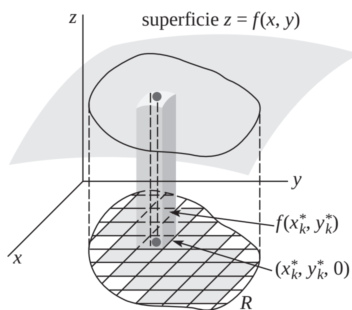


FIGURA 19.10.2 Volumen bajo una superficie

Propiedades La integral doble posee las siguientes propiedades:

Teorema 19.10.1 Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones de dos variables que son integrables sobre una región R. Entonces

i) $\displaystyle\iint_R kf(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA$, donde k es cualquier constante

ii) $\displaystyle\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

iii) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R f(x, y)\, dA$, donde R_1 y R_2 son subregiones de R que no se traslapan, y $R = R_1 \cup R_2$.

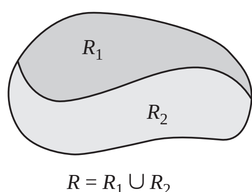


FIGURA 19.10.3 R es la unión de dos regiones

El inciso *iii*) del teorema 19.10.1 es el equivalente bidimensional de $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. La **FIGURA 19.10.3** ilustra la división de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. R_1 y R_2 no tienen puntos en común, excepto posiblemente en su frontera común. Asimismo, el teorema 19.10.1*iii*) se extiende a cualquier número finito de subregiones no traslapadas cuya unión sea R.

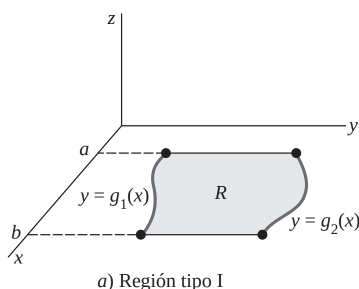
Regiones tipos I y II La región mostrada en la **FIGURA 19.10.4*a***),

$$R\colon a \leq x \leq b, \qquad g_1(x) \leq y \leq g_2(x),$$

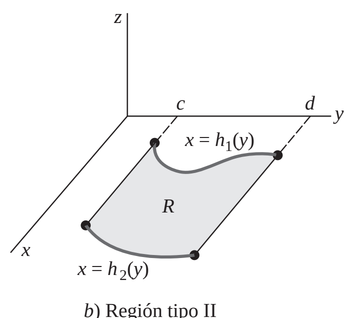
donde las funciones de frontera g_1 y g_2 son continuas, se denomina una **región tipo I**. En la figura 19.10.4*b*), la región

$$R\colon c \leq y \leq d, \qquad h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina una **región tipo II**.



a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 19.10.4 Regiones de integración

Integrales iteradas Como la integral parcial $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy$ es una función de x únicamente, se puede integrar a su vez la función resultante respecto a x. Si f es continua en una región tipo I, la **integral iterada** de f sobre la región se define como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{4}$$

La idea básica en (4) es llevar a cabo *integraciones sucesivas.* La integral parcial proporciona una función de x, que se integra en forma usual desde $x = a$ hasta $x = b$. El resultado final de ambas integraciones es un número real. De manera similar, se define la integral iterada de una función continua f sobre una región tipo II como

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{5}$$

■ **Cálculo de integrales dobles** Las integrales iteradas proporcionan los medios para calcular una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ sobre una región tipo I o tipo II, o bien una región que se exprese como la unión de un número finito de estas regiones. El siguiente resultado se debe al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943).

Teorema 19.10.2 Teorema de Fubini

Sea f una función continua en una región R.

i) Si R es tipo I, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{6}$$

ii) Si R es tipo II, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{7}$$

El teorema 19.10.2, para la integral doble, es análogo al teorema fundamental del cálculo. Aunque el teorema 19.10.2 es difícil de demostrar, se puede captar intuitivamente su significado considerando volúmenes. Sea R una región tipo I y $z = f(x, y)$ una función continua y no negativa en R. El área A del plano vertical, como se muestra en la **FIGURA 19.10.5**, es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$, en el plano $x =$ constante y, por ende, viene dada por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Sumando todas estas áreas desde $x = a$ hasta $x = b$, se tiene el volumen V del sólido por encima de R y por debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

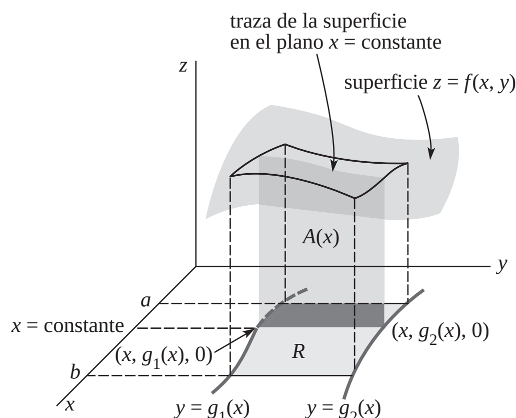


FIGURA 19.10.5 Interpretación geométrica de (6)

Pero, como se ha visto en (3), este volumen también viene dado por la integral doble

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral doble

Calcule la integral doble $\iint_R e^{x+3y}\, dA$ sobre la región limitada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$.

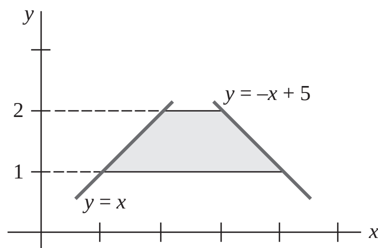


FIGURA 19.10.6 Región de integración para el ejemplo 1

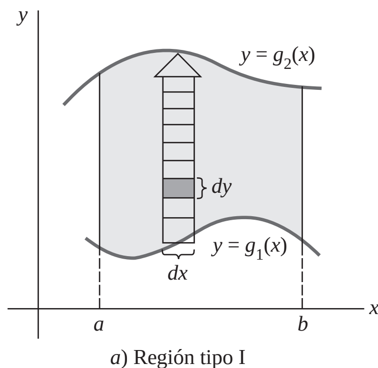
Solución Como se ve en la **FIGURA 19.10.6**, la región es tipo II; por lo tanto, de acuerdo con (7), en primer lugar se integra respecto a x desde la frontera izquierda $x = y$ hasta la frontera derecha $x = 5 - y$:

$$\iint_R e^{x+3y}\, dA = \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\, dx\, dy$$

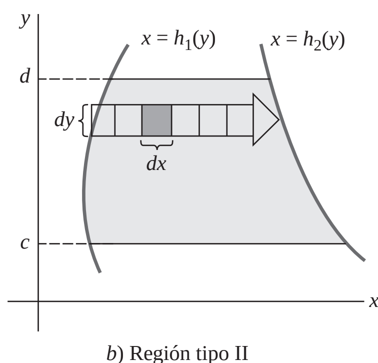
$$= \int_1^2 e^{x+3y} \Big]_y^{5-y} dy$$

$$= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})\, dy = \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2\,771.64. \qquad \equiv$$



a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 19.10.7 *a*) Suma en la dirección y; *b*) suma en la dirección x

Para reducir una integral doble a una integral iterada utilizando límites de integración correctos, es útil visualizar la integral doble como un proceso de suma doble, tal como se sugiere en la argumentación anterior. En una región tipo I, la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ es primero una suma en la dirección y. Gráficamente, esto se indica con la flecha vertical de la **FIGURA 19.10.7*a***); un rectángulo típico del cuerpo de la flecha tiene área $dy\, dx$. El dy antes que el dx significa que los "volúmenes" $f(x, y)\, dy\, dx$ de prismas construidos sobre los rectángulos se suman verticalmente respecto a y desde la curva g_1 que los limita inferiormente hasta la curva g_2 que los limita por encima. El dx que sigue a dy implica que el resultado de cada suma vertical se suma después horizontalmente respecto a x desde la izquierda ($x = a$) hasta la derecha ($x = b$). Se pueden hacer observaciones similares para las integrales dobles sobre regiones tipo II; véase la figura 19.10.7*b*). Recuérdese de (2) que, cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ proporciona el área de la región. Entonces, la figura 19.10.7*a*) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ suma las paredes rectangulares verticalmente y después de forma horizontal, mientras que la figura 19.10.7*b*) indica que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy\, dx$ suma las áreas rectangulares horizontalmente y después de forma vertical.

■ Invirtiendo el orden de integración Un problema puede simplificarse cuando el orden de integración se **cambia** o se **invierte**. Asimismo, algunas integrales iteradas que parecerían imposibles de calcular utilizando cierto orden de integración a veces pueden calcularse utilizando el orden inverso de integración.

EJEMPLO 2 Invirtiendo el orden de integración

Calcule $\iint_R xe^{y^2}$ sobre la región R del primer cuadrante que se encuentra limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

Solución Cuando la región se considera de tipo I, se tiene de la **FIGURA 19.10.8*a***), $0 \le x \le 2$ y $x^2 \le y \le 4$; entonces

$$\iint_R xe^{y^2} dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\, dy\, dx.$$

Aquí la dificultad radica en que la integral parcial $\int_{x^2}^4 xe^{y^2}$ no puede calcularse, puesto que e^{y^2} no tiene una antiderivada elemental respecto a y. Sin embargo, como se ve en la figura 19.10.8*b*), la misma región se puede interpretar como tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$. Por lo tanto, de (7)

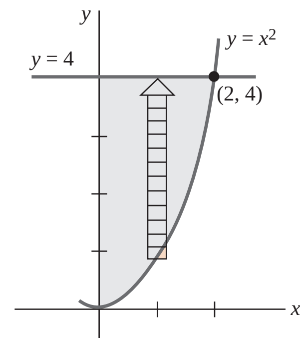
$$\iint_R xe^{y^2} dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{2} e^{y^2} \Big]_0^{\sqrt{y}} dy$$

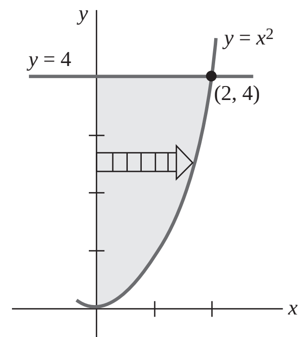
$$= \int_0^4 \frac{1}{2} ye^{y^2} dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1). \qquad \equiv$$

■ **Láminas de densidad variable (centro de masa)** Si ρ es una densidad constante (masa por unidad de área), entonces la masa de la lámina que se encuentra en una región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$ es

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\, dx. \tag{8}$$



a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 19.10.8 Invirtiendo el orden de integración en el ejemplo 2

Si una lámina correspondiente a una región R tiene una *densidad variable* $\rho(x, y)$, donde ρ no es negativa y es continua en R, análogamente a (8) se puede definir su **masa** m a través de la integral doble

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k = \iint_R \rho(x, y)\, dA. \tag{9}$$

Las coordenadas del **centro de masa** de la lámina son entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{10}$$

donde

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA \tag{11}$$

son los **momentos** de la lámina respecto a los ejes y y x, respectivamente. El centro de masa es el punto donde se considera que está concentrada toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ es constante, el centro de masa se denomina **centroide** de la lámina.

EJEMPLO 3 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Encuentre su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

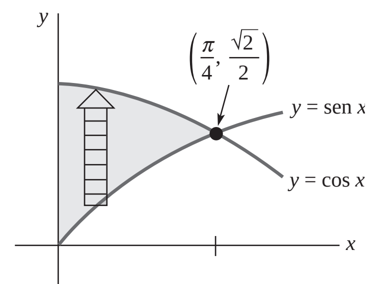


FIGURA 19.10.9 Región del ejemplo 3

Solución De la **FIGURA 19.10.9** se observa que

$$\begin{aligned} m &= \iint_R y\, dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\, dy\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{y^2}{2}\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R xy\, dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} xy\, dy\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}xy^2\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\, dx \quad \leftarrow \text{integrada por partes} \\ &= \left[\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{16}. \end{aligned}$$

De forma similar,

$$M_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\text{sen}\,x}^{\cos x} y^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(\cos^3 x - \text{sen}^3 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}[\cos x(1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}\,x(1 - \cos^2 x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{18}.$$

Por lo tanto, de (10)

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(\pi - 2)/16}{1/4} \approx 0.29 \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(5\sqrt{2} - 4)/18}{1/4} \approx 0.68.$$

Así, el centro de masa tiene las coordenadas (0.29, 0.68), aproximadamente. ≡

Momentos de inercia Las integrales M_x y M_y de (11) se denominan también **primeros momentos** de una lámina respecto a los ejes x y y, respectivamente. Los llamados **segundos momentos** de una lámina o **momentos de inercia** respecto a los ejes x y y son, a su vez, definidos por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)\,dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)\,dA. \tag{12}$$

Un momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento traslacional, la energía cinética viene dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es masa y v es velocidad lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que rota a una distancia r de un eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I = mr^2$ es su momento de inercia respecto al eje de rotación y ω es su velocidad angular.

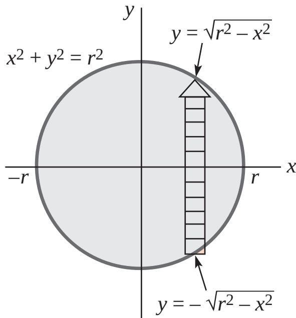


FIGURA 19.10.10 Disco del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia respecto al eje y del disco homogéneo delgado de masa m que se muestra en la **FIGURA 19.10.10**.

Solución Como el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por lo tanto, de (12)

$$I_y = \iint_R x^2\left(\frac{m}{\pi r^2}\right)dA = \frac{m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{2m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica}$$

$$= \frac{2mr^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{sen}^2\,\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{sen}^2 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 - \cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}mr^2.$$

≡

Radio de giro El **radio de giro** de una lámina de masa m y momento de inercia I, respecto a un eje, se define como

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \tag{13}$$

Puesto que (13) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial que la lámina, considerada una masa puntual, puede rotar respecto al eje sin cambiar la inercia rotacional del cuerpo. En el ejemplo 4, el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{(mr^2/4)/m} = r/2$.

19.10 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas del 1 al 8, calcule la integral parcial indicada.

1. $\int_{-1}^{3} (6xy - 5e^y)\, dx$ **2.** $\int_{1}^{2} \tan xy\, dy$

3. $\int_{1}^{3x} x^3 e^{xy}\, dy$ **4.** $\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\, dx$

5. $\int_{0}^{2x} \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dy$ **6.** $\int_{x^3}^{x} e^{2y/x}\, dy$

7. $\int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y)\, dx$ **8.** $\int_{\sqrt{y}}^{1} y \ln x\, dx$

En los problemas del 9 al 12, bosqueje la región de integración para la integral iterada indicada.

9. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x+1} f(x, y)\, dy\, dx$ **10.** $\int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

11. $\int_{-1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$ **12.** $\int_{-1}^{2}\int_{-x^2}^{x^2+1} f(x, y)\, dy\, dx$

En los problemas del 13 al 22, calcule la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones indicadas. Elíjase el orden de integración más conveniente.

13. $\iint_R x^3y^2\, dA;\ y = x,\ y = 0,\ x = 1$

14. $\iint_R (x + 1)\, dA;\ y = x,\ x + y = 4,\ x = 0$

15. $\iint_R (2x + 4y + 1)\, dA;\ y = x^2,\ y = x^3$

16. $\iint_R xe^y\, dA;$ R es igual que en el problema 13

17. $\iint_R 2xy\, dA;\ y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$

18. $\iint_R \frac{x}{\sqrt{y}}\, dA;\ y = x^2 + 1,\ y = 3 - x^2$

19. $\iint_R \frac{y}{1 + xy}\, dA;\ y = 0,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 1$

20. $\iint_R \operatorname{sen}\frac{\pi x}{y}\, dA;\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$

21. $\iint_R \sqrt{x^2 + 1}\, dA;\ x = y,\ x = -y,\ x = \sqrt{3}$

22. $\iint_R x\, dA;\ y = \tan^{-1}x,\ y = 0,\ x = 1$

23. Considere el sólido acotado por las gráficas $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - y$ y $z = 0$ mostrado en la **FIGURA 19.10.11**. Escoja y calcule la integral correcta que representa al volumen V del sólido.

a) $4\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

b) $2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

c) $2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dx\, dy$

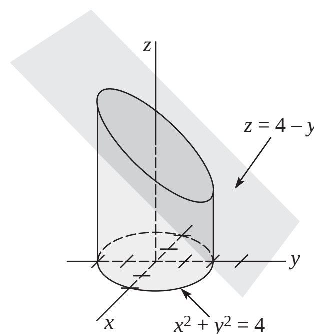


FIGURA 19.10.11 Sólido del problema 23

24. Considérese el sólido acotado por las gráficas $x^2 + y^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$. En la **FIGURA 19.10.12** se muestra un octavo del sólido. Escoja y calcule la integral correcta que representa al volumen V del sólido.

a) $4\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx$

b) $8\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dx\, dy$

c) $8\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2)^{1/2}\, dy\, dx$

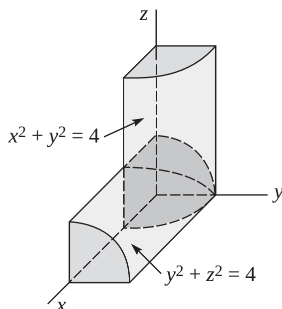


FIGURA 19.10.12 Sólido para el problema 24

En los problemas del 25 al 34, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

25. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

26. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

27. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

28. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$

29. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

30. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

31. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$

32. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$

33. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

34. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

En los problemas del 35 al 40, calcule la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

35. $\int_0^1 \int_x^1 x^2\sqrt{1 + y^4}\, dy\, dx$ **36.** $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{-y/x}\, dx\, dy$

37. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3}\, dx\, dy$ **38.** $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$

39. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1 + y^4}\, dy\, dx$ **40.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy$

En los problemas del 41 al 50, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

41. $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 3;\ \rho(x, y) = xy$

42. $x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 4;\ \rho(x, y) = x^2$

43. $y = x,\ x + y = 6,\ y = 0;\ \rho(x, y) = 2y$

44. $y = |x|,\ y = 3;\ \rho(x, y) = x^2 + y^2$

45. $y = x^2,\ x = 1,\ y = 0;\ \rho(x, y) = x + y$

46. $x = y^2,\ x = 4;\ \rho(x, y) = y + 5$

47. $y = 1 - x^2,\ y = 0$; la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al eje x.

48. $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi,\ y = 0$; la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al eje y.

49. $y = e^x,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;\ \rho(x, y) = y^3$

50. $y = \sqrt{9 - x^2}\ y = 0;\ \rho(x, y) = x^2$

En los problemas del 51 al 54, encuentre el momento de inercia respecto al eje x de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

51. $x = y - y^2,\ x = 0;\ \rho(x, y) = 2x$

52. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$

53. $y = \cos x,\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante)

54. $y = \sqrt{4 - x^2}\ x = 0, y = 0$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

En los problemas del 55 al 58, encuentre el momento de inercia respecto al eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

55. $y = x^2,\ x = 0,\ y = 4$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

56. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$

57. $y = x,\ y = 0,\ y = 1,\ x = 3;\ \rho(x, y) = 4x + 3y$

58. Tanto R como la densidad son iguales que en el problema 47.

En los problemas 59 y 60, encuentre el radio de giro respecto al eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad señaladas.

59. $x = \sqrt{a^2 - y^2},\ x = 0;\ \rho(x, y) = x$; eje y

60. $x + y = a,\ a > 0,\ x = 0,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante); eje x

61. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Si su densidad es $\rho(x, y) = 1$, encuentre:

a) el momento de inercia respecto al eje x de la lámina,

b) el momento de inercia respecto al eje y de la lámina,

c) el radio de giro respecto al eje x [*sugerencia:* el área de la elipse es πab], y

d) el radio de giro respecto al eje y.

62. Una sección transversal de un plano aerodinámico experimental es la lámina mostrada en la **FIGURA 19.10.13**. El arco ABC es elíptico, mientras que los dos arcos AD y CD son parabólicos. Encuentre el momento de inercia respecto al eje x de la lámina, suponiendo la hipótesis de que la densidad es $\rho(x, y) = 1$.

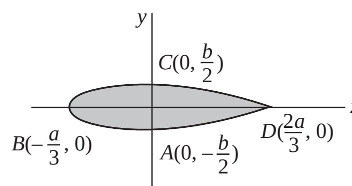


FIGURA 19.10.13 Plano aerodinámico del problema 62

El **momento polar de inercia** de una lámina respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA = I_x + I_y.$$

En los problemas del 63 al 66, encuentre el momento polar de inercia de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

63. $x + y = a,\ a > 0,\ x = 0,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante).

64. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$. [*Sugerencia:* Véase problemas 52 y 56.]

65. $x = y^2 + 2,\ x = 6 - y^2$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

66. $y = x,\ y = 0,\ y = 3,\ x = 4;\ \rho(x, y) = k$ (constante).

67. Encuentre el radio de giro del problema 63.

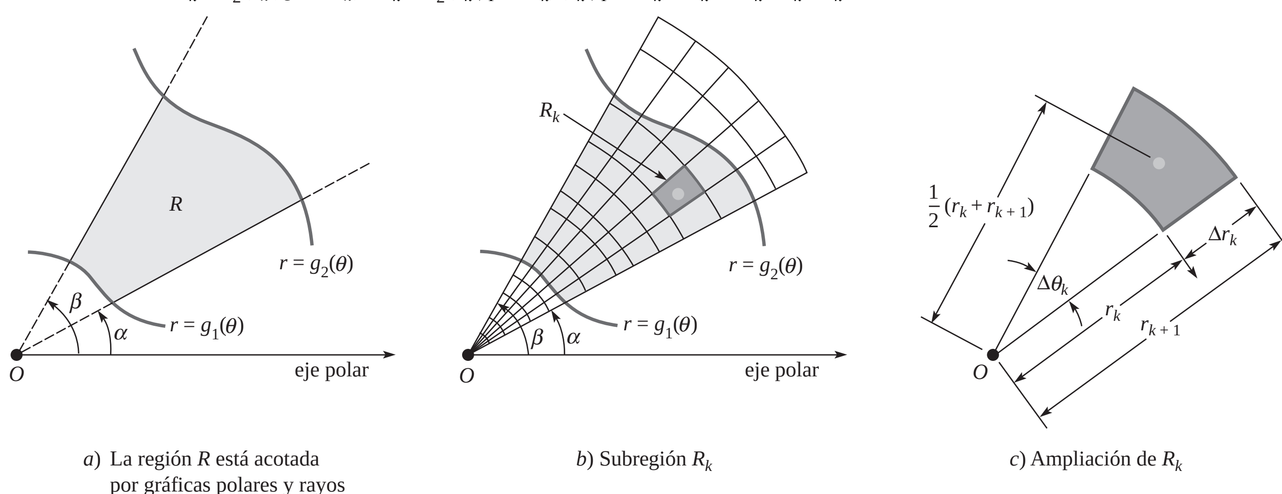
68. Demuestre que el momento polar de inercia respecto al centro de una placa rectangular homogénea delgada de masa m, ancho w y longitud l es $I_0 = m(l^2 + w^2)/12$.

19.11 Integrales dobles en coordenadas polares

Introducción Una integral doble, que parecería difícil o incluso imposible de calcular en coordenadas rectangulares *xy*, puede hacerse más manipulable cuando se expresa en un sistema coordenado diferente. En la presente sección se examinan las integrales dobles en coordenadas polares $r\theta$.

Rectángulos polares Supóngase que *R* es una región del plano acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$; y que *f* es una función de *r* y θ, continua en *R*. Para definir la integral doble de *f* sobre *R*, se utilizan ángulos y círculos concéntricos para dividir la región en una malla de **rectángulos polares** o subregiones R_k. Véase la **FIGURA 19.11.1*a*)** y ***b*)**. El área ΔA_k de una subregión típica R_k, mostrada en la **FIGURA 19.11.1*c*)**, es la diferencia entre las áreas de dos sectores circulares: $\Delta A_k = \frac{1}{2} r_{k+1}^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k$. Ahora, ΔA_k se escribe como

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2}(r_{k+1}^2 + r_k^2)\Delta\theta_k = \tfrac{1}{2}(r_{k+1} - r_k)(r_{k+1} - r_k)\Delta\theta_k = r_k^*\Delta r_k \Delta\theta_k$$



a) La región *R* está acotada por gráficas polares y rayos

b) Subregión R_k

c) Ampliación de R_k

FIGURA 19.11.1 R_k en *b*) y *c*) se denomina rectángulo polar

donde $\Delta r_k = (r_{k+1} - r_k)$ y $r_k^* = \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)$ denota el radio promedio. Eligiendo (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k, la integral doble de *f* sobre *R* es

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*) r_k^* \, \Delta r_k \, \Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\, dA.$$

La integral doble se calcula entonces por medio de la integral iterada:

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \tag{1}$$

Por otro lado, si la región *R* viene dada como en la **FIGURA 19.11.2**, la integral doble de *f* sobre *R* es entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr. \tag{2}$$

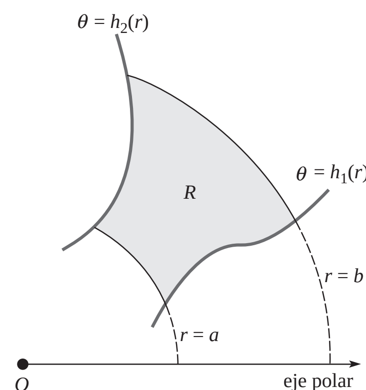


FIGURA 19.11.2 *R* está acotada por gráficas polares y arcos circulares

EJEMPLO 1 Centro de masa

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región acotada por una hoja de la rosa $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ del primer cuadrante, si la densidad en un punto *P* de la lámina es directamente proporcional a la distancia del polo.

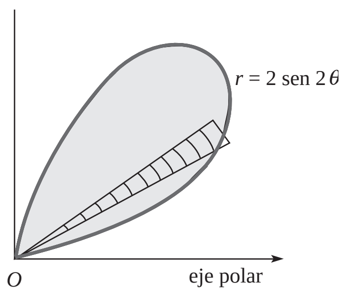


FIGURA 19.11.3 Lámina del ejemplo 1

Solución Haciendo variar θ desde 0 hasta $\pi/2$, se obtiene la gráfica de la **FIGURA 19.11.3**. Ahora, $d(O, P) = |r|$. Por lo tanto, $\rho(r, \theta) = k|r|$, donde k es una constante de proporcionalidad. De (9) de la sección 19.10, se tiene

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k|r|\, dA \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,2\theta} (r)r\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\bigg]_0^{2\,\mathrm{sen}\,2\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\, 2\theta\, d\theta \qquad \leftarrow \mathrm{sen}^2\, 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)\,\mathrm{sen}\, 2\theta\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}k. \end{aligned}$$

Como $x = r\cos\theta$ se escribe $M_y = k\iint_R x|r|\, dA$ como

$$\begin{aligned} M_y &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,2\theta} r^3\cos\theta\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\cos\theta\bigg]_0^{2\,\mathrm{sen}\,2\theta} d\theta \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\, 2\theta\cos\theta\, d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} 16\,\mathrm{sen}^4\theta\cos^4\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\theta\cos^5\theta\, d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\theta(1 - \mathrm{sen}^2\theta)^2\cos\theta\, d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} (\mathrm{sen}^4\theta - 2\,\mathrm{sen}^6\theta + \mathrm{sen}^8\theta)\cos\theta\, d\theta \\ &= 64k\left[\frac{1}{5}\mathrm{sen}^5\theta - \frac{2}{7}\mathrm{sen}^7\theta + \frac{1}{9}\mathrm{sen}^9\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{512}{315}k. \end{aligned}$$

De forma similar, sabiendo que $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se obtiene*

$$M_x = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,2\theta} r^3\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta = \frac{512}{315}k.$$

* Se podría haber argumentado que, como la lámina y la función de densidad son simétricas respecto al ángulo $\theta = \pi/4$, entonces $\bar{x} = \bar{y}$ y, por lo tanto, $M_x = M_y$.

Aquí las coordenadas rectangulares del centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{512k/315}{16k/9} = \frac{32}{35}. \qquad \equiv$$

Cambio de variables: de coordenadas rectangulares a coordenadas polares En ocasiones una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$, que pareciera difícil o incluso imposible de calcular utilizando coordenadas rectangulares, puede calcularse fácilmente haciendo un cambio de variables. Si se considera que f es continua en la región R, y si R se describe en coordenadas polares como $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta. \tag{3}$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando f contiene la expresión $x^2 + y^2$ ya que, en coordenadas polares, se escribe

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

EJEMPLO 2 Cambio de una integral a coordenadas polares

Utilice coordenadas polares para calcular

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\,dy\,dx.$$

Solución La región R de integración correspondiente a $x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$, $0 \le x \le 2$, se bosqueja en la **FIGURA 19.11.4**. Como $x^2 + y^2 = r^2$, la descripción polar del círculo $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$. Por lo tanto, en coordenadas polares, la región R viene dada por $0 \le r \le \sqrt{8}$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. Con $1/(5 + x^2 + y^2) = 1/(5 + r^2)$, la integral original se convierte en

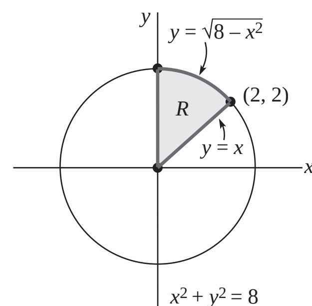


FIGURA 19.11.4 Región R del ejemplo 2

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\,dy\,dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{2r\,dr}{5 + r^2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(5 + r^2)\Big]_0^{\sqrt{8}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\ln\frac{13}{5}. \qquad \equiv
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Volumen

Encuentre el volumen de un sólido que se halla bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y sobre la región acotada por la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$.

Solución De la **FIGURA 19.11.5**, se observa que $V = \iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dA$. En coordenadas polares, las ecuaciones del hemisferio y del círculo se convierten, respectivamente, en $z = \sqrt{1 - r^2}$ y $r = \text{sen}\,\theta$. Ahora, por simetría, se tiene que

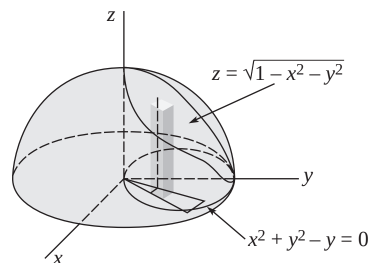


FIGURA 19.11.5 Sólido del ejemplo 3

$$V = \iint_R \sqrt{1 - r^2}\,dA = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{sen}\,\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\text{sen}\,\theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \text{sen}^2\theta)^{3/2}]\ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (\cos^2\theta)^{3/2}]\ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - \cos^3\theta]\ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \text{sen}^2\theta)\cos\theta]\ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left[\theta - \text{sen}\,\theta + \frac{1}{3}\text{sen}^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \approx 0.60.$$ ≡

■ **Área** Obsérvese que en (1) si $f(r, \theta) = 1$, entonces el **área** de la región R en la **FIGURA 19.11.1*a*)** viene dada por

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\, dr\, d\theta.$$

La misma observación es válida para (2) y la **FIGURA 19.11.2**, cuando $f(r, \theta) = 1$.

Comentarios

Se invita al lector a reexaminar el ejemplo 3. La gráfica del círculo $r = \text{sen}\,\theta$ se obtiene variando θ de 0 a π. Sin embargo, al calcular la integración iterada

$$V = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\,\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta$$

se observa que el resultado, *incorrecto*, es $\pi/3$. ¿Qué está mal?

19.11 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas del 1 al 4, encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares indicadas utilizando una integral doble en coordenadas polares.

1. $r = 3 + 3\,\text{sen}\,\theta$
2. $r = 2 + \cos\theta$
3. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, $r = 1$, área común
4. $r = 8\,\text{sen}\,4\theta$, un pétalo

En los problemas del 5 al 10, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$
6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$
9. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$, primer octante
10. $r = \cos\theta$, $z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 0$

En los problemas del 11 al 16, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

11. $r = 1$, $r = 3$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)
12. $r = \cos\theta$; la densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el polo.
13. $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$, $x = 3$; $\rho(r, \theta) = r^2$
14. $r = 4\cos 2\theta$, pétalo en el eje polar; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)
15. Afuera de $r = 2$ y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primer cuadrante; la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia al polo.
16. $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas del 17 al 20, encuentre el momento de inercia indicado para la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

17. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x

18. $r = a;\ \rho(r, \theta) = \dfrac{1}{1 + r^4};\ I_x$

19. Afuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a \cos\theta$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cubo de la distancia al polo; I_y

20. Afuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2$ sen 2θ, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y

En los problemas del 21 al 24, encuentre el **momento polar de inercia**

$$I_0 = \iint_R r^2 \rho(r, \theta)\, dA = I_x + I_y$$

de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

21. $r = a;\ \rho(r, \theta) = k$ (constante). [*Sugerencia:* Utilice el problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.]

22. $r = \theta,\ 0 \le \theta \le \pi,\ y = 0$; la densidad en un punto P es proporcional a la distancia del polo.

23. $r\theta = 1,\ \frac{1}{3} \le \theta \le 1,\ r = 1,\ r = 3,\ y = 0$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional a su distancia al polo. [*Sugerencia:* Integre primero con respecto a θ.]

24. $r = 2a \cos\theta;\ \rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas del 25 al 32, calcule la integral iterada que se proporciona cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$

27. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx\, dy$

28. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{\pi-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

29. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dy\, dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$

31. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y)\, dy\, dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$

33. El tanque de hidrógeno líquido del transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto, con una cubierta semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndrica del tanque es de 4.2 m. Encuentre el volumen del tanque mostrado en la **FIGURA 19.11.6**.

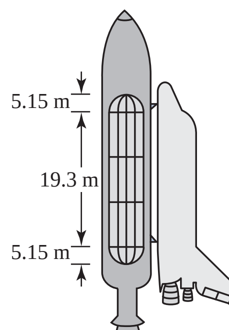


FIGURA 19.11.6 Tanque de combustible del problema 33

34. Calcule $\iint_R (x + y)\, dA$ de la región mostrada en la **FIGURA 19.11.7**.

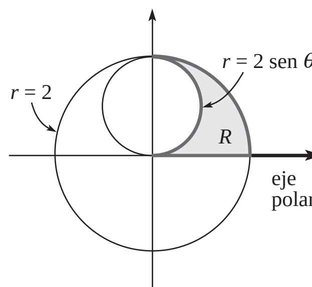


FIGURA 19.11.7 Región R para el problema 34

35. La integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ es importante en teoría de probabilidad, estadística y otras áreas de la matemática aplicada. Si I denota a esta integral, entonces

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dx \quad \text{e} \quad I = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$$

y en consecuencia

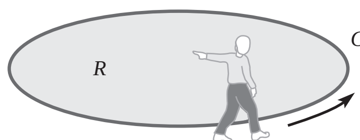
$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Utilice coordenadas polares para calcular esta última integral y encuentre el valor de I.

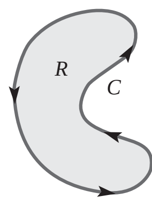
19.12 Teorema de Green

■ Introducción Uno de los teoremas más importantes en el cálculo integral vectorial relaciona la integral de línea alrededor de una curva por tramos cerrada C con la integral doble sobre la región R acotada por dicha curva.

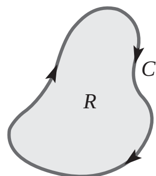
■ Integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples La **dirección positiva** alrededor de una curva cerrada simple C es aquella en la cual se debe mover un punto de la curva, o la dirección en la que una persona debe caminar sobre C, de forma tal que la región R aco-



a) Dirección positiva



b) Dirección positiva



c) Dirección negativa

FIGURA 19.12.1 Direcciones sobre una curva C

tada por C se mantenga a la izquierda; véase la **FIGURA 19.12.1*a*)**. En palabras simples, las direcciones *positiva* y *negativa* corresponden al *sentido contrario al de las manecillas del reloj* y al *sentido de las manecillas del reloj*, respectivamente, como se muestra en la **FIGURA 19.12.1*b*)** y ***c*)**. Las integrales de línea sobre curvas cerradas simples se escriben como sigue

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y) dy, \quad \oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \quad \oint_C F(x, y)\, ds,$$

etc. Los símbolos $\oint_C$ y $\oint_C$ se refieren, respectivamente, a integraciones en las direcciones positiva y negativa.

Teorema 19.12.1 Teorema de Green en el plano*

Supóngase que C es una curva cerrada simple suave por tramos que acota a una región R. Si P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son funciones continuas en R, entonces

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \tag{1}$$

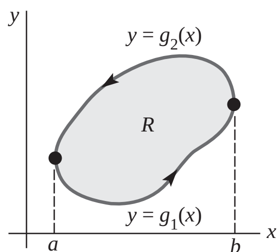
DEMOSTRACIÓN PARCIAL

La siguiente demostración de (1) es válida sólo para una región R que es simultáneamente del tipo I y tipo II:

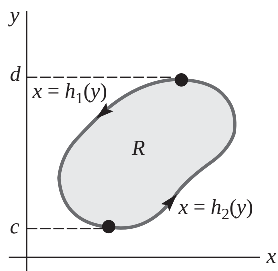
$$R: g_1(x) \le y \le g_2(x), \qquad a \le x \le b$$
$$R: h_1(y) \le x \le h_2(y), \qquad c \le y \le d.$$

Utilizando la **FIGURA 19.12.2*a*)**, se tiene

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx \\ &= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\, dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\, dx \\ &= \oint_C P(x, y)\, dx. \end{aligned} \tag{2}$$



a) R como región tipo I



b) R como región tipo II

FIGURA 19.12.2 Región R del teorema 19.12.1

De forma similar, a partir de la **FIGURA 19.12.2*b*)** se tiene,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\, dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y)\, dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\, dy \\ &= \oint_C Q(x, y)\, dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Sumando los resultados de (2) y (3) se obtiene (1). ≡

* Denominado así por George Green (1793-1841), matemático y físico inglés. Las palabras *en el plano* sugieren que el teorema se generaliza al espacio tridimensional, lo cual es cierto como se ve más adelante.

El teorema es aplicable a regiones más complicadas, tales como las mostradas en la **FIGURA 19.12.3**, aunque la demostración anterior no sea válida para ellas. La demostración consistiría en descomponer R en un número finito de subregiones a las cuales se puede aplicar (1) y sumar así los resultados.

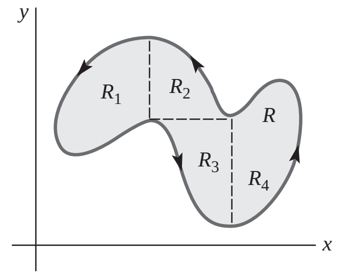


FIGURA 19.12.3 Subregiones de R

EJEMPLO 1 Uso del teorema de Green

Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$.

Solución Si $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = 2y - x$, entonces $\partial P/\partial y = -2y$ y $\partial Q/\partial x = -1$. De (1) y de la **FIGURA 19.12.4**, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy &= \iint_R (-1 + 2y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (-y + y^2)\Big]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 (-x^6 + x^4 + x^3 - x^2)\,dx = -\frac{11}{420}.\end{aligned}$$

≡

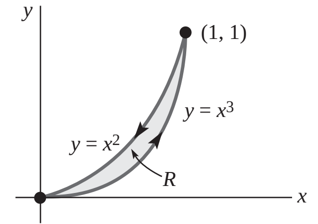


FIGURA 19.12.4 Curva C del ejemplo 1

Observe que la integral de línea del ejemplo 1 se podría haber calculado en forma directa utilizando la variable x como parámetro. Sin embargo, pondérese en el próximo ejemplo la conveniencia de calcular la integral de línea dada en la forma usual.

EJEMPLO 2 Uso del teorema de Green

Calcule $\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

Solución Al identificar $P(x, y) = x^5 + 3y$ y $Q(x, y) = 2x - e^{y^3}$, se tiene $\partial P/\partial y = 3$ y $\partial Q/\partial x = 2$. Así, (1) da

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = \iint_R (2 - 3)\,dA = -\iint_R dA.$$

Ahora, la integral doble $\iint_R dA$ proporciona el área de la región R acotada por el círculo de radio 2 que se muestra en la **FIGURA 19.12.5**. Como el área del círculo es $\pi 2^2 = 4\pi$, se tiene que

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = -4\pi.$$

≡

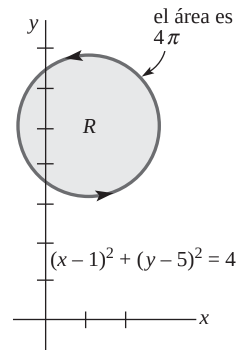


FIGURA 19.12.5 Curva circular C del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Trabajo realizado por una fuerza

Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (-16y + \text{sen}\,x^2)\mathbf{i} + (4e^y + 3x^2)\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva cerrada simple C mostrada en la **FIGURA 19.12.6**.

Solución De (12) de la sección 19.8, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ viene dado por

$$W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (-16y + \text{sen}\,x^2)\,dx + (4e^y + 3x^2)\,dy$$

y entonces, por el teorema de Green, $W = \iint_R (6x + 16)\,dA$. Revisando la región R, esta última integral se maneja mejor en coordenadas polares. Como R se define por $0 \le r \le 1$ y $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$,

$$W = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16)\,r\,dr\,d\theta$$

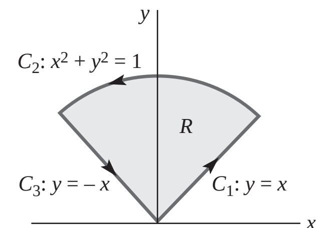


FIGURA 19.12.6 Curva C del ejemplo 3

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2r^3 \cos\theta + 8r^2)\Big]_0^1 d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos\theta + 8)\, d\theta = 4\pi. \qquad \equiv$$

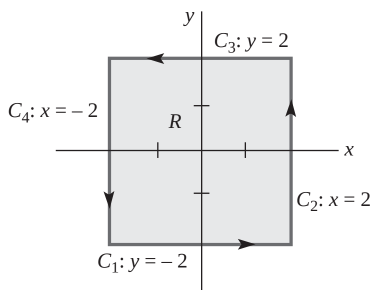


FIGURA 19.12.7 Curva C del ejemplo 4

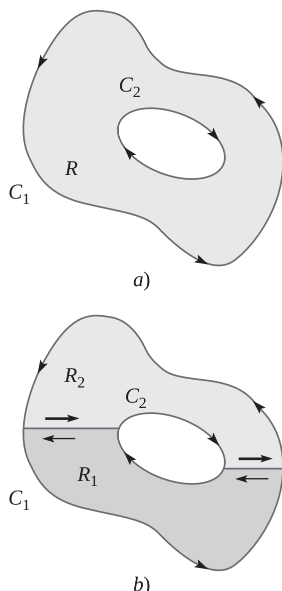


FIGURA 19.12.8 La frontera de R es $C = C_1 \cup C_2$

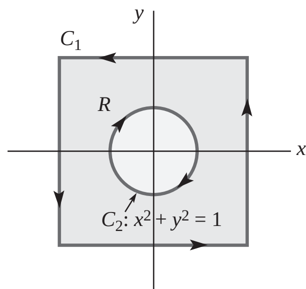


FIGURA 19.12.9 Frontera C del ejemplo 5

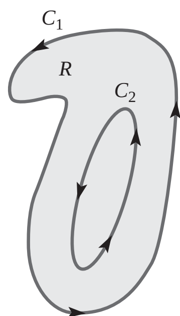


FIGURA 19.12.10 Curvas C_1 y C_2 en (5)

EJEMPLO 4 Teorema de Green no aplicable

Sea C la curva cerrada que consta de los cuatro segmentos rectos de línea C_1, C_2, C_3, C_4 mostrados en la **FIGURA 19.12.7**. El teorema de Green *no* es aplicable a la integral de línea

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

puesto que P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ no son continuas en el origen. $\equiv$

Región con orificios El teorema de Green también es válido para una región R con "orificios", esto es, acotada entre dos o más curvas cerradas simples suaves por tramos. En la **FIGURA 19.12.8*a*)** se muestra una región R acotada por una curva C que consta de dos curvas cerradas simples C_1 y C_2, o sea, $C = C_1 \cup C_2$. La curva C tiene orientación positiva, ya que si C_1 se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj y C_2 en el sentido de las manecillas del reloj, la región R se halla siempre a la izquierda. Si ahora se introducen cortes transversales como se muestra en la **FIGURA 19.12.8*b*)**, la región R se divide en dos subregiones, R_1 y R_2. Aplicando el teorema de Green a R_1 y R_2, se obtiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \oint_{C_1} P\, dx + Q\, dy + \oint_{C_2} P\, dx + Q\, dy \qquad (4)$$

$$= \oint_C P\, dx + Q\, dy.$$

Este resultado es consecuencia de que las integrales de línea en los cortes transversales (trayectorias con orientaciones opuestas) se cancelan entre sí; véase (8) de la sección 19.8.

EJEMPLO 5 Región con un orificio

Calcule $\oint_C \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R que se muestra en la **FIGURA 19.12.9**.

Solución Puesto que $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, y las derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

son continuas en la región R acotada por C, se tiene, a partir de la argumentación anterior, que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = \iint_R \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0. \qquad \equiv$$

Como consecuencia de la argumentación precedente al ejemplo 5, se establece un resultado para las integrales de línea que permite, en ciertas circunstancias, reemplazar una trayectoria cerrada complicada por una trayectoria más sencilla. Supóngase, como se muestra en la **FIGURA 19.12.10**, que C_1 y C_2 son dos trayectorias cerradas simples suaves por tramos que no se intersecan y cuya orientación es la misma (en sentido contrario al de las manecillas del

reloj). Supóngase también que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas tales que, en la región R acotada entre C_1 y C_2,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en la región R limitada entre C_1 y C_2. Entonces, de (4) anterior y (8) de la sección 19.8 se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{-C_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

o
$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{5}$$

EJEMPLO 6 De vuelta al ejemplo 4

Calcule la integral de línea del ejemplo 4.

Solución Un método para calcular la integral de línea es escribir

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

y entonces calcular las cuatro integrales de los segmentos de línea C_1, C_2, C_3 y C_4. O bien, si se observa que el círculo C': $x^2 + y^2 = 1$ está completamente en C (véase la **FIGURA 19.12.11**), resulta evidente pues del ejemplo 5 que $P = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q = x/(x^2 + y^2)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en la región R acotada entre C y C'. Además, para R

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

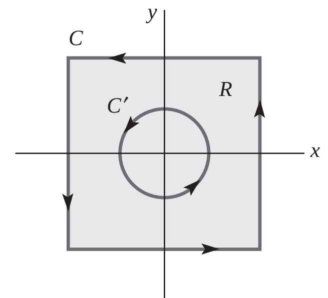


FIGURA 19.12.11 Curvas C y C' del ejemplo 6

Por lo tanto, de (5) se tiene que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy.$$

Utilizando la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, se obtiene para C'

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t)]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt \tag{6}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \quad \equiv$$

Es interesante observar que el resultado en (6):

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 2\pi$$

es correcto para cualquier curva cerrada simple suave por tramos C con el origen en su interior. Únicamente se necesita elegir C' como $x^2 + y^2 = a^2$, donde a es lo suficientemente pequeño para que el círculo se encuentre completamente dentro de C.

19.12 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas del 1 al 4, verifique el teorema de Green calculando ambas integrales.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + xy\,dy = \iint_R (y + 1)\,dA$, donde C es el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 3)

2. $\oint_C 3x^2y\,dx + (x^2 - 5y)\,dy = \iint_R (2x - 3x^2)\,dA$, donde C es el rectángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$

3. $\oint_C -y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x + 2y)\,dA$, donde C es el círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

4. $\oint_C -2y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_R 8y\,dA$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$

En los problemas del 5 al 14, utilice el teorema de Green para calcular la integral de línea indicada.

5. $\oint_C 2y\,dx + 5x\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$
6. $\oint_C (x + y^2)\,dx + (2x^2 - y)\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$
7. $\oint_C (x^4 - 2y^3)\,dx + (2x^3 - y^4)\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$
8. $\oint_C (x - 3y)\,dx + (4x + y)\,dy$, donde C es el rectángulo de vértices $(-2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-2, 2)$
9. $\oint_C 2xy\,dx + 3xy^2\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$
10. $\oint_C e^{2x}\operatorname{sen} 2y\,dx + e^{2x}\cos 2y\,dy$, donde C es la elipse $9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$
11. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$
12. $\oint_C e^{x2}\,dx + 2\tan^{-1} x\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$
13. $\oint_C \frac{1}{3}y^3\,dx + (xy + xy^2)\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $x = y^2$, $x = 1 - y^2$
14. $\oint_C xy^2\,dx + 3\cos y\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$

En los problemas 15 y 16, calcule la integral requerida utilizando cualquier curva cerrada suave por tramos C.

15. $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$
16. $\oint_C P(x)\,dx + Q(y)\,dy$

En los problemas 17 y 18, sea R la región acotada por una curva cerrada simple suave por tramos C. Demuestre los resultados que se indican.

17. $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx =$ área de R
18. $\oint_C -y\,dx + x\,dy =$ área de R

En los problemas 19 y 20, utilice los resultados de los problemas 17 y 18 para encontrar el área de la región acotada por la curva cerrada indicada.

19. La hipocicloide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$
20. La elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$
21. ***a***) Demuestre que

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = x_1y_2 - x_2y_1,$$

donde C es el segmento de línea desde el punto (x_1, y_1) hasta (x_2, y_2).

b) Utilice el inciso *a*) y el problema 18 para demostrar que el área A de un polígono de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), ordenados en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n).$$

22. Utilice el inciso *b*) del problema 21 para encontrar el área del cuadrilátero de vértices $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$ y $(3, 5)$.

En los problemas 23 y 24, calcule la integral de línea indicada, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R.

23. $\oint_C (4x^2 - y^3)\,dx + (x^3 + y^2)\,dy$

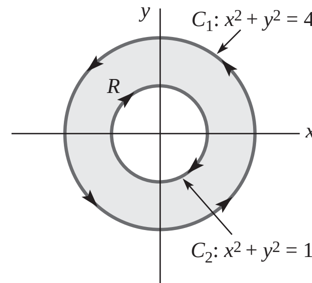


FIGURA 19.12.12 Frontera C para el problema 23

24. $\oint_C (\cos x^2 - y)\,dx + \sqrt{y^2 + 1}\,dy$

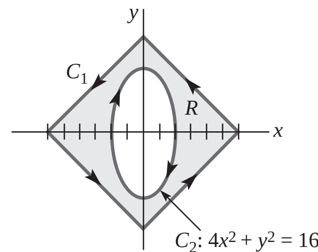


FIGURA 19.12.13 Frontera C para el problema 24

En los problemas 25 y 26, proceda como en el ejemplo 6 para calcular la integral de línea indicada.

25. $\displaystyle\oint_C \frac{-y^3dx + xy^2dy}{(x^2 + y^2)^2}$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$
26. $\displaystyle\oint_C \frac{-y}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dx + \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$

En los problemas 27 y 28, utilice el teorema de Green para calcular la integral doble indicada por medio de una integral de línea. [*Sugerencia:* Encuentre funciones apropiadas P y Q.]

27. $\iint_R x^2\,dA$; R es la región acotada por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$
28. $\iint_R [1 - 2(y - 1)]\,dA$; R es la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $x = 0$

En los problemas 29 y 30, utilice el teorema de Green para encontrar el trabajo realizado por la fuerza indicada $\mathbf{F}$ alrededor de la curva cerrada de la **FIGURA 19.12.14**.

29. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$
30. $\mathbf{F} = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

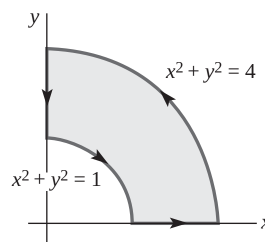


FIGURA 19.12.14 Curva para los problemas 29 y 30

31. Sean P y Q funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas sobre una región simplemente conexa del plano xy. Si $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ para cualquier curva cerrada simple suave por tramos C de la región.

32. Sea R una región acotada por una curva cerrada simple suave por tramos C. Demuestre que las coordenadas del centroide de la región vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

33. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo del cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

19.13 Integrales de superficie

Introducción En el plano xy, la longitud de un arco de la gráfica $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por la integral definida

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1}$$

El problema en tres dimensiones, que es la contraparte del problema de la longitud de arco, es encontrar el área $A(s)$ de una porción de la superficie S que viene dada por una función $z = f(x, y)$ con primeras derivadas parciales continuas sobre una región cerrada R en el plano xy. Se dice que tal superficie es **suave**.

Áreas de superficies Supóngase que se genera una partición interna P de R utilizando líneas paralelas a los ejes x y y, como se muestra en la **FIGURA 19.13.1*a*)**. P consta entonces de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ que se hallan completamente en R. Sea $(x_k, y_k, 0)$ la notación de cualquier punto en un R_k. Como se observa en la **FIGURA 19.13.1*a*)**, al proyectar el contorno de R_k hacia arriba, se determinan dos cantidades: una porción S_k de la superficie y una porción T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que, cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente igual al área ΔS_k de S_k.

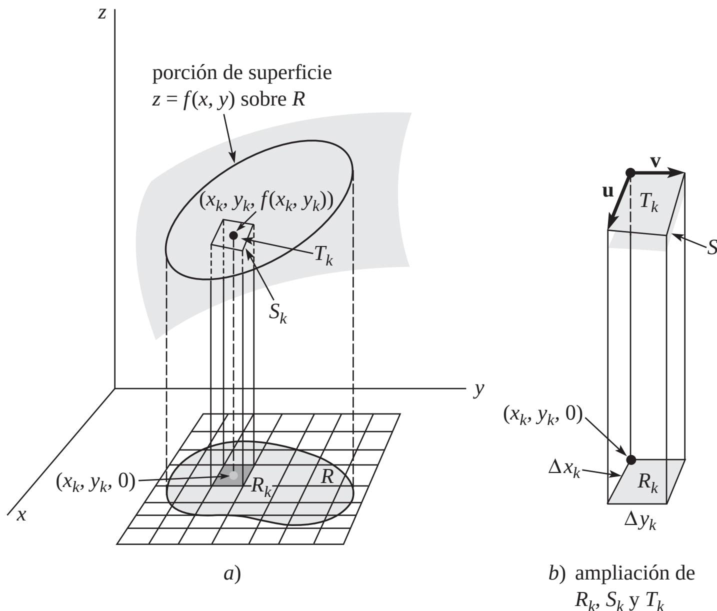


FIGURA 19.13.1 ¿Cuál es el área de la superficie por encima de R?

Para determinar el área de T_k se escoge $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k, como se muestra en la **FIGURA 19.13.1*b*)**. Los vectores indicados **u** y **v**, que forman dos lados de T_k, vienen dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k\mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \Delta y_k\mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k\mathbf{k},$$

donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las líneas que contienen a **u** y **v**, respectivamente. Ahora, de (11) de la sección 18.4, se sabe que $\Delta T_k = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ donde

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k,y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k,y_k)\Delta y_k \end{vmatrix} = [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x_k\, \Delta y_k.$$

En otras palabras,

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\, \Delta x_k\, \Delta y_k$$
$$= \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\, \Delta A_k.$$

En consecuencia, el área A es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\, \Delta A_k.$$

El límite de la suma anterior cuando $\|P\| \to 0$ lleva a la siguiente definición.

Definición 19.13.1 Área de superficies

Sea f una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en una región cerrada R. Entonces, el **área de la superficie sobre *R*** está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \qquad (2)$$

Casi se podría haber adivinado la forma de (2) extrapolando naturalmente la estructura de (1) de una variable a dos variables.

EJEMPLO 1 Área de una superficie

Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se halla por encima del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Solución Si se define $z = f(x, y)$ con $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

por lo que
$$1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Entonces, (2) es
$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

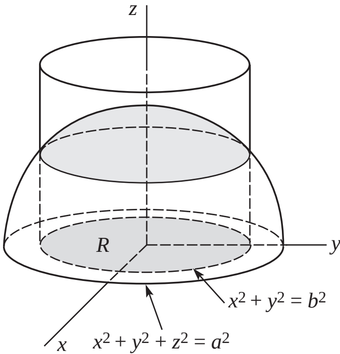


FIGURA 19.13.2 Porción de una esfera en el ejemplo 1

donde R se indica en la **FIGURA 19.13.2**. Para calcular esta integral doble, se cambia a coordenadas polares:

$$A(S) = a\int_0^{2\pi}\int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta$$
$$= a\int_0^{2\pi}\left[-(a^2 - r^2)^{1/2}\right]_0^b d\theta = a(a - \sqrt{a^2 - b^2})\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \text{ unidades cuadradas.}$$ ≡

■ **Diferencial de un área de superficie** La función

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \tag{3}$$

se denomina diferencial de un área de superficie. Se utiliza esta función en la argumentación que sigue.

■ **Integral de superficie** Como se ha visto, una integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

es una generalización de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$. La integral de área de superficie (2) es una generalización de la integral de la longitud de arco (1). A continuación, se considera una generalización de la integral de línea $\int_C G(x, y)\, ds$. Ésta se denomina **integral de superficie**.

1. Sea $w = G(x, y, z)$ una función definida en una región del espacio tridimensional que contiene a una superficie S, la cual es la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Sea la proyección R de la superficie sobre el plano xy una región tipo I o tipo II.
2. Divídase la superficie S en n porciones de área ΔS_k correspondientes a una partición P de R en n rectángulos R_k de áreas ΔA_k.
3. Sea $\|P\|$ la norma de la partición, o la longitud de la diagonal más larga de las R_k.
4. Elíjase un punto de muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada porción S_k del área de superficie. Véase la **FIGURA 19.13.3**.
5. Genérese la suma $\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta S_k$.

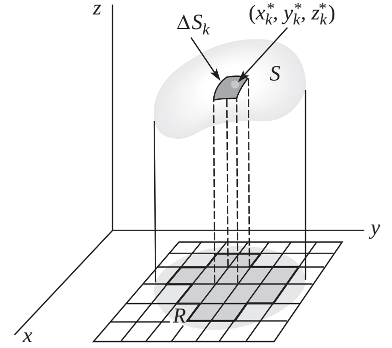


FIGURA 19.13.3 Punto de muestra en porción k-ésima

Definición 19.13.2 Integral de superficie

Sea G una función de tres variables definida sobre una región del espacio que contiene a la superficie S. Entonces la **integral de superficie de G sobre S** se expresa mediante

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta S_k. \tag{4}$$

■ **Método de cálculo** Si G, f, f_x y f_y son continuas en una región que contiene a S, entonces (4) se calcula por medio de una integral doble. Mediante (3), el lado izquierdo de (4) se convierte en

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \tag{5}$$

Obsérvese que cuando $G = 1$, (5) se reduce a la fórmula (2) para el área de una superficie.

■ **Proyección de S en otros planos** Si $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre una región R del plano xz, entonces

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\, dA. \tag{6}$$

En forma similar, si $x = h(y, z)$ es la ecuación de una superficie que se proyecta sobre el plano yz, entonces el análogo de (5) es

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(h(y, z), y, z)\sqrt{1 + [h_y(y, z)]^2 + [h_z(y, z)]^2}\, dA. \tag{7}$$

■ **Masa de una superficie** Supóngase que $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de una superficie en cualquier punto, o la masa por área unitaria de superficie; entonces la **masa** m de la superficie es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS. \tag{8}$$

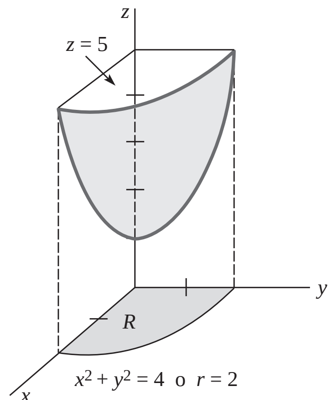


FIGURA 19.13.4 Superficie del ejemplo 2

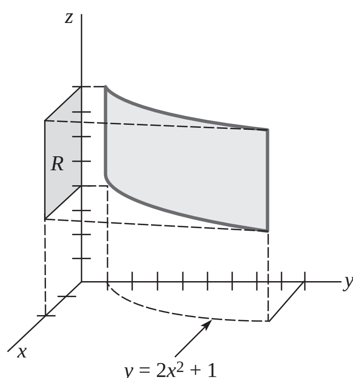
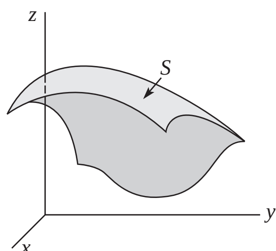
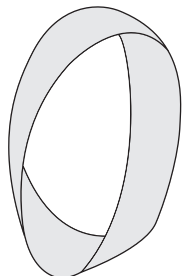


FIGURA 19.13.5 Superficie del ejemplo 3



a) Superficie de dos caras



b) Superficie de una cara

FIGURA 19.13.6 *a*) Superficie orientada; *b*) superficie no orientada

EJEMPLO 2 Masa de una superficie

Encuentre la masa de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante para $1 \le z \le 5$ si la densidad en un punto P de la superficie es directamente proporcional a su distancia al plano xy.

Solución La superficie en cuestión y su proyección sobre el plano xy se muestran en la **FIGURA 19.13.4**. Ahora, como $\rho(x, y, z) = kz$ y $z = 1 + x^2 + y^2$, (8) y (5) dan

$$m = \iint_S kz\, dS = k \iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Cambiando a coordenadas polares, se obtiene

$$\begin{aligned} m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1 + r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1 + 4r^2)^{1/2} + r^3(1 + 4r^2)^{1/2}]\, dr\, d\theta \qquad \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1 + 4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1 + 4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{k\pi}{2}\left[\frac{5(17)^{3/2}}{12} - \frac{17^{5/2}}{120} - \frac{3}{40}\right] \approx 30.16\, k. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 3 Cálculo de una integral de superficie

Calcule $\iint_S xz^2\, dS$, donde S es la porción del cilindro $y = 2x^2 + 1$ en el primer octante que está acotada por $x = 0$, $x = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

Solución Se utiliza (6) con $g(x, z) = 2x^2 + 1$ y con la región rectangular R del plano xz mostrada en la **FIGURA 19.13.5**. Como $g_x(x, z) = 4x$ y $g_z(x, z) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S xz^2\, dS &= \int_0^2\int_4^8 xz^2\sqrt{1 + 16x^2}\, dz\, dx \\ &= \int_0^2 \frac{z^3}{3}x\sqrt{1 + 16x^2}\Big]_4^8 dx = \frac{448}{3}\int_0^2 x(1 + 16x^2)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{28}{9}(1 + 16x^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{28}{9}[65^{3/2} - 1] \approx 1\,627.3. \end{aligned}$$

≡

Superficies orientables En el ejemplo 5 se calcula una integral de superficie de un campo vectorial. Para poder hacer esto, se necesita examinar el concepto de **superficie orientable**. En términos generales, una superficie orientable S, tal como se ilustra en la **FIGURA 19.13.6*a*)**, tiene dos caras que podrían pintarse de diferentes colores. La tira de Möbius* mostrada en la **FIGURA 19.13.6*b*)** no es una superficie orientable y tiene una cara. Una persona que comienza a pintar la superficie de una franja de Möbius desde un punto, pintará toda la superficie regresando eventualmente al punto inicial.

Específicamente, se dice que una superficie suave S es **orientable** o es una **superficie orientada** si existe una función continua $\mathbf{n}$ de vectores unitarios normales definida en cada punto (x, y, z) de la superficie. El campo vectorial $\mathbf{n}(x, y, z)$ se denomina la **orientación** de S. Sin embargo, como un vector unitario normal en (x, y, z) a la superficie S puede ser tanto $\mathbf{n}(x, y, z)$ como $-\mathbf{n}(x, y, z)$, una superficie orientable tiene dos orientaciones; véase la **FIGURA 19.13.7*a*)-*c*)**. La tira de Möbius, mostrada de nuevo en la **FIGURA 19.13.7*d*)**, no es una superficie orientada, puesto que si una normal unitaria $\mathbf{n}$ comienza en P sobre la superficie y se mueve *una vez* alrededor de la franja sobre la curva C, termina en la "cara opuesta" de la franja en P y, por lo tanto, apunta en dirección opuesta. Una superficie S definida por $z = f(x, y)$ tiene

* Para construir una tira de Möbius, se corta una tira larga de papel, se le da media vuelta a un extremo y entonces se unen los extremos con cinta adhesiva.

una **orientación ascendente** (**FIGURA 19.13.7*b***) cuando las normales unitarias se dirigen hacia arriba, esto es, tiene componentes **k** positivas, y tiene una **orientación descendente** (**FIGURA 19.13.7*c***) cuando las normales unitarias se dirigen hacia abajo, es decir, tiene componentes **k** negativas.

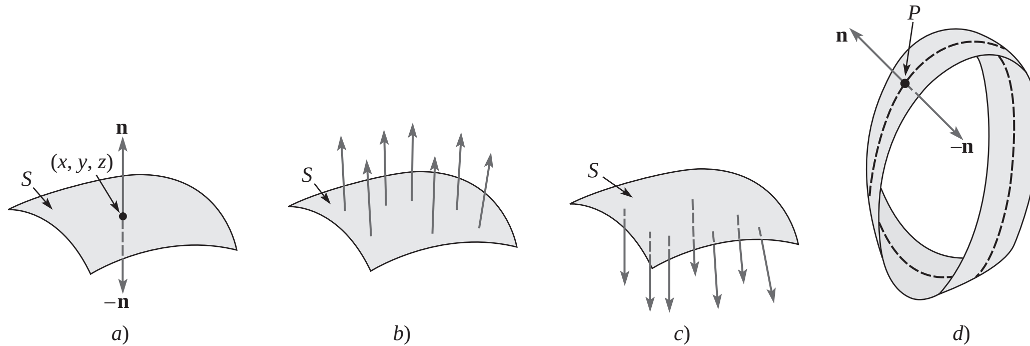


FIGURA 19.13.7 Orientación ascendente en *b*); orientación descendente en *c*)

Si una superficie suave S está definida por $g(x, y, z) = 0$, se sabe que un vector unitario normal es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\nabla g\|}\nabla g, \tag{9}$$

donde $\nabla g = \dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}$ es el gradiente de g. Si S está definido por $z = f(x, y)$, entonces se utiliza $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ o $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ dependiendo de la orientación de S.

Como se ve en el siguiente ejemplo, las dos orientaciones de una superficie cerrada orientable son **hacia afuera** y **hacia adentro**.

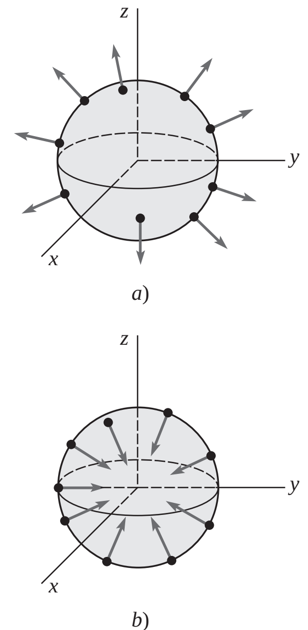


FIGURA 19.13.8 Esfera del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Orientaciones de una superficie

Considérese la esfera de radio $a > 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Si se define $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, entonces

$$\nabla g = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a.$$

Así, las dos orientaciones de la superficie son

$$\mathbf{n} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{x}{a}\mathbf{i} - \frac{y}{a}\mathbf{j} - \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

El campo vectorial **n** define una orientación hacia afuera, mientras que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ define una orientación hacia adentro; véase la **FIGURA 19.13.8**.

Integrales de los campos vectoriales Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces, como se ve en la figura 19.7.3, el volumen de fluido que fluye por unidad de tiempo a través de un elemento de un área superficial ΔS es aproximadamente

$$(\text{altura})(\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S,$$

donde **n** es un vector unitario normal a la superficie; véase la **FIGURA 19.13.9**. El volumen total por unidad de tiempo de un fluido que pasa por S se denomina **flujo de F a través de *S***, y viene dado por

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{10}$$

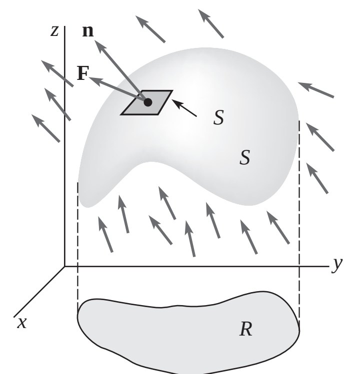


FIGURA 19.13.9 Superficie *S* en (10)

En el caso de una superficie cerrada S, si **n** es el vector normal externo (interno), entonces (10) proporciona el volumen del fluido que fluye hacia afuera (hacia adentro) por unidad de tiempo.

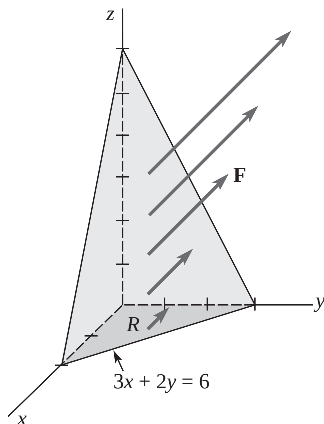


FIGURA 19.13.10 Superficie del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Flujo a través de una superficie

Considérese que $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ representa el flujo de un líquido. Encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la superficie S dada por la porción del plano $z = 6 - 3x - 2y$ en el primer octante orientado hacia arriba.

Solución El campo vectorial y la superficie se ilustran en la **FIGURA 19.13.10**. Definiendo el plano por medio de $g(x, y, z) = 3x + 2y + z - 6 = 0$, se observa que un vector normal unitario con una componente $\mathbf{k}$ positiva es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\,dS.$$

Como R es la proyección de la superficie sobre el plano xy, se encuentra de (10) que

$$\text{flujo} = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_R 3(6 - 3x - 2y)(\sqrt{14}\,dA)$$

$$= 3\int_0^2\int_0^{3-3x/2}(6 - 3x - 2y)\,dy\,dx = 18. \quad \equiv$$

Dependiendo de la naturaleza del campo vectorial, la integral en (10) representa otros tipos de flujo. Por ejemplo, (10) también puede dar flujo eléctrico, flujo magnético, flujos de calor, etcétera.

Comentarios

Si la superficie S se define por tramos, una integral de superficie sobre S se expresa como la suma de las integrales de superficie sobre las diversas partes de la misma. Por ejemplo, supóngase que S es la superficie cerrada suave por partes orientable acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (S_1) y el plano $z = 1$ (S_2). Entonces, el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ hacia afuera de la superficie S es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

donde se toma S_1 orientado hacia arriba y S_2 orientado hacia abajo; véanse la **FIGURA 19.13.11** y el problema 35 de los ejercicios 19.13.

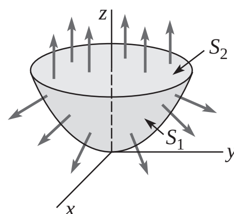


FIGURA 19.13.11 Superficie definida por tramos

19.13 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

1. Encuentre el área de la superficie de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ acotada por los planos coordenados en el primer octante.
2. Encuentre el área de la superficie de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está por encima de la región del primer cuadrante acotada por la gráfica $r = \operatorname{sen} 2\theta$.
3. Encuentre el área de la superficie de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que se halla por encima de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 5$.
4. Encuentre el área de la superficie de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se halla por debajo del plano $z = 2$.
5. Encuentre el área de la superficie de la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se halla por encima del plano xy.
6. Encuentre el área de la superficie de aquellas porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que se hallan dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
7. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que se halla por encima de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0$, $y = 0$ y $4x^2 + y^2 = 25$. [*Sugerencia:* Integre primero con respecto a x.]
8. Encuentre el área de la superficie de la porción de la gráfica $z = x^2 - y^2$ que se halla en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
9. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se hallan dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
10. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que se hallan dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
11. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que se hallan dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [*Sugerencia:* Véase la figura 19.10.12.]
12. Utilice el resultado del ejemplo 1 para demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. [*Sugerencia:* Considere el límite cuando $b \to a$.]
13. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ acotada entre $y = c_1$ y $y = c_2$, donde $0 < c_1$

$< c_2 < a$. [*Sugerencia:* Utilice coordenadas polares en el plano xz.]

14. Demuestre que el área encontrada en el problema 13 es igual al área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

En los problemas del 15 al 24, calcule la integral de superficie $\iint_S G(x, y, z)\, dS$.

15. $G(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante acotada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$

16. $G(x, y, z) = xy(9 - 4z)$; la superficie es la misma que en el problema 15.

17. $G(x, y, z) = xz^3$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

18. $G(x, y, z) = x + y + z$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 4$

19. $G(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante.

20. $G(x, y, z) = z^2$; S es la porción del plano $z = x + 1$ dentro del cilindro $y = 1 - x^2$, $0 \leq y \leq 1$

21. $G(x, y, z) = xy$; S es la porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

22. $G(x, y, z) = 2z$; S es la porción del paraboloide $2z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante acotada por $x = 0$, $y = \sqrt{3}$, $z = 1$

23. $G(x, y, z) = 24\sqrt{y}z$; S es la porción del cilindro $y = x^2$ en el primer octante acotada por $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$

24. $G(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante afuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 25 y 26, calcule $\iint_S (3z^2 + 4yz)\, dS$, donde S es la porción del plano $x + 2y + 3z = 6$ en el primer octante. Utilice la proyección de S sobre el plano coordenado indicado en la figura dada.

25.

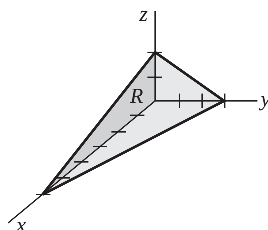


FIGURA 19.13.12 Región R para el problema 25

26.

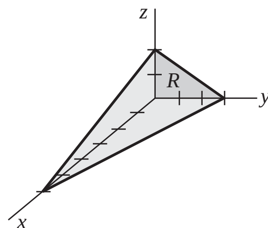


FIGURA 19.13.13 Región R para el problema 26

En los problemas 27 y 28, encuentre la masa de la superficie dada utilizando la función de densidad indicada.

27. S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al plano yz.

28. S es el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\rho(x, y, z) = |xy|$

En los problemas del 29 al 34, sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la superficie indicada. Considere que la superficie S tiene orientación ascendente.

29. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$; S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante acotada por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$

30. $\mathbf{F} = z\,\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

31. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; la superficie S es la misma que en el problema 30

32. $\mathbf{F} = -x^3y\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x + 3$ en el primer octante contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

33. $\mathbf{F} = \frac{1}{2}x^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $0 \leq z \leq 4$

34. $\mathbf{F} = e^y\,\mathbf{i} + e^{x}\,\mathbf{j} + 18y\,\mathbf{k}$; S es la porción del plano $x + y + z = 6$ en el primer octante.

35. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ hacia afuera de la superficie cerrada S dada en la figura 19.13.11.

36. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 6z^2\mathbf{k}$ hacia afuera de la superficie cerrada S acotada por los paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$

37. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la función temperatura y sea el "flujo" de calor representado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla T$. Encuentre el flujo de calor hacia afuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. [*Sugerencia:* El área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.]

38. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia afuera del cubo unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$; véase la **FIGURA 19.13.14**. Tenga en cuenta que el flujo hacia afuera del cubo es la suma de los flujos hacia afuera de las caras.

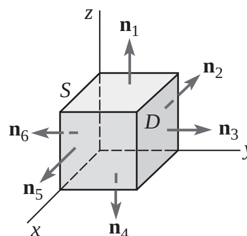


FIGURA 19.13.14 Cubo del problema 38

39. La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ debido a una carga puntual q en el origen viene dado por $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine el flujo hacia afuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

40. Si $\sigma(x, y, z)$ es la densidad de carga en un campo electrostático, entonces la carga total sobre una superficie S es $Q = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS$. Encuentre la carga total sobre la porción del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ que se halla dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ si la densidad de carga en un punto P de la superficie es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

41. Las coordenadas del centroide de una superficie están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\, dS}{A(S)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y\, dS}{A(S)}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z\, dS}{A(S)},$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie. Encuentre el centroide de la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.

42. Utilice la información del problema 41 para encontrar el centroide del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

43. Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie S y sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Demuestre que $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ es igual a

$$\iint_R \left[-P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z) \right] dA.$$

19.14 Teorema de Stokes

Introducción El teorema de Green de la sección anterior tiene dos formulaciones vectoriales. En esta sección y en la 19.16 se generalizan dichas formulaciones a tres dimensiones.

Formulación vectorial del teorema de Green Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

De (12) y (13) de la sección 19.8, el teorema de Green se escribe en notación vectorial como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA; \tag{1}$$

esto es, la integral de línea de la componente tangencial de **F** es la integral doble del componente normal de rot **F**.

Teorema de Green en el espacio tridimensional La formulación vectorial del teorema de Green dada en (1) establece una relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple suave continua por tramos C que forma la frontera de una región plana R y una integral doble sobre R. El teorema de Green en el espacio tridimensional relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple suave por tramos C que forma la frontera de una superficie S con una integral de superficie sobre S. Supóngase que $z = f(x, y)$ es una función continua cuya gráfica es una superficie orientable suave por tramos sobre una región R del plano xy. Sea C la frontera de S y sea la proyección de C sobre el plano xy la frontera de R. La dirección positiva de C se induce por la orientación de la superficie S; la dirección positiva sobre C corresponde a la dirección en que una persona tendría que caminar sobre C para tener su cabeza apuntando en la dirección de la orientación de la superficie, mientras mantiene la superficie hacia la izquierda; véase la **FIGURA 19.14.1**. Para ser más precisos, la orientación positiva de C está de acuerdo con la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de la orientación de la superficie, entonces los dedos de dicha mano se doblan alrededor de la superficie en la dirección positiva. Finalmente, sea **T** un vector unitario tangente a C que apunta en la dirección positiva. La formulación tridimensional del teorema de Green, que se proporciona a continuación, se denomina **teorema de Stokes**.

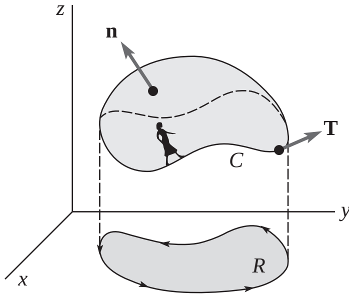


FIGURA 19.14.1 La frontera C de la superficie S tiene orientación positiva

Teorema 19.14.1 Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientable suave por tramos acotada por una curva cerrada simple suave por tramos C. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el que P, Q y R son funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a S. Si C se recorre en dirección positiva, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{2}$$

donde **n** es un vector unitario normal a S con la dirección de la orientación de S.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Supóngase que la superficie S está orientada hacia arriba y se define por medio de una función $z = f(x, y)$ que tiene segunda derivada parcial continua. De la definición 19.7.1 se tiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Es más, si se escribe $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA. \quad (3)$$

El objetivo es ahora demostrar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se reduce a (3).

Si C_{xy} es la proyección de C sobre el plano xy y tiene las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$, donde $a \le t \le b$, entonces $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = f(x(t), y(t))$, donde $a \le t \le b$, son ecuaciones paramétricas para C. Así,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \quad \leftarrow \text{regla de la cadena} \\
&= \oint_{C_{xy}} \left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \qquad (4) \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dA. \quad \leftarrow \text{teorema de Green}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \leftarrow \text{reglas de la cadena y del producto} \qquad (5) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.
\end{aligned}$$

En forma similar,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (6)$$

Restando (6) de (5) y aprovechando que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$, se observa que, después de reacomodar términos, (4) conduce a

$$\iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA.$$

Esta última expresión es la misma que la del lado derecho de (3), que es precisamente la que debía obtenerse. ≡

EJEMPLO 1 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para la que $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Verifique el teorema de Stokes si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

Solución La superficie S, la curva C (formada por la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4) y la región R se muestran en la **FIGURA 19.14.2**.

Integral de superficie: De $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, se obtiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

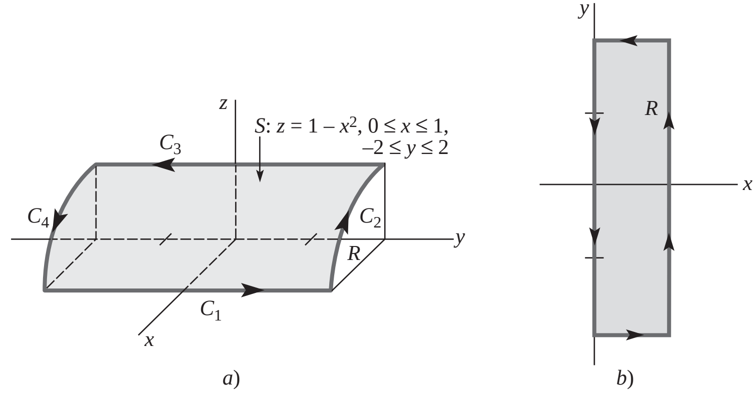


FIGURA 19.14.2 Superficie S y región R del ejemplo 1

Ahora, si $g(x, y, z) = z + x^2 - 1 = 0$ define al cilindro, entonces la normal superior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{2x\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS.$$

Para calcular esta última integral de superficie, se utiliza (5) de la sección 19.13:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS &= \iint_R (-2xy - x)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \Big[-xy^2 - xy\Big]_{-2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-4x)\, dx = -2. \end{aligned} \tag{7}$$

Integral de línea: Se escribe $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$.

Para C_1: $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, por lo que

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\, dy + 0 = 0.$$

Para C_2: $y = 2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\, dx$, por lo que

$$\int_{C_2} 2x\, dx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{11}{15}.$$

Para C_3: $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$, por lo que

$$\int_{C_3} 0 + y\,dy + 0 = \int_2^{-2} y\,dy = 0.$$

Para C_4: $y = -2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\,dx$, por lo que

$$\int_{C_4} -2x\,dx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\,dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{19}{15}.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\oint_C xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2,$

que, por supuesto, coincide con (7). ≡

EJEMPLO 2 Uso del teorema de Stokes

Calcule $\oint_C z dx + x\,dy + y\,dz$, donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. Oriente C en sentido contrario al de las manecillas del reloj visto desde arriba; véase la **FIGURA 19.14.3**.

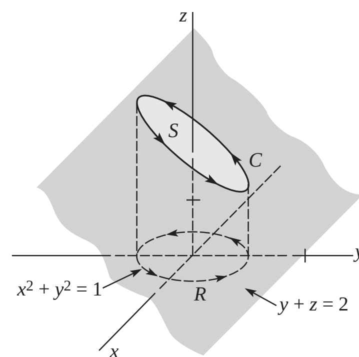


FIGURA 19.14.3 Curva C del ejemplo 2

Solución Si $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

La orientación dada de C corresponde a una orientación ascendente de la superficie S. Así, si $g(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ define al plano, entonces la normal ascendente es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

Entonces, de (2),

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\right] dS$$

$$= \sqrt{2}\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_R \sqrt{2}\,dA = 2\pi.$$ ≡

Obsérvese que si $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar, entonces, considerando (5) de la sección 19.7, (2) implica que la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero. En forma inversa, puede mostrarse que si la circulación es cero para cualquier curva cerrada simple, entonces $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar. En otras palabras, $\mathbf{F}$ es irrotacional si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es un potencial para $\mathbf{F}$. De manera equivalente, esto ofrece una prueba para un campo vectorial conservativo:

$\mathbf{F}$ *es un campo vectorial conservativo si y sólo si, rot* $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Interpretación física del rotacional En la sección 19.8 se explica que si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad de un fluido, entonces la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ alrededor de C es una medida de la cantidad con la que el fluido tiende a rodear la curva C circulando a su alrededor. La circulación de $\mathbf{F}$ se relaciona estrechamente con el rotacional de $\mathbf{F}$. Para ver esto, supóngase que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y que C_r es un pequeño círculo de radio r centrado en P_0; véase la **FIGURA 19.14.4**. Entonces por el teorema de Stokes,

$$\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_r} (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{8}$$

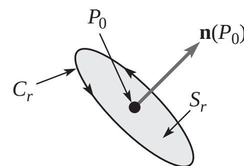


FIGURA 19.14.4 Curva C_r y superficie S_r en (8)

Ahora, si en cualquier punto $P(x, y, z)$ contenido en el pequeño círculo C_r se considera que rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, entonces (8) proporciona la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}\oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &\approx \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, dS \\ &= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) \iint_{S_r} dS \qquad (9) \\ &= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, A_r,\end{aligned}$$

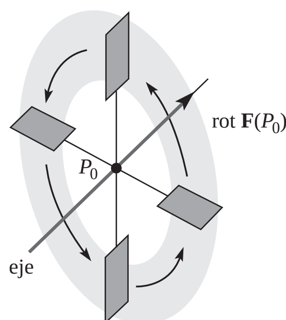


FIGURA 19.14.5 Rueda de palas

donde A_r es el área (πr^2) de la superficie circular S_r. Cuando $r \to 0$, mejora la aproximación rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, por lo que (9) conduce a

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (10)$$

Así, se observa que la componente normal de rot **F** es el valor límite del cociente de la circulación de **F** entre el área de la superficie circular. Para un valor pequeño pero fijo de r, se tiene

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) \approx \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (11)$$

Entonces, el rotacional de **F** es aproximadamente igual a la circulación de **F** por unidad de área. Si rot $\mathbf{F}(P_0) \neq \mathbf{0}$, entonces el lado izquierdo de (11) es un máximo cuando el círculo C_r se sitúa de forma que $\mathbf{n}(P_0)$ apunte en la misma dirección que rot $\mathbf{F}(P_0)$. En este caso, la circulación del lado derecho de (11) será también un máximo. Así pues, una rueda de palas insertada en el fluido en P_0 rota más rápido cuando su eje apunta en la dirección de rot $\mathbf{F}(P_0)$; véase la **FIGURA 19.14.5**. Obsérvese también que la rueda de palas no rota si su eje es perpendicular al rot $\mathbf{F}(P_0)$.

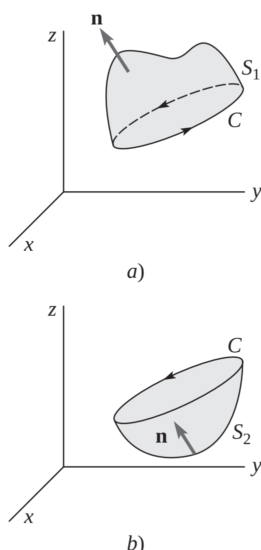


FIGURA 19.14.6 Dos superficies con la misma frontera C

Comentarios

El valor de la integral de superficie en (2) se determina únicamente por la integral que rodea a su frontera C. Esto significa fundamentalmente que la forma de la superficie S es irrelevante. Suponiendo que las hipótesis del teorema 19.14.1 se satisfacen, entonces para dos superficies diferentes S_1 y S_2 con la misma orientación y la misma frontera C, se tiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_2} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Véanse la **FIGURA 19.14.6** y los problemas 17 y 18 de los ejercicios 19.14.

19.14 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas del 1 al 4, verifique el teorema de Stokes. Considérese que la superficie S tiene orientación ascendente.

1. $\mathbf{F} = 5y\mathbf{i} - 5x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

2. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$

3. $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante

4. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $z \geq 0$

En los problemas del 5 al 12, utilice el teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Considere que C tiene orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj al verla desde arriba.

5. $\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

6. $\mathbf{F} = z^2y \cos xy\,\mathbf{i} + z^2x(1 + \cos xy)\mathbf{j} + 2z \text{ sen } xy\mathbf{k}$; C es la frontera del plano $z = 1 - y$ mostrada en la **FIGURA 19.14.7**.

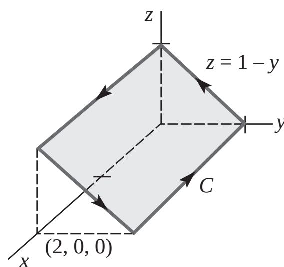


FIGURA 19.14.7 Curva C para el problema 6

7. $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$; C es la frontera dada en el problema 6.
8. $\mathbf{F} = (x + 2z)\mathbf{i} + (3x + y)\mathbf{j} + (2y - z)\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + 2y + z = 4$ con los planos coordenados.
9. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $x + y + z = 1$
10. $\mathbf{F} = x^2y\,\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + xy^2z\,\mathbf{k}$; C es la frontera de la superficie mostrada en la **FIGURA 19.14.8**.

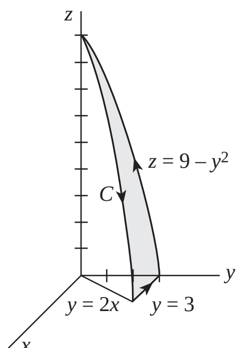


FIGURA 19.14.8 Curva C para el problema 10

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la frontera del semielipsoide $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ en el plano $z = 0$
12. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + y + z = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugerencia:* Recuerde que el área de un elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.]

En los problemas del 13 al 16, utilice el teorema de Stokes para calcular $\iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$. Considere que la superficie S tiene orientación ascendente.

13. $\mathbf{F} = 6yz\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} + yze^{x^2}\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 4$
14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ para $z \ge 0$
15. $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 8x^3y\mathbf{j} + 3x^2y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x$ comprendida dentro del cilindro rectangular definido por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ y $y = 2$
16. $\mathbf{F} = 2xy^2z\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} + (x^2y^2 - 6x)\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = y$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
17. Utilice el teorema de Stokes para calcular
$$\oint_C z^2dx + xy^2\,dy + \tan^{-1} y\,dz$$
donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$, encontrando una superficie S con frontera C cuya orientación tiene el sentido contrario al de las manecillas del reloj visto desde arriba.
18. Considere la integral de superficie $\iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F} = xyz\,\mathbf{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \ge 0$ con orientación ascendente.
    a) Calcule la integral de superficie por el método de la sección 19.13; o sea, no utilice el teorema de Stokes.
    b) Calcule la integral de superficie encontrando una superficie más sencilla de orientación ascendente cuya frontera sea la misma que la del paraboloide.
    c) Utilice el teorema de Stokes para verificar el resultado del inciso *b*).

19.15 Integrales triples

Introducción Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional* o **integral triple** son muy similares a los pasos que llevaron a la definición de la integral doble. Desde luego, existen diferencias: en lugar de una función de dos variables se integra una función f de tres variables, no sobre una región R de un plano coordenado, sino sobre una región D del espacio tridimensional.

1. Sea $w = F(x, y, z)$ una función definida sobre una región cerrada y acotada D del espacio.
2. Por medio de una malla tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos coordenados, se forma una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k que se encuentran completamente dentro de D.
3. Sea $\|P\|$ *la* **norma** de la partición o la longitud de la diagonal más larga de D_k.
4. Se elige un punto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k. Véase la **FIGURA 19.15.1**.
5. Se genera la suma $\sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k$.

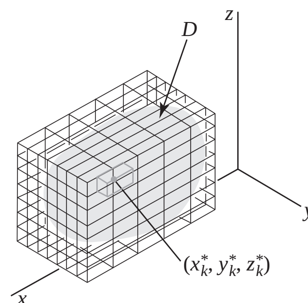


FIGURA 19.15.1 Punto de muestra en subregión k-ésima

Una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k$, donde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) es un punto arbitrario dentro de cada D_k y ΔV_k denota el volumen de cada D_k, se denomina **suma de Riemann**. El tipo de partición utilizada en el paso 2, donde todos los D_k se hallan completamente dentro de D, se denomina una **partición interna** de D.

Definición 19.15.1 La integral triple

Sea F una función de tres variables definida sobre una región cerrada D del espacio. Entonces la **integral triple de F sobre D** viene dada por

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k. \qquad (1)$$

Al igual que en las argumentaciones previas sobre la integral, cuando F es continua sobre D, el límite en (1) existe; esto es, F es **integrable** sobre D.

■ **Cálculo por integrales iteradas** Si la región D está acotada por encima por la gráfica de $z = f_2(x, y)$ y acotada por debajo por la gráfica $z = f_1(x, y)$, puede demostrarse entonces que la integral triple (1) se expresa como una integral doble de la integral parcial $\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz$; esto es,

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz \right] dA,$$

donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy. En particular, si R es una región tipo I, entonces —como se muestra en la **FIGURA 19.15.2**— la integral triple de F sobre D se escribe como una integral iterada:

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx. \qquad (2)$$

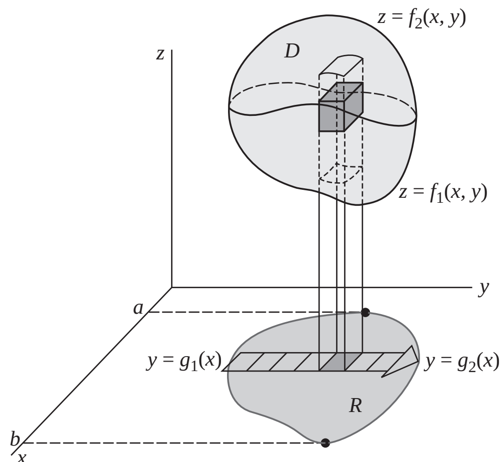


FIGURA 19.15.2 Interpretación geométrica de (2)

Para calcular la integral iterada (2) se comienza calculando la integral parcial

$$\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz,$$

en el cual *tanto x como y* se mantienen fijas.

En una integral doble, únicamente existen dos posibles órdenes de integración: $dy\, dx$ y $dx\, dy$. La integral triple en (2) ilustra uno de los *seis* posibles órdenes de integración:

$$dz\, dy\, dx, \quad dz\, dx\, dy, \quad dy\, dx\, dz,$$
$$dx\, dy\, dz, \quad dx\, dz\, dy, \quad dy\, dz\, dx.$$

Las últimas dos diferenciales indican el plano coordenado en el que se sitúa la región R. Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\,dz\,dy$ debe tener la forma

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{k_1(y)}^{k_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} F(x, y, z)\, dx\, dz\, dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y de la región R de integración en el plano yz se muestra en la **FIGURA 19.15.3**.

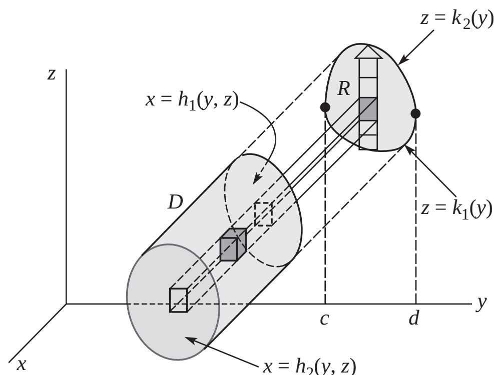


FIGURA 19.15.3 Integración: primero x, luego z y finalmente y

■ **Aplicaciones** A continuación se muestra una lista de algunas de las aplicaciones estándar de la integral triple:

Volumen: Si $F(x, y, z) = 1$, entonces el **volumen** del sólido D es

$$V = \iiint_D dV.$$

Masa: Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad, entonces la **masa** del sólido D viene dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

Primeros momentos: Los **primeros momentos** del sólido respecto a los planos coordenados indicados por los subíndices vienen dados por

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV.$$

Centro de masa: Las coordenadas del **centro de masa de** D vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroide: Si $\rho(x, y, z) =$ constante, el centro de masa se denomina el **centroide** del sólido.

Segundos momentos: Los **segundos momentos**, o **momentos de inercia** de D respecto a los ejes coordenados indicados por los subíndices, vienen dados por

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Radio de giro: Igual que en la sección 19.10, si I es el momento de inercia del sólido respecto a un eje determinado, entonces el **radio de giro** es

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

EJEMPLO 1 Volumen de un sólido

Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$.

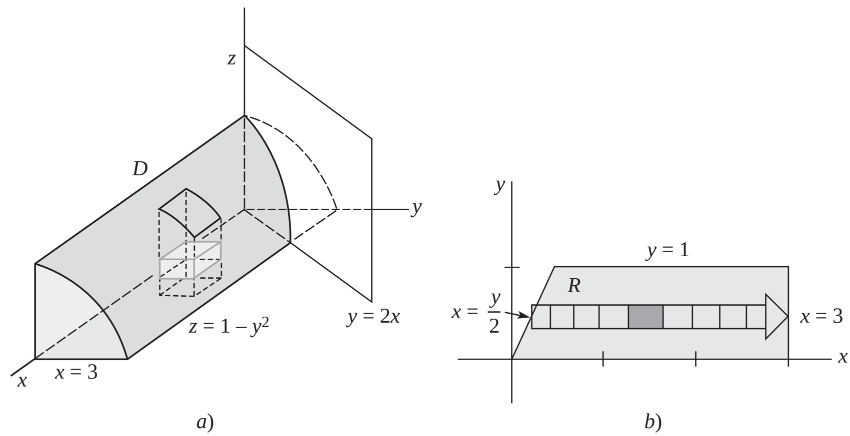


FIGURA 19.15.4 Sólido D y región R de integración en el ejemplo 1

Solución Como se indica en la **FIGURA 19.15.4*a*)**, la primera integración respecto a z es desde 0 hasta $1 - y^2$. Además, de la **FIGURA 19.15.4*b*)** se observa que la proyección del sólido D en el plano xy es una región tipo II. Por lo tanto, a continuación se integra, respecto a x, desde $y/2$ hasta 3. La última integración es respecto a y desde 0 hasta 1. Entonces,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \Big[x - xy^2 \Big]_{y/2}^3 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 \right) dy \\ &= \left[3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4 \right]_0^1 = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 2 Cambio del orden de integración

Cambie el orden de integración en

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

a $dy\, dx\, dz$.

Solución Como se muestra en la **FIGURA 19.15.5*a*)**, la región D es el sólido del primer octante acotado por los tres planos coordenados y por el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Respecto de la **FIGURA 19.15.5*b*)** y la tabla, se concluye que

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-2x/3-4z/3} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Orden de integración	Primera integración	Segunda integración	Tercera integración
$dz\, dy\, dx$	De 0 a $3 - x/2 - 3y/4$	De 0 a $4 - 2x/3$	De 0 a 6
$dy\, dx\, dz$	De 0 a $4 - 2x/3 - 4z/3$	De 0 a $6 - 2z$	De 0 a 3

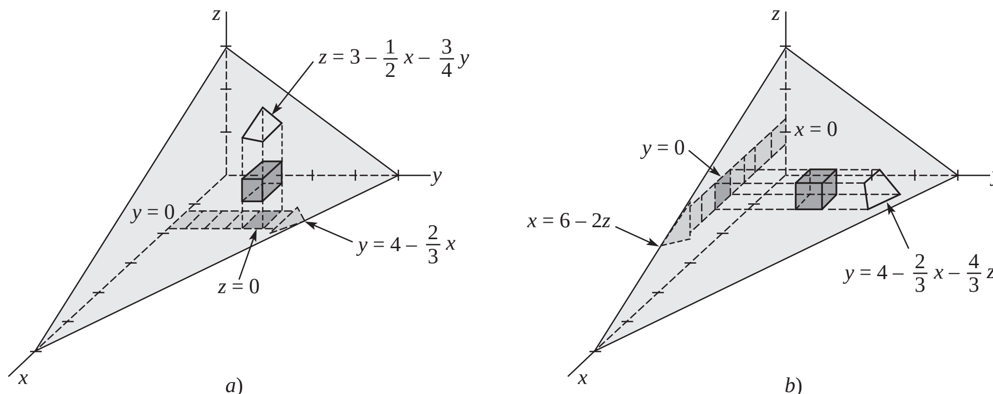


FIGURA 19.15.5 Cambio del orden de integración en el ejemplo 2 ≡

Dependiendo de la geometría de una región en el espacio tridimensional, el cálculo de una integral triple sobre dicha región puede realizarse más fácilmente utilizando un nuevo sistema coordenado.

■ Coordenadas cilíndricas El **sistema coordenado cilíndrico** combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de su componente z en el espacio. Como se muestra en la **FIGURA 19.15.6*a*)**, las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan por la tripleta ordenada (r, θ, z). La palabra *cilíndrico* sugiere que un punto P en el espacio se determina mediante la intersección de los planos $z =$ constante y $\theta =$ constante con un cilindro de $r =$ constante; véase la figura 19.15.6*b*).

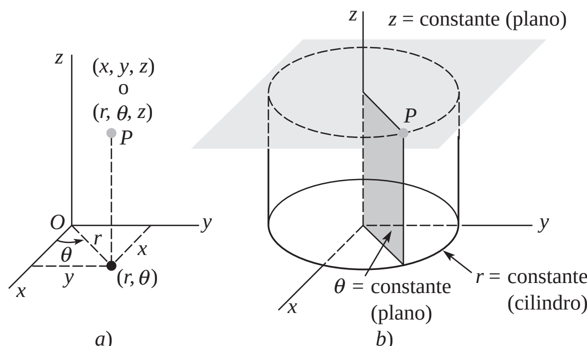


FIGURA 19.15.6 Coordenadas cilíndricas

■ Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares De la figura 19.15.6*a*) se ve también que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto pueden obtenerse a partir de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por medio de

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z. \tag{3}$$

EJEMPLO 3 De coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convierta las coordenadas cilíndricas $(8, \pi/3, 7)$ a coordenadas rectangulares.

Solución De (3),

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4, \quad y = 8\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}, \quad z = 7.$$

Así, $(8, \pi/3, 7)$ es equivalente a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares. ≡

■ Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas Para expresar coordenadas rectangulares (x, y, z) como coordenadas cilíndricas, se usa

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{4}$$

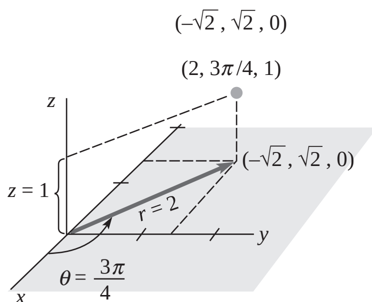


FIGURA 19.15.7 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 De coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convierta las coordenadas rectangulares $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución De (4) se observa que

$$r^2 = (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1, \quad z = 1.$$

Si se considera $r = 2$, entonces, de manera congruente con que $x < 0$ y $y > 0$, se toma $\theta = 3\pi/4$.* En consecuencia, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ es equivalente a $(2, 3\pi/4, 1)$ en coordenadas cilíndricas; véase la **FIGURA 19.15.7**. ≡

Integrales triples en coordenadas cilíndricas Recuérdese de la sección 19.11 que el área de un **rectángulo polar** es $\Delta A = r^* \,\Delta r\, \Delta\theta$, donde r^* es el radio promedio. De la **FIGURA 19.15.8*a*)** se observa que el volumen de una **cuña cilíndrica** es simplemente $\Delta V =$ (área de la base)(altura) $= r^* \,\Delta r\, \Delta\theta\, \Delta z$. Así, si $F(r, \theta, z)$ es una función continua sobre la región D, como se muestra en la figura 19.15.8*b*), entonces la integral triple de F sobre D viene dada por

$$\iiint_D F(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, dz\right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

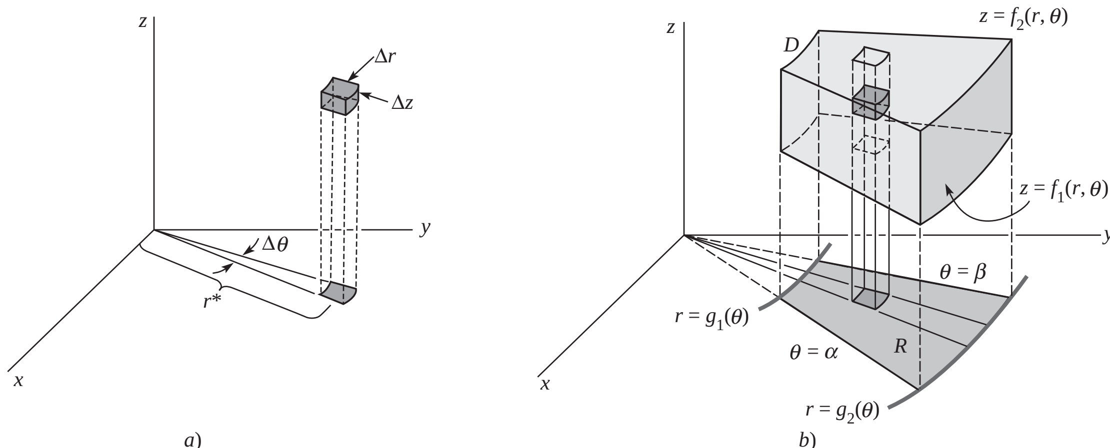


FIGURA 19.15.8 *a*) Cuña cilíndrica; *b*) región D

EJEMPLO 5 Centro de masa

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ y $y = 0$. Encuentre el centro de masa si la densidad viene dada por $\rho\,(r, \theta, z) = r$.

Solución Tomando en consideración (4), la ecuación del cono es $z = r$. Por lo tanto, de la **FIGURA 19.15.9** se ve que

$$m = \iiint_D r\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r(r\,dz\,dr\,d\theta)$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 z\Big]_r^1 dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^3)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{24}$$

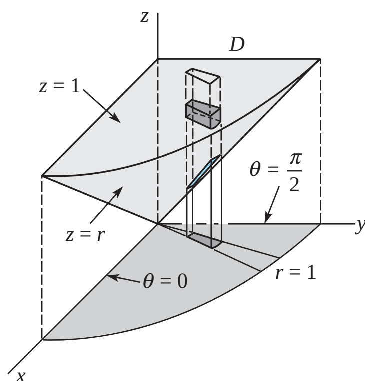


FIGURA 19.15.9 Sólido del ejemplo 5

* Si se utiliza $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, entonces se puede emplear $r = -2$. Obsérvese que las combinaciones $r = 2$, $\theta = -\pi/4$ y $r = -2$, $\theta = 3\pi/4$ son inconsistentes.

$$M_{xy} = \iiint_D zr\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}r^2\bigg]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{30}.$$

En las integrales para M_{xz} y M_{yz} se sustituye $y = r$ sen θ y $x = r\cos\theta$:

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \operatorname{sen}\theta\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \operatorname{sen}\theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 z \operatorname{sen}\theta\bigg]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3 - r^4)\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2\cos\theta\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}.$$

En consecuencia,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} \approx 0.8.$$

El centro de masa tiene coordenadas (0.38, 0.38, 0.8), aproximadamente. ≡

■ **Coordenadas esféricas** Como se aprecia en la **FIGURA 19.15.10*a*)**, las **coordenadas esféricas** de un punto P vienen dadas por la tripleta ordenada (ρ, ϕ, θ), donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta la proyección vectorial $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$.* La figura 19.15.10*b*) muestra que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de un cono $\phi =$ constante, un plano $\theta =$ constante y una esfera $\rho =$ constante; de ahí el nombre de coordenadas "esféricas".

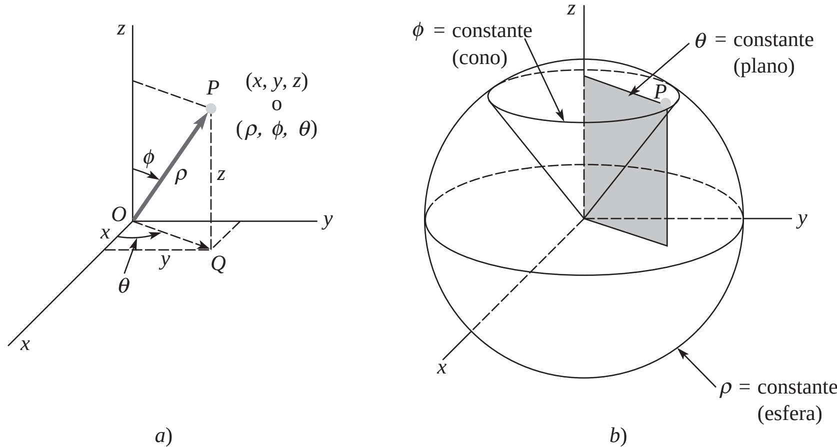


FIGURA 19.15.10 Coordenadas esféricas

■ **Conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas** Para transformar coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z), se observa de la figura 19.15.10*a*) que

$$x = \|\overrightarrow{OQ}\|\cos\theta, \qquad y = \|\overrightarrow{OQ}\| \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \|\overrightarrow{OQ}\|\cos\phi.$$

* θ es el mismo ángulo que el de las coordenadas polares y las cilíndricas.

Como $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \operatorname{sen} \phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi. \tag{5}$$

Es usual considerar $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. También, como $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \operatorname{sen} \phi = r$, las fórmulas

$$r = \rho \operatorname{sen} \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi, \tag{6}$$

nos permiten transformar de coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas cilíndricas (r, θ, z).

EJEMPLO 6 De coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas

Convierta las coordenadas esféricas $(6, \pi/4, \pi/3)$ a coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Solución Sustituyendo $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, se encuentra utilizando (5) que las coordenadas rectangulares del punto vienen dadas por

$$x = 6 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y = 6 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \quad z = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}.$$

De (6) se obtiene

$$r = 6 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad z = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}.$$

Así, las coordenadas cilíndricas del punto son $(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2})$]. ≡

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas Para transformar coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas, se utiliza

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{7}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas Como se ve en la **FIGURA 19.15.11**, el volumen de una **cuña esférica** está dado por la siguiente aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta.$$

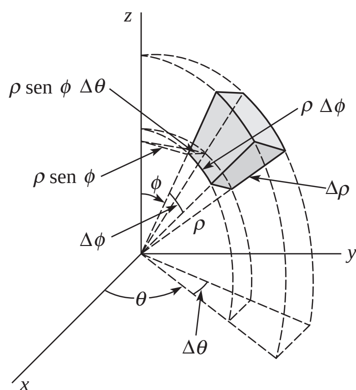


FIGURA 19.15.11 Cuña esférica

Así, en la integral triple de una función $F(\rho, \phi, \theta)$ continua en coordenadas esféricas, el diferencial de volumen dV se expresa como

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Una integral triple típica en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) \, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi, \theta)}^{f_2(\phi, \theta)} F(\rho, \phi, \theta) \, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

EJEMPLO 7 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido homogéneo que se localiza entre las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \qquad a < b.$$

Solución Si $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$ es la densidad,* entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \, k \, dV.$$

* Se debe utilizar un símbolo diferente para la densidad, con objeto de evitar confusión con el símbolo ρ de las coordenadas esféricas.

De (5) se encuentra que $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ y $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Así que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$; véase la **FIGURA 19.15.12**. En consecuencia, la anterior integral se convierte, para coordenadas esféricas, en

$$\begin{aligned} I_z &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta) \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\operatorname{sen}^3\phi\bigg]_a^b d\phi\, d\theta \\ &= \frac{k}{5}(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1 - \cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{k}{5}(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi} d\theta \\ &= \frac{4k}{15}(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi k}{15}(b^5 - a^5). \end{aligned}$$

≡

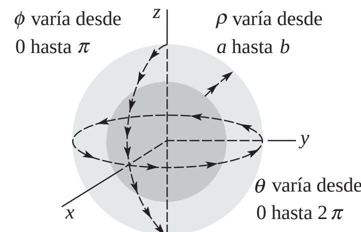


FIGURA 19.15.12 Límites de integración para el ejemplo 7

Comentarios

Las coordenadas esféricas se utilizan en navegación. Si se piensa en la Tierra como una esfera de radio fijo con centro en el origen, entonces un punto P puede localizarse especificando dos ángulos, θ y ϕ. Como muestra la **FIGURA 19.15.13**, la curva que resulta de mantener constante ϕ se denomina **paralelo**. Valores fijos de θ generan a su vez curvas llamadas **grandes círculos**. La mitad de uno de estos grandes círculos que unen a los polos norte y sur se denomina **meridiano**. La intersección de un paralelo y un meridiano da la posición de un punto P. Si $0° \le \phi \le 180°$ y $-180° \le \theta \le 180°$, entonces se dice que los ángulos $90° - \phi$ y θ son la **latitud** y la **longitud** de P, respectivamente. El **meridiano cero** corresponde a una longitud de 0°. La latitud del ecuador es 0°; las latitudes de los polos norte y sur son, respectivamente, +90° (o 90° norte) y −90° (o 90° sur).

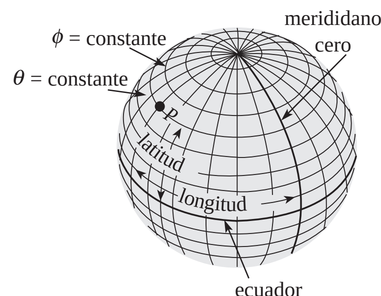


FIGURA 19.15.13 Paralelos y grandes círculos

19.15 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas del 1 al 8, calcule la integral iterada propuesta.

1. $\displaystyle\int_2^4\int_{-2}^2\int_{-1}^1 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$

2. $\displaystyle\int_1^3\int_1^x\int_2^{xy} 24xy\, dz\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^6\int_0^{6-x}\int_0^{6-x-z} dy\, dz\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3\, dz\, dy\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{y^2}\int_0^y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dz\, dx\, dy$

6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{y}}^2\int_0^{e^{x^2}} x\, dz\, dx\, dy$

7. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\, dz\, dx\, dy$

8. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{1/2}\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dy\, dx\, dz$

9. Calcule $\iiint_D z\, dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$.

10. Calcule $\iiint_D (x^2 + y^2)\, dV$, donde D es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $z = 4 - y$ y $z = 0$.

En los problemas 11 y 12, cambie el orden indicado de integración a cada una de las cinco formas restantes de ordenar.

11. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-2y}\int_{x+2y}^4 F(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

12. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}/2} \int_1^3 F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

En los problemas 13 y 14, considere el sólido indicado en la figura. Plantee, pero no calcule, las integrales que dan el volumen V del sólido utilizando las formas indicadas de ordenar la integración.

13.

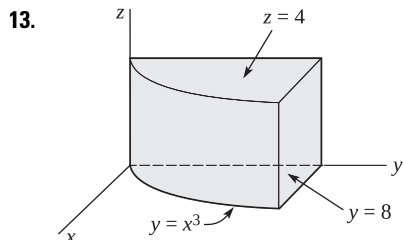


FIGURA 19.15.14 Sólido del problema 13

a) $dz\, dy\, dx$ ***b***) $dx\, dz\, dy$ ***c***) $dy\, dx\, dz$

14.

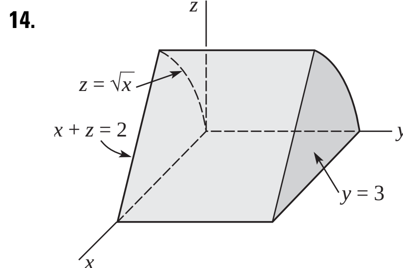


FIGURA 19.15.15 Sólido del problema 14

a) $dx\, dz\, dy$ ***b***) $dy\, dx\, dz$ ***c***) $dz\, dx\, dy$

[*Sugerencia:* El inciso *c*) requiere de dos integrales.]

En los problemas del 15 al 20, bosqueje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} dx\, dz\, dy$

16. $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\, dx\, dy$

17. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^5 dz\, dy\, dx$

18. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\, dy\, dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dz\, dy$

20. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \int_0^3 dy\, dz\, dx$

En los problemas del 21 al 24, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2,\ 4 - x = y^2,\ z = 0,\ z = 3$
22. $x^2 + y^2 = 4,\ z = x + y$, los planos coordenados, el primer octante.
23. $y = x^2 + z^2,\ y = 8 - x^2 - z^2$
24. $x = 2,\ y = x,\ y = 0,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0$
25. Encuentre el centro de masa del sólido indicado en la **FIGURA 19.15.14** si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.
26. Encuentre el centroide del sólido de la **FIGURA 19.15.15** si su densidad es constante.
27. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ y $y = 3$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xz.
28. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$, $z = y + 2$ y $z = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

En los problemas 29 y 30, plantee, pero no calcule, las integrales iteradas que dan la masa del sólido asociado a la forma y densidad indicadas.

29. $x^2 + y^2 = 1,\ z + y = 8,\ z - 2y = 2;\ \rho(x, y, z) = x + y + 4$
30. $x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ z = -1,\ z = 2;\ \rho(x, y, z) = z^2$. [*Sugerencia:* No utilice $dz\, dy\, dx$.]
31. Encuentre el momento de inercia del sólido de la figura 19.15.14 respecto al eje y si la densidad es la indicada en el problema 25. Determine el radio de giro.
32. Encuentre el momento de inercia del sólido de la figura 19.15.15 respecto al eje x si la densidad es constante. Determine el radio de giro.
33. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y por la gráfica $x + y + z = 1$ si la densidad es constante.
34. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje y del sólido acotado por las gráficas $z = y$, $z = 4 - y$, $z = 1$, $z = 0$, $x = 2$ y $x = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano yz.

En los problemas del 35 al 38, convierta el punto indicado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

35. $\left(10, \frac{3\pi}{4}, 5\right)$ 36. $\left(2, \frac{5\pi}{6}, -3\right)$
37. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -4\right)$ 38. $\left(4, \frac{7\pi}{4}, 0\right)$

En los problemas del 39 al 42, convierta el punto indicado de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

39. $(1, -1, -9)$ 40. $(2\sqrt{3}, 2, 17)$
41. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$ 42. $(1, 2, 7)$

En los problemas del 43 al 46, convierta la ecuación indicada a coordenadas cilíndricas.

43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 44. $x + y - z = 1$
45. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 46. $x^2 + z^2 = 16$

En los problemas del 47 al 50, convierta la ecuación indicada a coordenadas rectangulares.

47. $z = r^2$ 48. $z = 2r \operatorname{sen} \theta$
49. $r = 5 \sec \theta$ 50. $\theta = \pi/6$

En los problemas del 51 al 58, utilice integrales triples y coordenadas cilíndricas. En los problemas del 51 al 54, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

51. $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z = 0$

52. $z = 10 - x^2 - y^2, \quad z = 1$

53. $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad z = 0$

54. $y = x^2 + z^2, \quad 2y = x^2 + z^2 + 4$

55. Encuentre el centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

56. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$ y $x = 5$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al plano yz.

57. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido acotado por encima por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 2$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al eje z.

58. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje x del sólido acotado por el cono $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ y el plano $z = 1$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al eje z.

En los problemas del 59 al 62, convierta el punto indicado de coordenadas esféricas a: *a*) coordenadas rectangulares y *b*) coordenadas cilíndricas.

59. $\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

60. $\left(5, \frac{5\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$

61. $\left(8, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

62. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

En los problemas del 63 al 66, convierta los puntos indicados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

63. $(-5, -5, 0)$

64. $(1, -\sqrt{3}, 1)$

65. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

66. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

En los problemas del 67 al 70, convierta las ecuaciones indicadas a coordenadas esféricas.

67. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

69. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$

70. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los problemas del 71 al 74, convierta las ecuaciones indicadas a coordenadas rectangulares.

71. $\rho = 10$

72. $\phi = \pi/3$

73. $\rho = 2 \sec \phi$

74. $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$

En los problemas del 75 al 82, utilice integrales triples y coordenadas esféricas. En los problemas del 75 al 78, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

75. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$

76. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad y = x, \quad y = \sqrt{3}x, \quad z = 0,$ primer octante

77. $z^2 = 3x^2 + 3y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 2,$ primer octante

78. Interiormente $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y exteriormente $z^2 = x^2 + y^2$

79. Encuentre el centroide del sólido homogéneo acotado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

80. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al plano xy.

81. Encuentre la masa del sólido acotado por encima por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$ si la densidad en un punto P es inversamente proporcional a su distancia al origen. [*Sugerencia:* Exprese el límite superior de integración de ϕ como un arcocoseno.]

82. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al origen.

19.16 Teorema de la divergencia

Introducción En la sección 19.14 se plantea que el teorema de Stokes es una generalización tridimensional de una formulación vectorial del teorema de Green. En esta sección se presenta una segunda formulación vectorial del teorema de Green y su analogía tridimensional.

Otra formulación vectorial del teorema de Green Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial bidimensional y sea $\mathbf{T} = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j}$ un vector *unitario tangente* a una curva plana cerrada simple C. En (1) de la sección 19.14 se estableció que $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds$ se calcula por medio de una integral doble que involucra a rot $\mathbf{F}$. En forma similar, si $\mathbf{n} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ es un *vector unitario normal* a C (compruebe $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$), entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ se expresa en términos de una integral doble de div $\mathbf{F}$. Del teorema de Green,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dA = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dA;$$

esto es,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA. \tag{1}$$

El resultado en (1) es un caso especial de la **divergencia** o **teorema de Gauss**. A continuación se generaliza (1) al espacio tridimensional:

Teorema 19.16.1 Teorema de la divergencia

Sea D una región cerrada y acotada en el espacio tridimensional con una frontera suave por tramos S con orientación hacia afuera. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el que P, Q y R son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a D. Entonces

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

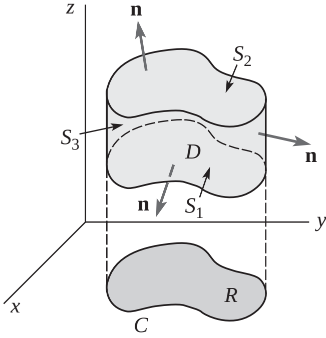


FIGURA 19.16.1 Región D utilizada en la demostración del teorema 19.16.1

Se demuestra (2) para la región especial D, mostrada en la **FIGURA 19.16.1**, cuya superficie S está formada de tres partes:

$$\begin{aligned} &(\text{parte inferior}) \quad S_1: z = f_1(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R\\ &(\text{parte superior}) \quad S_2: z = f_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R\\ &(\text{parte lateral}) \quad S_3: f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } C, \end{aligned}$$

donde R es la proyección de D sobre el plano xy, y C es la frontera de R. Como

$$\operatorname{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = P(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}) + Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}) + R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}),$$

se escribe

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint_S P(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_S Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS$$

y

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Para demostrar (2) únicamente se necesita establecer que

$$\iint_S P(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV \tag{3}$$

$$\iint_S Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV \tag{4}$$

$$\iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{5}$$

De hecho, se demuestra únicamente (5), ya que en las demostraciones de (3) y (4) se procede de forma similar. Ahora,

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] dA = \iint_R [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))]\, dA. \tag{6}$$

A continuación se escribe

$$\iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS = \iint_{S_1} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS + \iint_{S_2} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS + \iint_{S_3} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS.$$

Para S_1: Puesto que la normal hacia afuera tiene sentido descendente, la superficie se describe como $g(x, y, z) = f_1(x, y) - z = 0$. Así,

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}}.$$

De la definición de dS se tiene entonces

$$\iint_{S_1} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS = -\iint_R R(x, y, f_1(x, y))\ dA. \tag{7}$$

Para S_2: La normal hacia afuera tiene sentido ascendente, de forma que

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}}$$

de donde se obtiene

$$\iint_{S_2} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS = \iint_R R(x, y, f_2(x, y))\ dA. \tag{8}$$

Para S_3: Como este lado es vertical, **k** es perpendicular a **n**. En consecuencia, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$ y

$$\iint_{S_3} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\ dS = 0. \tag{9}$$

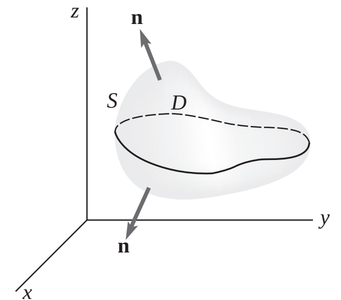


FIGURA 19.16.2 Región D sin lado vertical

Finalmente, sumando (7), (8) y (9) se tiene

$$\iint_R [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))]\ dA,$$

que es igual a (6). ≡

Aunque se demuestra (2) para una región especial D que tiene un lado vertical, se observa que este tipo de región no es un requisito para aplicar el teorema 19.16.1. Una región D sin lado vertical se ilustra en la **FIGURA 19.16.2**; una región acotada por una esfera o un elipsoide tampoco tiene una cara vertical. El teorema de divergencia es aplicable a una región D acotada por dos superficies cerradas, tales como las esferas concéntricas S_a y S_b mostradas en la **FIGURA 19.16.3**; la superficie S, frontera de D, es la unión de S_a y S_b. En este caso, $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\ dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\ dV$ se convierte en

$$\iint_{S_b} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\ dS + \iint_{S_a} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\ dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\ dV,$$

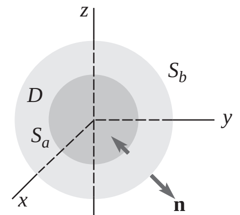


FIGURA 19.16.3 Región D acotada entre dos esferas concéntricas

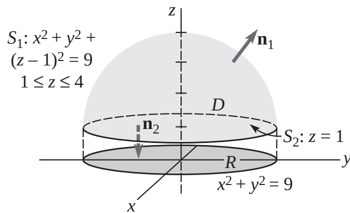


FIGURA 19.16.4 Región hemisférica D del ejemplo 1

donde **n** apunta hacia afuera de D; esto es, **n** apunta lejos del origen en S_b y **n** apunta hacia el origen en S_a.

EJEMPLO 1 Verificación del teorema de la divergencia

Sea D la región acotada por el hemisferio $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$, $1 \le z \le 4$, y el plano $z = 1$. Verifique el teorema de la divergencia si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$.

Solución La región cerrada se muestra en la **FIGURA 19.16.4**.

Integral triple: Como $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$, se tiene que div $\mathbf{F} = 3$. Por lo tanto,

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\iiint_D dV = 54\pi. \tag{10}$$

En este último cálculo, se aprovecha que $\iiint_D dV$ da el volumen del hemisferio $(\frac{2}{3}\pi 3^3)$.

Integral de superficie: Se escribe $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, donde S_1 es el hemisferio y S_2 es el plano $z = 1$. Si S_1 es una superficie de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$, entonces un vector unitario normal exterior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z-1}{3}\mathbf{k}.$$

Ahora $$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z-1)^2}{3} = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + (z-1)^2) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

y entonces $$\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R (3)\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dA\right)$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = 54\pi. \quad \leftarrow \text{coordenadas polares}$$

Para S_2, se toma $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ de forma que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z + 1$. Pero, puesto que $z = 1$, $\iint_{S_2} (-z + 1)\, dS = 0$. Por lo tanto, se observa que $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 54\pi + 0 = 54\pi$ lo que concuerda con (10). ≡

EJEMPLO 2 Uso del teorema de la divergencia

Si $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + y^2z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, calcule $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

Solución Véase la figura 19.13.4 y el problema 38 de los ejercicios 19.13. En lugar de calcular seis integrales de superficie, se aplica el teorema de la divergencia. Como div $\mathbf{F}$ $= \nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2yz + 3z^2$, se tiene de (2) que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (y + 2yz + 3z^2)\, dV$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 z + 3yz^2\right)\Big]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right) dz = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + z^3\right)\Big]_0^1 = 2. \qquad \equiv$$

Interpretación física de la divergencia En la sección 19.14 se plantea que la componente normal del rotacional de un campo vectorial **F** en un punto se puede expresar como un límite relacionado con la circulación de **F**. A partir de (2), es posible interpretar la divergencia de **F** en un punto como un límite relacionado con el flujo de **F**. Recuérdese de la sección 19.7 que el flujo del campo de velocidad **F** de un fluido es la rapidez de su flujo; esto es, el volumen de fluido que pasa a través de una superficie por unidad de tiempo. En dicha sección, se plantea que la divergencia de **F** es el flujo por unidad de volumen. Para reforzar esta última idea, supóngase que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto del fluido y que S_r es una pequeña esfera de radio r centrada en P_0; véase la **FIGURA 19.16.5**. Si D_r es la esfera, y S_r su interior, entonces el teorema de la divergencia nos da

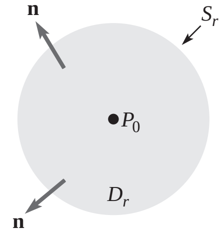


FIGURA 19.16.5 Región D_r en (11)

$$\iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV. \tag{11}$$

Si se considera que, aproximadamente, div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ en todos los puntos $P(x, y, z)$ que se hallan dentro de la pequeña esfera, entonces (11) da

$$\iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS \approx \iiint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, dV$$

$$= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) \iiint_{D_r} dV \tag{12}$$

$$= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) V_r,$$

donde V_r es el volumen $(\frac{4}{3}\pi r^3)$ de la región esférica D_r. Cuando $r \to 0$, se observa de (12) que la divergencia de **F** es el valor límite del cociente entre el flujo de **F** y el volumen de la región esférica:

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Por lo tanto, la divergencia **F** es flujo por unidad de volumen.

El teorema de la divergencia es de gran utilidad en la deducción de algunas de las ecuaciones famosas de electricidad y magnetismo y de hidrodinámica. En la argumentación siguiente se toma un ejemplo del estudio de fluidos.

Ecuación de continuidad Al final de la sección 19.7 se menciona que div **F** se puede interpretar como una medida de la rapidez del cambio de la densidad de un fluido en un punto. Para comprender la razón de esta interpretación, supóngase que **F** es un campo de velocidad de un fluido y que $\rho\,(x, y, z, t)$ es la densidad del fluido en un punto $P(x, y, z)$ en un instante t. Sea D la región cerrada conformada por la esfera S y su interior. Se sabe de la sección 19.15 que la masa total m del fluido en D viene dada por $m = \iiint_D \rho\,(x, y, z, t)\, dV$. La rapidez con la que la masa en D se incrementa se expresa como

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{13}$$

En la figura 19.7.3 se observa ahora que el volumen de fluido que atraviesa a un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo se aproxima a $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta\, S$. La masa del fluido que fluye por unidad de tiempo a través de un elemento de área superficial $\Delta\, S$ es entonces $(\rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta\, S$. Si se considera que el cambio de masa en D se debe únicamente al flujo que

entra y que sale de D, entonces el *volumen del fluido* que sale de D por unidad de tiempo viene dado por (10) de la sección 19.13, $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, mientras que la *masa del fluido* que sale de D por unidad de tiempo es $\iint_S (\rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$. Por lo tanto, una expresión alterna para la rapidez con la que se incrementa la masa en D es

$$-\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{14}$$

Por el teorema de la divergencia, (14) es igual que

$$-\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\, dV. \tag{15}$$

Igualando (13) y (15) se obtiene entonces

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\, dV \quad \text{o} \quad \iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\right) dV = 0.$$

Como este último resultado debe ser válido para cualquier esfera, se obtiene la **ecuación de continuidad** para flujos de fluidos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{F}) = 0. \tag{16}$$

Si se establece que div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces un fluido es incompresible, lo cual se deduce directamente de (16). Si un fluido es incompresible (como el agua), entonces ρ es constante, por lo que $\nabla \cdot (\rho\, \mathbf{F}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{F}$. Pero, además, $\partial \rho / \partial t = 0$ por lo que (16) implica que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

19.16 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 y 2, verifique el teorema de la divergencia.

1. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$

2. $\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + 4yz\mathbf{j} + xe^{-y}\mathbf{k}$; D es la región acotada por los tres planos coordenados y por el plano $x + y + z = 1$

En los problemas del 3 al 14, utilice el teorema de la divergencia para encontrar el flujo saliente $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ indicado.

3. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

4. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; D es la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} + (z - 1)^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 1$, $z = 5$

6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 4z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por el paralelepípedo definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$

7. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada dentro de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$

8. $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por $y = x^2$, $z = 9 - y$, $z = 0$

9. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)$; D es la región acotada por las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $b > a$

10. $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

11. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por $z = y$, $z = 4 - y$, $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $z = 0$. Véase la **FIGURA 19.16.6**.

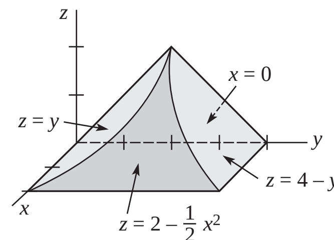


FIGURA 19.16.6 Región D del problema 11

12. $\mathbf{F} = 15x^2y\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$; D es la región acotada por $x + y = 2$, $z = x + y$, $z = 3$, $x = 0$, $y = 0$

13. $\mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 6zxy^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$

14. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + 6\operatorname{sen} x\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 2$, $z = 4$

15. El campo eléctrico en un punto $P(x, y, z)$ debido a una carga puntual q localizada en el origen viene dado por el campo cuadrático inverso

$$E = q\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

donde $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

***a*)** Supóngase que S es una superficie cerrada, que S_a es una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ completamente dentro de S y que D es la región acotada entre S y S_a; véase la **FIGURA 19.16.7**. Demuestre que el flujo saliente de $\mathbf{E}$ para la región D es cero.

***b*)** Utilice el resultado del inciso *a*) para demostrar la **ley de Gauss**:

$$\iint_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\, dS = 4\pi q;$$

esto es, el flujo saliente del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través de *cualquier* superficie cerrada (para la cual sea aplicable el teorema de la divergencia) que contenga al origen es $4\pi q$.

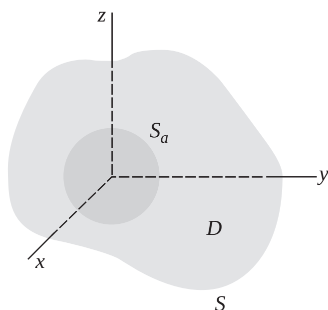


FIGURA 19.16.7 Región D del problema 15*a*)

16. Supóngase que existe una distribución continua de carga a través de una región acotada y cerrada D encerrada por una superficie S. Entonces, la extensión natural de la ley de Gauss viene dada por

$$\iint_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D 4\pi\rho\, dV,$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de la carga, o carga por unidad de volumen.

***a*)** Procédase como en la deducción de la ecuación de continuidad (16) para demostrar que div $\mathbf{E} = 4\pi\rho$.

***b*)** Puesto que $\mathbf{E}$ es un campo vectorial irrotacional, demuestre que el potencial ϕ para $\mathbf{E}$ satisface la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$.

En los problemas del 17 al 21, considere que S es la frontera de una región cerrada y acotada D.

17. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demuestre que $\iint_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\, dS = 0$.

18. Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ y P, Q y R tienen segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = 0.$$

En los problemas 19 y 20, considere que f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas. Utilice el teorema de la divergencia para establecer las **identidades de Green**.

19. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dV$

20. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$

21. Si f es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_D \nabla f\, dV.$$

[*Sugerencia:* Utilice (2) en $f\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante, y el problema 27 de los ejercicios 19.7.]

22. La fuerza de flotación de un objeto flotante es $\mathbf{B} = -\iint_S p\,\mathbf{n}\, dS$, donde p es la presión del fluido. La presión p se relaciona con la densidad del fluido $\rho(x, y, z)$ por medio de una ley de la hidrostática: $\nabla p = \rho(x, y, z)\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración constante de la gravedad. Si el peso del objeto es $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, utilice el resultado del problema 21 para demostrar el principio de Arquímedes: $\mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$; véase la **FIGURA 19.16.8**.

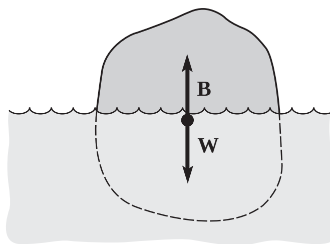


FIGURA 19.16.8 Objeto flotante del problema 22

19.17 Cambio de variables en integrales múltiples

Introducción En muchas ocasiones es conveniente, o incluso necesario, realizar una sustitución, o cambio de variable, en una integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ para poder calcularla. Si f es continua en $[a, b]$, $x = g(u)$ tiene una derivada continua y $dx = g'(u)\, du$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\, du, \tag{1}$$

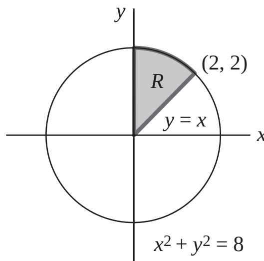
Si la función g es uno a uno, entonces tiene una inversa y así $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$.

donde los límites u de integración c y d se definen por $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Hay tres cuestiones que se deben subrayar en (1); para cambiar la variable de una integral definida se reemplaza x por $g(u)$ en donde aparezca el integrando, se cambia el intervalo de integración $[a, b]$ del eje x al intervalo correspondiente $[c, d]$ del eje u, y se reemplaza dx por una función múltiplo (a saber, la derivada de g) de du. Si se escribe $J(u) = dx/du$, entonces (1) tiene la forma

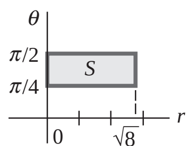
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))J(u)\,du. \tag{2}$$

Por ejemplo, utilizando $x = 2 \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, se obtiene

$$\overset{x\text{-límites}}{\int_0^2} \overbrace{\sqrt{4 - x^2}}^{f(x)}\,dx = \overset{\theta\text{-límites}}{\int_0^{\pi/2}} \overbrace{2\cos\theta}^{f(2\operatorname{sen}\theta)}\,\overbrace{(2\cos\theta)}^{J(\theta)}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \pi.$$



a) Región R del plano xy



b) Región S del plano $r\theta$

FIGURA 19.17.1 Región S utilizada para calcular (6)

■ **Integrales dobles** Aunque cambiar variables en una integral múltiple no es tan directo como el procedimiento (1), la idea básica ilustrada en (2) se mantiene. Para cambiar variables en una integral doble se necesitan dos ecuaciones como las siguientes

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v). \tag{3}$$

En analogía con (2), se espera que un cambio de variables en una integral doble tome la siguiente forma

$$\iint_R F(x, y)\,dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\,J(u, v)\,dA', \tag{4}$$

donde S es la región en el plano uv correspondiente a la región R del plano xy, y $J(u, v)$ es una función que depende de las derivadas parciales de las ecuaciones (3). El símbolo dA' del lado derecho de (4) representa a $du\,dv$ o a $dv\,du$.

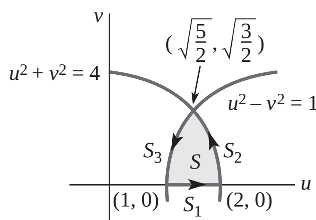
En la sección 19.11 se argumentó brevemente cómo cambiar una integral doble $\iint_R F(x, y)\,dA$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Recuérdese que en el ejemplo 2 de dicha sección las siguientes sustituciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{5}$$

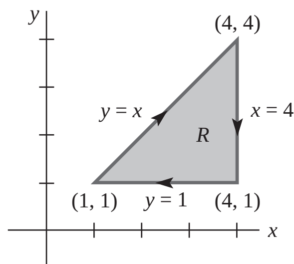
conducen a
$$\int_0^2\int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\,dy\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\,r\,dr\,d\theta. \tag{6}$$

Como se ve en la **FIGURA 19.17.1**, la introducción de coordenadas polares cambia la región original de integración R del plano xy a la más conveniente región rectangular de integración S en el plano $r\theta$. Se observa también que, comparando (4) con (6), se pueden plantear las siguientes igualdades: $J(r, \theta) = r$ y $dA' = dr\,d\theta$.

Las ecuaciones para cambio de variable (3) definen una **transformación** (o **función**) T del plano uv al plano xy. Se dice que un punto (x_0, y_0) del plano xy, determinado a partir de $x_0 = f(u_0, v_0)$ y $y_0 = g(u_0, v_0)$, es una **imagen** de (u_0, v_0).



a)



b)

FIGURA 19.17.2 La región R es la imagen de la región S en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Imagen de una región

Encuentre la imagen de la región S mostrada en la **FIGURA 19.17.2*a*)** bajo la transformación $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Solución Se comienza encontrando las imágenes de los lados de S indicadas por S_1, S_2 y S_3.

$\mathbf{S_1}$**:** En esta cara $v = 0$, de forma que $x = u^2$, $y = u^2$. Eliminando entonces u se obtiene $y = x$. Imaginando ahora el movimiento a lo largo de la frontera desde (1, 0) hasta (2, 0) (esto es, $1 \le u \le 2$), las ecuaciones $x = u^2$, $y = u^2$ indican que x se encuentra en el intervalo de $x = 1$ a $x = 4$ y que, simultáneamente, y se encuentra

en el intervalo de $y = 1$ a $y = 4$. En otras palabras, en el plano xy la imagen de S_1 es el segmento de línea $y = x$ de (1, 1) a (4, 4).

S_2: En esta frontera $u^2 + v^2 = 4$ y, por lo tanto, $x = 4$. Al moverse ahora del punto (2, 0) al $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, la ecuación restante $y = u^2 - v^2$ indica que y se encuentra en el intervalo de $y = 2^2 - 0^2 = 4$ a $y = (\sqrt{\frac{5}{2}})^2 - (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 1$. En este caso, la imagen de S_2 es el segmento de la línea vertical $x = 4$ que comienza en (4, 4) y desciende hasta (4, 1).

S_3: Como $u^2 - v^2 = 1$, se tiene que $y = 1$. Pero al recorrer esta frontera desde $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, hasta (1, 0), la ecuación $x = u^2 + v^2$ indica que x se encuentra en el intervalo de $x = 4$ a $x = 1$. La imagen de S_3 es el segmento de la línea horizontal $y = 1$ que comienza en (4, 1) y finaliza en (1, 1).

La imagen de S es la región R indicada en la figura 19.17.2*b*). ≡

Obsérvese en el ejemplo 1 que al recorrer la frontera de S en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, la frontera de R se va recorriendo en el sentido de las manecillas del reloj. Se dice que la transformación de la frontera de S ha *inducido* una orientación en la frontera de R.

Aunque la demostración de la fórmula para el cambio de variables en una integral múltiple rebasa el alcance de este libro, se indican *algunas* de las consideraciones de fondo que se realizan al respecto de las ecuaciones (3) y de las regiones R y S. Se considera que:

- Las funciones f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en S.
- La transformación es uno a uno.
- Cada una de las regiones R y S consta de una curva simple cerrada suave por tramos y su interior.
- El determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{7}$$

no es cero en S.

Se dice que una transformación T es **uno a uno** si cada punto (x_0, y_0) en R es la imagen bajo T de un punto único (u_0, v_0) en S. Dicho de otra forma, no existen dos puntos en S que tengan la misma imagen en R. Considerando las restricciones $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, las ecuaciones (5) definen una transformación uno a uno del plano $r\theta$ al plano xy. El determinante (7) se denomina **Jacobiano determinante** o simplemente **Jacobiano**, de la transformación T y es la clave para el cambio de variables en una integral múltiple. El Jacobiano de la transformación definida por las ecuaciones (3) se denota con el símbolo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

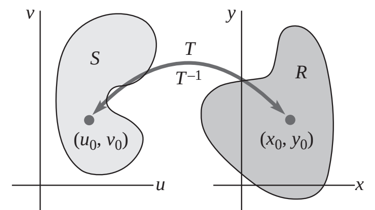


FIGURA 19.17.3 Transformación T y su inversa

En forma similar al concepto de función uno a uno, una transformación uno a uno T tiene una **transformación inversa** T^{-1} tal que (u_0, v_0) es la imagen bajo T^{-1} de (x_0, y_0); véase la **FIGURA 19.17.3**. Si es posible resolver (3) para u y v en función de x y y, entonces la transformación inversa se define por medio de un par de ecuaciones

$$u = h(x, y), \qquad v = k(x, y). \tag{8}$$

El Jacobiano de la transformación inversa T^{-1} es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{9}$$

y se relaciona con el Jacobiano de la transformación T por medio de

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1. \tag{10}$$

EJEMPLO 2 Jacobiano

El Jacobiano de la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r. \qquad \equiv$$

A continuación, nos abocamos al punto central de esta argumentación: cómo cambiar variables en una integral múltiple. La idea expresada en (4) es válida; la función $J(u, v)$ resulta ser $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. Tomando en cuenta las consideraciones realizadas anteriormente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 19.17.1 Cambio de variables en una integral doble

Si F es continua en R, entonces

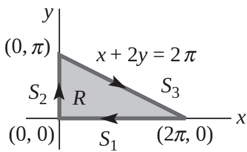
$$\iint_R F(x, y)\,dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA'. \tag{11}$$

La fórmula (3) de la sección 19.11 para cambiar una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de (11), con

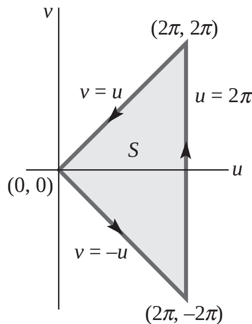
$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = |r| = r,$$

ya que $r \geq 0$. Se tiene entonces en (6) que $J(r, \theta) = |\partial(x, y)/\partial(r, \theta)| = r$.

Puede realizarse un cambio de variables en una integral múltiple para simplificar el integrando o bien para simplificar la región de integración. El cambio de variables utilizado se inspira usualmente en la estructura del integrando $F(x, y)$ o en las ecuaciones que definen la región R. Como consecuencia, la transformación se define entonces por ecuaciones de la forma dada en (8); esto es, se trabaja con la transformación inversa. Los siguientes dos ejemplos ilustran estas ideas.



a)



b)

FIGURA 19.17.4 La región S es la imagen de la región R del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Cambio de variables en una integral doble

Calcúlese $\iint_R \text{sen}(x + 2y)\cos(x - 2y)\,dA$ sobre la región R mostrada en la **FIGURA 19.17.4*a*)**.

Solución La dificultad para calcular esta integral doble radica claramente en el integrando. La presencia de los términos $x + 2y$ y $x - 2y$ nos anima a definir el cambio de variables $u = x + 2y$, $v = x - 2y$. Estas ecuaciones transforman a R en una región S del plano uv. Como en el ejemplo 1, se transforman las caras de la región.

S_1**:** $y = 0$ implica que $u = x$, $v = x$ o $v = u$. Al pasar de $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$, se observa que los puntos imagen correspondientes del plano uv caen en un segmento de la línea $v = u$, desde $(2\pi, 2\pi)$ hasta $(0, 0)$.

S_2**:** $x = 0$ implica que $u = 2y$, $v = -2y$, o $v = -u$. Al pasar de $(0, 0)$ a $(0, \pi)$, los puntos imagen correspondientes del plano uv caen en un segmento de la línea $v = -u$, de $(0, 0)$ a $(2\pi, -2\pi)$.

S_3**:** $x + 2y = 2\pi$ implica que $u = 2\pi$. Al pasar de $(0, \pi)$ a $(2\pi, 0)$, la ecuación $v = x - 2y$ muestra que v se encuentra entre $v = -2\pi$ a $v = 2\pi$. Por lo tanto, la imagen

de S_3 es el segmento de la línea vertical $u = 2\pi$ que comienza en $(-2\pi, -2\pi)$ y sube hasta $(2\pi, 2\pi)$; véase la figura 19.17.4*b*).

Ahora, despejando x y y en función de u y v, se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{4}(u - v).$$

Por lo tanto,
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, de (11) se encuentra que

$$\begin{aligned} \iint_R \operatorname{sen}(x + 2y)\cos(x - 2y)\, dA &= \iint_S \operatorname{sen} u \cos v \left|-\frac{1}{4}\right| dA' \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-u}^{u} \operatorname{sen} u \cos v\, dv\, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \Big]_{-u}^{u} du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u\, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2u)\, du \\ &= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$ ≡

EJEMPLO 4 Cambio de variables en una integral doble

Calcule $\iint_R xy\, dA$ sobre la región R mostrada en la **FIGURA 19.17.5*a*)**.

Solución En este caso el integrando es relativamente simple, pero la integración sobre la región R sería tediosa al tener que expresar $\iint_R xy\, dA$ como la suma de tres integrales (verifique esto).

Las ecuaciones de las fronteras de R sugieren el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = xy. \tag{12}$$

En este caso la imagen de R se obtiene directamente, puesto que las imágenes de las curvas que forman las cuatro fronteras son simplemente $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = 5$. En otras palabras, la imagen de la región R es la región rectangular S: $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 5$; véase la figura 19.17.5*b*).

Ahora, en lugar de intentar resolver la ecuación (12) para x y y en función de u y v, se puede calcular el Jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ evaluando $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ y aplicando (10). Se tiene

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2},$$

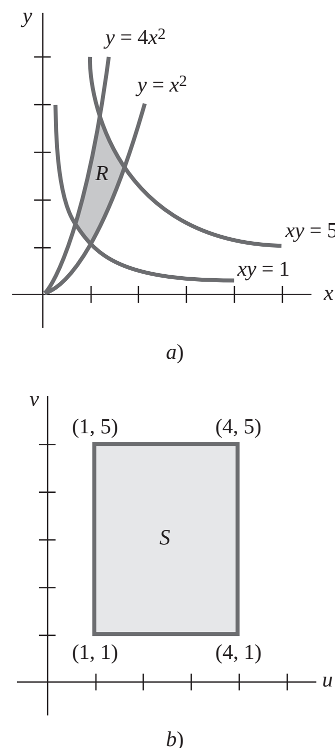


FIGURA 19.17.5 La región S es la imagen de la región R del ejemplo 4

y entonces, de (10),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{x^2}{3y} = -\frac{1}{3u}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iint_R xy\, dA &= \iint_S v\left|-\frac{1}{3u}\right| dA' \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4\int_1^5 \frac{v}{u}\, dv\, du \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{v^2}{2u}\Big]_1^5 du \\ &= 4\int_1^4 \frac{1}{u}\, du = 4 \ln u\Big]_1^4 = 4 \ln 4.\end{aligned}$$

≡

Integrales triples Para cambiar variables en una integral triple, sea

$$x = f(u, v, w), \qquad y = g(u, v, w), \qquad z = h(u, v, w),$$

una transformación uno a uno T de una región E del espacio uvw a una región D del espacio xyz. Si F es continua en D, entonces

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \iiint_E F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dV'$$

donde

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Se deja como ejercicio demostrar que si T es la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares, definida por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi, \tag{13}$$

entonces

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

19.17 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

1. Considérese una transformación T definida por $x = 4u - v$, $y = 5u + 4v$. Encuentre las imágenes de los puntos (0, 0), (0, 2), (4, 0) y (4, 2) en el plano xy bajo T.

2. Considérese una transformación T definida por $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$. Encuentre las imágenes de los puntos (1, 1), (1, 3) y $(\sqrt{2}, 2)$ en el plano xy bajo T^{-1}.

En los problemas del 3 al 6, encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación indicada.

3. S: $0 \le u \le 2, 0 \le v \le u$; $x = 2u + v, y = u - 3v$

4. S: $-1 \le u \le 4, 1 \le v \le 5$; $u = x - y, v = x + 2y$

5. S: $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2$; $x = u^2 - v^2, y = uv$

6. S: $1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2$; $x = uv, y = v^2$

En los problemas del 7 al 10, encuentre el Jacobiano de la transformación T del plano uv al plano xy.

7. $x = ve^{-u}$, $y = ve^{u}$ **8.** $x = e^{3u}$ sen v, $y = e^{3u}$ cos v

9. $u = \dfrac{y}{x^2}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$ **10.** $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-2y}{x^2 + y^2}$

11. *a*) Encuentre la imagen de la región S: $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ bajo la transformación $x = u - uv$, $y = uv$.
b) Explique por qué la transformación no es uno a uno en la frontera de S.

12. Determine dónde es cero el Jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de la transformación del problema 11.

En los problemas del 13 al 22, calcule la integral indicada por medio del cambio de variables propuesto.

13. $\iint_R (x + y)\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x - 2y = -6$, $x - 2y = 6$, $x + y = -1$, $x + y = 3$; $u = x - 2y$, $v = x + y$

14. $\displaystyle\iint_R \frac{\cos\frac{1}{2}(x - y)}{3x + y}\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x$, $y = x - \pi$, $y = -3x + 3$, $y = -3x + 6$; $u = x - y$, $v = 3x + y$

15. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x}\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$, $x = y^2$; $u = \dfrac{x^2}{y}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$

16. $\iint_R (x^2 + y^2)^{-3}\, dA$, donde R es la región acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$; $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ [*Sugerencia:* Genere $u^2 + v^2$.]

17. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = a$, $x^2 - y^2 = b$, $2xy = c$, $2xy = d$, $0 < a < b$, $0 < c < d$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

18. $\iint_R (x^2 + y^2)$ sen $xy\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = -2$; $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

19. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y + x^2}\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 1$, $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$

20. $\iint_R y\, dA$, donde R es la región triangular de vértices (0, 0), (2, 3) y (−4, 1); $x = 2u - 4v$, $y = 3u + v$

21. $\iint_R y^4\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$; $u = xy$, $v = y/x$

22. $\iiint_D (4z + 2x - 2y)\, dV$, donde D es el paralelepípedo $1 \le y + z \le 3$, $-1 \le -y + z \le 1$, $0 \le x - y \le 3$; $u = y + z$, $v = -y + z$, $w = x - y$

En los problemas del 23 al 26, calcule la doble integral indicada por medio de un cambio de variables adecuado.

23. $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}\, dy\, dx$ **24.** $\int_{-2}^0 \int_0^{x+2} e^{y^2 - 2xy + x^2}\, dy\, dx$

25. $\iint_R (6x + 3y)\, dA$, donde R es la región trapezoidal del primer cuadrante de vértices (1, 0), (4, 0), (2, 4) y $(\frac{1}{2}, 1)$

26. $\iint_R (x + y)^4 e^{x-y}\, dA$, donde R es la región cuadrada de vértices (1, 0), (0, 1), (1, 2) y (2, 1)

27. Un problema de termodinámica consiste en encontrar el trabajo realizado por una máquina ideal de Carnot. Dicho trabajo se define como el área de la región R del primer cuadrante acotada por las isotermas $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$, y las adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, $0 < c < d$. Utilice $A = \iint_R dA$ y una sustitución adecuada para encontrar el área mostrada en la **FIGURA 19.17.6**.

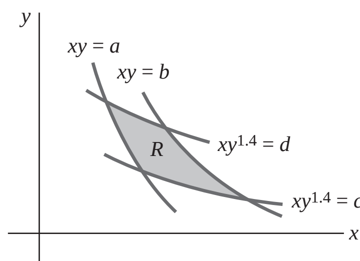


FIGURA 19.17.6 Región R del problema 27

28. Utilice $V = \iiint_D dV$ y las sustituciones $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$ para demostrar que el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

29. Calcule la integral doble $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}\right)$ donde R es la región elíptica cuya frontera es la gráfica $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Utilice las sustituciones $u = x/5$, $v = y/3$, y coordenadas polares.

30. Verifíquese que el Jacobiano de la transformación indicada en (13) es $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$ sen ϕ.

19 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

Responda los problemas del 1 al 20 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso. Donde sea pertinente, considere continuidad de P, Q y de sus primeras derivadas parciales.

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\text{sen}\, t\,\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____

2. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ se encuentra en un plano. _____

3. El vector binormal es perpendicular al plano osculador. _____

4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector de velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector de aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____

5. ∇z es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$. _____

6. Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces f = constante. _____

7. La integral $\int_C (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$, donde C viene dado por $y = x^3$ desde (0, 0) hasta (1, 1), tiene el mismo valor para la curva $y = x^6$ desde (0, 0) hasta (1, 1). _____

8. El valor de la integral $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ entre dos puntos A y B depende de la trayectoria C. _____
9. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves tales que $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$, entonces $\int_C dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
10. Si el trabajo $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$ depende de la curva C, entonces $\mathbf{F}$ es no conservativo. _____
11. Si $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
12. En un campo conservativo de fuerzas $\mathbf{F}$, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al recorrer una curva simple cerrada es cero. _____
13. Considerando continuidad en todas las derivadas parciales, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. _____
14. La integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ sobre una superficie S es igual a cero. _____
15. El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ al recorrer una curva C se debe por completo a la componente tangencial de $\mathbf{F}$. _____
16. Para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ del plano $z = 0$, el teorema de Stokes es el mismo que el teorema de Green. _____
17. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética de un objeto es constante. _____
18. Si $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, entonces $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es el gradiente de una función ϕ. _____
19. Si $\phi = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ es una función potencial para un campo de fuerzas conservativo $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} =$ _____.
20. Si $\mathbf{F} = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$, entonces rot $\mathbf{F} =$ _____.
21. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ al pasar por el plano $-x + y + z = -4$.
22. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\,\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula comienza en $t = 0$ en $(1, 2, 3)$, ¿cuál es su posición en el instante $t = 2$?
23. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}$ sen $t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j}$. Conociendo que la velocidad y la posición de la partícula en el instante $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + (\pi/4)\,\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en el instante $t = 3\pi/4$?
24. Conociendo que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre los componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t. Determine la curvatura.
25. Bosqueje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \text{senh}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$.
26. Considere que la función vectorial del problema 25 es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en el instante $t = 1$, así como la curvatura en dicho punto.

En los problemas 27 y 28, encuentre la derivada direccional de la función indicada en la dirección propuesta.

27. $f(x, y) = x^2y - y^2x$; $D_\mathbf{u} f$ en la dirección de $2\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$
28. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $D_\mathbf{u}F$ en la dirección de $-2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$
29. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En el punto $(1, 1)$, ¿cuál es:
   a) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{i}$?
   b) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$?
   c) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{j}$?
30. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   a) Si $x = 3$ sen $2t$, $y = 4\cos 2t$ y $z = 5t^3$, encuentre dw/dt.
   b) Si $x = 3$ sen $2\,\dfrac{t}{r}$, $y = 4\cos 2\,\dfrac{r}{t}$ y $z = 5t^3r^3$, encuentre $\partial w/\partial t$.
31. Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica
$$z = \text{sen}\,xy \ \text{ en } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\pi, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$
32. Determine si existen puntos de la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ para los que el plano tangente es paralelo a $z = 2$.
33. Exprese el volumen del sólido mostrado en la **FIGURA 19.R.1** como una o más integrales iteradas, utilizando el orden de integración: ***a***) $dy\,dx$ y ***b***) $dx\,dy$. Elija el inciso *a*) o el *b*) para encontrar el volumen.

FIGURA 19.R.1 Sólido del problema 33

34. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = x^3$. Encuentre el centro de masa si la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen.
35. Encuentre el momento de inercia de la lámina descrita en el problema 34 respecto al eje y.
36. Encuentre el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utilizando una integral triple en: ***a***) coordenadas rectangulares, ***b***) coordenadas cilíndricas y ***c***) coordenadas esféricas.
37. Encuentre el volumen del sólido acotado entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$ y el plano $z = 3$.
38. Encuentre el volumen del sólido mostrado en la **FIGURA 19.R.2**.

FIGURA 19.R.2 Sólido del problema 38

En los problemas del 39 al 42, encuentre la expresión indicada para el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\,y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$.

39. $\nabla \cdot \mathbf{F}$
40. $\nabla \times \mathbf{F}$
41. $\nabla \cdot (= \times \mathbf{F})$
42. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$
43. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2}$, donde C viene dado por
$$x = \cos 2t, \quad y = \text{sen}\,2t, \quad z = 2t, \quad \pi \le t \le 2\pi.$$

44. Calcule $\int_C (xy + 4x)\, ds$, donde C viene dado por $2x + y = 2$, desde (1, 0) hasta (0, 2).

45. Calcule $\int_C 3x^2y^2dx + (2x^3y - 3y^2)\, dy$, donde C viene dado por $y = 5x^4 + 7x^2 - 14x$ desde (0, 0) hasta (1, −2).

46. Demuestre que $\displaystyle\oint_C \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

47. Calcule $\int_C y \operatorname{sen} \pi z\, dx + x^2e^y\, dy + 3xyz\, dz$, donde C viene dado por $x = t, y = t^2, z = t^3$ desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1).

48. Si $\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$ y C viene dado por $x^2 + y^2 = 1$, calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en dos formas diferentes.

49. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + y \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de los segmentos de línea que van desde (0, 0) hasta ($\pi/2$, 0) y desde ($\pi/2$, 0) hasta ($\pi/2$, π).

50. Encuentre el trabajo hecho por $\mathbf{F} = \dfrac{2}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ desde $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hasta $(1, \sqrt{3})$ que actúa sobre la trayectoria mostrada en la **FIGURA 19.R.3**.

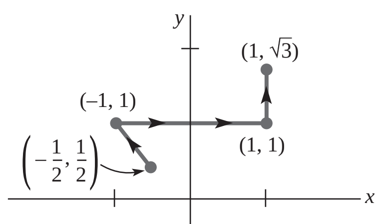


FIGURA 19.R.3 Trayectoria del problema 50

51. Calcule $\iint_S (z/xy)\, dS$, donde S es la porción del cilindro $z = x^2$ del primer octante acotada por $y = 1, y = 3, z = 1, z = 4$.

52. Si $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa al cuadrado $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z = 2$.

53. Si $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $\|\mathbf{r}\| = r$, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

54. Explique por qué el teorema de la divergencia no es aplicable en el problema 53.

55. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$ que atraviesa una superficie S, la cual hace frontera con una región acotada cerrada del espacio que no contiene al origen.

56. Si $\mathbf{F} = 6x\mathbf{i} + 7z\mathbf{j} + 8y\mathbf{k}$, utilice el teorema de Stokes para calcular $\iint_S (\text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

57. Utilice el teorema de Stokes para calcular $\oint_C -2y\, dx + 3x\, dy + 10z\, dz$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $z = 3$.

58. Encuentre el trabajo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ sobre la curva C formada por la intersección del plano $z = 2 - y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

59. Si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, utilice el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$.

60. Repita el problema 59 para $\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$.

61. Si $\mathbf{F} = (x^2 - e^y \tan^{-1}z)\,\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} - (2yz + x^{10})\,\mathbf{k}$, utilice el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la superficie de la región del primer octante acotada por $z = 1 - x^2, z = 0, z = 2 - y, y = 0$.

62. Suponga que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 1)\mathbf{k}$ y que S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = c$. Calcule $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ sin la ayuda del teorema de la divergencia. [*Sugerencia:* El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi ac$.]

63. Calcule la integral $\iint_R (x^2 + y^2)\sqrt[3]{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ por medio del cambio de variables $u = 2xy, v = x^2 - y^2$.

64. Calcule la integral

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{(x - y)^2 + 2(x + y) + 1}}\, dA,$$

donde R es la región acotada por las gráficas $y = x, x = 2, y = 0$ por medio del cambio de variables $x = u + uv, y = v + uv$.

65. Como se muestra en la **FIGURA 19.R.4**, una esfera de radio 1 tiene su centro en la superficie de una esfera de radio $a > 1$. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera mayor que está cortada por la esfera menor.

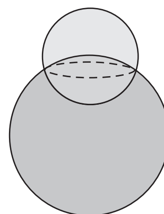


FIGURA 19.R.4 Esferas del problema 65

66. En la superficie de un globo —o para ser más precisos, en la superficie de la Tierra—, las fronteras de los estados de Colorado y Wyoming son "rectángulos esféricos" (en este problema se considera que la Tierra es una esfera perfecta). Colorado está acotado por las líneas de longitud 102°W y 109°W, y las líneas de latitud 37°N y 41°N. Wyoming está acotado por las longitudes 104°W y 111°W, y las latitudes 41°N y 45°N; véase la **FIGURA 19.R.5**.

***a*)** Sin calcular explícitamente sus áreas, determine qué estado es más grande y explique por qué.

***b*)** ¿En qué porcentaje Wyoming es mayor (o menor) que Colorado? [*Sugerencia:* Suponga que el radio de la Tierra es R. Proyecte un rectángulo esférico en el hemisferio norte que esté determinado por las latitudes θ_1 y θ_2 y las longitudes ϕ_1 y ϕ_2 sobre el plano *xy*.]

***c*)** Una referencia bibliográfica indica que las áreas de los dos estados son 104 247 y 97 914 mi². ¿Cómo se compara este dato con la respuesta en el inciso *b*)?



FIGURA 19.R.5 Los estados WY y CO son rectángulos esféricos en el problema 66

20 TRANSFORMACIONES CONFORMES

Estructura del capítulo

En este capítulo se estudian las propiedades de las transformaciones para las funciones elementales introducidas en el capítulo 15 y se desarrollan dos nuevos tipos de transformaciones especiales denominadas **transformaciones fraccionales lineales** y **transformaciones de Schwarz-Christoffel**.

En capítulos previos se utilizaron series de Fourier y transformadas integrales relacionadas con la ecuación de Laplace para resolver problemas de valores en la frontera. Los métodos de la transformación conforme, explicados en el presente capítulo, se utilizan para transferir soluciones conocidas de la ecuación de Laplace de una región a otra. Además, los flujos de fluidos que rodean obstáculos y atraviesan canales pueden determinarse mediante transformaciones conformes.

20.1 Funciones complejas como transformaciones

Introducción En el capítulo 15 se hace hincapié en las definiciones algebraicas y las propiedades de las funciones complejas. Para dar una interpretación geométrica a una función compleja $w = f(z)$, se colocan los planos z y w lado a lado y se imagina que un punto $z = x + iy$ del dominio de la definición de f se ha transformado al punto $w = f(z)$ del segundo plano. Así, la función compleja $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ puede considerarse la **transformación en el plano**

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

y $w = f(z)$ se denomina la **imagen** de z bajo f.

La **FIGURA 20.1.1** ilustra las imágenes de un número finito de números complejos en la región R. Se puede obtener información más útil encontrando la imagen de la región R junto con las imágenes de una familia de curvas que se encuentren dentro de R. Usualmente, las curvas que se seleccionan son familias de líneas, de círculos y el sistema de curvas de nivel para las partes real e imaginaria de f.

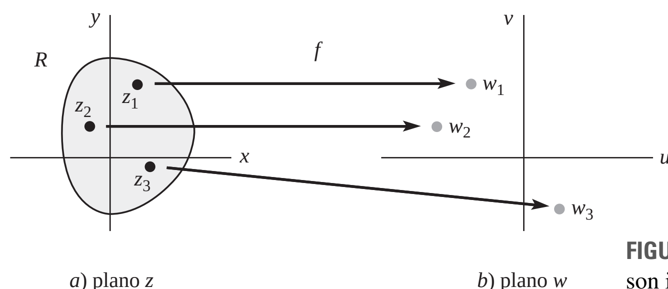


FIGURA 20.1.1 w_1, w_2, w_3 son imágenes de z_1, z_2, z_3

Imágenes de curvas Obsérvese que si $z(t) = x(t) + iy(t)$, donde $a \leq t \leq b$, describe una curva C en la región, entonces $w = f(z(t))$, donde $a \leq t \leq b$ es una representación paramétrica de la curva correspondientes C' en el plano w. Asimismo, un punto z sobre la curva de nivel $u(x, y) = a$ se transformará en un punto w que se localice en la línea vertical $u = a$, y un punto z en la curva de nivel $v(x, y) = b$ se transformará hacia un punto w que se halle en la línea horizontal $v = b$.

EJEMPLO 1 La transformación $f(z) = e^z$

La franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$ se halla en la región fundamental de la función exponencial $f(z) = e^z$. Un segmento de línea vertical $x = a$ de esta región se describe mediante $z(t) = a + it, 0 \leq t \leq \pi$, y así $w = f(z(t)) = e^a e^{it}$. Entonces, la imagen es un semicírculo con centro en $w = 0$ y de radio $r = e^a$. En forma similar, una línea horizontal $y = b$ se parametriza por medio de $z(t) = t + ib, -\infty < t < \infty$, por lo que $w = f(z(t)) = e^t e^{ib}$. Como Arg $w = b$ y $|w| = e^t$, la imagen es un rayo que surge del origen, y como $0 \leq$ Arg $w \leq \pi$, la imagen de la franja horizontal completa es el semiplano superior $v \geq 0$. Obsérvese que las líneas horizontales $y = 0$ y $y = \pi$ se transforman sobre los ejes u positivo y negativo, respectivamente. En la **FIGURA 20.1.2** se muestra la transformación para $f(z) = e^z$.

De $w = e^x e^{iy}$ se concluye que $|w| = e^x$ y que $y =$ Arg w. Así, $z = x + iy = \log_e|w| + i$ Arg $w =$ Ln w. La función inversa $f^{-1}(w) =$ Ln w transforma entonces al semiplano superior $v \geq 0$ en la franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$. ≡

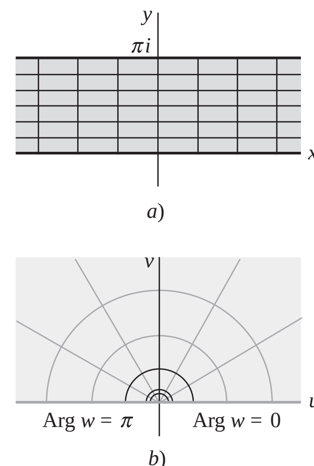


FIGURA 20.1.2 Imágenes de las líneas vertical y horizontal del ejemplo 1

EJEMPLO 2 La transformación $f(z) = 1/z$

La función compleja $f(z) = 1/z$ tiene dominio $z \neq 0$ y partes real e imaginaria $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ y $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, respectivamente. Cuando $a \neq 0$, una curva de nivel $u(x, y) = a$ se escribe como

$$x^2 - \frac{1}{a}x + y^2 = 0 \qquad \text{o} \qquad \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2.$$

La curva de nivel es, por lo tanto, un círculo cuyo centro se localiza en el eje x y pasa por el origen. Un punto z diferente de cero de este círculo se transforma en un punto w en la línea $u = a$. De igual modo, la curva de nivel $v(x, y) = b$, $b \neq 0$ se escribe como

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2,$$

y un punto z de este círculo se transforma en un punto w de la línea $v = b$. La **FIGURA 20.1.3** muestra la transformación para $f(z) = 1/z$; en la figura 20.1.3*a*) aparecen las dos colecciones de curvas de nivel circulares, y la figura 20.1.3*b*) muestra sus imágenes correspondientes en el plano w.

Puesto que $w = 1/z$ se tiene que $z = 1/w$. Así, $f^{-1}(w) = 1/w$, por lo que $f = f^{-1}$. Se concluye entonces que f transforma la línea horizontal $y = b$ en el círculo $u^2 + (v + \frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}b)^2$, y que f transforma la línea vertical $x = a$ hacia el círculo $(u - \frac{1}{2}a)^2 + v^2 = (\frac{1}{2}a)^2$. ≡

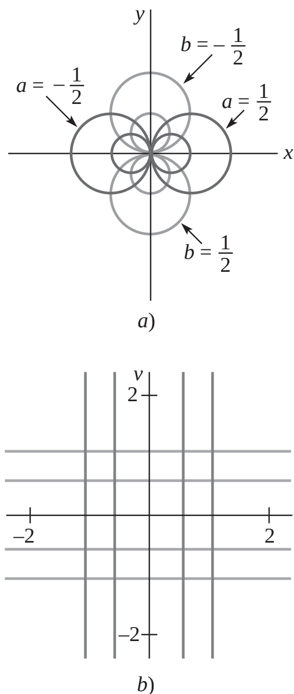


FIGURA 20.1.3 Imágenes de círculos para el ejemplo 2

■ **Traslación y rotación** La función lineal elemental $f(z) = z + z_0$ puede interpretarse como una **traslación** en el plano z. Para ver esto se plantea que $z = x + iy$ y que $z_0 = h + ik$. Como $w = f(z) = (x + h) + i(y + k)$, el punto (x, y) se ha trasladado h unidades en dirección horizontal y k unidades en la dirección vertical en la nueva posición en $(x + h, y + k)$. Particularmente, el origen O se ha transformado hacia $z_0 = h + ik$.

La función elemental $g(z) = e^{i\theta_0}z$ puede interpretarse como una **rotación** de θ_0 grados, ya que si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = g(z) = re^{i(\theta+\theta_0)}$. Obsérvese que si se aplica la transformación compleja $h(z) = e^{i\theta_0}z + z_0$ a la región R centrada en el origen, la región imagen R' puede obtenerse rotando en primer lugar θ_0 grados a R y entonces trasladando el centro a la nueva posición z_0; véase la transformación por $h(z) = e^{i\theta_0}z + z_0$ en la **FIGURA 20.1.4**.

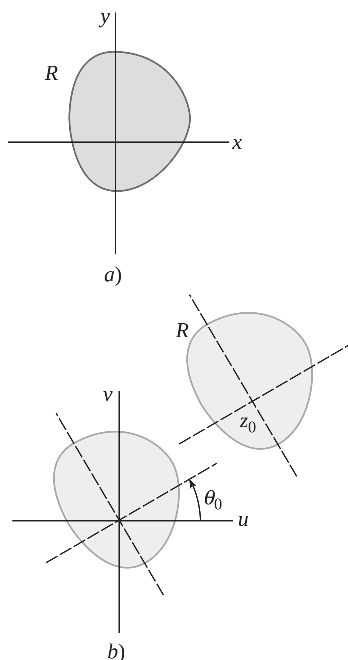


FIGURA 20.1.4 Traslación y rotación

EJEMPLO 3 Rotación y traslación

Encuentre una función compleja que transforme la franja horizontal $-1 \leq y \leq 1$ en la franja vertical $2 \leq x \leq 4$.

Solución Si la franja horizontal $-1 \leq y \leq 1$ se rota 90°, se obtiene la franja vertical $-1 \leq x \leq 1$ y al rotar ésta 3 unidades hacia la derecha se obtiene la franja vertical $2 \leq x \leq 4$; véase la **FIGURA 20.1.5**. Como $e^{i\pi/2} = i$, entonces $h(z) = iz + 3$ es la transformación buscada.

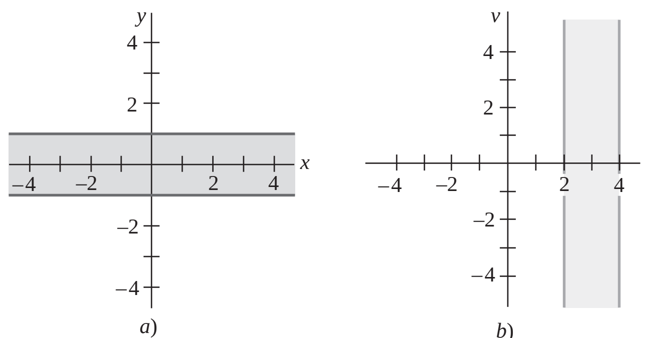


FIGURA 20.1.5 Imagen de la franja horizontal del ejemplo 3

≡

■ **Amplificación** Una **amplificación** consiste en una función compleja de la forma $f(z) = \alpha z$, donde α es un número real positivo fijo. Obsérvese que $|w| = |\alpha z| = \alpha|z|$, por lo que f cambia la longitud (mas no la dirección) del número complejo z por un factor fijo α. Si $g(z) = az + b$ y $a = r_0e^{i\theta_0}$, entonces el vector z se rota θ_0 grados, se amplifica por un factor de r_0 y finalmente se traslada una cantidad b.

EJEMPLO 4 Contracción y traslación

Encuentre una función compleja que transforme el disco $|z| \leq 1$ en el disco $|w - (1 + i)| \leq \frac{1}{2}$.

Solución En primer lugar se contrae el radio del disco por un factor de $\frac{1}{2}$ y entonces se traslada su centro al punto $1 + i$. Por lo tanto, $w = f(z) = \frac{1}{2}z + (1 + i)$ transforma $|z| \leq 1$ en el disco $|w - (1 + i)| \leq \frac{1}{2}$. ≡

Funciones de potencia Una función de potencia de la forma $f(z) = z^\alpha$, donde α es un número real positivo fijo, se denomina **función real de potencia**. La **FIGURA 20.1.6** muestra el efecto de la función compleja $f(z) = z^\alpha$ sobre la cuña angular $0 \le \text{Arg } z \le \theta_0$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = f(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. Así, $0 \le \text{Arg } w \le \alpha\theta_0$ y la abertura de la cuña se cambia por un factor α. No es difícil mostrar que un arco circular con centro en el origen se transforma en un arco circular similar y que los rayos que surgen del origen se transforman en rayos similares.

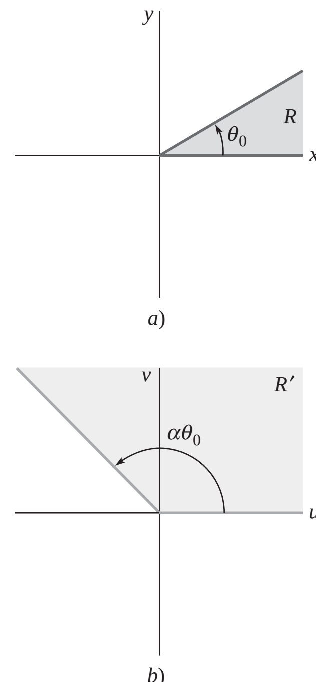


FIGURA 20.1.6 R' es imagen de la cuña angular R

EJEMPLO 5 La función de potencia $f(z) = z^{1/4}$

Encuentre una función compleja que transforme el semiplano superior $y \ge 0$ en la cuña $0 \le \text{Arg } w \le \pi/4$.

Solución El semiplano superior $y \ge 0$ se describe también por medio de la desigualdad $0 \le \text{Arg } z \le \pi$. Se debe entonces encontrar una transformación compleja que reduzca el ángulo $\theta_0 = \pi$ por un factor de $\alpha = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $f(z) = z^{1/4}$. ≡

Transformaciones sucesivas Para encontrar una transformación compleja entre dos regiones R y R', generalmente conviene transformar primero R en una tercera región R'' y entonces hallar una transformación compleja de R'' en R'. Dicho de manera más precisa: si $\zeta = f(z)$ transforma R en R'' y $w = g(\zeta)$ transforma R'' en R', entonces la función compuesta $w = g(f(z))$ transforma R en R'; véase la **FIGURA 20.1.7** para un diagrama de transformaciones sucesivas.

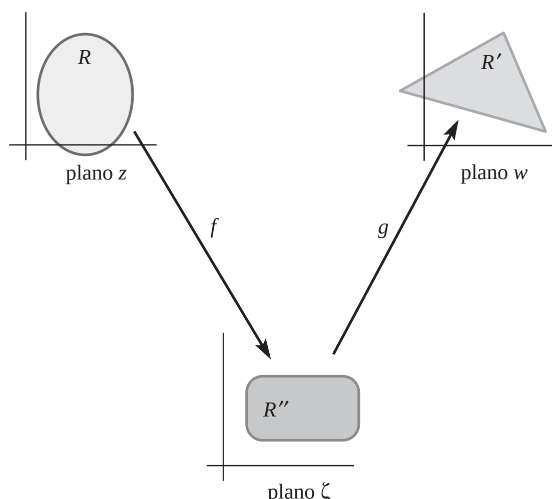


FIGURA 20.1.7 R' es imagen de R bajo transformaciones sucesivas

EJEMPLO 6 Transformaciones sucesivas

Encuentre una función compleja que transforme la franja horizontal $0 \le y \le \pi$ sobre la cuña $0 \le \text{Arg } w \le \pi/4$.

Solución En el ejemplo 1 se plantea que la función compleja $f(z) = e^z$ transforma la franja horizontal $0 \le y \le \pi$ en el semiplano superior $0 \le \text{Arg } \zeta \le \pi$. Del ejemplo 5, el semiplano superior $0 \le \text{Arg } \zeta \le \pi$ se transforma en la cuña $0 \le \text{Arg } w \le \pi/4$ por medio de $g(\zeta) = \zeta^{1/4}$. Se deduce entonces que la función compuesta $w = g(f(z)) = g(e^z) = e^{z/4}$ transforma la franja horizontal $0 \le y \le \pi$ en la cuña $0 \le \text{Arg } w \le \pi/4$. ≡

EJEMPLO 7 Transformaciones sucesivas

Encuentre una función compleja que transforme la cuña $\pi/4 \le \text{Arg } z \le 3\pi/4$ en el semiplano superior $v \ge 0$.

Solución En primer lugar se rota la cuña $\pi/4 \le \text{Arg } z \le 3\pi/4$ de modo que quede en la posición estándar mostrada en la figura 20.1.6. Si $\zeta = f(z) = e^{-i\pi/4}z$, entonces la imagen de esta cuña es la cuña R'' definida por $0 \le \text{Arg } \zeta \le \pi/2$. La función real $w = g(\zeta) = \zeta^2$ expande la abertura de R'' por un factor de 2 para dar el semiplano superior $0 \le \text{Arg } w \le \pi$ como su imagen. Por lo tanto, $w = g(f(z)) = (e^{-i\pi/4}z)^2 = -iz^2$ es la transformación buscada. ≡

En las secciones de la 20.2 a la 20.4 se amplía el conocimiento de transformaciones complejas y se muestra cómo se utilizan para resolver la ecuación de Laplace en el plano.

20.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas del 1 al 10, se proporciona una curva en el plano z y una transformación compleja $w = f(z)$. En cada caso, encuentre la curva imagen en el plano w.

1. $y = x$ bajo $w = 1/z$

2. $y = 1$ bajo $w = 1/z$

3. Hipérbola $xy = 1$ bajo $w = z^2$

4. Hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ bajo $w = z^2$

5. Semicírculo $|z| = 1$, $y > 0$, bajo $w = \text{Ln } z$

6. Rayo $\theta = \pi/4$ bajo $w = \text{Ln } z$

7. Rayo $\theta = \theta_0$ bajo $w = z^{1/2}$

8. Arco circular $r = 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$, bajo $w = z^{1/2}$

9. Curva $e^x \cos y = 1$ bajo $w = e^z$

10. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = z + 1/z$

En los problemas del 11 al 20, se proporciona una región del plano z y una transformación compleja $w = f(z)$. Encuentre en cada caso la región imagen en el plano w.

11. Primer cuadrante bajo $w = 1/z$

12. Franja $0 \le y \le 1$ bajo $w = 1/z$

13. Rectángulo $\pi/4 \le y \le \pi/2$ bajo $w = e^z$

14. Rectángulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$ bajo $w = e^z$

15. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = z + 4i$

16. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = 2z - 1$

17. Franja $0 \le y \le 1$ bajo $w = iz$

18. Primer cuadrante bajo $w = (1 + i)z$

19. Cuña $0 \le \text{Arg } z \le \pi/4$ bajo $w = z^3$

20. Cuña $0 \le \text{Arg } z \le \pi/4$ bajo $w = z^{1/2}$

En los problemas del 21 al 30, encuentre una transformación compleja de la región indicada R del plano z a la región imagen R' del plano w.

21. Franja $1 \le y \le 4$ en la franja $0 \le u \le 3$

22. Franja $1 \le y \le 4$ en la franja $0 \le v \le 3$

23. Disco $|z - 1| \le 1$ en el disco $|w| \le 2$

24. Franja $-1 \le x \le 1$ en la franja $-1 \le v \le 1$

25. Cuña $\pi/4 \le \text{Arg } z \le \pi/2$ en el semiplano superior $v \ge 0$

26. Franja $0 \le y \le 4$ en el semiplano superior $v \ge 0$

27. Franja $0 \le y \le \pi$ en la cuña $0 \le \text{Arg } w \le 3\pi/2$

28. Cuña $0 \le \text{Arg } z \le 3\pi/2$ en el semiplano $u \ge 2$

29.

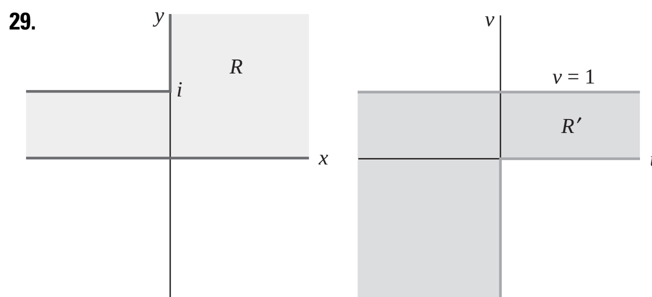


FIGURA 20.1.8 Regiones R y R' para el problema 29

30.

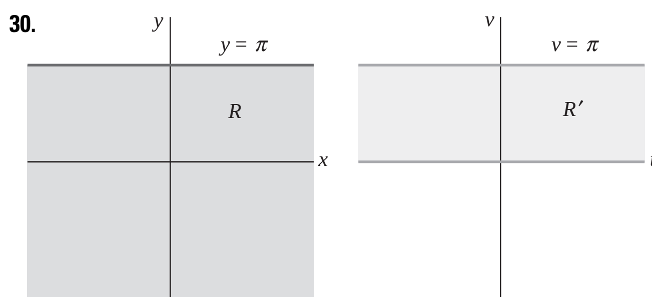


FIGURA 20.1.9 Regiones R y R' para el problema 30

31. Proyecto La transformación del problema 10 es un caso especial de la transformación $w = z + k^2/z$, donde k es una constante positiva, conocida como **transformación de Joukowski**.

a) Muestre que la transformación de Joukowski transforma cualquier círculo $x^2 + y^2 = R^2$ en la elipse

$$\frac{u^2}{\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(1 - \frac{k^2}{R^2}\right)^2} = R^2, k \ne R.$$

b) ¿Cuál es la imagen del círculo cuando $R = k$?

c) La importancia de la transformación $w = z + k^2/z$ no recae en su efecto sobre los círculos $|z| = R$ centrados en el origen, sino en los círculos no centrados en el origen cuyo centro se localiza en el eje real. Demuestre que la transformación de Joukowski puede escribirse como

$$\frac{w - 2k}{w + 2k} = \left(\frac{z - k}{z + k}\right)^2.$$

Cuando $k = 1$, esta transformación particular transforma un círculo que pasa por $z = -1$ y contiene al punto $z = 1$ en una curva cerrada con un borde posterior afilado. Este tipo de curva, que recuerda a la sección transversal del ala de un aeroplano, se conoce como perfil de Joukowski.

Escriba un reporte sobre el uso de la transformación de Joukowski en el estudio del flujo de aire alrededor de un perfil aerodinámico. Existe mucha información sobre este tema en Internet.

20.2 Transformaciones conformes

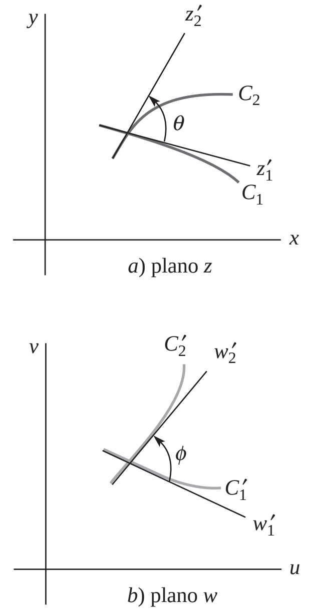


FIGURA 20.2.1 Transformación conforme si $\theta = \phi$

Introducción En la sección 20.1 se plantea que una transformación lineal no constante $f(z) = az + b$, con a y b como números complejos, actúa rotando, amplificando y trasladando puntos en el plano complejo. Como resultado se puede mostrar fácilmente que el ángulo entre dos curvas del plano z que se intersecan es igual al ángulo entre las imágenes de los arcos en el plano w bajo una transformación lineal. En esta sección se estudian otras transformaciones complejas que tienen la propiedad de preservar los ángulos.

Transformaciones que preservan los ángulos Una transformación compleja $w = f(z)$ definida sobre un dominio D se denomina **conforme en $z = z_0$** para D cuando f preserva los ángulos entre dos curvas cualesquiera de D que se intersecan en z_0. Más precisamente: si C_1 y C_2 se intersecan en z_0 de D, y C_1' y C_2' son las correspondientes imágenes en el plano w, se requiere que el ángulo θ entre C_1 y C_2 sea igual al ángulo ϕ entre C_1' y C_2'; véase la **FIGURA 20.2.1**.

Estos ángulos se calculan en función de los vectores tangentes a las curvas. Si z_1' y z_2' son vectores tangentes a las curvas C_1 y C_2, respectivamente, entonces, al aplicar la ley de cosenos al triángulo determinado por z_1' y z_2', se tiene

$$|z_1' - z_2'|^2 = |z_1'|^2 + |z_2'|^2 - 2|z_1'|\,|z_2'|\cos\theta$$

o

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|z_1'|^2 + |z_2'|^2 - |z_1' - z_2'|^2}{2|z_1'||z_2'|}\right). \tag{1}$$

De la misma forma, si w_1' y w_2' son los vectores tangentes a las curvas C_1' y C_2', respectivamente, entonces

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|w_1'|^2 + |w_2'|^2 - |w_1' - w_2'|^2}{2|w_1'||w_2'|}\right). \tag{2}$$

El siguiente teorema proporciona una condición simple que garantiza que $\theta = \phi$.

Teorema 20.2.1 **Transformación conforme***

Si $f(z)$ es analítica en el dominio D y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en $z = z_0$.

DEMOSTRACIÓN

Si una curva C de D se parametriza por medio de $z = z(t)$, entonces $w = f(z(t))$ describe la curva imagen en el plano w. Al aplicar la regla de la cadena a $w = f(z(t))$ se obtiene $w' = f'(z(t))z'(t)$. Si las curvas C_1 y C_2 se intersecan en el punto z_0 de D, entonces $w_1' = f'(z_0)$ y $w_2' = f'(z_0)$. Como $f'(z_0) \neq 0$ se utiliza (2) para obtener

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|f'(z_0)z_1'|^2 + |f'(z_0)z_2'|^2 - |f'(z_0)z_1' - f'(z_0)z_2'|^2}{2|f'(z_0)z_1'||f'(z_0)z_2'|}\right).$$

Se aplican las leyes del valor absoluto para factorizar y eliminar $|f'(z_0)|^2$ del numerador y del denominador, a fin de obtener

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|z_1'|^2 + |z_2'|^2 - |z_1' - z_2'|^2}{2|z_1'||z_2'|}\right).$$

Por lo tanto, de (1), $\phi = \theta$. ≡

EJEMPLO 4 Transformaciones conformes

a) La función analítica $f(z) = e^z$ es conforme en todos los puntos del plano z, puesto que $f'(z) = e^z$ nunca es cero.

b) La función analítica $g(z) = z^2$ es conforme en todos los puntos excepto en $z = 0$ puesto que $g'(z) = 2z \neq 0$ para $z \neq 0$. De la figura 20.1.6 se observa que $g(z)$ duplica el ángulo formado por los dos rayos en el origen. ≡

* También es posible demostrar que f mantiene el *sentido de la dirección* entre los vectores tangentes.

Si $f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$, es posible mostrar que f *duplica* el ángulo entre dos curvas cualesquiera de D que se intersecan en $z = z_0$. Los dos siguientes ejemplos presentan dos transformaciones complejas importantes que son conformes en todos los números finitos de los puntos de sus dominios, excepto en uno.

EJEMPLO 2 $f(z) = \text{sen}\, z$ como transformación conforme

La franja vertical $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ se denomina la región fundamental de la función trigonométrica $w = \text{sen}\, z$. Una línea vertical $x = a$ del interior de esta región se describe mediante $z(t) = a + it$, donde $-\infty < t < \infty$. De (6) de la sección 15.7 se tiene que

$$\text{sen}\, z = \text{sen}\, x \cosh y + i \cos x\, \text{senh}\, y$$

y por lo tanto $\quad u + iv = \text{sen}(a + it) = \text{sen}\, a \cosh t + i \cos a\, \text{senh}\, t.$

De la igualdad $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$ se tiene que

$$\frac{u^2}{\text{sen}^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1.$$

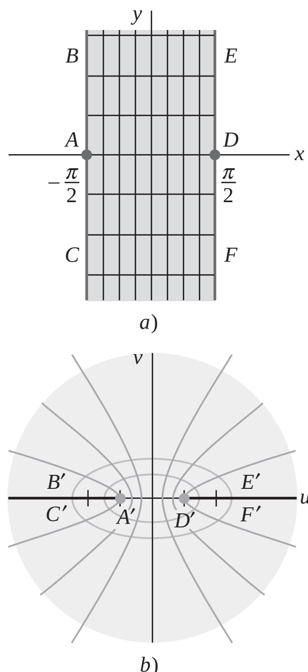


FIGURA 20.2.2 Imagen de la franja vertical del ejemplo 2

La imagen de la línea vertical $x = a$ es, por ende, una hipérbola con $\pm$ sen a como intersecciones en u, y como $-\pi/2 < a < \pi/2$, la hipérbola cruza el eje u entre $u = -1$ y $u = 1$. Obsérvese que si $a = -\pi/2$, entonces $w = -\cosh t$, y por lo tanto la línea $x = -\pi/2$ se transforma en el intervalo $(-\infty, -1]$ en el eje u en su lado negativo. De la misma forma, la línea $x = \pi/2$ se transforma en el intervalo $[1, \infty)$ del eje u en su parte positiva.

Un argumento similar establece que el segmento de línea horizontal descrito por $z(t) = t + ib$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, se transforma en la porción superior o la porción inferior de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\text{senh}^2 b} = 1$$

dependiendo de si $b > 0$ o $b < 0$. Estos resultados se sintetizan en la **FIGURA 20.2.2*b*)**, que muestra la transformación mediante $f(z) = \text{sen}\, z$. Obsérvese que se utilizan cuidadosamente letras mayúsculas para indicar los puntos de la frontera que se transforman. Así, por ejemplo, el segmento de frontera AB se transforma en $A'B'$.

Ya que $f'(z) = \cos z$, f es conforme en todos los puntos de la región excepto $z = \pm \pi/2$. Las hipérbolas y las elipses son entonces ortogonales ya que son imágenes de las familias ortogonales de segmentos horizontales y líneas verticales. Obsérvese que el ángulo de 180° en $z = -\pi/2$ formado por los segmentos AB y AC se duplica para formar un único segmento de línea en $w = -1$. ≡

EJEMPLO 3 $f(z) = z + 1/z$ como una transformación conforme

La transformación compleja $f(z) = z + 1/z$ es conforme en todos los valores de z excepto $z = \pm 1$ y $z = 0$. En particular, la función es conforme para todos los valores de z del semiplano superior que satisfacen $|z| > 1$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = re^{i\theta} + (1/r)e^{-i\theta}$ y, por lo tanto,

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\text{sen}\,\theta. \tag{3}$$

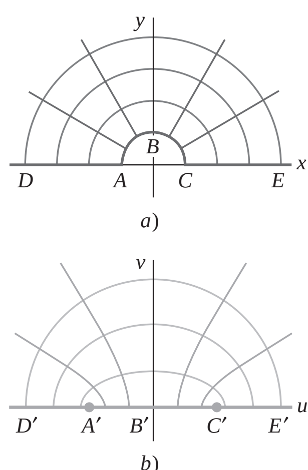


FIGURA 20.2.3 Imágenes de los rayos y los círculos del ejemplo 3

Nótese que si $r = 1$, entonces $v = 0$ y $u = 2\cos\theta$. En consecuencia, el semicírculo $z = e^{it}$, donde $0 \leq t \leq \pi$ se transforma en el segmento $[-2, 2]$ del eje u. De (3) se infiere que si $r > 1$, entonces el semicírculo $z = re^{it}$, donde $0 \leq t \leq \pi$ se transforma en la mitad superior de la elipse $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$, donde $a = r + 1/r$ y $b = r - 1/r$; véase la **FIGURA 20.2.3** para la transformación por medio de $f(z) = z + 1/z$.

Para un valor fijo de θ, el rayo $z = te^{i\theta}$, para $t \geq 1$, se transforma en la porción de la hipérbola $u^2/\cos^2\theta - v^2/\text{sen}^2\theta = 4$ del semiplano superior $v \geq 0$. Esto se deduce de (3), ya que

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\text{sen}^2\theta} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 4.$$

Como f es conforme para $|z| > 1$ y un rayo $\theta = \theta_0$ interseca a un círculo $|z| = r$ con un ángulo recto, las hipérbolas y las elipses del plano w son ortogonales. ≡

Transformaciones conformes utilizando tablas El apéndice proporciona transformaciones conformes. Dichas transformaciones se clasifican como elementales (de E-1 a E-9), transformaciones en semiplanos (de H-1 a H-6), transformaciones en regiones circulares (de C-1 a C-5) y transformaciones diversas (de M-1 a M-10). Algunas de estas transformaciones complejas se deducen en las secciones 20.3 y 20.4.

Los elementos proporcionados no sólo indican las imágenes de la región R, sino también las imágenes de varias porciones de la frontera de R. Esto es especialmente útil cuando se intenta resolver problemas de valor en la frontera utilizando transformaciones conformes. El apéndice se utiliza de manera semejante a las tablas de integrales para encontrar antiderivadas. En algunos casos se usa un único elemento para encontrar una transformación conforme entre dos regiones dadas R y R'. En otros casos se pueden requerir transformaciones sucesivas para transformar R en R'.

EJEMPLO 4 Uso de una tabla de transformaciones conformes

Utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar una transformación conforme entre la franja $0 \leq y \leq 2$ y el semiplano superior $v \geq 0$. ¿Cuál es la imagen del eje x negativo?

Solución Se puede obtener una transformación adecuada directamente de la entrada H-2. Al hacer $a = 2$ entonces $f(z) = e^{\pi z/2}$ y observar las posiciones de E, D, E' y D' de la figura, transforma el eje x en su parte negativa en el intervalo (0, 1) del eje u. ≡

EJEMPLO 5 Uso de una tabla de transformaciones conformes

Utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar una transformación conforme entre la franja $0 \leq y \leq 2$ y el disco $|w| \leq 1$. ¿Cuál es la imagen del eje x en su parte negativa?

Solución El apéndice no tiene un elemento que transforme la franja $0 \leq y \leq 2$ directamente en el disco. En el ejemplo 4, la franja se transforma por medio de $f(z) = e^{\pi z/2}$ sobre el semiplano superior y, del elemento C-4, la transformación compleja $w = \dfrac{i - \zeta}{i + \zeta}$ transforma el semiplano en el disco $|w| \leq 1$. Por lo tanto, $w = g(f(z)) = \dfrac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$ transforma la franja $0 \leq y \leq 2$ sobre el disco $|w| \leq 1$.

El eje x en su lado negativo se transforma en primer lugar en el intervalo (0, 1) del plano ζ, y desde la posición de los puntos C y C' en C-4, el intervalo (0, 1) se transforma en el arco circular $w = e^{i\theta}$, donde $0 < \theta < \pi/2$, del plano w. ≡

Funciones armónicas y el problema de Dirichlet Una función armónica acotada $u = u(x, y)$ que toma en cuenta valores preestablecidos sobre toda la frontera de una región R se conoce como solución al **problema de Dirichlet** en R. En los capítulos del 11 al 13 se plantea una serie de técnicas para resolver la ecuación de Laplace en el plano, e interpretamos la solución a un problema de Dirichlet como la distribución de temperatura en estado estable en el interior de R que resulta de las temperaturas fijas en la frontera.

Existen por lo menos dos desventajas en los métodos de series de Fourier y de transformada integral presentados en los capítulos del 11 al 13. Estos métodos funcionan únicamente para regiones simples del plano y las soluciones toman comúnmente la forma de series infinitas o de integrales impropias. Como tales, son difíciles de calcular. En la sección 15.5 se plantea que las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas. En vista de que hay una gran cantidad de funciones analíticas, se pueden encontrar soluciones cerradas a muchos problemas de Dirichlet y utilizar estas soluciones para bosquejar las isotermas y las líneas de flujo de la distribución de temperatura.

A continuación se muestra cómo es posible utilizar transformaciones conformes para resolver un problema de Dirichlet en una región R una vez conocida la solución al problema de Dirichlet correspondiente en la región imagen R'. El método depende del siguiente teorema:

Teorema 20.2.2 Teorema de la transformación para funciones armónicas

Sea f una función analítica que transforma un dominio D sobre un dominio D'. Si U es armónica en D', entonces la función real $u(x, y) = U(f(z))$ es armónica en D.

DEMOSTRACIÓN

Se proporciona una demostración para el caso especial en el que D' es simplemente conexa. Si U tiene una conjugada armónica V en D', entonces $H = U + iV$ es analítica en D', y por lo tanto la función compuesta $H(f(z)) = U(f(z)) + iV(f(z))$ es analítica en D. Por el teorema 15.5.3 se deduce que la parte real $U(f(z))$ es armónica en D y la demostración queda completa.

Para establecer que U tiene una conjugada armónica, sea $g(z) = \partial U/\partial x - i\,\partial U/\partial y$. La primera ecuación de Cauchy-Riemann $(\partial/\partial x)(\partial U/\partial x) = (\partial/\partial y)(-\partial U/\partial y)$ es equivalente a la ecuación de Laplace $\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = 0$, que se satisface puesto que U es armónica en D'. La segunda ecuación de Cauchy-Riemann $(\partial/\partial y)(\partial U/\partial x) = -(\partial/\partial x)(-\partial U/\partial y)$ es equivalente a la igualdad de las derivadas parciales combinadas de segundo orden. Por lo tanto, $g(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo D' y así, por el teorema 16.3.3, tiene una antiderivada $G(z)$. Si $G(z) = U_1 + iV_1$, entonces $g(z) = G'(z) = \partial U_1/\partial x - i\,\partial U_1/\partial y$. Como $g(z) = \partial U/\partial x - i\,\partial U/\partial y$ se deduce que U y U_1 poseen derivadas parciales primeras iguales. Por lo tanto, $H = U + iV_1$ es analítica en D' y, consecuentemente, U tiene una conjugada armónica en D'. ≡

El teorema 20.2.2 se utiliza para resolver un problema de Dirichlet en una región R transformando el problema a una región R' en la cual la solución U sea evidente o haya sido encontrada por los métodos anteriores (incluidos los métodos por series de Fourier y la transformada integral de los capítulos del 11 al 13). Los pasos clave se sintetizan a continuación.

Resolución de problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes

1. Encuentre una transformación conforme $w = f(z)$ que transforme la región original R en la región imagen R'. La región R' puede ser una región de la que se conozcan muchas soluciones explícitas a problemas de Dirichlet.
2. Transfiera las condiciones de frontera desde la frontera de R a la frontera de R'. El valor de u en un punto fronterizo ξ de R se asigna como el valor de U en el punto de frontera correspondiente $f(\xi)$. Véase la **FIGURA 20.2.4** para una ejemplificación de la transferencia de condiciones de frontera.

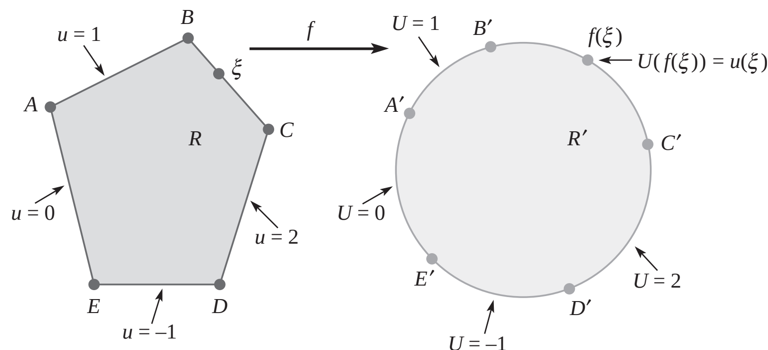


FIGURA 20.2.4 R' es la imagen de R bajo una transformación conforme f

3. Resuelva el problema de Dirichlet correspondiente en R'. La solución U puede ser obvia a partir de la simplicidad del problema en R' o puede encontrarse utilizando métodos de Fourier o la transformada integral. (En las secciones 20.3 y 20.5 se presentan métodos adicionales.)
4. La solución al problema de Dirichlet original es $u(x, y) = U(f(z))$.

EJEMPLO 6 Resolución de un problema de Dirichlet

La función $U(u, v) = (1/\pi)$ Arg w es armónica en el semiplano superior $v > 0$ puesto que es la parte imaginaria de la función analítica $g(w) = (1/\pi)$ Ln w. Utilice esta función para resolver el problema de Dirichlet de la **FIGURA 20.2.5*a*)**.

Solución La función analítica $f(z) = \text{sen } z$ transforma la región original en el semiplano superior $v \geq 0$ y transforma los segmentos de frontera en los segmentos mostrados en la figura 20.2.5*b*). La función armónica $U(u, v) = (1/\pi)$ Arg w satisface las condiciones de frontera transferidas $U(u, 0) = 0$ para $u > 0$ y $U(u, 0) = 1$ para $u < 0$. Por lo tanto, $u(x, y) = U(\text{sen } z) = (1/\pi)\,\text{Arg}(\text{sen } z)$ es la solución al problema original. Si $\tan^{-1}(v/u)$ se elige de modo que se halle entre 0 y π, la solución se escribe también como

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x \text{ senh } y}{\text{sen } x \cosh y}\right). \equiv$$

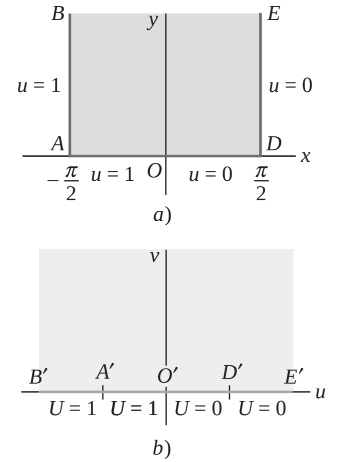


FIGURA 20.2.5 Imagen de la franja vertical infinita del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Resolución de un problema de Dirichlet

De C-1 del apéndice para transformaciones conformes, la función analítica $f(z) = (z - a)/(az - 1)$, donde $a = (7 + 2\sqrt{6})/5$, transforma la región externa a los dos discos abiertos $|z| < 1$ y $|z - \frac{5}{6}| < \frac{1}{2}$ en la región circular $r_0 \leq |w| \leq 1$, donde $r_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. La **FIGURA 20.2.6*a*)** muestra el problema de Dirichlet original, y la figura 20.2.6*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas.

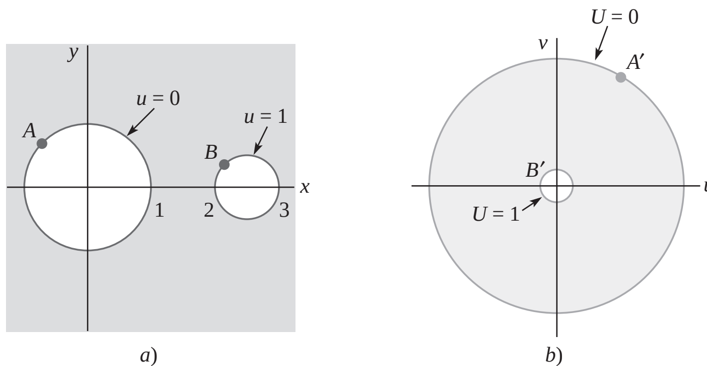


FIGURA 20.2.6 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 7

En el problema 10 de los ejercicios 12.1, se encuentra que $U(r, \theta) = (\log_e r)/(\log_e r_0)$ es la solución al nuevo problema de Dirichlet. Del teorema 20.2.2 se concluye que la solución al problema original de valor en la frontera es

$$u(x, y) = \frac{1}{\log_e(5 - 2\sqrt{6})}\log_e\left|\frac{z - (7 + 2\sqrt{6})/5}{(7 + 2\sqrt{6})z/5 - 1}\right|. \equiv$$

Una región imagen preferida R' para una región simplemente conexa R es el semiplano superior $y \geq 0$. Para cualquier número real a, la función compleja $\text{Ln}(z - a) = \log_e|z - a| + i\,\text{Arg}(z - a)$ es analítica en R'. Por lo tanto, $\text{Arg}(z - a)$ es armónica en R' y es una solución al problema de Dirichlet mostrado en la **FIGURA 20.2.7**.

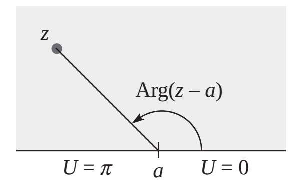


FIGURA 20.2.7 Imagen de un problema de Dirichlet

Se deduce entonces que la solución en R' al problema de Dirichlet con

$$U(x, 0) = \begin{cases} c_0, & a < x < b \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

es la función armónica $U(x, y) = (c_0/\pi)(\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a))$. Un gran número de problemas de Dirichlet en el semiplano superior $y \geq 0$ se resuelve sumando funciones armónicas de esta forma.

20.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas del 1 al 6, determine dónde es conforme la transformación compleja indicada.

1. $f(z) = z^3 - 3z + 1$ **2.** $f(z) = \cos z$
3. $f(z) = z + e^z + 1$ **4.** $f(z) = z + \text{Ln}\, z + 1$
5. $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$
6. $f(z) = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(z + 1) + \text{Ln}(z - 1)]$

En los problemas del 7 al 10, utilice los resultados de los ejemplos 3 y 4.

7. Utilice la igualdad $\cos z = \text{sen}(\pi/2 - z)$ para encontrar la imagen de la franja $0 \le x \le \pi$ bajo la transformación compleja $w = \cos z$. ¿Cuál es la imagen de una línea horizontal en la franja?
8. Utilice la identidad $\text{senh}\, z = -i\, \text{sen}\,(iz)$ para encontrar la imagen de la franja $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, $x \ge 0$, bajo la transformación compleja $w = \text{senh}\, z$. ¿Cuál es la imagen de un segmento de línea vertical en la franja?
9. Encuentre la imagen de la región definida por $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $y \ge 0$, bajo la transformación compleja $w = (\text{sen}\, z)^{1/4}$. ¿Cuál es la imagen del segmento de línea $[-\pi/2, \pi/2]$ sobre el eje x?
10. Encuentre la imagen de la región $|z| \le 1$ en el semiplano superior bajo la transformación compleja $w = z + 1/z$. ¿Cuál es la imagen del segmento de línea $[-1, 1]$ sobre el eje x?

En los problemas del 11 al 18, utilice las transformaciones conformes del apéndice IV para encontrar una transformación conforme de la región indicada R del plano z en la región objetivo R' en el plano w, y encuentre la imagen de la curva de frontera proporcionada.

11.

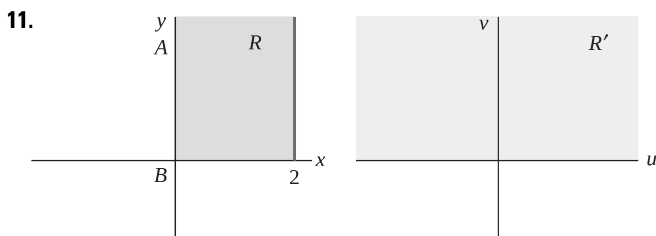


FIGURA 20.2.8 Regiones R y R' para el problema 11

12.

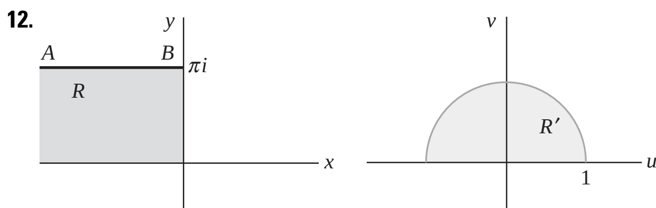


FIGURA 20.2.9 Regiones R y R' para el problema 12

13.

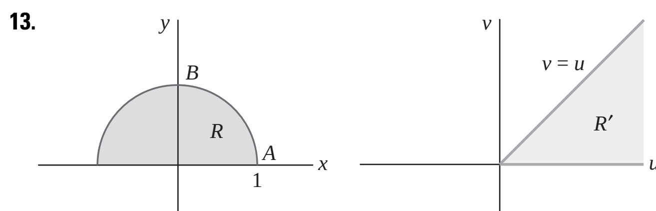


FIGURA 20.2.10 Regiones R y R' para el problema 13

14.

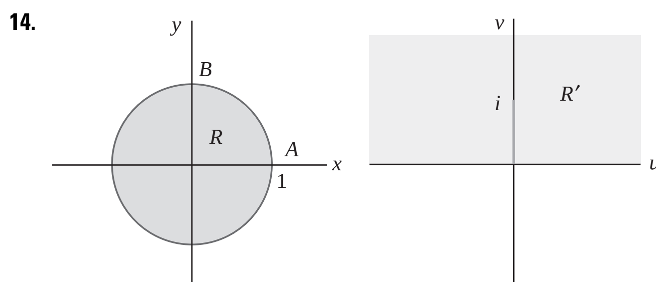


FIGURA 20.2.11 Regiones R y R' para el problema 14

15.

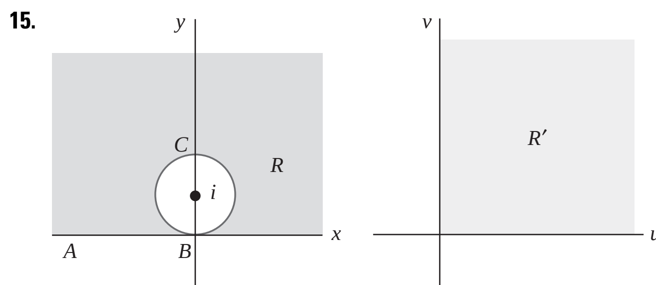


FIGURA 20.2.12 Regiones R y R' para el problema 15

16.

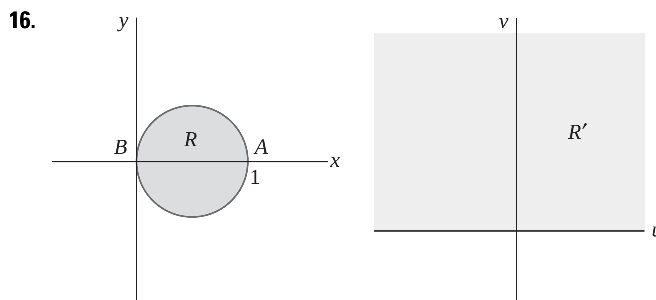


FIGURA 20.2.13 Regiones R y R' para el problema 16

17.

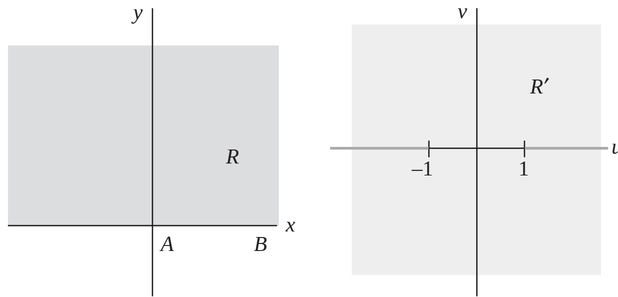


FIGURA 20.2.14 Regiones R y R' para el problema 17

18.

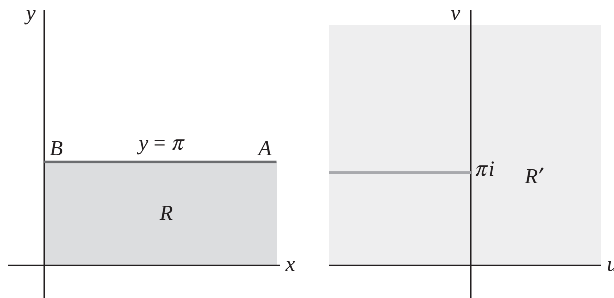


FIGURA 20.2.15 Regiones R y R' para el problema 18

En los problemas del 19 al 22, utilice una transformación conforme adecuada y la función armónica $U = (1/\pi)$ Arg w para resolver el problema de Dirichlet indicado.

19.

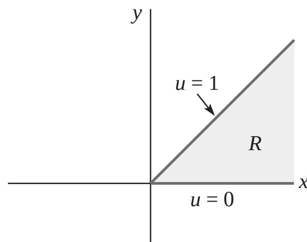


FIGURA 20.2.16 Problema de Dirichlet del problema 19

20.

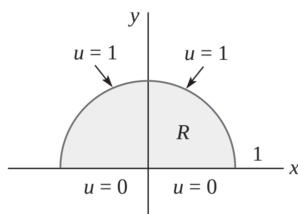


FIGURA 20.2.17 Problema de Dirichlet del problema 20

21.

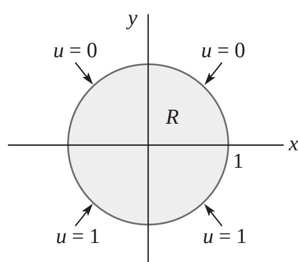


FIGURA 20.2.18 Problema de Dirichlet del problema 21

22.

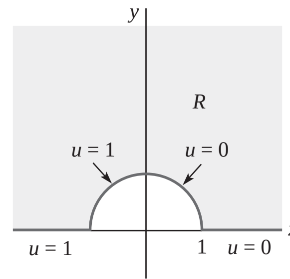


FIGURA 20.2.19 Problema de Dirichlet del problema 22

En los problemas del 23 al 26, utilice una transformación conforme adecuada y la función armónica $U = (c_0/\pi)[\text{Arg}(w - 1) - \text{Arg}(w + 1)]$ para resolver el problema de Dirichlet indicado.

23.

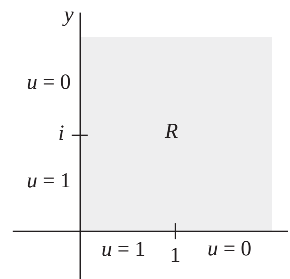


FIGURA 20.2.20 Problema de Dirichlet del problema 23

24.

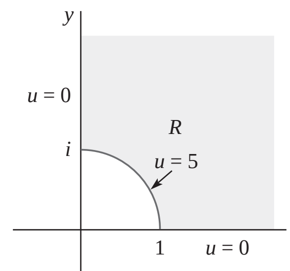


FIGURA 20.2.21 Problema de Dirichlet del problema 24

25.

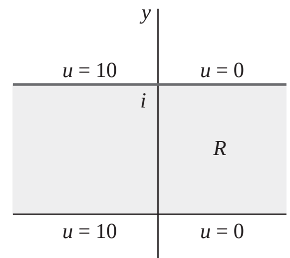


FIGURA 20.2.22 Problema de Dirichlet del problema 25

26.

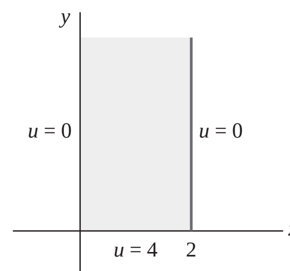


FIGURA 20.2.23 Problema de Dirichlet del problema 26

27. Una función real $\phi(x, y)$ se denomina **biarmónica** en un dominio D cuando satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

en todos los puntos de D. La función de esfuerzos de Airy en la mecánica de sólidos y los potenciales de velocidad en el análisis de flujo de fluidos viscosos, son ejemplos de funciones biarmónicas.

a) Demuestre que si ϕ es biarmónica en D, entonces $u = \partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2$ es armónica en D.

b) Si $g(z)$ es analítica en D y $\phi(x, y) = \text{Re}(g(z))$, demuestre que ϕ es biarmónica en D.

20.3 Transformaciones fraccionales lineales

Introducción En muchas aplicaciones que involucran problemas de valor en la frontera asociados con la ecuación de Laplace, es necesario encontrar una transformación conforme que transforme un disco en el semiplano $v \geq 0$. Dicha transformación tiene que transformar la frontera circular del disco en la línea de frontera del semiplano. Una clase importante de transformaciones conformes elementales que transforman círculos en líneas (y viceversa) son las transformaciones fraccionales. En esta sección se definen y estudian este tipo especial de transformaciones.

Transformación fraccional lineal Si a, b, c y d son constantes complejas con $ad - bc \neq 0$, entonces la función compleja definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Se denomina una **transformación fraccional lineal**. Como

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

entonces T es conforme en z siempre y cuando $\Delta = ad - bc \neq 0$ y $z \neq -d/c$. (Si $\Delta = 0$, entonces $T'(z) = 0$ y $T(z)$ sería una función constante.) Las transformaciones fraccionales lineales conservan al círculo en un sentido que se precisa más adelante en esta sección, y, como se muestra en el ejemplo 8 de la sección 20.2, pueden ser útiles para resolver problemas de Dirichlet en regiones acotadas por círculos.

Obsérvese que cuando $c \neq 0$, $T(z)$ tiene un polo simple en $z_0 = -d/c$ y por lo tanto

$$\lim_{z\to z_0} |T(z)| = \infty.$$

Se escribe $T(z_0) = \infty$ como abreviación para este límite. Asimismo, si $c \neq 0$, entonces

$$\lim_{|z|\to\infty} T(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c},$$

y se escribe $T(\infty) = a/c$.

EJEMPLO 1 Una transformación fraccional lineal

Si $T(z) = (2z + 1)/(z - i)$, calcule $T(0)$, $T(\infty)$ y $T(i)$.

Solución Obsérvese que $T(0) = 1/(-i) = i$ y $T(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} T(z) = 2$. Como $z = i$ es un polo simple para $T(z)$ se tiene que $\lim_{z\to i}|T(z)| = \infty$ y entonces se escribe $T(i) = \infty$. ≡

Propiedad de conservación de círculo Si $c = 0$, la transformación fraccional lineal se reduce a una función lineal $T(z) = Az + B$. En la sección 20.1 se plantea que dicha transformación se considera como la composición de una rotación, una amplificación y una traslación. Como tal, una función lineal transforma un círculo del plano z en un círculo del plano w. Cuando $c \neq 0$ se puede dividir $az + b$ entre $cz + d$ para obtener

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}. \tag{1}$$

Si se establece $A = (bc - ad)/c$ y $B = a/c$, $T(z)$ se escribe como la composición de transformaciones:

$$z_1 = cz + d, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad w = Az_2 + B. \tag{2}$$

Una transformación fraccional lineal general se escribe entonces como la composición de dos funciones lineales y la inversión $w = 1/z$. Obsérvese que si $|z - z_1| = r$ y $w = 1/z$, entonces

$$\left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_1}\right| = \frac{|w - w_1|}{|w||w_1|} = r \qquad \text{o} \qquad |w - w_1| = (r|w_1|)|w - 0|. \tag{3}$$

No es difícil mostrar que el conjunto de todos los puntos w que satisfacen

$$|w - w_1| = \lambda|w - w_2| \tag{4}$$

es una línea cuando $\lambda = 1$ y es un círculo cuando $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. De (3) se deduce que la imagen del círculo $|z - z_1| = r$ bajo la inversión $w = 1/z$ es un círculo excepto cuando $r = 1/|w_1| = |z_1|$. En este último caso, el círculo original pasa a través del origen y la imagen es una línea; véase la figura 20.1.3. De (2) se deduce el siguiente teorema:

Teorema 20.3.1 Propiedad de conservación de círculo

Una transformación fraccional lineal transforma un círculo del plano z en una línea o en un círculo en el plano w. La imagen es una línea si y sólo si el círculo original pasa a través de un polo de la transformación fraccional lineal.

DEMOSTRACIÓN

Se ha demostrado que una función lineal transforma un círculo en un círculo, mientras que una inversión transforma un círculo en un círculo o en una línea. De (2) se entiende que un círculo en el plano z se transforma en un círculo o en una línea en el plano w. Si el círculo original pasa por un polo z_0, entonces $T(z_0) = \infty$, de modo que la imagen no es acotada. Por lo tanto, la imagen de tal círculo debe ser una línea. Si el círculo original no pasa por z_0, entonces la imagen está acotada y debe ser un círculo. ≡

EJEMPLO 2 Imágenes de círculos

Encuentre las imágenes de los círculos $|z| = 1$ y $|z| = 2$ bajo $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. ¿Cuáles son las imágenes del interior de estos círculos?

Solución El círculo $|z| = 1$ pasa por el polo $z_0 = 1$ de la transformación fraccional lineal y por ende la imagen es una línea. Como $T(-1) = -\frac{1}{2}$ y $T(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ se puede concluir que la imagen es la línea $u = -\frac{1}{2}$. La imagen del interior $|z| < 1$ es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$ o el semiplano $u > -\frac{1}{2}$. Utilizando $z = 0$ como *punto de prueba*, $T(0) = -2$, por lo que la imagen es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$.

El círculo $|z| = 2$ no pasa a través del polo y por lo tanto la imagen es un círculo. Para $|z| = 2$,

$$|\bar{z}| = 2 \qquad \text{y} \qquad \overline{T(z)} = \overline{\frac{z + 2}{z - 1}} = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1} = T(\bar{z}).$$

Entonces, $\overline{T(z)}$ es un punto del círculo imagen, y así el círculo imagen es simétrico respecto al eje u. Como $T(-2) = 0$ y $T(2) = 4$, el centro del círculo es $w = 2$ y la imagen es el círculo $|w - 2| = 2$ (véase la **FIGURA 20.3.1**). La imagen del interior $|z| < 2$ es el interior o el exterior del círculo imagen $|w - 2| = 2$. Como $T(0) = -2$ se concluye que la imagen es $|w - 2| > 2$. ≡

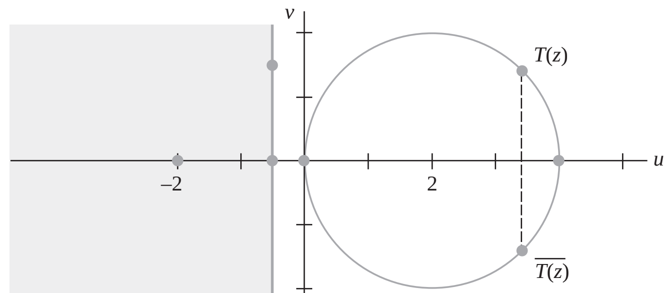


FIGURA 20.3.1 Imágenes de los puntos de prueba del ejemplo 2

Construcción de transformaciones especiales Con el fin de utilizar transformaciones fraccionales lineales para resolver problemas de Dirichlet, se deben construir funciones especiales que transformen una región circular dada R en una región objetivo R' en la que el problema de Dirichlet correspondiente se pueda resolver. Como una frontera circular se determina por tres de sus puntos, se debe encontrar una transformación fraccional lineal $w = T(z)$ que transforme tres puntos dados z_1, z_2 y z_3 de la frontera de R hacia tres puntos w_1, w_2 y w_3 de la frontera de R'. Además, el interior de R' debe ser la imagen del interior de R; véase la **FIGURA 20.3.2**.

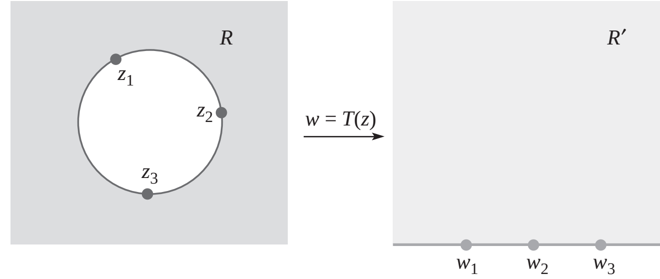


FIGURA 20.3.2 R' es la imagen de R bajo T.

Métodos matriciales Se pueden utilizar métodos matriciales para simplificar muchos de los cálculos. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se asocia con $T(z) = (az + b)/(cz + d)$.* Si $T_1(z) = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1)$ y $T_2(z) = (a_2z + b_2)/(c_2z + d_2)$, entonces la función compuesta $T(z) = T_2(T_1(z))$ viene dada por $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Si $w = T(z) = (az + b)/(cz + d)$ se puede despejar z para obtener $z = (dw - b)/(-cw + a)$. Por ende la inversa de la transformación fraccional lineal T es $T^{-1}(w) = (dw - b)/(-cw + a)$ y se asocia la matriz

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

Con T^{-1}. La matriz adj **A** es la matriz adjunta de **A** (véase la sección 7.6), que es la matriz para T.

EJEMPLO 3 Uso de matrices para encontrar una transformada inversa

Si $T(z) = \dfrac{2z - 1}{z + 2}$ y $S(z) = \dfrac{z - i}{iz - 1}$, encuentre $S^{-1}(T(z))$.

Solución De (5) y (6) se tiene $S^{-1}(T(z)) = (az + b)/(cz + d)$, donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{adj}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + i & 1 + 2i \\ 1 - 2i & 2 + i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,
$$S^{-1}(T(z)) = \frac{(-2 + i)z + 1 + 2i}{(1 - 2i)z + 2 + i}.$$
≡

Triples a triples La transformación fraccional lineal

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

* La matriz **A** no es única, puesto que el numerador y el denominador de $T(z)$ pueden multiplicarse por una constante no nula.

tiene un cero en $z = z_1$, un polo en $z = z_3$, y $T(z_2) = 1$. Por lo tanto, $T(z)$ transforma tres números complejos *distintos* z_1, z_2 y z_3 en 0, 1 e ∞, respectivamente. El término $\dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$ se denomina la **razón cruzada** de los números complejos z, z_1, z_2 y z_3.

De la misma forma, la transformación compleja $S(w) = \dfrac{w - w_1}{w - w_3}\dfrac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$ transforma a w_1, w_2 y w_3 en 0, 1 e ∞ y, por ello, S^{-1} transforma 0, 1 e ∞ en w_1, w_2 y w_3. Se entiende entonces que la transformación fraccional lineal $w = S^{-1}(T(z))$ transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 en w_1, w_2 y w_3. De $w = S^{-1}(T(z))$ se tiene que $S(w) = T(z)$ y se concluye que

$$\frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{7}$$

Al construir una transformación fraccional lineal que transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 en w_1, w_2 y w_3 se pueden utilizar métodos matriciales para calcular $w = S^{-1}(T(z))$. O bien, se puede sustituir en (7) y resolver la ecuación resultante para w.

EJEMPLO 4 Construcción de una transformación fraccional lineal

Construya una transformación fraccional lineal que transforme los puntos 1, i y -1 del círculo $|z| = 1$ en los puntos -1, 0 y 1 del eje real.

Solución Al sustituir en (7) se tiene que

$$\frac{w + 1}{w - 1}\frac{0 - 1}{0 - (-1)} = \frac{z - 1}{z + 1}\frac{i + 1}{i - 1}$$

o

$$-\frac{w + 1}{w - 1} = -i\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Al despejar w se obtiene $w = -i(z - i)/(z + i)$. O bien, se puede utilizar el método matricial para calcular $w = S^{-1}(T(z))$. ≡

Cuando $z_k = \infty$ desempeña el papel de uno de los puntos de una tripleta, la definición de la relación cruzada se cambia reemplazando cada factor que contenga a z_k por 1. Por ejemplo, si $z_2 = \infty$, tanto $z_2 - z_3$ como $z_2 - z_1$ se reemplazan por 1, dando entonces la relación cruzada $(z - z_1)/(z - z_3)$.

EJEMPLO 5 Construcción de una transformación fraccional lineal

Construya una transformación fraccional lineal que transforme los puntos ∞, 0 y 1 del eje real hacia los puntos 1, i y -1 del círculo $|w| = 1$.

Solución Como $z_1 = \infty$, los términos $z - z_1$ y $z_2 - z_1$ del producto vectorial se reemplazan por 1. Se deduce entonces que

$$\frac{w - 1}{w + 1}\frac{i + 1}{i - 1} = \frac{1}{z - 1}\frac{0 - 1}{1}$$

o

$$S(w) = -i\frac{w - 1}{w + 1} = \frac{-1}{z - 1} = T(z).$$

Si se utiliza el método matricial para encontrar $w = S^{-1}(T(z))$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{adj}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 + i \\ -i & 1 + i \end{pmatrix}$$

y así $w = \dfrac{-iz - 1 + i}{-iz + 1 + i} = \dfrac{z - 1 - i}{z - 1 + i}$. ≡

EJEMPLO 6 Solución de un problema de Dirichlet

Resuelva el problema de Dirichlet de la **FIGURA 20.3.3*a*)** utilizando la transformación conforme y mediante la construcción de una transformación fraccional lineal que transforme la región indicada en el semiplano superior.

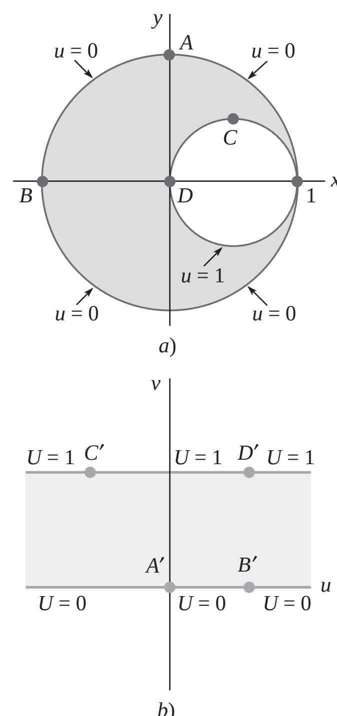


FIGURA 20.3.3 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 6

Solución Cada uno de los círculos de frontera $|z| = 1$ y $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ pasan por $z = 1$. Se puede entonces transformar cada círculo de frontera en una línea seleccionando una transformación fraccional lineal que tenga $z = 1$ como polo. Si se solicita además que $T(i) = 0$ y $T(-1) = 1$, entonces

$$T(z) = \frac{z - i}{z - 1}\,\frac{-1 - 1}{-1 - i} = (1 - i)\frac{z - i}{z - 1}.$$

Como $T(0) = 1 + i$ y $T(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + i$, T transforma el interior del círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior y transforma el círculo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ en la línea $v = 1$; la figura 20.3.3*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas.

La función armónica $U(u, v) = v$ es la solución al problema de Dirichlet simplificado en el plano w, y entonces, por el teorema 20.2.2, $u(x, y) = U(T(z))$ es la solución al problema de Dirichlet original del plano z.

Como la parte imaginaria de $T(z) = (1 - i)\dfrac{z - i}{z - 1}$ es $\dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$, la solución viene dada por

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Las curvas de nivel $u(x, y) = c$ se escriben como

$$\left(x - \frac{c}{1 + c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1 + c}\right)^2$$

y son, por lo tanto, círculos que pasan por $z = 1$; véase la **FIGURA 20.3.4**. Estas curvas de nivel pueden interpretarse como las isotermas de la distribución de temperatura estado estable inducida por temperaturas de frontera. ≡

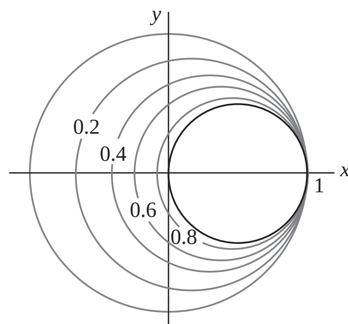


FIGURA 20.3.4 Los círculos son las curvas de nivel del ejemplo 6

20.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas del 1 al 4, se indica una transformación fraccional lineal.

a) Calcule $T(0)$, $T(1)$ y $T(\infty)$.
b) Encuentre las imágenes de los círculos $|z| = 1$ y $|z - 1| = 1$.
c) Encuentre la imagen del disco $|z| \leq 1$.

1. $T(z) = \dfrac{i}{z}$ **2.** $T(z) = \dfrac{1}{z - 1}$

3. $T(z) = \dfrac{z + 1}{z - 1}$ **4.** $T(z) = \dfrac{z - i}{z}$

En los problemas del 5 al 8, utilice el método matricial para calcular $S^{-1}(w)$ y $S^{-1}(T(z))$ para cada par de transformaciones fraccionales lineales.

5. $T(z) = \dfrac{z}{iz - 1}$ y $S(z) = \dfrac{iz + 1}{z - 1}$

6. $T(z) = \dfrac{iz}{z - 2i}$ y $S(z) = \dfrac{2z + 1}{z + 1}$

7. $T(z) = \dfrac{2z - 3}{z - 3}$ y $S(z) = \dfrac{z - 2}{z - 1}$

8. $T(z) = \dfrac{z - 1 + i}{iz - 2}$ y $S(z) = \dfrac{(2 - i)z}{z - 1 - i}$

En los problemas del 9 al 16, construya una transformación fraccional lineal que transforme la tripleta indicada z_1, z_2 y z_3 en la tripleta w_1, w_2 y w_3.

9. $-1, 0, 2$ hacia $0, 1, \infty$ **10.** $i, 0, -i$ hacia $0, 1, \infty$
11. $0, 1, \infty$ hacia $0, i, 2$ **12.** $0, 1, \infty$ hacia $1 + i, 0, 1 - i$
13. $-1, 0, 1$ hacia $i, \infty, 0$ **14.** $-1, 0, 1$ hacia $\infty, -i, 1$
15. $1, i, -i$ hacia $-1, 0, 3$ **16.** $1, i, -i$ hacia $i, -i, 1$

17. Utilice los resultados del ejemplo 2 y la función armónica $U = (\log_e r)/(\log_e r_0)$ para resolver el problema de Dirichlet de la **FIGURA 20.3.5**. Explique por qué las curvas de nivel deben ser círculos.

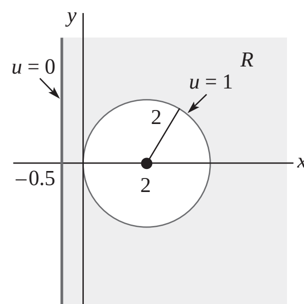


FIGURA 20.3.5 Problema de Dirichlet del problema 17

18. Utilice la transformación fraccional lineal que transforma $-1, 1, 0$ en $0, 1, \infty$ para resolver el problema de Dirichlet de la **FIGURA 20.3.6**. Explique por qué, con una excepción, todas las curvas de nivel deben ser círculos. ¿Qué curva de nivel es una línea?

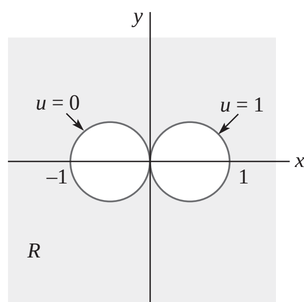


FIGURA 20.3.6 Problema de Dirichlet del problema 18

19. Deduzca la transformación conforme H-1 de las transformaciones conformes del apéndice.

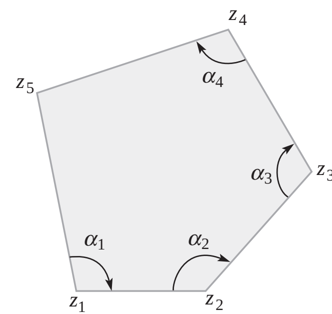
20. Deduzca la transformación conforme H-5 de las transformaciones conformes del apéndice transformando en primer lugar $1, i, -1$ en $\infty, i, 0$.

21. Demuestre que la composición de dos transformaciones fraccionales lineales es una transformación fraccional lineal, y compruebe (5).

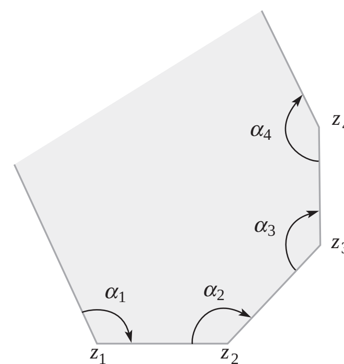
22. Si $w_1 \neq w_2$ y $\lambda > 0$ demuestre que el conjunto de todos los puntos w que satisfacen $|w - w_1| = \lambda|w - w_2|$ es una línea cuando $\lambda = 1$ y es un círculo cuando $\lambda \neq 1$. [*Sugerencia:* Escriba como $|w - w_1|^2 = \lambda^2|w - w_2|^2$ y desarrolle.]

20.4 Transformaciones de Schwarz-Christoffel

Introducción Si D' es un dominio simplemente conexo con al menos un punto de frontera, entonces el famoso **teorema de la transformación de Riemann** asegura la existencia de una función analítica g que transforma de manera conforme el disco abierto unitario $|z| < 1$ en D'. El teorema de la transformación de Riemann es un teorema de existencia pura que no especifica una fórmula para la transformación conforme. Como el semiplano superior $y > 0$ puede transformarse de manera conforme en este disco mediante una transformación fraccional lineal, se entiende que existe una transformación conforme f entre el semiplano superior y D'. En particular, existen funciones analíticas que transforman el semiplano superior en regiones poligonales de los tipos mostrados en la **FIGURA 20.4.1**. A diferencia del teorema de la transformación de Riemann, la fórmula de Schwarz-Christoffel especifica una forma para la derivada $f'(z)$ de una transformación conforme del semiplano superior en una región poligonal acotada o no acotada.



a) Región acotada



b) Región no acotada

FIGURA 20.4.1 Regiones poligonales

Casos especiales Para justificar la fórmula general de Schwarz-Christoffel, se examina en primer lugar el efecto de la transformación $f(z) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$, donde $0 < \alpha < 2\pi$, sobre el semiplano superior $y \geq 0$ mostrado en la **FIGURA 20.4.2*a***). Esta transformación es la composición de la traslación $\zeta = z - x_1$ y la función de potencias real $w = \zeta^{\alpha/\pi}$. Como $w = \zeta^{\alpha/\pi}$ cambia el ángulo de una cuña por un factor de α/π, el ángulo interior de la región imagen es $(\alpha/\pi)\pi = \alpha$. Véase la figura 20.4.2*b*).

Obsérvese que $f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha/\pi)-1}$ para $A = \alpha/\pi$. A continuación supóngase que $f(z)$ es una función analítica en el semiplano superior y que tiene como derivada

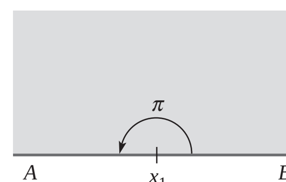
$$f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}, \tag{1}$$

donde $x_1 < x_2$. Al determinar las imágenes de los segmentos de línea del eje x, se utiliza el hecho de que una curva $w = w(t)$ del plano w es un segmento de línea cuando el argumento de su vector tangente $w'(t)$ es constante. De (1) se obtiene que un argumento de $f'(t)$ viene dado por

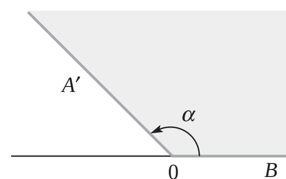
$$\arg f'(t) = \text{Arg}\, A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\text{Arg}\,(t - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right)\text{Arg}\,(t - x_2). \tag{2}$$

Como $\text{Arg}(t - x) = \pi$ para $t < x$ se puede encontrar la variación de $\arg f'(t)$ a lo largo del eje x. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Intervalo	$\arg f'(t)$	Cambio en el argumento
$(-\infty, x_1)$	$\text{Arg}\, A + (\alpha_1 - \pi) + (\alpha_2 - \pi)$	0
(x_1, x_2)	$\text{Arg}\, A + (\alpha_2 - \pi)$	$\pi - \alpha_1$
(x_2, ∞)	$\text{Arg}\, A$	$\pi - \alpha_2$



a)



b)

FIGURA 20.4.2 Imagen del semiplano superior

Como $\arg f'(t)$ es constante en los intervalos de la tabla, las imágenes son segmentos de línea, y la **FIGURA 20.4.3** muestra la imagen del semiplano superior. Nótese que los ángulos

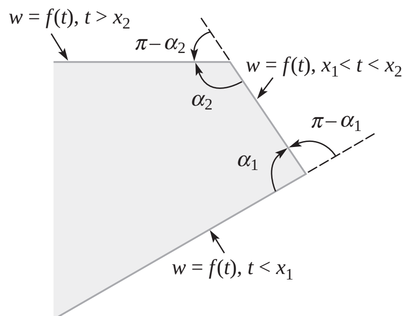


FIGURA 20.4.3 Imagen del semiplano superior

interiores de la región imagen poligonal son α_1 y α_2. Esta observación se generaliza para obtener la fórmula de Schwarz-Christoffel.

Teorema 20.4.1 Fórmula de Schwarz-Christoffel

Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano superior $y > 0$ y que tiene como derivada

$$f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}, \qquad (3)$$

donde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ y cada α_i cumple con $0 < \alpha_i < 2\pi$. Entonces $f(z)$ transforma el semiplano superior $y \geq 0$ en una región poligonal con ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Al aplicar esta fórmula a una región objetivo poligonal particular, se deben observar cuidadosamente los siguientes comentarios:

i) Se puede elegir la ubicación de tres de los puntos x_k en el eje x. Una elección sensata simplifica el cálculo de $f(z)$. La selección de los puntos restantes depende de la forma del polígono objetivo.

ii) Una fórmula general para $f(z)$ es

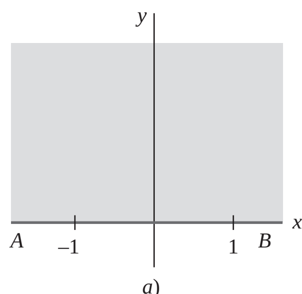
$$f(z) = A\left(\int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\, dz\right) + B,$$

y por lo tanto $f(z)$ puede considerarse la composición de la transformación conforme

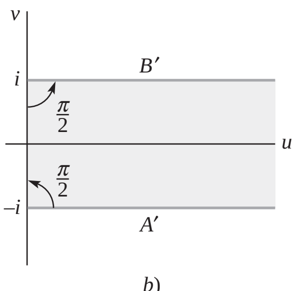
$$g(z) = \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\, dz$$

y la función lineal $w = Az + B$. La función lineal $w = Az + B$ permite aumentar, rotar y trasladar el polígono imagen producido por $g(z)$; véase sección 20.1.

iii) Si la región poligonal está acotada, únicamente $n - 1$ de los n ángulos interiores debería incluirse en la fórmula de Schwarz-Christoffel. Como ilustración, los ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 son suficientes para determinar la fórmula de Schwarz-Christoffel para el pentágono mostrado en la figura 20.4.1*a*).



a)



b)

FIGURA 20.4.4 Imagen del semiplano superior en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en la franja $|v| \leq 1$, $u \geq 0$.

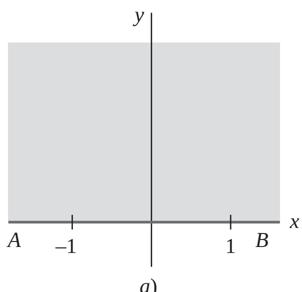
Solución Se puede seleccionar $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ en el eje x, y se construye una transformación conforme f con $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$; véase la **FIGURA 20.4.4**. Como $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, la fórmula de Schwarz-Christoffel (3) da

$$f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2} = A\frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} = \frac{A}{i}\frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.$$

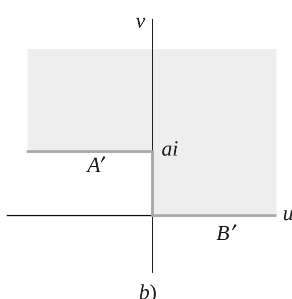
Por lo tanto, $f(z) = -Ai \operatorname{sen}^{-1} z + B$. Como $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$ se obtiene, respectivamente,

$$-i = Ai\frac{\pi}{2} + B \qquad \text{e} \qquad i = -Ai\frac{\pi}{2} + B$$

y se concluye que $B = 0$ y $A = -2/\pi$. Entonces, $f(z) = (2/\pi)i \operatorname{sen}^{-1} z$. ≡



a)



b)

FIGURA 20.4.5 Imagen del semiplano superior en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en la región mostrada en la **FIGURA 20.4.5*b*)**.

Solución Se seleccionan de nuevo $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, y se plantea que $f(-1) = ai$ y $f(1) = 0$. Como $\alpha_1 = 3\pi/2$ y $\alpha_2 = \pi/2$, la fórmula de Schwarz-Christoffel (3) da

$$f'(z) = A(z + 1)^{1/2}(z - 1)^{-1/2}.$$

Si se escribe $f'(z)$ como $A(z/(z^2 - 1)^{1/2} + 1/(z^2 - 1)^{1/2})$ se entiende que

$$f(z) = A[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z] + B.$$

Obsérvese que $\cosh^{-1}(-1) = \pi i$ y $\cosh^{-1} 1 = 0$, por lo que $ai = f(-1) = A(\pi i) + B$ y $0 = f(1) = B$. Por lo tanto, $A = a/\pi$ y $f(z) = (a/\pi)[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z]$. ≡

El siguiente ejemplo muestra que no siempre es posible encontrar $f(z)$ en términos de funciones elementales.

EJEMPLO 3 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en el interior del triángulo equilátero mostrado en la **FIGURA 20.4.6*b*)**.

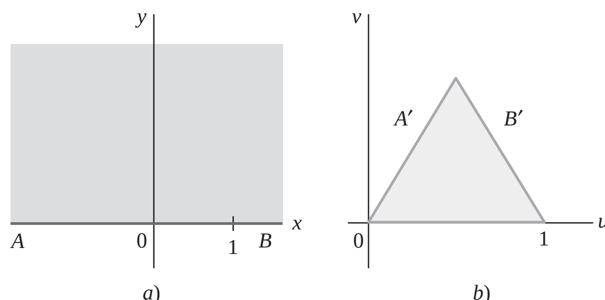


FIGURA 20.4.6 Imagen del semiplano superior del ejemplo 3

Solución Puesto que la región poligonal está acotada, únicamente dos de los tres ángulos interiores de 60° deben incluirse en la fórmula de Schwarz-Christoffel. Si $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ se obtiene $f'(z) = Az^{-2/3}(z - 1)^{-2/3}$. No es posible calcular $f(z)$ en términos de funciones elementales; sin embargo, se puede utilizar el teorema 16.3.3 para construir la antiderivada

$$f(z) = A\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s - 1)^{2/3}}\, ds + B.$$

Si se plantea que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, se deduce que $B = 0$ y

$$1 = A\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}(x - 1)^{2/3}}\, dx.$$

Puede mostrarse que esta última integral es $\Gamma(\frac{1}{3})$, donde Γ denota a la función gamma. Por lo tanto, la transformación conforme requerida es

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s - 1)^{2/3}}\, ds.$$ ≡

La fórmula de Schwarz-Christoffel se utiliza a veces para sugerir una posible transformación conforme del semiplano superior en una región no poligonal R'. Un primer paso clave es aproximar R' por medio de regiones poligonales. Esto se ilustra en el ejemplo final.

EJEMPLO 4 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en el semiplano superior sin la línea horizontal $v = \pi$, $u \leq 0$.

Solución La región objetivo no poligonal puede aproximarse por una región poligonal uniendo un segmento de línea desde $w = \pi i$ a un punto u_0 del eje u en su lado negativo; véase la **FIGURA 20.4.7*b*)**. Si se plantea que $f(-1) = \pi i$ y $f(0) = u_0$, la transformación de Schwarz-Christoffel satisface

$$f'(z) = A(z + 1)^{(\alpha_1/\pi) - 1} z^{(\alpha_2/\pi) - 1}.$$

Obsérvese que cuando u_0 tiende a $-\infty$, los ángulos interiores α_1 y α_2 tienden a 2π y 0, respectivamente. Esto sugiere examinar transformaciones conformes que satisfagan $w' = A(z + 1)^1 z^{-1} = A(1 + 1/z)$ o $w = A(z + \text{Ln } z) + B$.

Se determina primero la imagen del semiplano superior bajo $g(z) = z + \text{Ln } z$ y entonces se traslada la región imagen, si es necesario. Para una t real,

$$g(t) = t + \log_e|t| + i \text{ Arg } t.$$

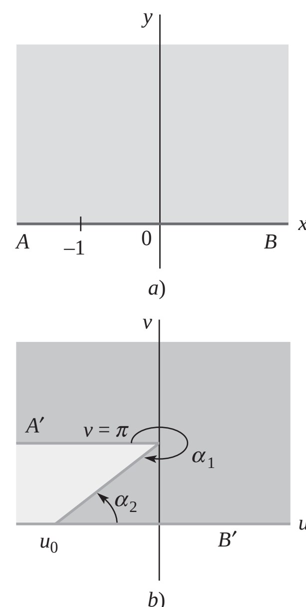


FIGURA 20.4.7 Imagen del semiplano superior del ejemplo 4

Si $t < 0$, Arg $t = \pi$ y $u(t) = t + \log_e|t|$ varía de $-\infty$ a -1. Se deduce entonces que $w = g(t)$ se mueve a lo largo de la línea $v = \pi$ de $-\infty$ a -1. Cuando $t > 0$, Arg $t = 0$ y $u(t)$ varía de $-\infty$ hasta ∞. Por lo tanto, g transforma el eje x positivo en el eje u. Se puede concluir que $g(z) = z + \text{Ln}\, z$ transforma el semiplano superior en el semiplano superior sin la línea horizontal $v = \pi$, $u \leq -1$. Entonces, $w = z + \text{Ln}\, z + 1$ transforma el semiplano superior en la región objetivo original. ≡

Muchas de las transformaciones conformes del apéndice se deducen utilizando la fórmula de Schwarz-Christoffel, y se muestra en la sección 20.6 que estas transformaciones son especialmente útiles al analizar flujos bidimensionales de fluidos.

20.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas del 1 al 4, utilice (2) para describir la imagen del semiplano superior $y \geq 0$ bajo la transformación conforme $w = f(z)$ que satisface las condiciones indicadas. *No* intente encontrar $f(z)$.

1. $f'(z) = (z - 1)^{-1/2}$, $f(1) = 0$

2. $f'(z) = (z + 1)^{-1/3}$, $f(-1) = 0$

3. $f'(z) = (z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{1/2}$, $f(-1) = 0$

4. $f'(z) = (z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-3/4}$, $f(-1) = 0$

En los problemas del 5 al 8, encuentre $f'(z)$ para la región poligonal indicada utilizando $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, etcétera. *No* intente encontrar $f(z)$.

5. $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$

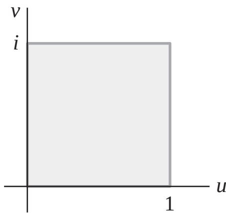


FIGURA 20.4.8 Región poligonal para el problema 5

6. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

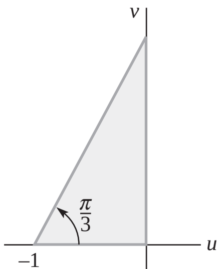


FIGURA 20.4.9 Región poligonal para el problema 6

7. $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$

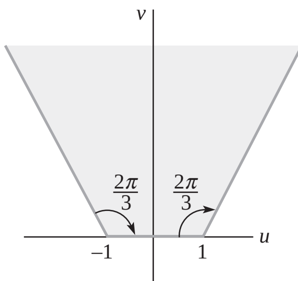


FIGURA 20.4.10 Región poligonal para el problema 7

8. $f(-1) = i$, $f(0) = 0$

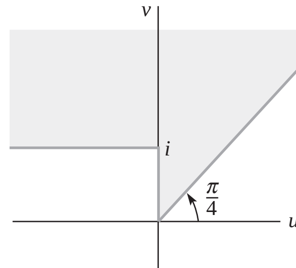


FIGURA 20.4.11 Región poligonal para el problema 8

9. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la región de la **FIGURA 20.4.12**. Plantee que $f(-1) = \pi i$ y $f(1) = 0$.

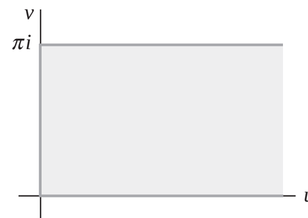


FIGURA 20.4.12 Imagen del semiplano superior del problema 9

10. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme desde el semiplano superior $y \geq 0$ hasta la región de la **FIGURA 20.4.13**. Plantee que $f(-1) = -ai$ y $f(1) = ai$.

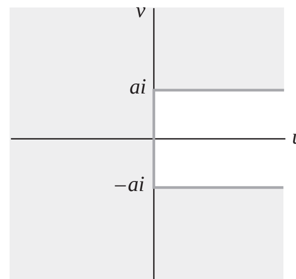


FIGURA 20.4.13 Imagen del semiplano superior del problema 10

11. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la franja horizontal $0 \leq v \leq \pi$ aproximando primero la franja por medio de la región poligonal mostrada en la **FIGURA**

20.4.14. Plantee que $f(-1) = \pi i, f(0) = w_2 = -\overline{w}_1$ y $f(1) = 0$, y que $w_1 \to \infty$ en la dirección horizontal.

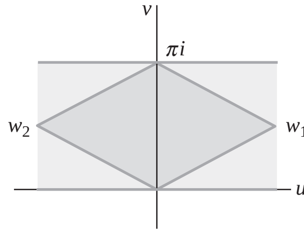


FIGURA 20.4.14 Imagen del semiplano superior del problema 11

12. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$ aproximando en primer lugar la cuña por medio de la región mostrada en la **FIGURA 20.4.15**. Plantee que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ y que $\theta \to 0$.

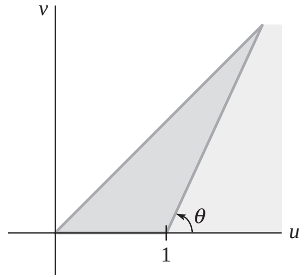


FIGURA 20.4.15 Imagen del semiplano superior del problema 12

13. Verifique M-4 del apéndice IV aproximando primero la región R' por medio de la región poligonal mostrada en la **FIGURA 20.4.16**. Plantee que $f(-1) = -u_1$, $f(0) = ai$ y $f(1) = u_1$ haciendo que $u_1 \to 0$ a lo largo del eje u.

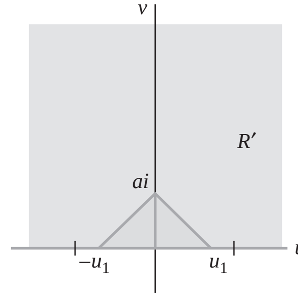


FIGURA 20.4.16 Imagen del semiplano superior del problema 13

14. Demuestre que si una curva del plano w se parametriza por $w = w(t)$, donde $a \leq t \leq b$ y $\arg w'(t)$ es constante, entonces la curva es un segmento de línea. [*Sugerencia:* Si $w(t) = u(t) + iv(t)$, entonces $\tan(\arg w'(t)) = dv/du$.]

20.5 Fórmulas integrales de Poisson

Introducción El éxito del método de transformación conforme depende del reconocimiento de la solución al nuevo problema de Dirichlet en la región imagen R'. Sería entonces de utilidad si se pudiera encontrar una solución general para problemas de Dirichlet en el semiplano superior $y \geq 0$ o en el disco unitario $|z| \leq 1$. La **fórmula integral de Poisson** para el semiplano superior proporciona tal solución expresando el valor de una función armónica $u(x, y)$ en un punto del interior del semiplano superior en función de sus valores en la frontera $y = 0$.

Fórmulas para el semiplano superior Para desarrollar la fórmula se considera en primer lugar que la función de frontera viene dada por $u(x, 0) = f(x)$, donde $f(x)$ es la función escalón indicada en la **FIGURA 20.5.1**. La solución del problema correspondiente de Dirichlet en el semiplano superior es

$$u(x, y) = \frac{u_i}{\pi}[\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a)]. \tag{1}$$

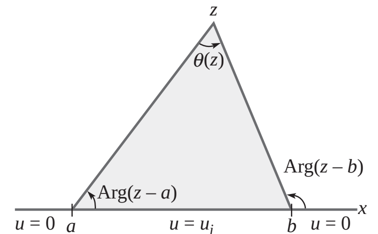


FIGURA 20.5.1 Condiciones de frontera en $y = 0$

Puesto que $\text{Arg}(z - b)$ es un ángulo exterior del triángulo formado por z, a y b, entonces $\text{Arg}(z - b) = \theta(z) + \text{Arg}(z - a)$, donde $0 < \theta(z) < \pi$, por lo que se puede escribir

$$u(x, y) = \frac{u_i}{\pi}\theta(z) = \frac{u_i}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{z - b}{z - a}\right). \tag{2}$$

El principio de superposición se utiliza para resolver el problema de Dirichlet más general que se plantea en la **FIGURA 20.5.2**. Si $u(x, 0) = u_i$ para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ y $u(x, 0) = 0$ fuera del intervalo $[a, b]$, entonces de (1),

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\pi}[\text{Arg}(z - x_i) - \text{Arg}(z - x_{i-1})] = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} u_i\theta_i(z). \tag{3}$$

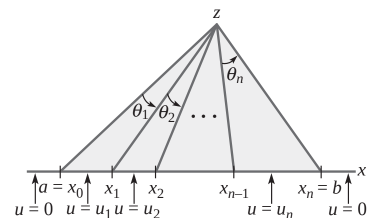


FIGURA 20.5.2 Condiciones de frontera generales en $y = 0$

Obsérvese que $\text{Arg}(z - t) = \tan^{-1}(y/(x - t))$, donde $\tan^{-1}$ se selecciona entre 0 y π, y entonces $(d/dt)\,\text{Arg}(z - t) = y/((x - t)^2 + y^2)$. De (3),

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i \frac{d}{dt} \operatorname{Arg}(z - t)\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_i y}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

Como $u(x, 0) = 0$ fuera del intervalo $[a, b]$ se tiene que

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt. \qquad (4)$$

Una función continua por tramos acotada puede aproximarse por medio de funciones escalón y, por lo tanto, la explicación sugiere que (4) es la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior; éste es el contenido del teorema 20.5.1.

Teorema 20.5.1 Fórmula integral de Poisson para el semiplano superior

Sea $u(x, 0)$ una función continua por tramos en cada intervalo finito y acotado en $-\infty < x < \infty$. Entonces la función definida por

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt$$

es la solución del problema de Dirichlet correspondiente sobre el semiplano superior $y \geq 0$.

Aunque existen unas cuantas funciones para las que es posible calcular la integral (4), en general se requiere de métodos numéricos para calcular la integral.

EJEMPLO 1 Solución de un problema de Dirichlet

Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = x$ cuando $|x| < 1$ y $u(x, 0) = 0$ para los demás casos.

Solución Por medio de la fórmula integral de Poisson

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

Mediante la sustitución $s = x - t$, se puede mostrar que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y}{2} \log_e((x - t)^2 + y^2) - x \tan^{-1}\left(\frac{x - t}{y}\right) \right]_{t=-1}^{t=1},$$

que se simplifica a

$$u(x, y) = \frac{y}{2\pi} \log_e \left[\frac{(x - 1)^2 + y^2}{(x + 1)^2 + y^2} \right] + \frac{x}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x - 1}{y}\right) \right]. \quad \equiv$$

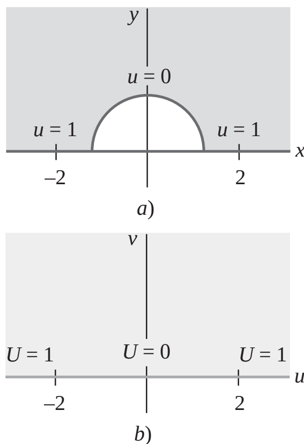


FIGURA 20.5.3 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 2

En la mayoría de ejemplos y ejercicios, $u(x, 0)$ es una función escalón, y se utiliza la solución integrada (3) en vez de (4). Si el primer intervalo es $(-\infty, x_1)$, entonces el término $\operatorname{Arg}(z - x_1) - \operatorname{Arg}(z - a)$ de la suma debería reemplazarse por $\operatorname{Arg}(z - x_1)$. De la misma manera, si el último intervalo es (x_{n-1}, ∞), entonces $\operatorname{Arg}(z - b) - \operatorname{Arg}(z - x_{n-1})$ debería reemplazarse por $\pi - \operatorname{Arg}(z - x_{n-1})$.

EJEMPLO 2 Solución de un problema de Dirichlet

La transformación conforme $f(z) = z + 1/z$ transforma la región del semiplano superior exterior al círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior $v \geq 0$. Utilice esta transformación y la fórmula integral de Poisson para resolver el problema de Dirichlet mostrado en la **FIGURA 20.5.3*a*)**.

Solución Utilizando los resultados del ejemplo 4 de la sección 20.2 se pueden transferir las condiciones de frontera al plano w; véase la figura 20.5.3*b*). Como $U(u, 0)$ es una función escalón se utiliza la solución integrada (3) en vez de la integral de Poisson. La solución al nuevo problema de Dirichlet es

$$U(u, v) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}(w + 2) + \frac{1}{\pi}[\pi - \operatorname{Arg}(w - 2)] = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{w + 2}{w - 2}\right),$$

y por lo tanto

$$u(x, y) = U\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{z + 1/z + 2}{z + 1/z - 2}\right),$$

que se simplifica a $u(x, y) = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$. ≡

Fórmula para el disco unitario Una fórmula integral de Poisson puede también desarrollarse para resolver el problema general de Dirichlet para el disco unitario:

Teorema 20.5.2 Fórmula integral de Poisson para el disco unitario

Sea $u(e^{i\theta})$ una función acotada y continua por tramos para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces la solución al problema de Dirichlet correspondiente en el disco unitario abierto $|z| < 1$ viene dada por

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt. \tag{5}$$

Interpretación geométrica La **FIGURA 20.5.4** muestra una membrana delgada (como película de jabón) estirada a través de un marco definido por $u = u(e^{i\theta})$. El desplazamiento u en la dirección perpendicular al plano z satisface la **ecuación de onda bidimensional**

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

por lo que en el equilibrio, la función desplazamiento $u = u(x, y)$ es armónica. La fórmula (5) proporciona una solución explícita para el desplazamiento u y tiene la ventaja de que la integral se encuentra sobre el intervalo finito $[-\pi, \pi]$. Cuando la integral no puede calcularse se utilizan procedimientos de integración numérica estándar para estimar $u(x, y)$ en un punto fijo $z = x + iy$ con $|z| < 1$.

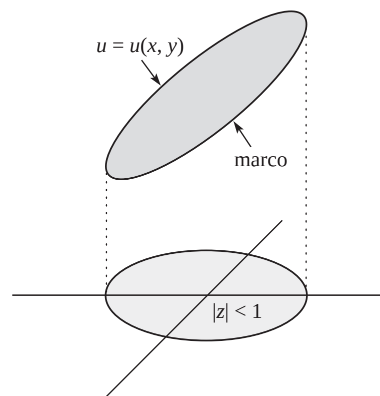


FIGURA 20.5.4 Membrana delgada sobre un marco

EJEMPLO 3 Desplazamiento de una membrana

Se define el marco para una membrana por medio de $u(e^{i\theta}) = |\theta|$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Estime el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

Solución Al utilizar (5) se obtiene $u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt$. Cuando $(x, y) = (0, 0)$ se obtiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Para los dos valores restantes de (x, y), la integral no es elemental y debe estimarse utilizando un procedimiento de integración numérica. Utilizando la regla de Simpson se obtiene (para cuatro dígitos decimales) $u(-0.5, 0) = 2.2269$ y $u(0.5, 0) = 0.9147$. ≡

Formulación por series de Fourier La fórmula integral de Poisson para el disco unitario es de hecho una forma compacta de escribir la solución con series de Fourier para la ecuación de Laplace desarrollada en el capítulo 12. Para ver esto, obsérvese en primer lugar que $u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta$ y $v_n(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta$ son armónicos, puesto que estas funciones son las partes real e imaginaria de z^n. Si a_0, a_n y b_n se eligen como los coeficientes de Fourier para $u(e^{i\theta})$ donde $-\pi < \theta < \pi$, entonces, por el principio de superposición,

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \operatorname{sen} n\theta) \tag{6}$$

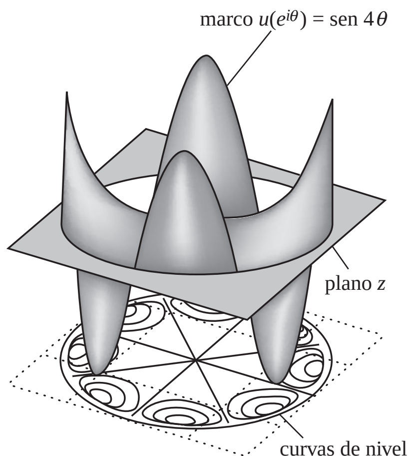


FIGURA 20.5.5 Curvas de nivel del ejemplo 4

es armónica y $u(1, \theta) = (a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \text{ sen } n\theta) = u(e^{i\theta})$. Como la solución al problema de Dirichlet viene también dada por (5) se tiene que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \text{ sen } n\theta).$$

EJEMPLO 4 Solución de un problema de Dirichlet

Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el disco unitario que satisface la condición de frontera $u(e^{i\theta}) = \text{sen } 4\theta$. Bosqueje la curva de nivel $u = 0$.

Solución En vez de trabajar con la integral de Poisson (5) se utiliza la solución con series de Fourier (6), que se reduce a $u(r, \theta) = r^4 \text{ sen } 4\theta$. Por lo tanto, $u = 0$ si y sólo si, sen $4\theta = 0$. Esto implica que $u = 0$ en las líneas $x = 0$, $y = 0$ y $y = \pm x$.

Si se cambia a coordenadas rectangulares, $u(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$. La superficie $u(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$, el marco $u(e^{i\theta}) = \text{sen } 4\theta$, y el sistema de curvas de nivel se pueden bosquejar utilizando programas gráficos y se muestran en la **FIGURA 20.5.5**. ≡

20.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas del 1 al 4, utilice la solución integrada (3) a la fórmula integral de Poisson para resolver el problema de Dirichlet indicado en el semiplano superior.

1.

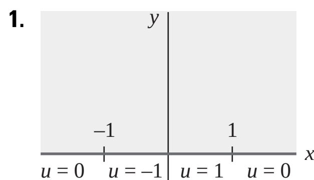


FIGURA 20.5.6 Problema de Dirichlet del problema 1

2.

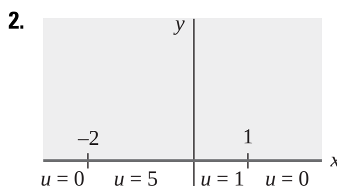


FIGURA 20.5.7 Problema de Dirichlet del problema 2

3.

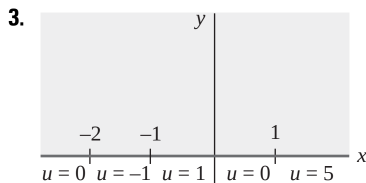


FIGURA 20.5.8 Problema de Dirichlet del problema 3

4.

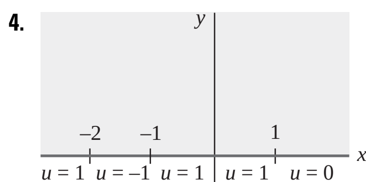


FIGURA 20.5.9 Problema de Dirichlet del problema 4

5. Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = x^2$ cuando $0 < x < 1$ y $u(x, 0) = 0$ para los demás casos.

6. Encuentre la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = \cos x$. [*Sugerencia:* Haga $s = t - x$ y utilice las fórmulas de la sección 17.6

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s}{s^2 + a^2} ds = \frac{\pi e^{-a}}{a}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } s}{s^2 + a^2} ds = 0$$

para $a > 0$.]

En los problemas del 7 al 10, resuelva el problema de Dirichlet indicado encontrando una transformación conforme a partir de la región dada en el semiplano superior $v \geq 0$.

7.

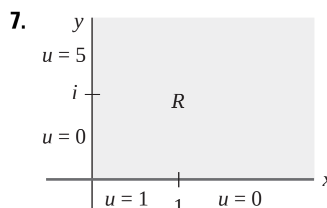


FIGURA 20.5.10 Problema de Dirichlet del problema 7

8.

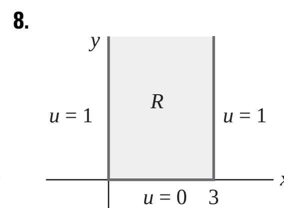


FIGURA 20.5.11 Problema de Dirichlet del problema 8

9.

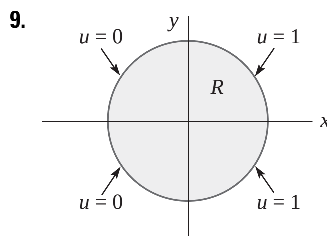


FIGURA 20.5.12 Problema de Dirichlet del problema 9

10.

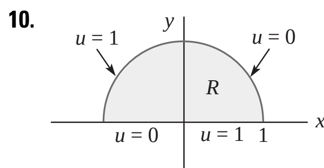


FIGURA 20.5.13 Problema de Dirichlet del problema 10

11. El marco para una membrana viene definido por $u(e^{i\theta}) = \theta^2/\pi^2$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de estimar el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

12. El marco para una membrana viene definido por $u(e^{i\theta}) = e^{-|\theta|}$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de estimar el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

13. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de mostrar que $u(0, 0)$ es el valor promedio de la función $u = u(e^{i\theta})$ en la frontera $|z| = 1$.

En los problemas 14 y 15, resuelva el problema de Dirichlet indicado para el disco unitario utilizando la formulación por series de Fourier de la fórmula integral de Poisson, y bosqueje el sistema de curvas de nivel.

14. $u(e^{i\theta}) = \cos 2\theta$

15. $u(e^{i\theta}) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

20.6 Aplicaciones

Introducción En las secciones 20.2, 20.3 y 20.5 se demuestra cómo se puede resolver la ecuación diferencial parcial de Laplace por medio de métodos de transformación conforme, y una solución $u = u(x, y)$ del problema de Dirichlet se interpreta como la temperatura de estado estable en un punto (x, y) o como el desplazamiento de equilibrio de una membrana en el punto (x, y). La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial fundamental que surge en diferentes contextos. En esta sección se establece una relación general entre los campos vectoriales y las funciones analíticas y se utilizan las técnicas de transformación conforme para resolver problemas que involucran campos de fuerza electrostáticos y flujos bidimensionales de fluidos.

Campos vectoriales Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en un dominio D se expresa también en la forma compleja

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

y emplearse como una función compleja. Hay que recordar del capítulo 19 que $\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ y rot $\mathbf{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\mathbf{k}$. Si se plantea que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Este conjunto de ecuaciones recuerda el criterio de Cauchy-Riemann para la analiticidad presentado en el teorema 15.5.2 y sugiere que se examine la función compleja $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$.

Teorema 20.6.1 **Campos vectoriales y analiticidad**

i) Supóngase que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es un campo vectorial en un dominio D y que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales primeras continuas en D. Si div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la función compleja

$$g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$$

es analítica en D.

ii) En forma inversa, si $g(z)$ es analítica en D, entonces $\mathbf{F}(x, y) = \overline{g(z)}$ define un campo vectorial en D para el que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN

Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ denotan las partes real e imaginaria de $g(z)$, entonces $u = P$ y $v = -Q$. Por lo tanto las ecuaciones en (1) son equivalentes a las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(-v)}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x};$$

esto es, $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones en (2) son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la analiticidad. ≡

EJEMPLO 1 Función analítica resultante de un campo vectorial

El campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y) = (-kq/|z - z_0|^2)(z - z_0)$ puede interpretarse como el campo eléctrico producido por un cable perpendicular al plano z en $z = z_0$ y que transporta una carga de q coulombs por unidad de longitud. La función compleja correspondiente es

$$g(z) = \frac{-kq}{|z - z_0|^2}\overline{(z - z_0)} = \frac{-kq}{z - z_0}.$$

Como $g(z)$ es analítica para $z \neq z_0$, div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. ≡

EJEMPLO 2 Campo vectorial resultante de una función analítica

La función compleja $g(z) = Az$, donde $A > 0$, es analítica en el primer cuadrante y por lo tanto conduce al campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = \overline{g(z)} = Ax - iAy$, que satisface div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Hacia al final de esta sección se muestra que $\mathbf{V}(x, y)$ puede interpretarse como la velocidad de un fluido que se mueve alrededor de la esquina producida por la frontera del primer cuadrante. ≡

La interpretación física de las condiciones div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ depende del contexto. Si $\mathbf{F}(x, y)$ representa la fuerza de un campo eléctrico que actúa sobre una carga de prueba unitaria localizada en (x, y), entonces, por el teorema 19.9.2, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ si y sólo si el campo es **conservativo**. El trabajo realizado al transportar una carga de prueba entre dos puntos de D debe ser independiente de la trayectoria.

Si C es un contorno cerrado simple que se encuentra en D, la *ley de Gauss* establece que la integral de línea $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ es proporcional a la carga total encerrada por la curva C. Si D es simplemente conexa y toda la carga eléctrica se distribuye sobre la frontera de D, entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = 0$ para cualquier contorno cerrado simple de D. Por medio del teorema de la divergencia en la forma (1) de la sección 19.16,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \text{div}\, \mathbf{F}\, dA, \tag{3}$$

donde R es la región encerrada por C, y se concluye que div $\mathbf{F} = 0$ en D. Por el contrario, si div $\mathbf{F} = 0$ en D, la integral doble es 0 y por lo tanto el dominio D no contiene carga.

Funciones de potenciales Supóngase que $\mathbf{F}(x, y)$ es un campo vectorial en un dominio *simplemente conexo* D con div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por el teorema 16.3.3, la función analítica $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$ tiene una antiderivada

$$G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{4}$$

en D, que se denomina un **potencial complejo** para el campo vectorial $\mathbf{F}$. Obsérvese que

$$g(z) = G'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

y por lo tanto $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q. \tag{5}$$

En consecuencia, $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y, al igual que en la sección 19.9, la función armónica ϕ se denomina una **función de potencial** (real) para $\mathbf{F}$.* Cuando el potencial ϕ se especifica en la frontera de una región R se pueden utilizar técnicas de transformación conforme para resolver el problema de Dirichlet resultante. Las líneas equipotenciales $\phi(x, y) = c$ se bosquejan, y el campo vectorial $\mathbf{F}$ se determina utilizando (5).

* Si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico, la función potencial eléctrica ϕ se define como $-\phi$ y $\mathbf{F}$ $-\nabla\phi$.

EJEMPLO 3 Potencial complejo

El potencial ϕ del semiplano $x \geq 0$ satisface las condiciones de frontera $\phi(0, y) = 0$ y $\phi(x, 0) = 1$ para $x \geq 1$. Véase la **FIGURA 20.6.1*a*)**. Determine un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerza **F**.

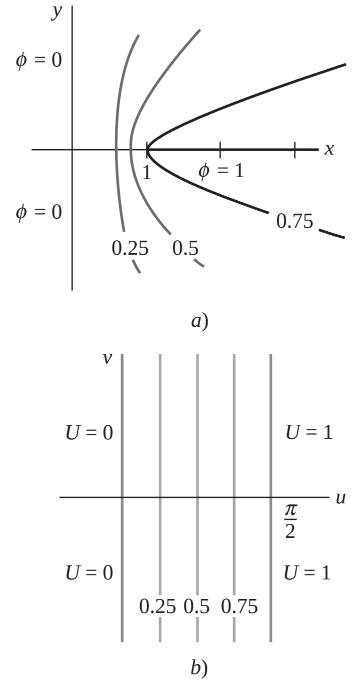


FIGURA 20.6.1 Imágenes de condiciones de frontera del ejemplo 3

Solución Se nota en el ejemplo 3 de la sección 20.2 que la función analítica $z = \operatorname{sen} w$ transforma la franja $0 \leq u \leq \pi/2$ del plano w en la región R en cuestión. Por lo tanto, $f(z) = \operatorname{sen}^{-1} z$ transforma R en la franja, y la figura 20.6.1*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas. El problema de Dirichlet simplificado tiene la solución $U(u, v) = (2/\pi) u$, y por ende $\phi(x, y) = U(\operatorname{sen}^{-1}z) = \operatorname{Re}((2/\pi) \operatorname{sen}^{-1}z)$ es la función potencial en D, y $G(z) = (2/\pi)\, u \operatorname{sen}^{-1}z$ es un potencial complejo para el campo de fuerzas **F**.

Obsérvese que las líneas equipotenciales $\phi = c$ son las imágenes de las líneas equipotenciales $U = c$ en el plano w bajo la transformación inversa $z = \operatorname{sen} w$. En el ejemplo 3 de la sección 20.2 se muestra que la línea vertical $u = a$ se transforma en una rama de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{y^2}{\cos^2 a} = 1.$$

Como la línea equipotencial $U = c$, $0 < c < 1$, es la línea vertical $u = \pi/2c$, se deduce que la línea equipotencial $\phi = c$ es la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(\pi c/2)} - \frac{y^2}{\cos^2(\pi c/2)} = 1.$$

Como $\mathbf{F} = \overline{G'(z)}$ y $(d/dz) \operatorname{sen}^{-1}z = 1/(1 - z^2)^{1/2}$, el campo de fuerza viene dado por

$$\mathbf{F} = \frac{2}{\pi}\overline{\frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1 - \bar{z}^2)^{1/2}}. \qquad \equiv$$

Flujo permanente de un fluido El vector $\mathbf{V}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ puede interpretarse también como el vector velocidad de un flujo permanente bidimensional de un fluido en un punto (x, y) de un dominio D. La velocidad en todos los puntos del dominio es por lo tanto independiente del tiempo, y todo el movimiento se realiza en planos que son paralelos a un plano z.

La interpretación física de las condiciones div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ se explica en la sección 19.7. Recuérdese que si rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ en D, el flujo se denomina **irrotacional**. Si una rueda circular de paletas pequeñas se coloca en el fluido, la velocidad angular neta en la frontera de la rueda es 0, por lo que la rueda no rota. Si div $\mathbf{V} = 0$ en D, el flujo se denomina **incompresible**. En un dominio simplemente conexo D, un flujo incompresible tiene la propiedad especial de que la cantidad de fluido en el interior de cualquier contorno cerrado simple C es independiente del tiempo. La rapidez con la que el fluido entra al interior de C es igual a la rapidez con la que lo abandona, y consecuentemente no pueden existir fuentes o hundimientos de fluido en puntos de D.

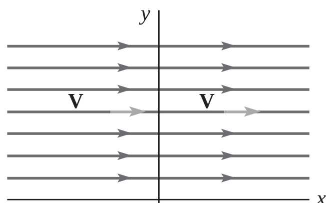
Si div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, **V** tiene un **potencial de velocidad complejo**

$$G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

que satisface $\overline{G'(z)} = \mathbf{V}$. En este contexto, se pone especial importancia en las curvas de nivel $\psi(x, y) = c$. Si $z(t) = x(t) + iy(t)$ es la trayectoria de una partícula (tal como un corcho pequeño) puesta en el fluido, entonces

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y). \qquad (6)$$

Por lo tanto, $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$ o $-Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = 0$. Esta ecuación diferencial es exacta, ya que div $\mathbf{V} = 0$ implica que $\partial(-Q)/\partial y = \partial P/\partial x$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial\psi/\partial x = -\partial\psi/\partial y = -Q$ y $\partial\psi/\partial y = \partial\phi/\partial x = P$, y en vista que todas las soluciones de (6) satisfacen $\psi(x, y) = c$. La función $\psi(x, y)$ se denomina entonces una **función de corriente** y las curvas de nivel $\psi(x, y) = c$ son **líneas de corriente** para el flujo.



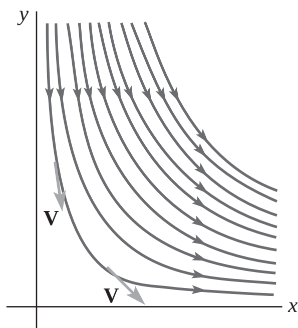


FIGURA 20.6.2 *a*) Flujo uniforme del ejemplo 4; *b*) flujo alrededor de una esquina del ejemplo 5

EJEMPLO 4 Flujo uniforme

El flujo uniforme del semiplano superior se define por $\mathbf{V}(x, y) = A(1, 0)$, donde A es una constante positiva fija. Obsérvese que $|\mathbf{V}| = A$, por lo que una partícula del fluido se mueve con rapidez constante. Un potencial complejo para el campo vectorial es $G(z) = Az = Ax + iAy$, por lo que las líneas de corriente son las líneas horizontales $Ay = c$; véase la **FIGURA 20.6.2*a***). Obsérvese que la frontera $y = 0$ de la región es en sí misma una línea de corriente. ≡

EJEMPLO 5 Flujo alrededor de una esquina

La función analítica $G(z) = z^2$ lleva al campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = \overline{G'(z)} = (2x, -2y)$ en el primer cuadrante. Como $z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$, la función de corriente es $\psi(x, y) = 2xy$ y las líneas de corriente son las hipérbolas $2xy = c$. Este flujo, denominado flujo alrededor de una esquina, se ilustra en la figura 20.6.2*b*). Como en el ejemplo 4, las líneas de frontera $x = 0$ y $y = 0$ del primer cuadrante son en sí mismas líneas de corriente. ≡

Construcción de flujos especiales El proceso de construir un flujo irrotacional e incompresible que permanezca dentro de una región dada R se denomina **determinación de líneas de corriente**. Como las líneas de corriente se describen por medio de $\psi(x, y) = c$, dos líneas de corrientes distintas no se intersecan. Por lo tanto, si la frontera es en sí misma una línea de corriente, una partícula que comienza dentro de R no puede abandonar R. Ésta es la esencia del siguiente teorema:

Teorema 20.6.2 Determinación de líneas de corriente

Supóngase que $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en una región R y $\psi(x, y)$ es constante en la frontera de R. Entonces $\mathbf{V}(x, y) = \overline{G'(z)}$ define a un flujo irrotacional e incompresible en R. Asimismo, si se coloca una partícula dentro de R, su trayectoria $z = z(t)$ permanece en R.

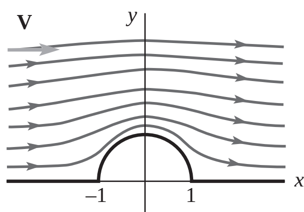


FIGURA 20.6.3 Flujo alrededor del cilindro del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Flujo alrededor de un cilindro

La función analítica $G(z) = z + 1/z$ transforma la región R en el semiplano superior y fuera del círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior $v \geq 0$. La frontera de R se transforma en el eje u, por lo que $v = \psi(x, y) = y - y/(x^2 + y^2)$ es 0 en la frontera de R. La **FIGURA 20.6.3** muestra las líneas de corriente del flujo resultante. El campo de velocidades viene dado por $\overline{G'(z)} = 1 - 1/\bar{z}^2$, por lo que

$$\overline{G'(re^{i\theta})} = 1 - \frac{1}{r^2}e^{2i\theta}.$$

Se deduce entonces que $\mathbf{V} \approx (1, 0)$ para valores grandes de r, por lo que el flujo es aproximadamente uniforme a grandes distancias del círculo $|z| = 1$. El flujo resultante en la región R se denomina flujo alrededor de un cilindro. Puede añadirse la imagen espejo del flujo para presentar el flujo alrededor de un cilindro completo. ≡

Si R es una región poligonal se puede utilizar la fórmula de Schwarz-Christoffel para encontrar una transformación conforme $z = f(w)$ del semiplano superior R' en R. La función inversa $G(z) = f^{-1}(z)$ transforma la frontera de R en el eje u. Entonces, si $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces $\psi(x, y) = 0$ en la frontera de R. Obsérvese que las líneas de corriente $\psi(x, y) = c$ del plano z son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$ del plano w bajo $z = f(w)$.

EJEMPLO 7 Líneas de corrientes definidas paramétricamente

La función analítica $f(w) = w + \text{Ln}\, w + 1$ transforma el semiplano superior $v \geq 0$ en el semiplano superior $y \geq 0$ sin la línea horizontal $y = \pi$, $x \leq 0$; véase el ejemplo 4 de la sección 20.4. Si $G(z) = f^{-1}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces $G(z)$ transforma R en el semiplano superior y la frontera de R en el eje u. Por lo tanto, $\psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

No es posible encontrar una fórmula explícita para la función corriente $\psi(x, y)$. Las líneas de corriente, sin embargo, son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$ bajo $z = f(w)$. Si se escribe $w = t + ic$, $c > 0$, entonces las líneas de corriente se representan en la forma paramétrica

$$z = f(t + ic) = t + ic + \text{Ln}(t + ic) + 1;$$

esto es, $$x = t + 1 + \frac{1}{2}\log_e(t^2 + c^2), \quad y = c + \text{Arg}(t + ic).$$

Las líneas de corriente de la **FIGURA 20.6.4** fueron generadas con un programa de graficación. ≡

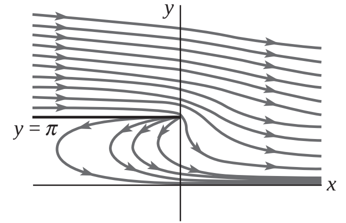


FIGURA 20.6.4 Flujo del ejemplo 7

Una función de corriente $\psi(x, y)$ es armónica pero, a diferencia de una solución para un problema de Dirichlet, *no* se necesita que $\psi(x, y)$ esté acotada (véanse los ejemplos del 4 al 6) ni considerar un conjunto fijo de constantes en la frontera. Por lo tanto, pueden existir muchas funciones de corriente diferentes para una región dada que satisfagan el teorema 20.6.2. Esto se ilustra en el ejemplo final.

EJEMPLO 8 Líneas de corriente definidas paramétricamente

La función analítica $f(w) = w + e^w + 1$ transforma la franja horizontal $0 \le v \le \pi$ en la región R mostrada en la figura 20.6.4. Por lo tanto, $G(z) = f^{-1}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ transforma R de nuevo en la franja y, de M-1 en las transformaciones conformes del apéndice, transforma la línea de frontera $y = 0$ en el eje u y la línea de frontera $y = \pi$, $x \le 0$, en la línea horizontal $v = \pi$. Entonces, $\psi(x, y)$ es constante en la frontera de R.

Las líneas de corriente son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$, $0 < c < \pi$, bajo $z = f(w)$. Al igual que en el ejemplo 7, una representación paramétrica de las líneas de corriente es

$$z = f(t + ic) = t + ic + e^{t+ic} + 1$$

o $$x = t + 1 + e^t \cos c, \qquad y = c + e^t \operatorname{sen} c.$$

Las líneas de corriente se muestran en la **FIGURA 20.6.5**. A diferencia del flujo del ejemplo 7, el fluido parece emerger de la franja $0 \le y \le \pi$, $x \le 0$. ≡

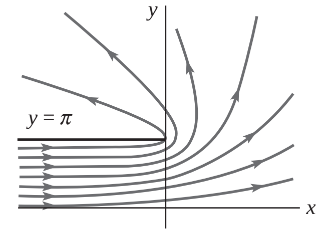


FIGURA 20.6.5 Flujo del ejemplo 8

20.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas del 1 al 4, verifique que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para el campo vectorial indicado $\mathbf{F}(x, y)$ examinando la función compleja correspondiente a $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$. Encuentre un potencial complejo para el campo vectorial y bosqueje las líneas equipotenciales.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos \theta_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \theta_0)\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}$
5. El potencial ϕ en la cuña $0 \le \text{Arg } z \le \pi/4$ satisface las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = 0$ y $\phi(x, x) = 1$ para $x > 0$. Determine un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerza correspondiente $\mathbf{F}$.
6. Utilice la transformación conforme $f(z) = 1/z$ para determinar un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerzas correspondiente $\mathbf{F}$ para el potencial ϕ que satisfaga las condiciones de frontera mostradas en la **FIGURA 20.6.6**.
7. El potencial ϕ del semicírculo $|z| \le 1$, $y \ge 0$, satisface las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = 0$, $-1 < x < 1$, y $\phi(e^{i\theta}) = 1$, $0 < \theta < \pi$. Demuestre que

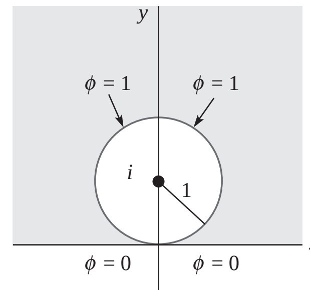


FIGURA 20.6.6 Condiciones de frontera del problema 6

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2$$

y utilice las propiedades de las transformaciones fraccionales lineales para explicar la razón por la cual las líneas equipotenciales son arcos de círculos.

8. Utilice la transformación conforme C-1 del apéndice IV para encontrar el potencial ϕ de la región en el exterior de los círculos $|z| = 1$ y $|z - 3| = 1$ si se mantiene el potencial en cero para $|z| = 1$ y uno para $|z - 3| = 1$. Utilice las propiedades de las transformaciones fraccionales lineales para explicar la razón por la cual las líneas equipotenciales son, con una excepción, círculos.

En los problemas del 9 al 14, un potencial de velocidades complejo $G(z)$ se define sobre una región R.

a) Encuentre la función de corriente y verifique que la frontera de R sea una línea de corriente.

b) Encuentre el campo vectorial de velocidades correspondiente $\mathbf{V}(x, y)$.

c) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

9. $G(z) = z^4$

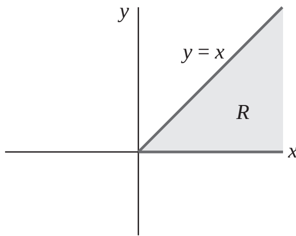


FIGURA 20.6.7 Región R del problema 9

10. $G(z) = z^{2/3}$

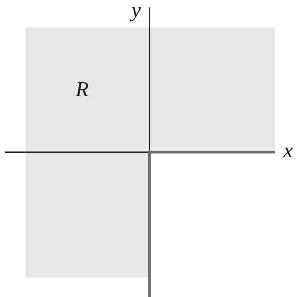


FIGURA 20.6.8 Región R del problema 10

11. $G(z) = \text{sen}\, z$

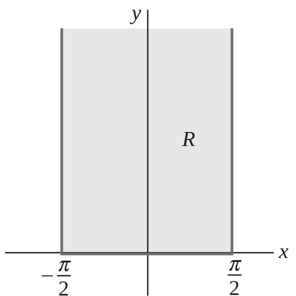


FIGURA 20.6.9 Región R del problema 11

12. $G(z) = i\, \text{sen}^{-1} z$

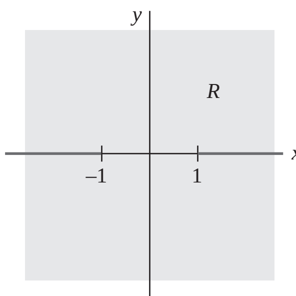


FIGURA 20.6.10 Región R del problema 12

13. $G(z) = z^2 + 1/z^2$

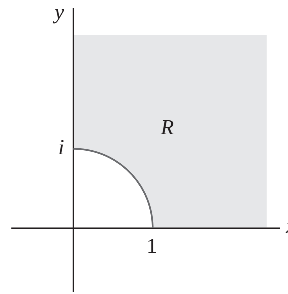


FIGURA 20.6.11 Región R del problema 13

14. $G(z) = e^z$

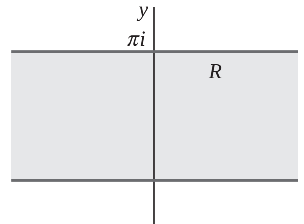


FIGURA 20.6.12 Región R del problema 14

En los problemas del 15 al 18, se proporciona una transformación conforme $z = f(w)$ del semiplano superior $v \geq 0$ en una región R del plano z y se construye el flujo en R con potencial complejo $G(z) = f^{-1}(z)$.

a) Verifique que la frontera de R sea una línea de corriente para el flujo.

b) Encuentre una representación paramétrica para las líneas de corriente del flujo.

c) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

15. M-9 del apéndice IV

16. M-4 del apéndice IV; utilice $a = 1$

17. M-2 del apéndice IV; utilice $a = 1$

18. M-5 del apéndice IV

19. Un punto de estancamiento en un flujo es un punto para el que $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Encuentre todos los puntos de estancamiento para los flujos de los ejemplos 5 y 6.

20. Para dos números reales cualesquiera k y x_1, la función $G(z) = k\, \text{Ln}(z - x_1)$ es analítica en el semiplano superior y por lo tanto es un potencial complejo para un flujo. El número real x_1 se le denomina *pozo* cuando $k < 0$ y *fuente* para el flujo cuando $k > 0$.

a) Demuestre que las líneas de corriente son rayos que surgen de x_1.

b) Demuestre que $\mathbf{V} = (k/|z - x_1|^2)(z - x_1)$ y concluya que el flujo se dirige hacia x_1 precisamente cuando $k < 0$.

21. Si $f(z)$ es una transformación conforme desde un dominio D en el semiplano superior, se define un flujo con una fuente en un punto ξ_0 de la frontera de D por el potencial complejo $G(z) = k\, \text{Ln}(f(z) - f(\xi_0))$, donde $k > 0$. Determine las líneas de corriente para un flujo del primer cuadrante con una fuente en $\xi_0 = 1$ y $k = 1$.

22. ***a***) Construya un flujo en la franja horizontal $0 < y < \pi$ con un hundimiento en el punto de frontera $\xi_0 = 0$. [*Sugerencia*: Véase problema 21.]

b) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

23. El potencial complejo $G(z) = k\,\text{Ln}(z - 1) - k\,\text{Ln}(z + 1)$ con $k > 0$ da lugar a un flujo en el semiplano superior con una fuente única en $z = 1$ y un pozo único en $z = -1$. Demuestre que las líneas de corriente pertenecen a la familia de círculos $x^2 + (y - c)^2 = 1 + c^2$; véase la **FIGURA 20.6.13**.

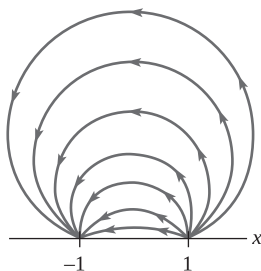


FIGURA 20.6.13 Líneas de corriente del problema 23

24. El flujo cuyo vector de velocidad es $\mathbf{V} = (a + ib)/\bar{z}$ se denomina un **vórtice** en $z = 0$, y la naturaleza geométrica de las líneas de corriente depende de la elección de a y b.

a) Demuestre que si $z = x(t) + iy(t)$ es la trayectoria de una partícula, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax - by}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{bx + ay}{x^2 + y^2}.$$

b) Cambie a coordenadas polares para establecer que $dr/dt = a/r$ y $d\theta/dt = b/r^2$, y concluya que $r = ce^{a\theta/b}$ para $b \neq 0$. [*Sugerencia:* Véase (2) de la sección 9.1.]

c) Concluya que las espirales logarítmicas del inciso *b*) tienen sentido antihorario, si y sólo si, $a < 0$, mientras que las curvas tienen el sentido horario si y sólo si, $b < 0$; véase la **FIGURA 20.6.14**.

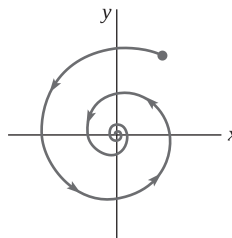


FIGURA 20.6.14 Espiral logarítmica del problema 24

20 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

Conteste los problemas del 1 al 10 sin consultar el texto. Llene el espacio blanco o conteste verdadero o falso.

1. Bajo la transformación compleja $f(z) = z^2$, la curva $xy = 2$ se transforma en la línea _____.

2. La transformación compleja $f(z) = -iz$ es una rotación de _____ grados.

3. La imagen del semiplano superior $y \geq 0$ bajo la transformación compleja $f(z) = z^{2/3}$ e _____.

4. La función analítica $f(z) = \cosh z$ es conforme excepto en $z =$ _____.

5. Si $w = f(z)$ es una función analítica que transforma un dominio D sobre el semiplano superior $v > 0$, entonces la función $u = \text{Arg}(f(z))$ es armónica en D. _____

6. ¿Cuál es la imagen del círculo $|z - 1| = 1$ bajo la transformación compleja $T(z) = (z - 1)/(z - 2)$ un círculo o una línea? _____

7. La transformación fraccional lineal $T(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$ transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 hacia _____.

8. Si $f'(z) = z^{-1/2}(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2}$, entonces $f(z)$ transforma el semiplano vertical $y > 0$ en el interior de un rectángulo. _____

9. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial de un dominio D con div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la función compleja $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es analítica en D. _____

10. Si $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en una región R y $\mathbf{V}(x, y) = \overline{iG'(z)}$, entonces las líneas de corriente del flujo correspondiente se describen por medio de $\phi(x, y) = c$. _____

11. Encuentre la imagen del primer cuadrante bajo la transformación compleja $w = \text{Ln}\, z = \log_e|z| + i\,\text{Arg}\, z$. ¿Cuáles son las imágenes de los rayos $\theta = \theta_0$ que se encuentran en el primer cuadrante?

En los problemas 12 y 13, utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar un transformación conforme desde la región indicada R del plano z hasta la región objetivo R' del plano w, y encuentre la imagen de la curva de frontera indicada.

12.

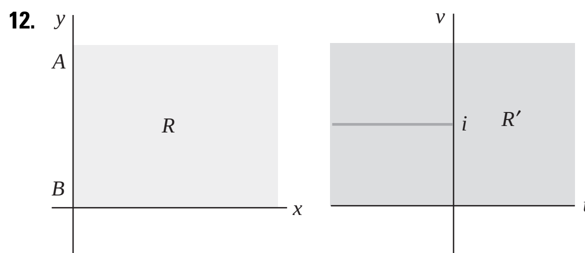


FIGURA 20.R.1 Regiones R y R' para el problema 12

13.

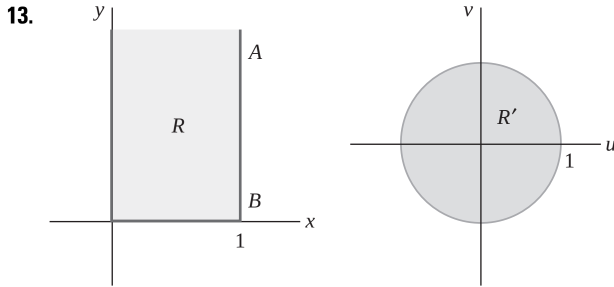


FIGURA 20.R.2 Regiones R y R' para el problema 13

En los problemas 14 y 15, utilice una transformación conforme adecuada para resolver el problema de Dirichlet indicado.

14.

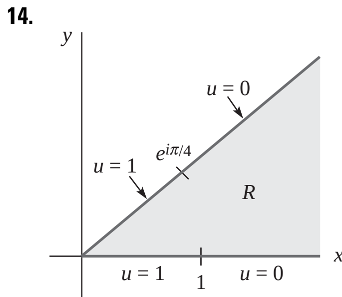


FIGURA 20.R.3 Problema de Dirichlet del problema 14

15.

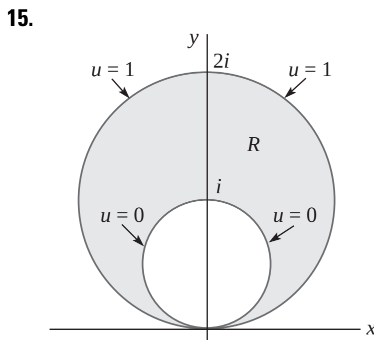


FIGURA 20.R.4 Problema de Dirichlet del problema 15

16. Deduzca la transformación conforme C-4 del apéndice IV construyendo la transformación fraccional lineal que transforma $1, -1, \infty$ en $i, -i, -1$.

17. ***a***) Aproxime la región R' de M-9 del apéndice IV por medio de la región poligonal mostrada en la **FIGURA 20.R.5**. Plantee que $f(-1) = u_1$, $f(0) = \pi i/2$, y $f(1) = u_1 + \pi i$.

b) Demuestre que cuando $u_1 \to \infty$,

$$f'(z) = Az(z+1)^{-1}(z-1)^{-1} = \frac{1}{2}A\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right].$$

c) Si se plantea que $\text{Im}(f(t)) = 0$ para $t < -1$, $\text{Im}(f(t)) = \pi$ para $t > 1$, y $f(0) = \pi i/2$, concluya que

$$f(z) = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(z+1) + \text{Ln}(z-1)].$$

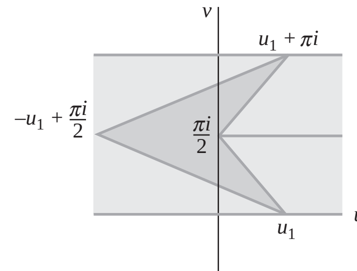


FIGURA 20.R.5 Imagen del semiplano superior del problema 17

18. ***a***) Encuentre la solución $u(x, y)$ del problema de Dirichlet en el semiplano superior $y \geq 0$ que satisfaga la condición de frontera $u(x, 0) = \text{sen } x$. [*Sugerencia:* Véase el problema 6 de los ejercicios 20.5.]

b) Encuentre la solución $u(x, y)$ del problema de Dirichlet en el disco unitario $|z| \leq 1$ que satisfaga la condición de frontera $u(e^{i\theta}) = \text{sen } \theta$.

19. Explique por qué las líneas de corriente de la figura 20.6.5 también pueden interpretarse como las líneas equipotenciales del potencial ϕ que satisface $\phi(x, 0) = 0$ para $-\infty < x < \infty$ y $\phi(x, \pi) = 1$ para $x < 0$.

20. Verifique que la frontera de la región R definida por $y^2 \geq 4(1 - x)$ es una línea de corriente para el flujo de potencial complejo $G(z) = i(z^{1/2} - 1)$. Bosqueje las líneas de corriente del flujo.

Apéndices

I FÓRMULAS DE DERIVADAS E INTEGRALES

Fórmulas de derivadas u y v son funciones de x; c_1 y c_2 son constantes.

1. $\dfrac{d}{dx}(c_1 u + c_2 v) = c_1 u' + c_2 v'$ (Regla de la suma)

2. $\dfrac{d}{dx}uv = uv' + vu'$ (Regla del producto)

3. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v} = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$ (Regla del cociente)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)

5. $\dfrac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}b^u = b^u \ln b\dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u\dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} u = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} u = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx},\ |u| < 1$

24. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx},\ |u| > 1$

Fórmulas de integrales

u y v son funciones de x; c_1 y c_2 son constantes.

1. $\int (c_1 u + c_2 v)\, dx = c_1 \int u\, dx + c_2 \int v\, dx$

2. $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ (integración por partes)

3. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

4. $\int \dfrac{1}{u} du = \ln|u| + C$

5. $\int b^u du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C$

6. $\int e^u\, du = e^u + C$

7. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

10. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

11. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

12. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

13. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{u}{a} + C$

14. $\int \dfrac{1}{a^2 + u^2} du = \dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{u}{a} + C$

15. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

16. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

17. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \begin{cases} \operatorname{senh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \\ \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C \end{cases}$

18. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \begin{cases} \cosh^{-1} \dfrac{u}{a} + C \\ \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C \end{cases}$

19. $\int \dfrac{1}{a^2 - u^2} du = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \tanh^{-1} \dfrac{u}{a} + C, |u| < a \\ \dfrac{1}{a} \coth^{-1} \dfrac{u}{a} + C, |u| > a \end{cases}$

20. $\int \dfrac{1}{a^2 - u^2} du = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a + u}{a - u} \right| + C$

21. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$

22. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

23. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

24. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

II FUNCIÓN GAMMA

La definición de la integral de Euler de la **función gamma*** es

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{1}$$

La convergencia de la integral requiere que $x - 1 > -1$, o $x > 0$. La relación de recurrencia

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \tag{2}$$

que vimos en la sección 5.3, puede obtenerse a partir de (1) empleando la integración por partes. Ahora, cuando $x = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

y, por lo tanto, la ecuación (2) nos da

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De esta forma se puede observar que cuando n es un entero positivo,

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Por esta razón, a la función gamma a menudo se le llama **función factorial generalizada**.

A pesar de que la forma integral (1) no converge para $x < 0$, mediante una definición alterna es posible demostrar que la función gamma se define para todos los números reales y complejos *excepto* para $x = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Como una consecuencia, (2) es realmente válida para $x \neq -n$. Considerada como una función de una variable real x, la gráfica de $\Gamma(x)$ es como indica la **FIGURA A.1**. Observe que los enteros no positivos corresponden a las asíntotas verticales de la gráfica.

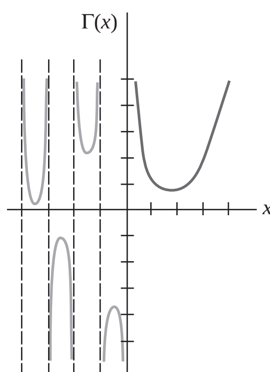


FIGURA A.1 Gráfica de la función gamma

En los problemas 23 y 24 de los ejercicios 5.3, utilizamos el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Este resultado puede deducirse a partir de (1) fijando el valor de $x = \frac{1}{2}$.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt. \tag{3}$$

* Esta función la definió por primera vez Leonhard Euler en su libro *Institutiones Calculi Integralis* publicado en 1768.

Establecemos $t = u^2$ para poder escribir (3) como

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Sin embargo,
$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_0^\infty e^{-v^2}\,dv$$

por lo que
$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv.$$

Convertir a coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$ nos permite evaluar la integral doble:

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \pi.$$

De aquí que,
$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi \quad \text{o} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{4}$$

En vista de (2) y (4), podemos encontrar valores adicionales de la función gamma. Por ejemplo, cuando $x = -\frac{1}{2}$, a partir de (2) se puede deducir que $\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$. Por lo tanto, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

II Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

1. Calcule lo siguiente.

a) $\Gamma(5)$ ***b)*** $\Gamma(7)$
c) $\Gamma(-\frac{3}{2})$ ***d)*** $\Gamma(-\frac{5}{2})$

2. Utilice (1) y el hecho de que $\Gamma(\frac{6}{5}) = 0.92$ para calcular $\int_0^\infty x^5 e^{-x^5}\,dx$. [*Sugerencia:* Establezca $t = x^5$.]

3. Utilice (1) y el hecho de que $\Gamma(\frac{5}{3}) = 0.89$ para calcular $\int_0^\infty x^4 e^{-x^3}\,dx$.

4. Calcule $\int_0^1 x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$. [*Sugerencia:* Establezca $t = -\ln x$.]

5. Utilice el hecho de que $\Gamma(x) > \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ para demostrar que $\Gamma(x)$ no es acotada a medida que $x \to 0^+$.

6. Utilice (1) para deducir (2) para $x > 0$.

7. Una definición de la función gamma debida a Carl Friedrich Gauss que es válida para todos los números reales, excepto $x = 0$, está dada por

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Use esta definición para demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

III TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\dfrac{1}{s}$
2. t	$\dfrac{1}{s^2}$
3. t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, n es un entero positivo
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7. $\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
9. $\operatorname{sen}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\dfrac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
12. $\operatorname{senh} kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
14. $\operatorname{senh}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. $e^{at}t$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$

17.	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, n es un entero positivo
18.	$e^{at}\,\text{sen}\,kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
19.	$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
20.	$e^{at}\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21.	$e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22.	$t\,\text{sen}\,kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
23.	$t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24.	$\text{sen}\,kt + kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25.	$\text{sen}\,kt - kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26.	$t\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27.	$t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
28.	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29.	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30.	$1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31.	$kt-\text{sen}\,kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32.	$\cos at-\cos bt$	$\dfrac{s(b^2-a^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33.	$\text{sen}\,kt\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{2k^2s}{s^4+4k^4}$
34.	$\text{sen}\,kt\cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
35.	$\cos kt\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
36.	$\cos kt\cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$

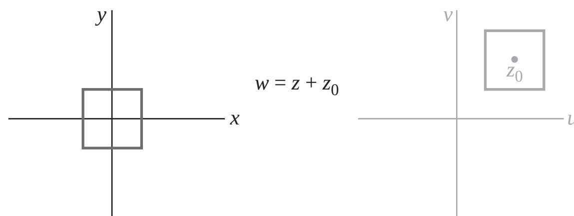
37. $\delta(t)$	1
38. $\delta(t-a)$	e^{-as}
39. $\mathscr{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
40. $J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$
41. $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$
42. $\dfrac{2(1-\cos at)}{t}$	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2}$
43. $\dfrac{2(1-\cosh at)}{t}$	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$
44. $\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
45. $\dfrac{\operatorname{sen} at\cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a+b}{s}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a-b}{s}$
46. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
47. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
48. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
49. $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-a^2/4t}-a\ \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
50. $e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$
51. $-e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{be^{-\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+b)}$
52. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
53. $f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
54. $g(t)\mathscr{U}(t-a)$	$e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$
55. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
56. $t^nf(t)$	$(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
57. $\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$

TRANSFORMACIONES CONFORMES

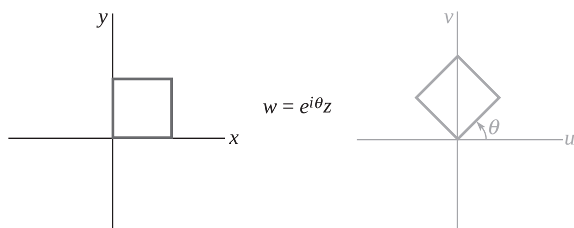
IV

Transformaciones elementales

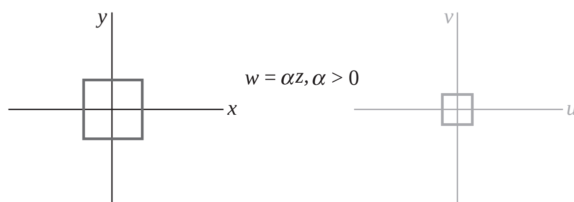
E-1



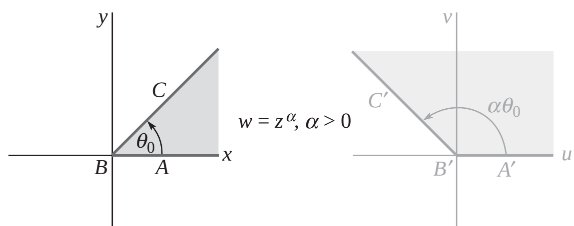
E-2



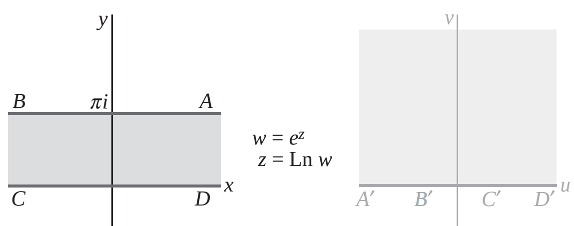
E-3



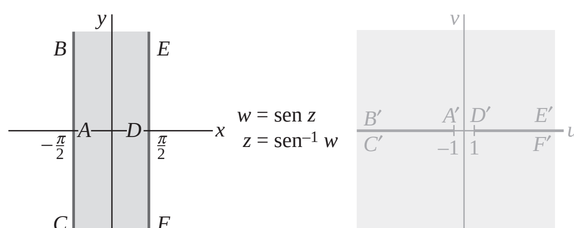
E-4



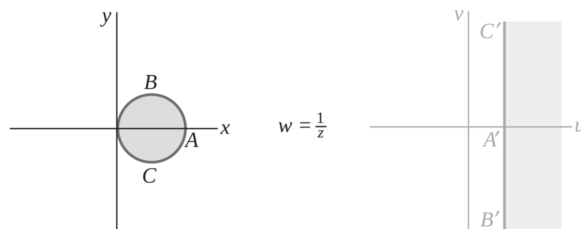
E-5



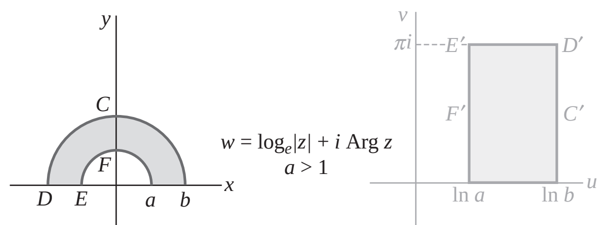
E-6



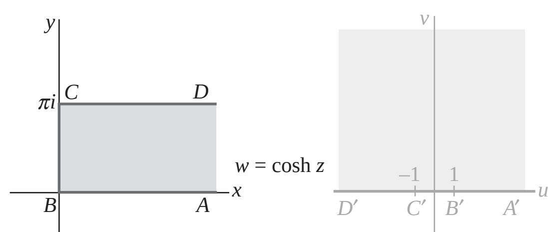
E-7



E-8

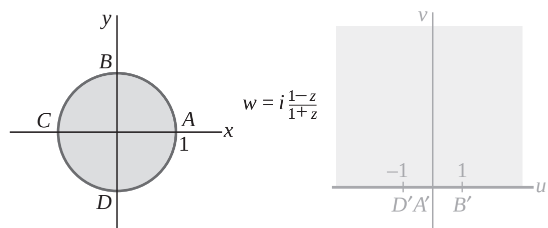


E-9

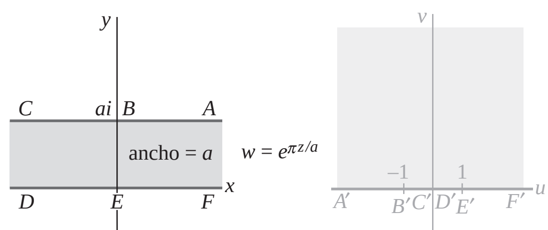


Transformaciones en semiplanos

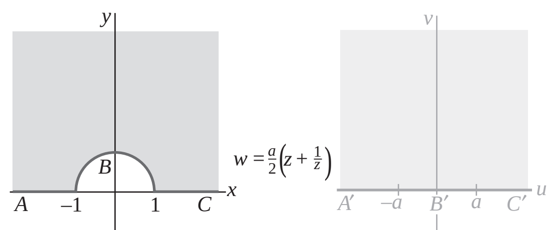
H-1



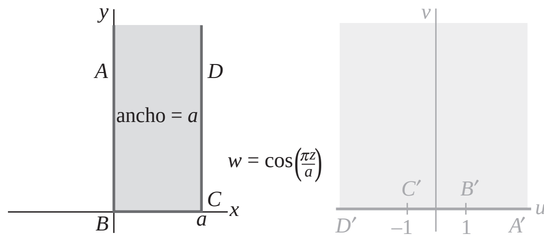
H-2



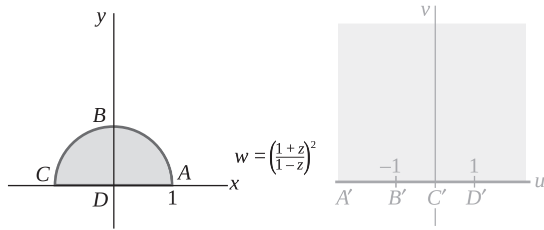
H-3



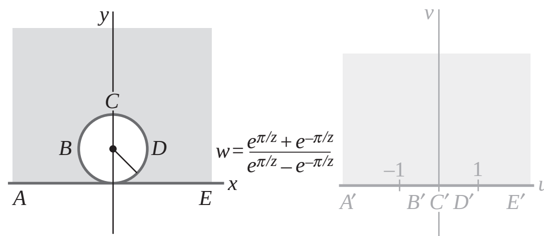
H-4



H-5

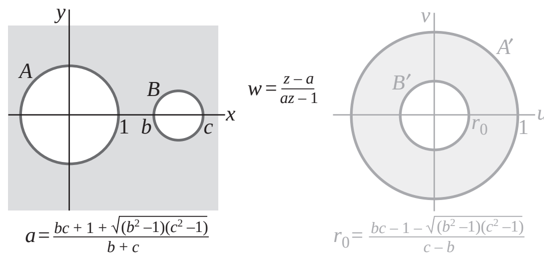


H-6

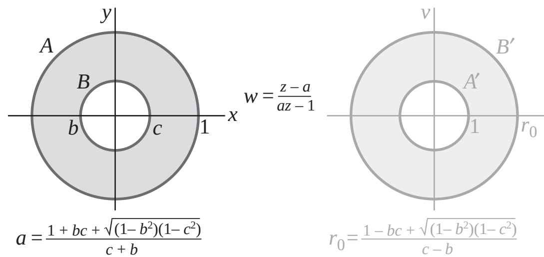


Transformaciones en regiones circulares

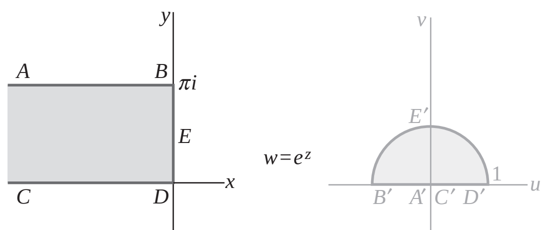
C-1



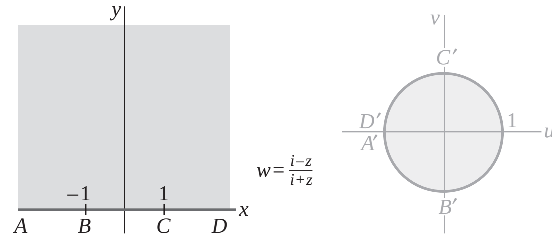
C-2



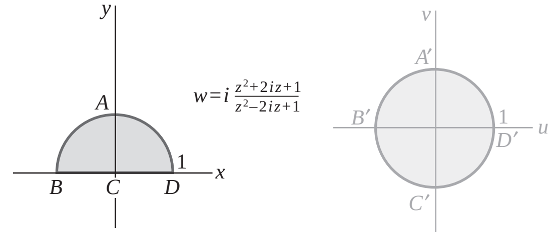
C-3



C-4

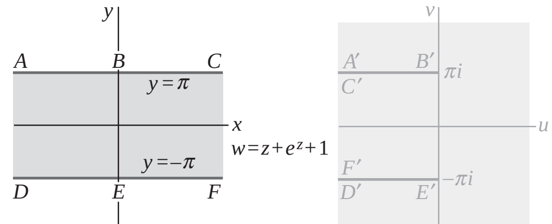


C-5

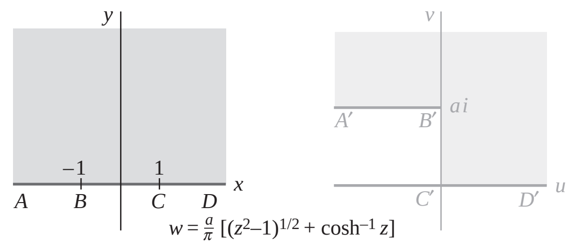


Transformaciones diversas

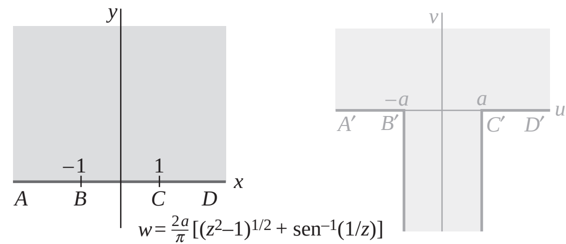
M-1



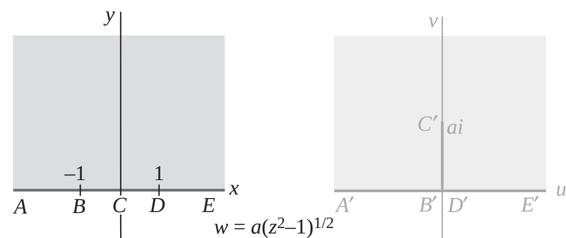
M-2



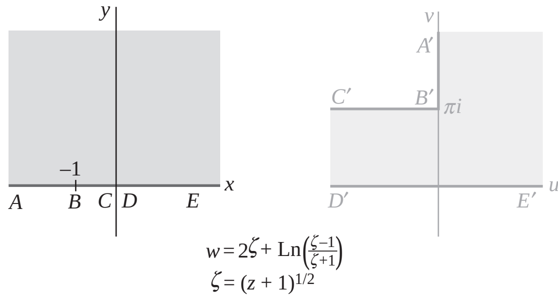
M-3



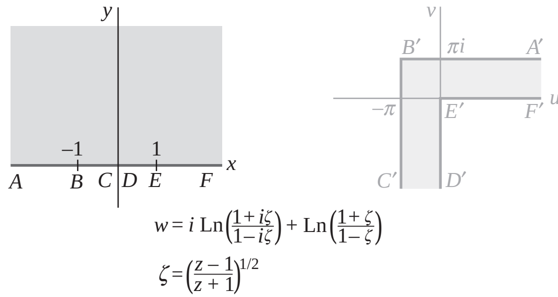
M-4



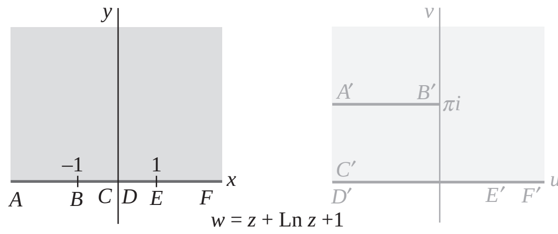
M-5



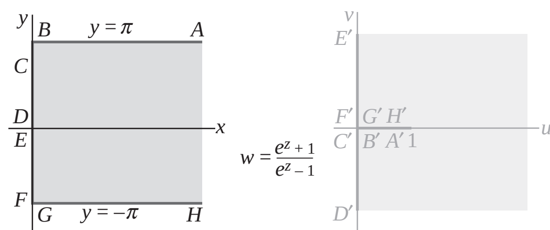
M-6



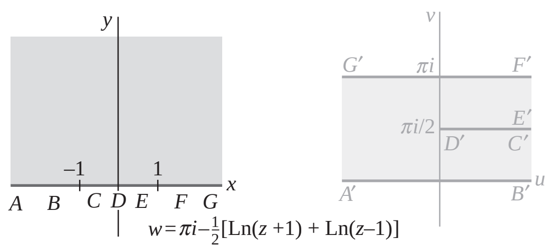
M-7



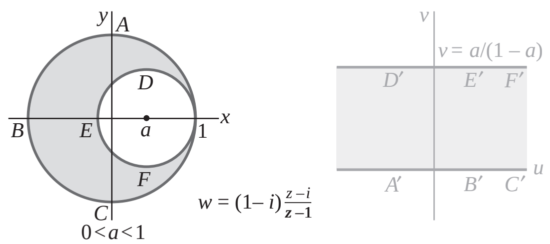
M-8



M-9



M-10



RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS DE NÚMERO IMPAR

Ejercicios 1.1, página 9

1. lineal, segundo orden

3. lineal, cuarto orden

5. no lineal, segundo orden

7. lineal, tercer orden

9. lineal en x pero no lineal en y

15. el dominio de la función es $-2 \leq x < \infty$; el intervalo más grande de la definición para la solución es $-2 < x < \infty$.

17. el dominio de la función es el conjunto de números reales excepto $x = 2$ y $x = -2$; los intervalos más grandes de la definición para la solución son $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, o $2 < x < \infty$.

19. $X = \dfrac{e^t - 1}{e^t - 2}$ definida en $(-\infty, \ln 2)$ o en $(\ln 2, \infty)$

27. ***a*)** $m = -2$ ***b*)** $m = 2, m = 3$

29. $y = 2$

31. no existen soluciones constantes

Ejercicios 1.2, página 15

1. $y = 1/(1 - 4e^{-x})$

3. $y = 1/(x^2 - 1)$; $1 < x < \infty$

5. $y = 1/(x^2 + 1)$; $-\infty < x < \infty$

7. $x = -\cos t + 8 \operatorname{sen} t$

9. $x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} t$

11. $y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

13. $y = 5e^{-x-1}$

15. $y = 0$, $y = x^3$

17. semiplanos definidos por $y > 0$ o $y < 0$

19. semiplanos definidos por $x > 0$ o $x < 0$

21. las regiones definidas por $y > 2$, $y < -2$, o $-2 < y < 2$

23. cualquier región que no contenga a (0, 0)

25. sí **27.** no

29. ***a*)** $y = cx$ ***b*)** cualquier región rectangular que no toque el eje y
***c*)** No, la función no es diferenciable en $x = 0$.

31. ***b*)** $y = 1/(1 - x)$ en $(-\infty, 1)$; $y = -1/(x + 1)$ en $(-1, \infty)$

45. 35 individuos al año; 95 individuos al año

Ejercicios 1.3, página 24

1. $\dfrac{dP}{dt} = kP + r$; $\dfrac{dP}{dt} = kP - r$

3. $\dfrac{dP}{dt} = k_1P - k_2P^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x)$

9. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{1}{100}A = 0$; $A(0) = 50$

11. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{7}{600 - t}A = 6$

13. $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{c\pi}{450}\sqrt{h}$

15. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E(t)$

17. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$

19. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

21. $x\dfrac{d^2x}{dt^2} + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160$

23. $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \dfrac{gR^2}{r^2} = 0$

25. $\dfrac{dA}{dt} = k(M - A), k > 0$

27. $\dfrac{dx}{dt} + kx = r, k > 0$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$

Ejercicios de repaso del capítulo 1, página 29

1. $\dfrac{dy}{dx} = ky$

3. $y'' + k^2y = 0$

5. $y'' - 2y' + y = 0$

7. *a*), *d*) **9.** *b*)

11. *b*)

13. $y = c_1$ y $y = c_2e^x$, c_1 y c_2 constantes

15. $y' = x^2 + y^2$

17. ***a*)** El dominio es el conjunto de todos los números reales
***b*)** ya sea $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$

19. Para $x_0 = -1$, el intervalo es $(-\infty, 0)$ y para $x_0 = 2$, el intervalo es $(0, \infty)$.

21. ***c*)** $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ **23.** $(-\infty, \infty)$

25. $(0, \infty)$ **27.** $y_0 = -3, y_1 = 0$

29. $m\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dm}{dt} + kv = -mg + R$

Ejercicios 2.1, página 38

21. 0 es asintóticamente estable (atractor); 3 es inestable (repulsor).

23. 2 es semiestable.

25. -2 es inestable (repulsor); 0 es semiestable; 2 es asintóticamente estable (atractor).

27. -1 es asintóticamente estable (atractor); 0 es inestable (repulsor).

39. ***a***) mg/k ***b***) $\sqrt{mg/k}$

Ejercicios 2.2, página 45

1. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$ **3.** $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

5. $y = cx^4$ **7.** $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$

9. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| + c$

11. $4\cos y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c$

13. $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

15. $S = ce^{kr}$ **17.** $P = \dfrac{ce^t}{1 + ce^t}$

19. $(y + 3)^5\, e^x = c(x + 4)^5\, e^y$

21. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$ **23.** $x = \tan\left(4t - \frac{3}{4}\pi\right)$

25. $y = \dfrac{e^{-(1+1/x)}}{x}$

27. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$

29. ***a***) $y = 2, y = -2, y = 2\,\dfrac{3 - e^{4x-1}}{3 + e^{4x-1}}$

33. $y = 1$ **35.** $y = 1 + \frac{1}{10}\tan\left(\frac{1}{10}x\right)$

39. ***a***) $y = -\sqrt{x^2 + x - 1}$ ***c***) $\left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

47. $y(x) = (4h/L^2)x^2 + a$

Ejercicios 2.3, página 53

1. $y = ce^{5x}$, $(-\infty, \infty)$

3. $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$, $(-\infty, \infty)$

5. $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$, $(-\infty, \infty)$

7. $y = x^{-1}\ln x + cx^{-1}$, $(0, \infty)$

9. $y = cx - x\cos x$, $(0, \infty)$

11. $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + cx^{-4}$, $(0, \infty)$

13. $y = \frac{1}{2}x^{-2}e^x + cx^{-2}e^{-x}$, $(0, \infty)$

15. $x = 2y^6 + cy^4$, $(0, \infty)$

17. $y = \operatorname{sen} x + c\cos x$, $(-\pi/2, \pi/2)$

19. $(x + 1)e^x y = x^2 + c$, $(-1, \infty)$

21. $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + c$, $(-\pi/2, \pi/2)$

23. $y = e^{-3x} + cx^{-1}e^{-3x}$, $(0, \infty)$

25. $y = x^{-1}e^x + (2 - e)x^{-1}$, $(0, \infty)$

27. $i = \dfrac{E}{R} + \left(i_0 - \dfrac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}$, $(-\infty, \infty)$

29. $(x + 1)y = x\ln x - x + 21$, $(0, \infty)$

31. $y = (2\sqrt{x} + e^2 - 2)e^{-2\sqrt{x}}$, $(0, \infty)$

33. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(e^6 - 1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$

35. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}e + \frac{3}{2}\right)e^{-x^2}, & x \ge 1 \end{cases}$

37. $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2\ln x + (1 + 4e^{-2})x^2, & x > 1 \end{cases}$

39. $y = e^{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{x^2}(\operatorname{erf}(x) - \operatorname{erf}(1))$

49. $E(t) = E_0 e^{-(t-4)/RC}$

Ejercicios 2.4, página 59

1. $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$

3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$ **5.** $x^2y^2 - 3x + 4y = c$

7. no es exacto **9.** $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$

11. no es exacto

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

15. $x^3y^3 - \tan^{-1} 3x = c$

17. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = c$

19. $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = c$

21. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$

25. $y^2 \operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$

27. $k = 10$ **29.** $x^2y^2\cos x = c$

31. $x^2y^2 + x^3 = c$ **33.** $3x^2y^3 + y^4 = c$

35. $-2ye^{3x} + \frac{10}{3}e^{3x} + x = c$

37. $e^{y^2}(x^2 + 4) = 20$

39. ***c***) $y_1(x) = -x^2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$,
$y_2(x) = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$

45. ***a***) $v(x) = 8\sqrt{\dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{x^2}}$ ***b***) 12.7 ft/s

Ejercicios 2.5, página 64

1. $y + x\ln|x| + y = cx$

3. $(x - y)\ln|x - y| = y + c(x - y)$

5. $x + y\ln|x| = cy$

7. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = c$

9. $4x = y(\ln|y| - c)^2$

11. $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8x^3$

13. $\ln|x| = e^{y/x} - 1$

15. $y^3 = 1 + cx^{-3}$

17. $y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$

19. $e^{t/y} = ct$

21. $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$

23. $y = -x - 1 + \tan(x + c)$

25. $2y - 2x + \operatorname{sen} 2(x + y) = c$

27. $4(y - 2x + 3) = (x + c)^2$

29. $-\cot(x + y) + \csc(x + y) = x + \sqrt{2} - 1$

35. ***b***) $y = \dfrac{2}{x} + \left(-\frac{1}{4}x + cx^{-3}\right)^{-1}$

Ejercicios 2.6, página 69

1. $y_2 = 2.9800,\ y_4 = 3.1151$
3. $y_{10} = 2.5937,\ y_{20} = 2.6533;\ y = e^x$
5. $y_5 = 0.4198,\ y_{10} = 0.4124$
7. $y_5 = 0.5639,\ y_{10} = 0.5565$
9. $y_5 = 1.2194,\ y_{10} = 1.2696$
13. Euler: $y_{10} = 3.8191,\ y_{20} = 5.9363$
RK4: $y_{10} = 42.9931,\ y_{20} = 84.0132$

Ejercicios 2.7, página 75

1. 7.9 años; 10 años
3. 760; aproximadamente 11 personas/año
5. 11 h **7.** 136.5 h
9. $I(15) = 0.00098I_0$ o aproximadamente 0.1% de I_0
11. 15 963 años
13. $T(1) = 36.76$ °F; aproximadamente 3.06 min
15. aproximadamente 82.1 s; aproximadamente 145.7 s
17. 390° **19.** 1.6 h aproximadamente
21. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$
23. $A(t) = 1\,000 - 1\,000e^{-t/100}$
25. $A(t) = 1\,000 - 10t - \frac{1}{10}(100 - t)^2$; 100 min
27. 64.38 lb
29. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t};\ i \to \frac{3}{5}$ conforme $t \to \infty$
31. $q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t};\ i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$
33. $i(t) = \begin{cases} 60 - 60e^{-t/10}, & 0 \le t \le 20 \\ 60(e^2 - 1)e^{-t/10}, & t > 20 \end{cases}$
35. ***a)*** $v(t) = \dfrac{mg}{k} + \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$
b) $v \to \dfrac{mg}{k}$ como $t \to \infty$
c)
$$s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) + s_0$$
39. ***a)*** $v(t) = \dfrac{\rho g}{4k}\left(\dfrac{k}{\rho}t + r_0\right) - \dfrac{\rho g r_0}{4k}\left(\dfrac{r_0}{\frac{k}{\rho}t + r_0}\right)^3$
b) $33\frac{1}{3}$ min
41. ***a)*** $P(t) = P_0 e^{(k_1 - k_2)t}$
43. ***a)*** Como $t \to \infty$, $x(t) \to r/k$.
b) $x(t) = r/k - (r/k)e^{-kt}$; $(\ln 2)/k$
45. ***a)*** $t_b = 50$ s ***b)*** 70 m/s
c) 1 250 m ***e)*** $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{50}v = -9.8$

Ejercicios 2.8, página 84

1. ***a)*** $N = 2\,000$
b) $N(t) = \dfrac{2\,000e^t}{1\,999 + e^t}$; $N(10) = 1\,834$
3. 1 000 000; 5.29 mo
5. ***b)*** $P(t) = \dfrac{4(P_0 - 1) - (P_0 - 4)e^{-3t}}{(P_0 - 1) - (P_0 - 4)e^{-3t}}$
c) Para $0 < P_0 < 1$, el tiempo de extinción es
$t = -\frac{1}{3}\ln \dfrac{4(P_0 - 1)}{P_0 - 4}$.
7. $P(t) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tan^{-1}\left(\dfrac{2P_0 - 5}{\sqrt{3}}\right)\right]$;
el tiempo de extinción es
$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\left(\frac{2P_0 - 5}{\sqrt{3}}\right)\right]$$
9. 29.3 g; $X \to 60$ conforme $t \to \infty$; 0 g de A y 30 g de B
11. ***a)*** $h(t) = \left(\sqrt{H} - \dfrac{4A_h}{A_w}t\right)^2$; I es $0 \le t \le \sqrt{H}A_w/4A_h$
b) $576\sqrt{10}$ s o 30.36 min
13. ***a)*** aproximadamente 856.65 s o 14.31 min
b) 243 s o 4.05 min
15. ***a)*** $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right)$
donde $c_1 = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0\right)$
b) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$
c) $s(t) = \dfrac{m}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right) + c_2$
donde $c_2 = -(m/k)\ln\cosh c_1$
17. ***a)*** $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2 - \rho V$, donde ρ es la densidad del peso del agua
b) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}\tanh\left(\dfrac{\sqrt{kmg - k\rho V}}{m}t + c_1\right)$
c) $\sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}$
19. ***a)*** $W = 0$ y $W = 2$
b) $W(x) = 2\,\text{sech}^2(x - c_1)$
c) $W(x) = 2\,\text{sech}^2 x$

Ejercicios 2.9, página 91

1. $x(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}$
$$y(t) = \frac{x_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$
$$z(t) = x_0\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right)$$

3. 5, 20, 147 días. El tiempo cuando $y(t)$ y $z(t)$ son iguales tiene sentido porque la mayor parte de A y la mitad de B ya no están, se debió haber formado la mitad de C.

5. $\frac{dx_1}{dt} = 6 - \frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2$

7. ***a)*** $\frac{dx_1}{dt} = 3\frac{x_2}{100 - t} - 2\frac{x_1}{100 + t}$

$\frac{dx_2}{dt} = 2\frac{x_1}{100 + t} - 3\frac{x_2}{100 - t}$

b) $x_1(t) + x_2(t) = 150;\ x_2(30) \approx 47.4$ lb

13. $L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t)$

$L_2\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + (R_1 + R_3)i_3 = E(t)$

15. $i(0) = i_0,\ s(0) = n - i_0,\ r(0) = 0$

Ejercicios de repaso del capítulo 2, página 93

1. $-A/k$, un repulsor para $k > 0$, un atractor para $k < 0$

3. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2(y - 3)^2$

5. semiestable para n par e inestable para n impar; semiestable para n par y asintóticamente estable para n impar

9. $2x + \text{sen}\,2x = 2\ln(y^2 + 1) + c$

11. $(6x + 1)y^3 = -3x^3 + c$

13. $Q = ct^{-1} + \frac{1}{25}t^4(-1 + 5\ln t)$

15. $y = \frac{1}{4} + c(x^2 + 4)^{-4}$

17. $y = \csc x,\ \pi < x < 2\pi$

19. ***b)*** $y = \frac{1}{4}(x + 2\sqrt{y_0} - x_0)^2,\ x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$

23. $P(45) = 8.99$ miles de millones

25. ***b)*** 3 257 a.C., aproximadamente

27. $x = 10\ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{100 - y^2}$

29. ***a)*** $\frac{BT_1 + T_2}{1 + B}, \frac{BT_1 + T_2}{1 + B}$

b) $T(t) = \frac{BT_1 + T_2}{1 + B} + \frac{T_1 - T_2}{1 + B}e^{k(1+B)t}$

31. $i(t) = \begin{cases} 4t - \frac{1}{5}t^2, & 0 \leq t < 10 \\ 20, & t \geq 10 \end{cases}$

33. $h(t) = (\sqrt{2} - 0.00000163t)^2$

35. no

37. $x(t) = \frac{\alpha c_1 e^{\alpha k_1 t}}{1 + c_1 e^{\alpha k_1 t}},\ y(t) = c_2(1 + c_1 e^{\alpha k_1 t})^{k_2/k_1}$

39. $x = -y + 1 + c_2 e^{-y}$

Ejercicios 3.1, página 108

1. $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ **3.** $y = 3x - 4x\ln x$

9. $(-\infty, 2)$

11. ***a)*** $y = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x})$ ***b)*** $y = \frac{\text{senh}\,x}{\text{senh}\,1}$

13. ***a)*** $y = e^x\cos x - e^x\,\text{sen}\,x$

b) no tiene solución

c) $y = e^x\cos x + e^{-\pi/2}e^x\,\text{sen}\,x$

d) $y = c_2 e^x\,\text{sen}\,x$, donde c_2 es arbitraria

15. dependiente **17.** dependiente

19. dependiente **21.** independiente

23. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(e^{-3x}, e^{4x}) = 7e^x \neq 0;\ y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$.

25. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(e^x\cos 2x, e^x\,\text{sen}\,2x) = 2e^{2x} \neq 0;\ y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\,\text{sen}\,2x$.

27. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(x^3, x^4) = x^6 \neq 0;\ y = c_1x^3 + c_2x^4$.

29. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(x, x^{-2}, x^{-2}\ln x) = 9x^{-6} \neq 0;\ y = c_1x + c_2x^{-2} + c_3x^{-2}\ln x$.

35. ***b)*** $y_p = x^2 + 3x + 3e^{2x};\ y_p = -2x^2 - 6x - \frac{1}{3}e^{2x}$

Ejercicios 3.2, página 111

1. $y_2 = xe^{2x}$ **3.** $y_2 = \text{sen}\,4x$

5. $y_2 = \text{senh}\,x$ **7.** $y_2 = xe^{2x/3}$

9. $y_2 = x^4\ln|x|$ **11.** $y_2 = 1$

13. $y_2 = x\cos(\ln x)$ **15.** $y_2 = x^2 + x + 2$

17. $y_2 = e^{2x},\ y_p = -\frac{1}{2}$ **19.** $y_2 = e^{2x},\ y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$

Ejercicios 3.3, página 117

1. $y = c_1 + c_2e^{-x/4}$ **3.** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

5. $y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}$ **7.** $y = c_1e^{2x/3} + c_2e^{-x/4}$

9. $y = c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen}\,3x$

11. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x)$

13. $y = e^{-x/3}(c_1\cos\frac{1}{3}\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\sqrt{2}x)$

15. $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{5x}$

17. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x}$

19. $u = c_1e^t + e^{-t}(c_2\cos t + c_3\,\text{sen}\,t)$

21. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$

23. $y = c_1 + c_2x + e^{-x/2}(c_3\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x)$

25. $y = c_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4x\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x$

27. $u = c_1e^r + c_2re^r + c_3e^{-r} + c_4re^{-r} + c_5e^{-5r}$

29. $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,4x$

31. $y = -\frac{1}{3}e^{-(t-1)} + \frac{1}{3}e^{5(t-1)}$

33. $y = 0$

35. $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$

37. $y = e^{5x} - xe^{5x}$ **39.** $y = 0$

41. $y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)e^{\sqrt{3}x}$;

$y = \cosh\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\text{senh}\,\sqrt{3}x$

Ejercicios 3.4, página 127

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 3$

3. $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$

5. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

7. $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x + (-4x^2 + 4x - \frac{4}{3})e^{3x}$

9. $y = c_1 + c_2e^x + 3x$

11. $y = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2e^{x/2}$

13. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x \cos 2x$

15. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$

17. $y = c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}xe^x \operatorname{sen} 2x$

19. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\operatorname{sen} 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$

21. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\operatorname{sen} x$

23. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$

25. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3$

27. $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$

29. $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$

31. $y = -10e^{-2x}\cos x + 9e^{-2x}\operatorname{sen} x + 7e^{-4x}$

33. $x = \dfrac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t - \dfrac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t$

35. $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \frac{1}{2}e^{5x}$

37. $y = 6\cos x - 6(\cot 1)\operatorname{sen} x + x^2 - 1$

39. $y = \dfrac{-4\operatorname{sen}\sqrt{3}x}{\operatorname{sen}\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}} + 2x$

41. $y = \begin{cases} \cos 2x + \frac{5}{6}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{5}{6}\operatorname{sen} 2x, & x > \pi/2 \end{cases}$

Ejercicios 3.5, página 132

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$

3. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$

5. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$

7. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x \operatorname{senh} x$

9. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt\right), x_0 > 0$

11. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)$

13. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

15. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}\ln t - \frac{3}{4}t^2e^{-t}$

17. $y = c_1e^x \operatorname{sen} x + c_2e^x \cos x + \frac{1}{3}xe^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}e^x \cos x \ln|\cos x|$

19. $y = \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{8}x^2e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$

21. $y = \frac{4}{9}e^{-4x} + \frac{25}{36}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$

23. $y = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}$

25. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$

Ejercicios 3.6, página 138

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$

3. $y = c_1 + c_2 \ln x$

5. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$

7. $y = c_1x^{(2-\sqrt{6})} + c_2x^{(2+\sqrt{6})}$

9. $y = c_1 \cos(\frac{1}{5}\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{5}\ln x)$

11. $y = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x$

13. $y = x^{-1/2}[c_1 \cos(\frac{1}{6}\sqrt{3}\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{6}\sqrt{3}\ln x)]$

15. $y = c_1x^3 + c_2 \cos(\sqrt{2}\ln x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln x)$

17. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^{-3}$

19. $y = c_1 + c_2x^5 + \frac{1}{5}x^5 \ln x$

21. $y = c_1x + c_2x \ln x + x(\ln x)^2$

23. $y = c_1x^{-1} + c_2x - \ln x$

25. $y = 2 - 2x^{-2}$

27. $y = \cos(\ln x) + 2 \operatorname{sen}(\ln x)$

29. $y = \frac{3}{4} - \ln x + \frac{1}{4}x^2$

31. $y = c_1x^{-10} + c_2x^2$

33. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$

35. $y = x^2[c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3 \ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$

37. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2}\ln(-x), x < 0$

Ejercicios 3.7, página 142

3. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$

5. $y = \dfrac{1}{c_1^2}\ln|c_1x + 1| - \dfrac{1}{c_1}x + c_2$

7. $\frac{1}{3}y^3 - c_1y = x + c_2$

9. $y = \tan(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x), \ -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

11. $y = -\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1 - c_1^2x^2} + c_2$

13. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$

15. $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \cdots$

17. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

Ejercicios 3.8, página 154

1. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$

3. $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$

5. ***a)*** $x(\pi/12) = -\frac{1}{4}$; $x(\pi/8) = -\frac{1}{2}$; $x(\pi/6) = -\frac{1}{4}$; $x(\pi/4) = \frac{1}{2}$; $x(9\pi/32) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) 4 ft/s; hacia abajo

c) $t = \dfrac{(2n + 1)\pi}{16}, n = 0, 1, 2, \ldots$

7. ***a)*** la masa de 20 kilogramos

b) la masa de 20 kilogramos; la masa de 50 kilogramos

c) $t = n\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$; en la posición de equilibrio; la masa de 50 kilogramos se mueve hacia arriba mientras que la masa de 20 kilogramos se mueve hacia arriba cuando n es par y hacia abajo cuando n es impar.

9. $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{sen}(2t + 0.5880)$

11. ***a)*** $x(t) = -\frac{2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10t$
$= \frac{5}{6}\operatorname{sen}(10t - 0.927)$

b) $\frac{5}{6}$ ft; $\frac{\pi}{5}$

c) 15 ciclos

d) 0.721 s

e) $\dfrac{(2n+1)\pi}{20} + 0.0927,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

f) $x(3) = -0.597$ ft

g) $x'(3) = -5.814$ ft/s

h) $x''(3) = 59.702$ ft/s^2

i) $\pm 8\frac{1}{3}$ ft/s

j) $0.1451 + \dfrac{n\pi}{5};\ 0.3545 + \dfrac{n\pi}{5},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

k) $0.3545 + \dfrac{n\pi}{5},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

13. 120 lb/ft; $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{sen} 8\sqrt{3}t$

17. ***a)*** arriba ***b)*** hacia arriba

19. ***a)*** abajo ***b)*** hacia arriba

21. $\frac{1}{4}$ s; $\frac{1}{2}$ s, $x(\frac{1}{2}) = e^{-2}$; esto es, la posición es aproximadamente de 0.14 pies por debajo de la posición de equilibrio.

23. ***a)*** $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$

b) $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$

25. ***a)*** $x(t) = e^{-2t}(-\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t)$

b) $x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(4t + 4.249)$

c) $t = 1.294$ s

27. ***a)*** $\beta > \frac{5}{2}$ ***b)*** $\beta = \frac{5}{2}$ ***c)*** $0 < \beta < \frac{5}{2}$

29. $x(t) = e^{-t/2}\left(-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$

31. $x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$

33. $x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

35. ***a)*** $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - h) - \beta\dfrac{dx}{dt}$ o

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = \omega^2 h(t)$,

donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$

b) $x(t) = e^{-2t}\left(-\frac{56}{13}\cos 2t - \frac{72}{13}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{56}{13}\cos t + \frac{32}{13}\operatorname{sen} t$

37. $x(t) = -\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$

39. ***b)*** $\dfrac{F_0}{2\omega}t\operatorname{sen}\omega t$

45. 4.568 C; 0.0509 s

47. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$
$i(t) = 60e^{-3t}\operatorname{sen} 3t$; 10.432 C

49. $q_p = \frac{100}{13}\operatorname{sen} t + \frac{150}{13}\cos t$, $i_p = \frac{100}{13}\cos t - \frac{150}{13}\operatorname{sen} t$

53. $q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ C

57. $q(t) = \left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1 - \gamma^2LC}\right)\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \sqrt{LC}i_0\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \dfrac{E_0C}{1 - \gamma^2LC}\cos\gamma t$

$i(t) = i_0\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} - \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1 - \gamma^2LC}\right)\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} - \dfrac{E_0C\gamma}{1 - \gamma^2LC}\operatorname{sen}\gamma t$

Ejercicios 3.9, página 164

1. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)$

3. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{48EI}(3L^2x^2 - 5Lx^3 + 2x^4)$

5. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{360EI}(7L^4x - 10L^2x^3 + 3x^5)$

c) $x \approx 0.51933,\ y_{\text{máx}} \approx 0.234799$

7. $y(x) = -\dfrac{w_0EI}{P^2}\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x + \left(\dfrac{w_0EI}{P^2}\operatorname{senh}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L - \dfrac{w_0L\sqrt{EI}}{P\sqrt{P}}\right)\dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x}{\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L} + \dfrac{w_0}{2P}x^2 + \dfrac{w_0EI}{P^2}$

9. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen} nx$

11. $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots;$
$y = \cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$

13. $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ y = \cos nx$

15. $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{25},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = e^{-x}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$

17. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen}(n\ln x)$

19. $\lambda_n = n^4\pi^4,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen} n\pi x$

21. $x = L/4,\ x = L/2,\ x = 3L/4$

25. $\omega_n = \dfrac{n\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$

27. $u(r) = \left(\dfrac{u_0 - u_1}{b - a}\right)\dfrac{ab}{r} + \dfrac{u_1b - u_0a}{b - a}$

Ejercicios 3.10, página 176

1. $y_p(x) = \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\operatorname{senh} 4(x - t)f(t)\,dt$

3. $y_p(x) = \int_{x_0}^{x}(x - t)e^{-(x-t)}f(t)\,dt$

5. $y_p(x) = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sen} 3(x - t)f(t)\,dt$

7. $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\operatorname{senh} 4(x - t)te^{-2t}\,dt$

9. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \int_{x_0}^{x}(x - t)e^{-(x-t)}e^{-t}\,dt$

11. $y = c_1\cos 3x + c_2\text{sen } 3x + \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x} \text{sen } 3(x - t)(t + \text{sen } t)\,dt$

13. $y_p(x) = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x}$

15. $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{5x}$

17. $y_p(x) = -\cos x + \dfrac{\pi}{2}\text{sen } x - x\text{sen } x - \cos x \ln|\text{sen } x|$

19. $y = \frac{25}{16}e^{-2x} - \frac{9}{16}e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$

21. $y = -e^{5x} + 6xe^{5x} + \frac{1}{2}x^2e^{5x}$

23. $y = -x \text{ sen } x - \cos x \ln |\text{sen } x|$

25. $y = (\cos 1 - 2)e^{-x} + (1 + \text{sen } 1 - \cos 1)e^{-2x}$
$- e^{-2x} \text{ sen } e^{x}$

27. $y = 4x - 2x^2 - x \ln x$

29. $y = \frac{46}{45}x^3 - \frac{1}{20}x^{-2} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6}\ln x$

31. $y(x) = 5e^x + 3e^{-x} + y_p(x)$,

donde $y_p(x) = \begin{cases} 1 - \cosh x, & x < 0 \\ -1 + \cosh x, & x \geq 0 \end{cases}$

33. $y = \cos x - \text{sen } x + y_p(x)$,

donde $y_p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10 - 10\cos x, & 0 \leq x \leq 3\pi \\ -20\cos x, & x > 3\pi \end{cases}$

35. $y_p(x) = (x - 1)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 (t - 1)f(t)\,dt$

37. $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

39. $y_p(x) = \dfrac{\text{sen } (x - 1)}{\text{sen } 1} - \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 1} + 1$

41. $y_p\,(x) = -e^x \cos x - e^x \text{ sen } x + e^x$

43. $y_p(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}\ln x$

Ejercicios 3.11, página 183

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

15. *a)* 5 ft *b)* $4\sqrt{10}$ ft/s *c)* $0 \leq t \leq \frac{3}{8}\sqrt{10}$; 7.5 ft

17. *a)* $xv\dfrac{dv}{dx} + v^2 = 32x$

b) $\frac{1}{2}v^2x^2 - \frac{32}{3}x^3 = -288$

c) aproximadamente 0.66 s

19. *a)* $xy'' = r\sqrt{1 + (y')^2}$. Cuando $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $dy/dx = 0$.

b) Cuando $r \neq 1$,

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1 + r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+r} - \frac{1}{1 - r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-r}\right] + \frac{ar}{1 - r^2}.$$

Cuando $r = 1$,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a}(x^2 - a^2) + \frac{1}{a}\ln\frac{a}{x}\right].$$

c) Las trayectorias se intersecan cuando $r < 1$.

Ejercicios 3.12, página 191

1. $x = c_1e^t + c_2te^t$
$y = (c_1 - c_2)e^t + c_2te^t$

3. $x = c_1 \cos t + c_2 \text{ sen } t + t + 1$
$y = c_1 \text{ sen } t - c_2 \cos t + t - 1$

5. $x = \frac{1}{2}c_1 \text{sen}\, t + \frac{1}{2}c_2 \cos t - 2c_3 \text{sen}\sqrt{6}t - 2c_4 \cos\sqrt{6}t$
$y = c_1 \text{ sen } t + c_2 \cos t + c_3 \text{ sen}\sqrt{6}t + c_4 \cos\sqrt{6}t$

7. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3 \text{ sen } 2t + c_4 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$
$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3 \text{ sen } 2t - c_4 \cos 2t - \frac{1}{5}e^t$

9. $x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \text{ sen } t + \frac{17}{15}e^{3t}$
$y = c_1 + c_2 \text{ sen } t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$

11. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\text{ sen }\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$y = (-\frac{3}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{3}{2}c_3)e^{-t/2}\text{ sen }\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

13. $x = c_1e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$
$y = -\frac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t$

15. $x = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
$y = (c_1 - c_2 + 2) + (c_2 + 1)t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$

17. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\text{ sen }\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$y = c_1e^t + (-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)\,e^{-t/2}\text{ sen }\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3)\,e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$z = c_1e^t + (-\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)\,e^{-t/2}\text{ sen }\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3)\,e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

19. $x = -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
$z = 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

21. $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3}$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$

25. $mx'' = 0$
$my'' = -mg;$
$x = c_1t + c_2$
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_4$

Ejercicios de repaso del capítulo 3, página 193

1. $y = 0$ 3. falso 5. 8 pies

7. $\frac{3}{4}$ 9. $(-\infty, 0); (0, \infty)$

11. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x} + c_4e^x + c_5xe^x + c_6x^2e^x$,
$y = c_1x^3 + c_2x^{-5} + c_3x^{-5}\ln x + c_4x + c_5x\ln x +$
$c_6x(\ln x)^2$

13. $y = c_1e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$

15. $y = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x}$

17. $y = c_1e^{-x/3} + e^{-3x/2}(c_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_3\text{ sen }\frac{\sqrt{7}}{2}x)$

19. $y = e^{3x/2}(c_2\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_3\text{ sen }\frac{\sqrt{11}}{2}x) + \frac{4}{5}x^3 +$
$\frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$

21. $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{5}\text{ sen } x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{4}{3}x$

23. $y = e^x(c_1\cos x + c_2\text{ sen } x) - e^x\cos x\ln|\sec x + \tan x|$

25. $y = c_1x^{-1/3} + c_2x^{1/2}$

27. $y = c_1x^2 + c_2x^3 + x^4 - x^2 \ln x$

29. ***a)*** $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x$, $\omega \neq \alpha$, $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + Ax \cos \omega x + Bx \operatorname{sen} \omega x$, $\omega = \alpha$

b) $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Ae^{\alpha x}$, $\omega \neq \alpha$, $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Axe^{\omega x}$, $\omega = \alpha$

31. ***a)*** $y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x + c_3x \cosh x + c_4x \operatorname{senh} x$

b) $y_p = Ax^2 \cosh x + Bx^2 \operatorname{senh} x$

33. $y = e^{x-\pi} \cos x$

35. $y = \frac{13}{4}e^x - \frac{5}{4}e^{-x} - x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

37. $y = x^2 + 4$

41. $x = -c_1e^t - \frac{3}{2}c_2e^{2t} + \frac{5}{2}$
$y = c_1e^t + c_2e^{2t} - 3$

43. $x = c_1e^t + c_2e^{5t} + te^t$
$y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t} - te^t + 2e^t$

45. 14.4 lb

47. $0 < m \leq 2$

49. ***a)*** $q(t) = -\frac{1}{150} \operatorname{sen} 100t + \frac{1}{75} \operatorname{sen} 50t$

b) $i(t) = -\frac{2}{3} \cos 100t + \frac{2}{3} \cos 50t$

c) $t = \dfrac{n\pi}{50}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

53. $m \dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

55. $y(x) = 2\cos x - 5\operatorname{sen} x + \int_0^x \operatorname{sen}(x - t)\tan t\, dt$
$= 2\cos x - 4\operatorname{sen} x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

57. ***a)*** $\theta(t) = \omega_0\sqrt{l/g} \operatorname{sen} \sqrt{g/l}\, t$

Ejercicios 4.1, página 201

1. $\dfrac{2}{s}e^{-s} - \dfrac{1}{s}$

3. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

5. $\dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

7. $\dfrac{1}{s}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

9. $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

11. $\dfrac{e^7}{s - 1}$

13. $\dfrac{1}{(s - 4)^2}$

15. $\dfrac{1}{s^2 + 2s + 2}$

17. $\dfrac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$

19. $\dfrac{48}{s^5}$

21. $\dfrac{4}{s^2} - \dfrac{10}{s}$

23. $\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} - \dfrac{3}{s}$

25. $\dfrac{6}{s^4} + \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

27. $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s - 4}$

29. $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s - 2} + \dfrac{1}{s - 4}$

31. $\dfrac{8}{s^3} - \dfrac{15}{s^2 + 9}$

33. Utilice $\operatorname{senh} kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

35. $\dfrac{1}{2(s - 2)} - \dfrac{1}{2s}$

37. $\dfrac{2}{s^2 + 16}$

39. $\dfrac{4 \cos 5 + (\operatorname{sen} 5)s}{s^2 + 16}$

Ejercicios 4.2, página 209

1. $\frac{1}{2}t^2$

3. $t - 2t^4$

5. $1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

7. $t - 1 + e^{2t}$

9. $\frac{1}{4}e^{-t/4}$

11. $\frac{5}{7} \operatorname{sen} 7t$

13. $\cos \dfrac{t}{2}$

15. $2 \cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t$

17. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$

19. $\frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$

21. $0.3e^{0.1t} + 0.6e^{-0.2t}$

23. $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$

25. $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cos \sqrt{5}t$

27. $-4 + 3e^{-t} + \cos t + 3 \operatorname{sen} t$

29. $\frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t$

31. $y = -1 + e^t$

33. $y = \frac{1}{10}e^{4t} + \frac{19}{10}e^{-6t}$

35. $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

37. $y = 10 \cos t + 2 \operatorname{sen} t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t$

39. $y = -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$

41. $y = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \cos 2t + \frac{1}{4}e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$

Ejercicios 4.3, página 217

1. $\dfrac{1}{(s - 10)^2}$

3. $\dfrac{6}{(s + 2)^4}$

5. $\dfrac{1}{(s - 2)^2} + \dfrac{2}{(s - 3)^2} + \dfrac{1}{(s - 4)^2}$

7. $\dfrac{3}{(s - 1)^2 + 9}$

9. $\dfrac{s}{s^2 + 25} - \dfrac{s - 1}{(s - 1)^2 + 25} + 3\dfrac{s + 4}{(s + 4)^2 + 25}$

11. $\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$

13. $e^{3t} \operatorname{sen} t$

15. $e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \operatorname{sen} t$

17. $e^{-t} - te^{-t}$

19. $5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}$

21. $y = te^{-4t} + 2e^{-4t}$

23. $y = e^{-t} + 2te^{-t}$

25. $y = \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$

27. $y = -\frac{3}{2}e^{3t} \operatorname{sen} 2t$

29. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t$

31. $y = (e + 1)te^{-t} + (e - 1)e^{-t}$

33. $x(t) = -\frac{3}{2}e^{-7t/2} \cos \frac{\sqrt{15}}{2}t - \frac{7\sqrt{15}}{10}e^{-7t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{2}t$

37. $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

39. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

41. $\dfrac{s}{s^2 + 4}e^{-\pi s}$

43. $\frac{1}{2}(t - 2)^2 \mathscr{U}(t - 2)$

45. $-\operatorname{sen} t\, \mathscr{U}(t - \pi)$

47. $\mathscr{U}(t - 1) - e^{-(t-1)}\mathscr{U}(t - 1)$

49. *c)*

51. *f)*

53. *a)*

55. $f(t) = 2 - 4\,\mathscr{U}(t - 3)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-3s}$

57. $f(t) = t^2\,\mathscr{U}(t - 1)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = 2\dfrac{e^{-s}}{s^3} + 2\dfrac{e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-s}}{s}$

59. $f(t) = t - t\,\mathscr{U}(t - 2)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

61. $f(t) = \mathscr{U}(t - a) - \mathscr{U}(t - b)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-as}}{s} - \dfrac{e^{-bs}}{s}$

63. $y = [5 - 5e^{-(t-1)}]\,\mathscr{U}(t - 1)$

65. $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\mathcal{U}(t-1)$
$\quad - \frac{1}{2}(t-1)\mathcal{U}(t-1) + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$

67. $y = \cos 2t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi) +$
$\quad \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$

69. $y = \operatorname{sen} t + [1-\cos(t-\pi)]\mathcal{U}(t-\pi) -$
$\quad [1-\cos(t-2\pi)]\mathcal{U}(t-2\pi)$

71. $x(t) = \frac{5}{4}t - \frac{5}{16}\operatorname{sen} 4t - \frac{5}{4}(t-5)\mathcal{U}(t-5) +$
$\quad \frac{5}{16}\operatorname{sen} 4(t-5)\mathcal{U}(t-5) - \frac{25}{4}\mathcal{U}(t-5) +$
$\quad \frac{25}{4}\cos 4(t-5)\mathcal{U}(t-5)$

73. $q(t) = \frac{2}{5}\mathcal{U}(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}\mathcal{U}(t-3)$

75. *a)* $i(t) = \frac{1}{101}e^{-10t} - \frac{1}{101}\cos t + \frac{10}{101}\operatorname{sen} t$
$\quad - \frac{1}{101}e^{-10(t-3\pi/2)}\mathcal{U}(t-3\pi/2)$
$\quad + \frac{10}{101}\cos(t-3\pi/2)\mathcal{U}(t-3\pi/2)$
$\quad + \frac{1}{101}\operatorname{sen}(t-3\pi/2)$

b) $i_{\text{máx}} \approx 0.1$ en $t \approx 1.6$, $i_{\text{mín}} \approx -0.1$ en $t \approx 4.7$

77. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{16EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{12EI}x^3 +$
$\quad \dfrac{w_0}{24EI}x^4 - \dfrac{w_0}{24EI}(x-\frac{1}{2}L)^4\mathcal{U}(x-\frac{1}{2}L)$

79. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{24EI}x^3 +$
$\quad \dfrac{w_0}{60EI}[\frac{5}{2}Lx^4 - x^5 + (x-\frac{1}{2}L)^5\mathcal{U}(x-\frac{1}{2}L)]$

81. *a)* $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 70 - 57.5t - (230 - 57.5t)\mathcal{U}(t-4))$

Ejercicios 4.4, página 228

1. $\dfrac{1}{(s+10)^2}$

3. $\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

5. $\dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

7. $\dfrac{12s-24}{[(s-2)^2+36]^2}$

9. $y = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

11. $y = 2\cos 3t + \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{6}t\operatorname{sen} 3t$

13. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 4t$
$\quad - \frac{1}{8}(t-\pi)\operatorname{sen} 4(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$

17. $y = \frac{2}{3}t^3 + c_1t^2$

19. $\dfrac{6}{s^5}$

21. $\dfrac{s-1}{(s+1)[(s-1)^2+1]}$

23. $\dfrac{1}{s(s-1)}$

25. $\dfrac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}$

27. $\dfrac{1}{s^2(s-1)}$

29. $\dfrac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$

31. $e^t - 1$

33. $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1$

37. $f(t) = \operatorname{sen} t$

39. $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$

41. $f(t) = e^{-t}$

43. $f(t) = \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$

45. $y(t) = \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

47. $i(t) = 100[e^{-10(t-1)} - e^{-20(t-1)}]\mathcal{U}(t-1)$
$\quad - 100[e^{-10(t-2)} - e^{-20(t-2)}]\mathcal{U}(t-2)$

49. $\dfrac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

51. $\dfrac{a}{s}\left(\dfrac{1}{bs} - \dfrac{1}{e^{bs}-1}\right)$

53. $\dfrac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}$

55. $i(t) = \dfrac{1}{R}(1-e^{-Rt/L})$
$\quad + \dfrac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-e^{-R(t-n)/L})\mathcal{U}(t-n)$

57. $x(t) = 2(1 - e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t)$
$\quad + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1 - e^{-(t-n\pi)}\cos 3(t-n\pi)$
$\quad - \frac{1}{3}e^{-(t-n\pi)}\operatorname{sen} 3(t-n\pi)]\mathcal{U}(t-n\pi)$

Ejercicios 4.5, página 233

1. $y = e^{3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$

3. $y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

5. $y = -\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi/2) + \cos t\,\mathcal{U}(t-3\pi/2)$

7. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}]\mathcal{U}(t-1)$

9. $y = e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

11. $y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen} 3(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen} 3(t-3\pi)\mathcal{U}(t-3\pi)$

13. $y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{EI}(\frac{1}{4}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3), & 0 \le x < L/2 \\ \dfrac{P_0L^2}{4EI}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}L), & L/2 \le x \le L \end{cases}$

Ejercicios 4.6, página 236

1. $x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$
$\quad y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$

3. $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t$
$\quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$

5. $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$
$\quad y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$

7. $x = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$
$\quad y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$

9. $x = 8 + \dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$
$\quad y = -\dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$

11. $x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t}$
$\quad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

13. $x_1 = \frac{1}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}t + \frac{2}{5}\cos t - \frac{2}{5}\cos\sqrt{6}t$
$\quad x_2 = \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}t + \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}\cos\sqrt{6}t$

15. *b)* $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$
$\quad i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$
c) $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

17. $i_2 = -\frac{20}{13}e^{-2t} + \frac{375}{1\,469}e^{-15t} + \frac{145}{113}\cos t + \frac{85}{113}\operatorname{sen} t$

$i_3 = \frac{30}{13}e^{-2t} + \frac{250}{1\,469}e^{-15t} - \frac{280}{113}\cos t + \frac{810}{113}\operatorname{sen} t$

19. $i_1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{9\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}t$

$i_2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{6\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}t$

Ejercicios de repaso del capítulo 4, página 238

1. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s^2}e^{-s}$

3. falso

5. verdadero

7. $\dfrac{1}{s+7}$

9. $\dfrac{2}{s^2+4}$

11. $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

13. $\frac{1}{6}t^5$

15. $\frac{1}{2}t^2e^{5t}$

17. $e^{5t}\cos 2t + \frac{5}{2}e^{5t}\operatorname{sen} 2t$

19. $\cos \pi(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + \operatorname{sen} \pi(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$

21. -5

23. $e^{-k(s-a)}F(s-a)$

25. $f(t)\,\mathcal{U}(t-t_0)$

27. $f(t-t_0)\,\mathcal{U}(t-t_0)$

29. $f(t) = t - (t-1)\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-4);$

$\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s} - \dfrac{1}{s}e^{-4s};$

$\mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-(s-1)} - \dfrac{1}{s-1}e^{-4(s-1)}$

31. $f(t) = 2 + (t-2)\mathcal{U}(t-2);$

$\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-2s};$

$\mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-2(s-1)}$

33. $y = 5te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$

35. $y = -\frac{6}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{13}{50}e^{-5t} - \frac{4}{25}\mathcal{U}(t-2)$
$- \frac{1}{5}(t-2)\,\mathcal{U}(t-2) + \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2)$
$- \frac{9}{100}e^{-5(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2)$

37. $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

39. $x = -\frac{1}{4} + \frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}$

$y = t + \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$

41. $i(t) = -9 + 2t + 9e^{-t/5}$

43. $y(x) = \dfrac{w_0}{12EIL}\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}Lx^4 - \frac{1}{2}L^2x^3 + \frac{1}{4}L^3x^2 + \frac{1}{5}(x - \frac{1}{2}L)^5\mathcal{U}(x - \frac{1}{2}L)\right]$

45. $\theta_1(t) = \dfrac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos \omega t + \dfrac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2K}t$

$\theta_2(t) = \dfrac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos \omega t - \dfrac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2K}t$

Ejercicios 5.1, página 250

1. $R = \frac{1}{2}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3. $R = 10, (-5, 15)$

5. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots$

7. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, (-\pi/2, \pi/2)$

9. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_{k-2}x^k$

11. $2c_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k$

15. 5; 4

17. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{3\cdot 2}x^3 + \dfrac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \dfrac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{4\cdot 3}x^4 + \dfrac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \dfrac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

19. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{2!}x^2 - \dfrac{3}{4!}x^4 - \dfrac{21}{6!}x^6 - \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{5}{5!}x^5 + \dfrac{45}{7!}x^7 + \cdots\right]$

21. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{4^2}{6!}x^6 - \dfrac{7^2\cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{2^2}{4!}x^4 + \dfrac{5^2\cdot 2^2}{7!}x^7 - \dfrac{8^2\cdot 5^2\cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

23. $y_1(x) = c_0;\ y_2(x) = c_1\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

25. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots\right]$

27. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{7}{4\cdot 4!}x^4 + \dfrac{23\cdot 7}{8\cdot 6!}x^6 - \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{14}{2\cdot 5!}x^5 + \dfrac{34\cdot 14}{4\cdot 7!}x^7 - \cdots\right]$

29. $y(x) = -2\left[1 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] + 6x$
$= 8x - 2e^x$

31. $y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$

33. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{180}x^6 + \cdots\right]$

Ejercicios 5.2, página 258

1. $x = 0$, punto singular irregular

3. $x = -3$, punto singular regular; $x = 3$, punto singular irregular

5. $x = 0, 2i, -2i$, puntos singulares regulares

7. $x = -3, 2$, puntos singulares regulares

9. $x = 0$, punto singular irregular; $x = -5, 5, 2$, puntos singulares regulares

11. para $x = 1$: $p(x) = 5$, $q(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x+1}$

para $x = -1$: $p(x) = \dfrac{5(x+1)}{x-1}$, $q(x) = x^2 + x$

13. $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = -1$

15. $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{3/2}\left[1 - \frac{2}{5}x + \frac{2^2}{7\cdot 5\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + 2x - 2x^2 + \frac{2^3}{3\cdot 3!}x^3 - \cdots\right]$$

17. $r_1 = \frac{7}{8}$, $r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{7/8}\left[1 - \frac{2}{15}x + \frac{2^2}{23\cdot 15\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{31\cdot 23\cdot 15\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 - 2x + \frac{2^2}{9\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{17\cdot 9\cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$$

19. $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{1/3}\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2\cdot 2}x^2 + \frac{1}{3^3\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5\cdot 2}x^2 + \frac{1}{8\cdot 5\cdot 2}x^3 + \cdots\right]$$

21. $r_1 = \frac{5}{2}$, $r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{5/2}\left[1 + \frac{2\cdot 2}{7}x + \frac{2^2\cdot 3}{9\cdot 7}x^2 + \frac{2^3\cdot 4}{11\cdot 9\cdot 7}x^3 + \cdots\right]$$

23. $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$

$$y(x) = C_1 x^{2/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots\right] + C_2 x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \cdots\right]$$

25. $r_1 = 0$, $r_2 = -1$

$$y(x) = C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} + C_2 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$= C_1 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + C_2 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$= \frac{1}{x}[C_1 \operatorname{senh} x + C_2 \cosh x]$$

27. $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x + C_2\left[x\ln x - 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{72}x^4 + \cdots\right]$$

29. $r_1 = r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 y(x) + C_2\left[y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4\cdot 4!}x^4 - \cdots\right)\right]$$

donde $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x$

33. ***b)*** $y_1(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}t}$

$y_2(t) = t^{-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n} = \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)}{t}$

c) $y = c_1 x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}\right) + c_2 x\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$

Ejercicios 5.3, página 269

1. $y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$

3. $y = c_1 J_{5/2}(x) + c_2 J_{-5/2}(x)$

5. $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$

7. $y = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$

9. $y = c_1 J_{2/3}(5x) + c_2 J_{-2/3}(5x)$

11. $y = c_1 x^{-1/2}J_{1/2}(\alpha x) + c_2 x^{-1/2}J_{-1/2}(\alpha x)$

13. $y = x^{-1/2}[c_1 J_1(4x^{1/2}) + c_2 Y_1(4x^{1/2})]$

15. $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

17. $y = x^{1/2}[c_1 J_{3/2}(x) + c_2 Y_{3/2}(x)]$

19. $y = x^{-1}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{2}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{2}x^2)]$

23. $y = x^{1/2}[c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)]$
$= C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

25. $y = x^{-1/2}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{8}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{8}x^2)]$
$= C_1 x^{-3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{8}x^2) + C_2 x^{-3/2}\cos(\frac{1}{8}x^2)$

35. $y = c_1 x^{1/2}J_{1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}) + c_2 x^{1/2}J_{-1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$

45. $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$ se proporcionan en el texto
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$,
$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

47. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 30$

Ejercicios de repaso del capítulo 5, página 272

1. falso

3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

7. $x^2(x-1)y'' + y' + y = 0$

9. $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1 x^{1/2}[1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{630}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \cdots]$

11. $y_1(x) = c_0[1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots]$

13. $r_1 = 3, r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1x^3[1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{120}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 + x + \frac{1}{2}x^2]$

15. $y(x) = 3[1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^6 + \cdots] - 2[x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{48}x^7 + \cdots]$

17. $\frac{1}{6}\pi$

19. $x = 0$ es un punto ordinario

21. $$y(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right] + c_1\left[x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4 \cdot 7}x^7 - \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10}x^{10} + \cdots\right] + \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right]$$

23. ***a***) $y = c_1J_{3/2}(4x) + c_2Y_{3/2}(4x)$
b) $y = c_1I_3(6x) + c_2K_3(6x)$

Ejercicios 6.1, página 279

1. para $h = 0.1$, $y_5 = 2.0801$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 2.0592$
3. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5470$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5465$
5. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.4053$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4054$
7. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5503$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5495$
9. para $h = 0.1$, $y_5 = 1.3260$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 1.3315$
11. para $h = 0.1$, $y_5 = 3.8254$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 3.8840$;
para $x = 0.5$ el valor real es $y(0.5) = 3.9082$

13. ***a***) $y_1 = 1.2$
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 = 4e^{2c}\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.02e^{2c} \leq 0.02e^{0.2} = 0.0244$
c) El valor real es $y(0.1) = 1.2214$. El error es 0.0214.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 1.21$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0214. El error con $h = 0.05$ es 0.0114.

15. ***a***) $y_1 = 0.8$
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 = 5e^{-2c}\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.025e^{-2c} \leq 0.025$ para $0 \leq c \leq 0.1$
c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234$. El error es 0.0234.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.8125$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0234. El error con $h = 0.05$ es 0.0109.

17. ***a***) El error es $19h^2e^{-3(c-1)}$.
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 \leq 19(0.1)^2(1) = 0.19$
c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 1.8207$. Si $h = 0.05$, $y_{10} = 1.9424$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.2325. El error con $h = 0.05$ es 0.1109.

19. ***a***) El error es $\frac{1}{(c+1)^2}\frac{1}{2}h^2$.
b) $|y''(c)\frac{1}{2}h^2| \leq (1)\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.005$
c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 0.4198$. Si $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4124$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.0143. El error con $h = 0.05$ es 0.0069.

Ejercicios 6.2, página 283

1. $y_5 = 3.9078$; el valor real es $y(0.5) = 3.9082$
3. $y_5 = 2.0533$
5. $y_5 = 0.5463$
7. $y_5 = 0.4055$
9. $y_5 = 0.5493$
11. $y_5 = 1.3333$
13. ***a***) 35.7678
c) $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\sqrt{\frac{kg}{m}}t$; $v(5) = 35.7678$

15. ***a***) $h = 0.1$, $y_4 = 903.0282$;
$h = 0.05$, $y_8 = 1.1 \times 10^{15}$

17. ***a***) $y_1 = 0.82341667$
b) $y^{(5)}c)\frac{h^5}{5!} = 40e^{-2c}\frac{h^5}{5!} \leq 40e^{2(0)}\frac{(0.1)^5}{5!} = 3.333 \times 10^{-6}$
c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234134413$. El error es $3.225 \times 10^{-6} \leq 3.333 \times 10^{-6}$.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.82341363$.
e) Error con $h = 0.1$ es 3.225×10^{-6}. Error con $h = 0.05$ es 1.854×10^{-7}.

19. ***a***) $y^{(5)}(c)\frac{h^5}{5!} = \frac{24}{(c+1)^5}\frac{h^5}{5!}$
b) $\frac{24}{(c+1)^5}\frac{h^5}{5!} \leq 24\frac{(0.1)^5}{5!} = 2.0000 \times 10^{-6}$
c) A partir de los cálculos con $h = 0.1$, $y_5 = 0.40546517$.
A partir de los cálculos con $h = 0.05$, $y_{10} = 0.40546511$.

Ejercicios 6.3, página 286

1. $y(x) = -x + e^x$; los valores reales son $y(0.2) = 1.0214$, $y(0.4) = 1.0918$, $y(0.6) = 1.2221$, $y(0.8) = 1.4255$; las aproximaciones se proporcionan en el ejemplo 1
3. $y_4 = 0.7232$
5. para $h = 0.2$, $y_5 = 1.5569$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 1.5576$
7. para $h = 0.2$, $y_5 = 0.2385$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 0.2384$

Ejercicios 6.4, página 290

1. $y(x) = -2e^{2x} + 5xe^{2x}$; $y(0.2) = -1.4918$, $y_2 = -1.6800$
3. $y_1 = -1.4928$, $y_2 = -1.4919$
5. $y_1 = 1.4640$, $y_2 = 1.4640$
7. $x_1 = 8.3055$, $y_1 = 3.4199$; $x_2 = 8.3055$, $y_2 = 3.4199$
9. $x_1 = -3.9123$, $y_1 = 4.2857$; $x_2 = -3.9123$, $y_2 = 4.2857$
11. $x_1 = 0.4179$, $y_1 = -2.1824$; $x_2 = 0.4173$, $y_2 = -2.1821$

Ejercicios 6.5, página 293

1. $y_1 = -5.6774$, $y_2 = -2.5807$, $y_3 = 6.3226$
3. $y_1 = -0.2259$, $y_2 = -0.3356$, $y_3 = -0.3308$, $y_4 = -0.2167$
5. $y_1 = 3.3751$, $y_2 = 3.6306$, $y_3 = 3.6448$, $y_4 = 3.2355$, $y_5 = 2.1411$
7. $y_1 = 3.8842$, $y_2 = 2.9640$, $y_3 = 2.2064$, $y_4 = 1.5826$, $y_5 = 1.0681$, $y_6 = 0.6430$, $y_7 = 0.2913$
9. $y_1 = 0.2660$, $y_2 = 0.5097$, $y_3 = 0.7357$, $y_4 = 0.9471$, $y_5 = 1.1465$, $y_6 = 1.3353$, $y_7 = 1.5149$, $y_8 = 1.6855$, $y_9 = 1.8474$
11. $y_1 = 0.3492$, $y_2 = 0.7202$, $y_3 = 1.1363$, $y_4 = 1.6233$, $y_5 = 2.2118$, $y_6 = 2.9386$, $y_7 = 3.8490$
13. *c*) $y_0 = -2.2755$, $y_1 = -2.0755$, $y_2 = -1.8589$, $y_3 = -1.6126$, $y_4 = -1.3275$

Ejercicios de repaso del capítulo 6, página 294

1. Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1386	2.1549	2.1556
1.20	2.3097	2.3439	2.3454
1.30	2.5136	2.5672	2.5695
1.40	2.7504	2.8246	2.8278
1.50	3.0201	3.1157	3.1197

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1469	2.1554	2.1556
1.20	2.3272	2.3450	2.3454
1.30	2.5410	2.5689	2.5695
1.40	2.7883	2.8269	2.8278
1.50	3.0690	3.1187	3.1197

3. Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6000	0.6048	0.6049
0.70	0.7095	0.7191	0.7194
0.80	0.8283	0.8427	0.8431
0.90	0.9559	0.9752	0.9757
1.00	1.0921	1.1163	1.1169

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6024	0.6049	0.6049
0.70	0.7144	0.7194	0.7194
0.80	0.8356	0.8431	0.8431
0.90	0.9657	0.9757	0.9757
1.00	1.1044	1.1170	1.1169

5. $h = 0.2$: $y(0.2) \approx 3.2$; $h = 0.1$: $y(0.2) \approx 3.23$
7. $x(0.2) \approx 1.62$, $y(0.2) \approx 1.84$

Ejercicios 7.1, página 302

1. 2×4 **3.** 3×3 **5.** 3×4
7. no es igual **9.** no es igual
11. $x = 2, y = 4$ **13.** $c_{23} = 9, c_{12} = 12$
15. $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 14 & -19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix};$
$\begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
21. $180; \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \end{pmatrix}$ **29.** 4×5
37. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
39. **AB** no es necesariamente igual a **BA**.
41. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$
45. *b*) $M_R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$

$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $x_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 6}{8} \approx 1.4072$

$y_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 2}{8} \approx 0.2948$

$z_S = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} \approx 0.9659$

Ejercicios 7.2, página 314

1. $x_1 = 4, x_2 = -7$ **3.** $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$
5. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$ **7.** $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 0$
9. inconsistente **11.** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
13. $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 4$ **15.** $x_1 = 1, x_2 = 2 - t, x_3 = t$
17. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$
19. inconsistente
21. $x_1 = 0.3, x_2 = -0.12, x_3 = 4.1$
23. $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$
25. $Fe_3O_4 + 4C \rightarrow 3Fe + 4CO$
27. $3Cu + 8NHO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$
29. $i_1 = \frac{35}{9}, i_2 = \frac{38}{9}, i_3 = \frac{1}{3}$
31. Intercambie los renglones 1 y 2 en $\mathbf{I}_3$.
33. Multiplique el segundo renglón de $\mathbf{I}_3$ por c y súmelo al tercer renglón.

35. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

37. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{21} + a_{31} & ca_{22} + a_{32} & ca_{23} + a_{33} \end{pmatrix}$

39. $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$

41. $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 7.3, página 319

1. 2 **3.** 1 **5.** 3
7. 2 **9.** 3 **11.** linealmente independiente
13. linealmente independiente **15.** 5
17. rango(**A**) = 2

Ejercicios 7.4, página 325

1. 9 **3.** 1 **5.** 2 **7.** 10 **9.** –7
11. 17 **13.** $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ **15.** –48
17. 62 **19.** 0 **21.** –85
23. $-x + 2y - z$ **25.** –104 **27.** 48
29. $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 7$

Ejercicios 7.5, página 331

1. Teorema 7.5.4 **3.** Teorema 7.5.7
5. Teorema 7.5.5 **7.** Teorema 7.5.3
9. Teorema 7.5.1 **11.** –5 **13.** –5
15. 80 **17.** –105 **23.** 0 **25.** –15
27. –9 **29.** 0 **31.** 16

Ejercicios 7.6, página 340

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{13}{30} & -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{27} & \frac{17}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{17}{9} \\ \frac{4}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

19. Matriz singular **21.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **31.** $x = 5$

35. Mediante el teorema 7.5.6, det **AB** = det **A** det **B**. Puesto que det **A** ≠ 0 y det **B** ≠ 0, se puede deducir que det **AB** ≠ 0. De acuerdo con el teorema 7.6.3, **AB** es no singular.

37. El resultado se deduce a partir de det $(\mathbf{AA}^{-1})$ = det **I**.

39. Multiplique **AB** = **0** por $\mathbf{A}^{-1}$. **41.** no

43. $x_1 = 6, x_2 = -2$ **45.** $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}$

47. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -6$ **49.** $x_1 = 21, x_2 = 1, x_3 = -11$

51. $x_1 = \frac{9}{10}, x_2 = \frac{13}{20}$;
$x_1 = 6, x_2 = 16$;
$x_1 = -2, x_2 = -7$

53. El sistema tiene solamente una solución trivial.

55. El sistema tiene soluciones no triviales.

57. $i_1 = \dfrac{-R_3E_2 + R_3E_1 + R_2E_1 - R_2E_3}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$,

$i_2 = \dfrac{R_3E_2 - R_3E_1 - R_1E_3 + R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$,

$i_3 = \dfrac{-R_2E_1 + R_1E_3 + R_2E_3 - R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$

Ejercicios 7.7, página 344

1. $x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ **3.** $x_1 = 0.1, x_2 = -0.3$
5. $x = 4, y = -7$ **7.** $x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -5$
9. $u = 4, v = \frac{3}{2}, w = 1$ **11.** $k = \frac{6}{5}$
13. $T_1 \approx 450.8$ lb, $T_2 \approx 423$ lb

Ejercicios 7.8, página 349

1. $\mathbf{K}_3, \lambda = -1$ **3.** $\mathbf{K}_3, \lambda = 0$

5. $\mathbf{K}_2, \lambda = 3; \mathbf{K}_3, \lambda = 1$

7. $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$

13. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$

15. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$$

21. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -7$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

23. Para $\mathbf{A}$, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

25. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$

Ejercicios 7.9, página 353

3. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{7}[3(-1)^m 2^{m+1} + 5^m] & -\frac{3}{7}[(-2)^m - 5^m] \\ -\frac{2}{7}[(-2)^m - 5^m] & \frac{1}{7}[(-2)^m - 6(5)^m] \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 57 \\ 38 & 106 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + (-1)^m] & \frac{5}{3}2^{m-2}[5^m - (-1)^m] \\ \frac{1}{3}[10^m - (-2)^m] & \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + 5(-1)^m] \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 83328 & 41680 \\ 33344 & 16640 \end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 & 2^m - 1 \\ 0 & \frac{1}{3}[2^{m+1} + (-1)^m] & \frac{2}{3}[2^m - (-1)^m] \\ 0 & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m] \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1023 & 1023 \\ 0 & 683 & 682 \\ 0 & 341 & 342 \end{pmatrix}$$

9. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} - (-1)^m 2^{m+1}] & \frac{1}{3}[4^m + (-1)^m 2^{m+1}] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m - 3] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 699392 & 349184 & 0 \\ 698368 & 350208 & 0 \\ 699391 & 349184 & 1 \end{pmatrix}$$

11. $$\begin{pmatrix} 7m4^{m+1} + (1 - m)4^m & 3m4^{m-1} \\ -3m4^{m-1} & m4^{m-1} + (1 - m)4^m \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 22528 & 18432 \\ -18432 & -14336 \end{pmatrix}$$

13. ***a)*** $4^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, m > 1$

b) $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}, m > 1$

c)

$$\begin{pmatrix} 2(3)^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ \frac{1}{6}[9(2)^m - 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m - 2(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m - 2(3)^m] \\ \frac{1}{6}[-9(2)^m + 8(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m + 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m + 4(3)^m] \end{pmatrix}$$

15. $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ **17.** *b)*-*f)*

Ejercicios 7.10, página 360

1. ***b)*** $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 16$

3. ***b)*** $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = \lambda_3 = -8$ **5.** ortogonal

7. ortogonal **9.** no ortogonal

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

15. $$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

17. $$\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

19. $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{3}{5}$

21. ***b)*** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

c) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

23. Utilice $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Ejercicios 7.11, página 367

1. $2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3.** $14, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **5.** $10, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

7. 7 y 2 **9.** 4, 3 y 1

11. aproximadamente 0.2087

13. ***c)*** $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d) 0.59

e) aproximadamente 9.44 EI/L^2

Ejercicios 7.12, página 375

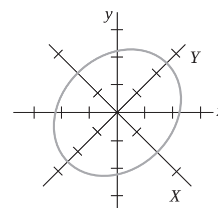
1. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. no diagonalizable

5. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$



11. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. no diagonalizable

17. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

31. Elipse; utilizando

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\mathbf{X}'$

obtenemos $X^2/4 + Y^2/6 = 1$.

33. Hipérbola; utilizando

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\mathbf{X}'$

obtenemos $X^2/4 - Y^2/4 = 1$.

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}$

Ejercicios 7.13, página 379

1. *a)* $\begin{pmatrix} 35 & 15 & 38 & 36 & 0 \\ 27 & 10 & 26 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

3. *a)* $\begin{pmatrix} 48 & 64 & 120 & 107 & 40 \\ 32 & 40 & 75 & 67 & 25 \end{pmatrix}$

5. *a)* $\begin{pmatrix} 31 & 44 & 15 & 61 & 50 & 49 & 41 \\ 24 & 29 & 15 & 47 & 35 & 31 & 21 \\ 1 & -15 & 15 & 0 & -15 & -5 & -19 \end{pmatrix}$

7. STUDY_HARD

9. MATH_IS_IMPORTANT_

11. DAD_I_NEED_MONEY_TODAY

13. *a)* $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 21 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 23 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 26 & 12 \end{pmatrix}$

Ejercicios 7.14, página 384

1. (0 1 1 0)
3. (0 0 0 1 1)
5. (1 0 1 0 1 0 0 1)
7. (1 0 0)
9. error de paridad
11. (1 0 0 1 1)
13. (0 0 1 0 1 1 0)
15. (0 1 0 0 1 0 1)
17. (1 1 0 0 1 1 0)
19. palabra de código; (0 0 0 0)
21. (0 0 0 1)
23. palabra de código (1 1 1 1)
25. (1 0 0 1)
27. (1 0 1 0)
29. *a)* $2^7 = 128$ *b)* $2^4 = 16$
c) (0 0 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 1 0 1),
(0 1 1 0 0 1 1), (0 1 0 1 0 1 0),
(0 1 1 1 1 0 0), (0 0 1 0 1 1 0),
(0 0 1 1 0 0 1), (0 0 0 1 1 1 1),
(1 0 0 0 0 1 1), (1 1 0 0 1 1 0),
(1 0 1 0 1 0 1), (1 0 0 1 1 0 0),
(1 1 1 0 0 0 0), (1 1 0 1 0 0 1),
(1 0 1 1 0 1 0), (1 1 1 1 1 1 1)

Ejercicios 7.15, página 387

1. $y = 0.4x + 0.6$ **3.** $y = 1.1x - 0.3$
5. $y = 1.3571x + 1.9286$
7. $v = -0.84T + 234$, 116.4, 99.6

Ejercicios 7.16, página 391

1. *a)* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 96 \\ 54 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 98.4 \\ 51.6 \end{pmatrix}$ *c)* $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$

3. *a)* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ 72 \end{pmatrix}$ *d)* $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$

Ejercicios de repaso del capítulo 7, página 392

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, (11) **5.** falso

7. $\frac{5}{8}, -5$ **9.** 0 **11.** falso **13.** verdadero

15. falso **17.** verdadero

19. falso

23. *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

25. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 7, x_3 = \frac{1}{2}$

29. 240

31. solamente la solución trivial

33. 
$I_2 + 10HNO_3 \rightarrow 2HIO_3 + 10NO_2 + 4H_2O$

35. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{2}{3}$

37. $x = X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta$,
$y = X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta$

39. $x_1 = 7, x_2 = 5, x_3 = 23$

41. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

43. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$,
$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

45. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$,
$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

49. hipérbola

51.
$$\begin{pmatrix} 204 & 13 & 208 & 55 & 124 & 120 & 105 & 214 & 50 & 6 & 138 & 19 & 210 \\ 185 & 12 & 188 & 50 & 112 & 108 & 96 & 194 & 45 & 6 & 126 & 18 & 189 \end{pmatrix}$$

53. HELP_IS_ON_THE_WAY

55. (1 1 0 0 1); error de paridad

Ejercicios 8.1, página 402

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 6 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

7. $\frac{dx}{dt} = 4x + 2y + e^t$
$\frac{dy}{dt} = -x + 3y - e^t$

9. $\frac{dx}{dt} = x - y + 2z + e^{-t} - 3t$
$\frac{dy}{dt} = 3x - 4y + z + 2e^{-t} + t$
$\frac{dz}{dt} = -2x + 5y + 6z + 2e^{-t} - t$

17. Sí; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -2e^{-8t} \neq 0$ implica que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes e $(-\infty, \infty)$.

19. No; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$ para toda t. Los vectores solución son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Observe que $\mathbf{X}_3 = 2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$.

Ejercicios 8.2, página 414

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}e^{t}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}e^{-10t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}e^{-t/2}$
$+ c_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t/2}$

13. $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t/2} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right]$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t}$
$+ c_3\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}te^{5t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t}\right]$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^t\right]$

$+ c_3\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}e^t\right]$

29. $\mathbf{X} = -7\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t} + 13\begin{pmatrix}2t+1\\t+1\end{pmatrix}e^{4t}$

31. Correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad cinco, los vectores propios son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

33. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\2\cos t + \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\2\operatorname{sen} t - \cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

35. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\cos t - \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

37. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}5\cos 3t\\4\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} 3t\\4\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t\end{pmatrix}$

39. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\cos t\\\cos t\\\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t\\\cos t\end{pmatrix}$

41. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\\cos t\\\cos t\end{pmatrix}e^t + c_3\begin{pmatrix}\cos t\\-\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t$

43. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}28\\-5\\25\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}5\cos 3t\\-4\cos 3t - 3\operatorname{sen} 3t\\0\end{pmatrix}e^{-2t}$

$+ c_3\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} 3t\\-4\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t\\0\end{pmatrix}e^{-2t}$

45. $\mathbf{X} = -\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}\cos 5t - 5\operatorname{sen} 5t\\\cos 5t\\\cos 5t\end{pmatrix}$

$+ 6\begin{pmatrix}5\cos 5t + \operatorname{sen} 5t\\\operatorname{sen} 5t\\\operatorname{sen} 5t\end{pmatrix}$

Ejercicios 8.3, página 417

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}3c_1e^{7t} - 2c_2e^{-4t}\\c_1e^{7t} + 3c_2e^{-4t}\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{t/2} + c_2e^{3t/2}\\-2c_1e^{t/2} + 2c_2e^{3t/2}\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}-c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}\\c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}\\c_2e^{2t} + c_3e^{6t}\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{-t} - c_2e^{2t} - c_3e^{2t}\\c_1e^{-t} + c_2e^{2t}\\c_1e^{-t} + c_3e^{2t}\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t}\\c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 4c_3e^{3t}\\c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 5c_3e^{3t}\end{pmatrix}$

11. *a*) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix}k_1 + k_2 & -k_2\\-k_2 & k_2\end{pmatrix}$

Puesto que **M** es una matriz diagonal donde m_1 y m_2 son diferentes de cero, tiene una inversa.

b) $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix}\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1}\\-\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2}\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cos t + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\operatorname{sen} t$

$+ c_3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cos\sqrt{6}t + c_4\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen}\sqrt{6}t$

Ejercicios 8.4, página 424

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}t^2$

$+ \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}e^{7t} + \begin{pmatrix}\frac{55}{36}\\-\frac{19}{4}\end{pmatrix}e^{t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\\2\end{pmatrix}e^{4t}$

9. $\mathbf{X} = 13\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{t} - \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

13.

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t/2} + c_2\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}e^{3t/2} - \begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{13}{4}\end{pmatrix}te^{t/2} - \begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}e^{t/2}$

15. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}te^{t}$

17. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}-t\\\frac{1}{2} - t\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}te^t$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t \tan t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}3\operatorname{sen} t\\ \frac{3}{2}\cos t\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\operatorname{sen} t| + \begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\cos t|$

29. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ -e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ \frac{1}{2}t^2e^{3t}\end{pmatrix}$

31. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}te^{4t} + \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}e^{4t}$

33. $\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}e^{-12t} - \frac{4}{29}\begin{pmatrix}19\\ 42\end{pmatrix}\cos t + \frac{4}{29}\begin{pmatrix}83\\ 69\end{pmatrix}\operatorname{sen} t$

35. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2 - \frac{41}{10}t - \frac{41}{110} + c_1 + c_2e^{10t}\\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{39}{10}t - \frac{41}{110} - c_1 + c_2e^{10t}\end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}e^{-12t} + \begin{pmatrix}\frac{332}{29}\\ \frac{276}{29}\end{pmatrix}\operatorname{sen} t - \begin{pmatrix}\frac{76}{29}\\ \frac{168}{29}\end{pmatrix}\cos t$

Ejercicios 8.5, página 428

1. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$; $e^{-\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$

3. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}t+1 & t & t\\ t & t+1 & t\\ -2t & -2t & -2t+1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + c_4\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cosh t\\ \operatorname{senh} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{senh} t\\ \cosh t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}e^{2t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^{-2t}$

17. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{2t} + 3te^{2t} & -9te^{2t}\\ te^{2t} & e^{2t} - 3te^{2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1 + 3t\\ t\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}-9t\\ 1 - 3t\end{pmatrix}e^{2t}$

19. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{6t} & \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\\ \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{6t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{6t}\\ \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\\ \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{6t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^t + c_4\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^{6t}$

21. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{3t} & -2e^{-t} + 2e^{3t}\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t} + 2e^{3t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{3t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{5t}\\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t}\\ -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{5t}$

Ejercicios de repaso del capítulo 8, página 429

1. $k = \frac{1}{3}$ 5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^t\right]$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}e^t$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{4t} + c_1\begin{pmatrix}7\\ 12\\ -16\end{pmatrix}e^{-3t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}16\\ -4\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}11\\ -1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t - \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix}\ln|\csc t - \cot t|$

15. *b*) $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t}$

Ejercicios 9.1, página 437

1. $x' = y$
$y' = -9 \text{ sen } x$; puntos críticos en $(\pm n\pi, 0)$

3. $x' = y$
$y' = x^2 + y(x^3 - 1)$; punto crítico en $(0, 0)$

5. $x' = y$
$y' = \epsilon x^3 - x$;
puntos críticos en $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right)$

7. $(0, 0)$ y $(-1, -1)$

9. $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

11. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 16)$ y $(4, 12)$

13. $(0, y)$, y arbitrariamente

15. $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$

17. ***a***) $x = c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}$
$y = 2c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$
b) $x = -2e^{-t}$
$y = 2e^{-t}$

19. ***a***) $x = c_1(4 \cos 3t - 3 \text{ sen } 3t) + c_2(4 \text{ sen } 3t + 3 \cos 3t)$
$y = c_1(5 \cos 3t) + c_2(5 \text{ sen } 3t)$
b) $x = 4 \cos 3t - 3 \text{ sen } 3t$
$y = 5 \cos 3t$

21. ***a***) $x = c_1(\text{sen } t - \cos t)e^{4t} + c_2(-\text{sen } t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2c_1(\cos t)e^{4t} + 2c_2(\text{sen } t)e^{4t}$
b) $x = (\text{sen } t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2(\cos t)e^{4t}$

23. $r = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4t + c_1}}$, $\theta = t + c_2$; $r = 4\dfrac{1}{\sqrt[4]{1\,024t + 1}}$, $\theta = t$;
$\theta = t$; las espirales solución hacia el origen a medida que aumenta t.

25. $r = \dfrac{1}{\sqrt{1 + c_1 e^{-2t}}}$, $\theta = t + c_2$; ; $r = 1$, $\theta = t$ (o $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$) es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$; $r = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}}$, $\theta = t$ es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$. Esta solución forma una espiral hacia el círculo $r = 1$ a medida que aumenta t.

27. No existen puntos críticos y, por lo tanto, no hay soluciones periódicas.

29. Parece ser una solución periódica que encierra al punto crítico $(0, 0)$.

Ejercicios 9.2, página 444

1. ***a***) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está sobre la línea $y = 2x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de esta línea. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ desde la dirección determinada por la línea $y = -x/2$.

3. ***a***) Todas las soluciones son espirales inestables que no tienen límite a medida que t aumenta.

5. ***a***) Todas las soluciones se aproximan a $(0, 0)$ en la dirección especificada por la línea $y = x$.

7. ***a***) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está sobre la línea $y = 3x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de esta línea. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ no tiene límites y $y = x$ sirve como la asíntota.

9. punto de equilibrio **11.** punto de equilibrio

13. nodo estable degenerado **15.** espiral estable

17. $|\mu| < 1$

19. $\mu < -1$ para un punto de equilibrio; $-1 < \mu < 3$ para un punto espiral inestable.

23. ***a***) $(-3, 4)$
b) nodo inestable o punto de equilibrio
c) $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

25. ***a***) $(\frac{1}{2}, 2)$
b) punto espiral inestable
c) $(0, 0)$ es un punto espiral inestable.

Ejercicios 9.3, página 452

1. $r = r_0 e^{\alpha t}$

3. $x = 0$ es inestable; $x = n + 1$ es asintóticamente estable.

5. $T = T_0$ es inestable.

7. $x = \alpha$ es inestable; $x = \beta$ es asintóticamente estable.

9. $P = a/b$ es asintóticamente estable; $P = c$ es inestable.

11. $(\frac{1}{2}, 1)$ es un punto espiral estable.

13. $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ son puntos silla; $(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ es un punto espiral estable.

15. $(1, 1)$ es un nodo estable; $(1, -1)$ es un punto de equilibrio; $(2, 2)$ es un punto de equilibrio; $(2, -2)$ es un punto espiral inestable.

17. $(0, -1)$ es un punto de equilibrio; $(0, 0)$ es no clasificado; $(0, 1)$ es estable, sin embargo, no podemos clasificarlo.

19. $(0, 0)$ es un nodo inestable; $(10, 0)$ es un punto de equilibrio; $(0, 16)$ es un punto de equilibrio; $(4, 12)$ es un nodo estable.

21. $\theta = 0$ es un punto de equilibrio. No es posible clasificar $\theta = \pi/3$ o $\theta = -\pi/3$.

23. No es posible clasificar $x = 0$.

25. No es posible clasificar $x = 0$, sin embargo $x = 1/\sqrt{\varepsilon}$ y $x = -1/\sqrt{\varepsilon}$ son puntos de equilibrio.

29. ***a***) $(0, 0)$ es un punto espiral estable.

33. ***a***) $(1, 0)$, $(-1, 0)$ **35.** $|v_0| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

37. Si $\beta > 0$, $(0, 0)$ es el único punto crítico y es estable. Si $\beta < 0$, $(0, 0)$, $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$, donde $\hat{x}^2 = -\alpha/\beta$, son puntos críticos. $(0, 0)$ es estable, mientras que $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$ son puntos silla.

39. ***b***) $(5\pi/6, 0)$ es un punto de equilibrio.
c) $(\pi/6, 0)$ es un centro.

Ejercicios 9.4, página 459

1. $|\omega_0| < \sqrt{3g/L}$

5. ***a***) Primero demuestre que $y^2 = v_0^2 + g \ln\left(\dfrac{1 + x^2}{1 + x_0^2}\right)$.

9. ***a***) El nuevo punto crítico es $(d/c - \epsilon_2/c, a/b + \epsilon_1/b)$.
b) sí

11. $(0, 0)$ es un nodo inestable, $(0, 100)$ es un nodo estable, $(50, 0)$ es un nodo estable, y $(20, 40)$ es un punto de equilibrio.

17. ***a***) $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Ejercicios 9.5, página 467

1. El sistema no tiene puntos críticos.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2 < 0$

5. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\mu + 9y^2 > 0$ si $\mu < 0$

7. El único punto crítico $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

9. $\delta(x, y) = e^{-y/2}$

11. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 4(1 - x^2 - 3y^2) > 0$ para $x^2 + 3y^2 < 1$

13. Utilice $\delta(x, y) = 1/(xy)$ y demuestre que,
$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta Q)}{\partial y} = -\frac{r}{Kx}.$$

15. Si $\mathbf{n} = (-2x, -2y)$, demuestre que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 2(x - y)^2 + 2y^4$.

17. Sí; el único punto crítico (0, 0) está ubicado fuera de la región invariante $\frac{1}{16} \le x^2 + y^2 \le 1$, por lo que se puede aplicar el teorema 9.5.5*ii*).

19. $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 2y^2(1 - x^2) \ge 2y^2(1 - r^2)$ y $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = x^2 - 1 < 0$. El único punto crítico es (0, 0) y es un punto espiral estable. Por lo tanto, el teorema 9.5.6*ii*) se puede aplicar.

21. ***a***) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xy - 1 - x^2 \le 2x - 1 - x^2 = -(x - 1)^2 \le 0$

b) $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (\frac{3}{2}, \frac{2}{9})$, es un punto espiral estable

Ejercicios de repaso del capítulo 9, página 469

1. verdadero
3. centro o punto de equilibrio
5. falso
7. falso
9. verdadero

11. $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3t + 1}}$, $\theta = t$; la curva solución forma una espiral hacia el origen.

13. centro; nodo estable degenerado

15. nodo estable para $\mu < -2$; punto espiral estable para $-2 < \mu < 0$; punto espiral inestable para $0 < \mu < 2$; nodo inestable para $\mu > 2$

17. Demuestre que $y^2 = (1 + x_0^2 - x^2)^2 - 1$.

19. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1$

21. ***a***) *Sugerencia*: Utilice el criterio negativo de Bendixson.

d) En *b*), (0, 0) es un punto espiral estable cuando $\beta < 2ml \times \sqrt{g/l - \omega^2}$. En *c*), $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$ son puntos espirales estables cuando $\beta < 2ml\sqrt{\omega^2 - g^2/(\omega^2 l^2)}$.

Ejercicios 10.1, página 477

7. $\sqrt{\pi}/2$
9. $\sqrt{\pi/2}$

11. $\|1\| = \sqrt{p}$; $\left\|\cos\dfrac{n\pi}{p}x\right\| = \sqrt{\dfrac{p}{2}}$

21. ***a***) $T = 1$ ***b***) $T = \pi L/2$ ***c***) $T = 2\pi$ ***d***) $T = \pi$ ***e***) $T = 2\pi$ ***f***) $T = 2p$

Ejercicios 10.2, página 482

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

5. $$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right)\operatorname{sen} nx\right\}$$

7. $f(x) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}\cos nx$

11. $$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{3}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x\right\}$$

13. $$f(x) = \frac{9}{4} + 5\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{5}x + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}x\right\}$$

15. $f(x) = \dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 + n^2}(\cos nx - n\operatorname{sen} nx)\right]$

19. Fije el valor de $x = \pi/2$.

Ejercicios 10.3, página 487

1. impar
3. ni par ni impar
5. par
7. impar
9. ni par ni impar

11. $f(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

13. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$

17. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$

19. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n(1 + \pi)}{n}\operatorname{sen} nx$

21. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$

23. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2}\cos nx$

25. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\cos n\pi x$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

27. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}\cos 2nx$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2 - 1}\operatorname{sen} 2nx$

29. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen} nx$

31. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos\dfrac{n\pi}{2}x$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{2}{n\pi}(-1)^n\right\}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}x$

33. $f(x) = \dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x$

$f(x) = 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \dfrac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}\right\}\operatorname{sen} n\pi x$

35. $f(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n^2}\cos nx - \dfrac{\pi}{n}\operatorname{sen} nx\right\}$

37. $f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen} 2n\pi x$

39. $x_p(t) = \dfrac{10}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n(10 - n^2)}\operatorname{sen} nt$

41. $x_p(t) = \dfrac{\pi^2}{18} + 16\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n^2 - 48)}\cos nt$

43. $x(t) = \dfrac{10}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{10 - n^2}\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{sen} nt - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{sen}\sqrt{10}t\right\}$

45. ***b)*** $y(x) = \dfrac{2w_0L^4}{EI\pi^5}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^5}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{L}x$

Ejercicios 10.4, página 492

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n\pi i}e^{in\pi x/2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\dfrac{1 - e^{-in\pi/2}}{2n\pi i}e^{2in\pi x}$

5. $f(x) = \pi + \displaystyle\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\dfrac{i}{n}e^{inx}$

Ejercicios 10.5, página 498

1. $y = \cos\alpha_n x$; α definido por $\cot\alpha = \alpha$;
$\lambda_1 = 0.7402$, $\lambda_2 = 11.7349$,
$\lambda_3 = 41.4388$, $\lambda_4 = 90.8082$
$y_1 = \cos 0.8603x$, $y_2 = \cos 3.4256x$,
$y_3 = \cos 6.4373x$, $y_4 = \cos 9.5293x$

5. $\frac{1}{2}[1 + \operatorname{sen}^2\alpha_n]$

7. ***a)*** $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ln 5}\right)^2$, $y_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\dfrac{d}{dx}[xy'] + \dfrac{\lambda}{x}y = 0$

c) $\displaystyle\int_1^5 \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi}{\ln 5}\ln x\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)dx = 0,\ m \neq n$

9. $\dfrac{d}{dx}[xe^{-x}y'] + ne^{-x}y = 0$;

$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

11. ***a)*** $\lambda_n = 16n^2$, $y_n = \operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1 + x^2}\operatorname{sen}(4m\tan^{-1}x)\operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x)\,dx = 0,$
$m \neq n$

Ejercicios 10.6, página 504

1. $\alpha_1 = 1.277$, $\alpha_2 = 2.339$, $\alpha_3 = 3.391$, $\alpha_4 = 4.441$

3. $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

5. $f(x) = 4\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}{(4\alpha_i^2 + 1)J_0^2(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

7. $f(x) = 20\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_i J_2(4\alpha_i)}{(2\alpha_i^2 + 1)J_1^2(4\alpha_i)}J_1(\alpha_i x)$

9. $f(x) = \dfrac{9}{2} - 4\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{J_2(3\alpha_i)}{\alpha_i^2 J_0^2(3\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

15. $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$

21. $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots$,
$f(x) = |x|$ en $(-1, 1)$

Ejercicios de repaso del capítulo 10, página 505

1. verdadero
3. coseno
5. falso
7. 5.5, 1, 0
9. verdadero

13. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos n\pi x + \dfrac{2}{n}(-1)^n\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

15. $f(x) = 1 - e^{-1} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2\pi^2}\cos n\pi x$;

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n\pi[1 - (-1)^n e^{-1}]}{1 + n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x$

17. $\lambda_n = \dfrac{(2n - 1)^2\pi^2}{36}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$y_n = \cos\left(\dfrac{2n - 1}{2}\pi\ln x\right)$

19. $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 \leq x \leq 1$,

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

21. $f(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{J_1(2\alpha_i)}{\alpha_i J_1^2(4\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

Ejercicios 11.1, página 510

1. Los casos posibles pueden resumirse en una forma $u = c_1e^{c_2(x+y)}$, donde c_1 y c_2 son constantes.

3. $u = c_1e^{y + c_2(x-y)}$

5. $u = c_1(xy)^{c_2}$

7. no separable

9. $u = e^{-t}(A_1e^{k\alpha^2t}\cosh\alpha x + B_1e^{k\alpha^2t}\operatorname{senh}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_2e^{-k\alpha^2t}\cos\alpha x + B_2e^{-k\alpha^2t}\operatorname{sen}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_3x + B_3)$

11. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cosh\alpha at + c_4\operatorname{senh}\alpha at)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cos\alpha at + c_8\operatorname{sen}\alpha at)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}t + c_{12})$

13. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cos\alpha y + c_4\operatorname{sen}\alpha y)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cosh\alpha y + c_8\operatorname{senh}\alpha y)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}y + c_{12})$

15. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$ existen tres posibilidades:

i) Para $0 < \alpha^2 < 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cosh\sqrt{1-\alpha^2}y + c_4 \operatorname{senh} \sqrt{1-\alpha^2}y).$$

ii) Para $\alpha^2 > 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cos\sqrt{\alpha^2-1}y + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha^2-1}y).$$

iii) Para $\alpha^2 = 1$,

$$u = (c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x)(c_3 y + c_4).$$

Los resultados para el caso $\lambda = -\alpha^2$ son similares.
Para $\lambda = 0$:

$$u = (c_1 x + c_2)(c_3 \cosh y + c_4 \operatorname{senh} y)$$

17. elíptica **19.** parabólica
21. hiperbólica **23.** parabólica
25. hiperbólica

Ejercicios 11.2, página 515

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, t > 0$

$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

3. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 100, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -hu(L, t), t > 0$

$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

5. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0,$ h es una constante

$u(0, t) = \operatorname{sen}(\pi t/L), u(L, t) = 0, t > 0$

$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0$

$u(x, 0) = x(L - x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

9. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0, u(L, t) = \operatorname{sen} \pi t, t > 0$

$u(x, 0) = f(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < 4, 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u(4, y) = f(y), 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 4$

Ejercicios 11.3, página 517

1. $$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n}\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

5. $$u(x, t) = e^{-ht}\left[\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]$$

7. $$u(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}e^{-k(n\pi/L)^2t}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{L}x + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}\,dx,\ B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}\,dx$$

Ejercicios 11.4, página 521

1. $$u(x, t) = \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi a}{L}t \times \operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{7\pi}{L}x - \cdots\right)$$

5. $u(x, t) = \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} at \operatorname{sen} x$

7. $$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

9. $$u(x, t) = e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\cos q_n t + \frac{\beta}{q_n}\operatorname{sen} q_n t\right\}\operatorname{sen} nx,$$

donde $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ y $q_n = \sqrt{n^2-\beta^2}$

13. $u(x, t) = t + \operatorname{sen} x\cos 2at$

15. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a}\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 2at$

17. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2}{L^2}at + B_n\operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2}{L^2}at\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x,$$

donde $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$$B_n = \frac{2L}{n^2\pi^2 a}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

Ejercicios 11.5, página 526

1. $$u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx\right) \times \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$$

3. $u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx\right)$

$\times \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$

5. $u(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{senh} n\pi x\cos n\pi y$

7. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}$

$\times \frac{n\cosh nx + \operatorname{senh} nx}{n\cosh n\pi + \operatorname{senh} n\pi}\operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh n\pi y + B_n\operatorname{senh} n\pi y)\operatorname{sen} n\pi x,$

donde $A_n = 200\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$

$B_n = 200\frac{[1-(-1)^n]}{n\pi}\frac{[2-\cosh n\pi]}{\operatorname{senh} n\pi}$

11. $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right)e^{-ny}\operatorname{sen} nx$

13. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x,$

donde $A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx$

$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\left(\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right)$

15. $u = u_1 + u_2$ donde

$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{senh} ny\operatorname{sen} nx$

$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}$

$\times \frac{\operatorname{senh} nx + \operatorname{senh} n(\pi - x)}{\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{sen} ny$

17. la temperatura máxima es $u = 1$

Ejercicios 11.6, página 533

1. $u(x, t) = 100 + \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

3. $u(x, t) = u_0 - \frac{r}{2k}x(x-1) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{u_0}{n\pi} + \frac{r}{kn^3\pi^3}\right]$

$\times [(-1)^n - 1]e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

5. $u(x, t) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x,$

donde $\psi(x) = \frac{A}{k\beta^2}[-e^{-\beta x} + (e^{-\beta} - 1)x + 1]$

$A_n = 2\int_0^1 [f(x) - \psi(x)]\operatorname{sen} n\pi x\,dx$

7. $\psi(x) = u_0\left[1 - \frac{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}\,x}{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}}\right]$

9. $u(x, t) = \frac{A}{6a^2}(x - x^3)$

$+ \frac{2A}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi at\operatorname{sen} n\pi x$

11. $u(x, y) = (u_0 - u_1)y + u_1$

$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_0(-1)^n - u_1}{n}e^{-n\pi x}\operatorname{sen} n\pi y$

13. $u(x, t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2-3)}e^{-3t}\operatorname{sen} nx$

$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2-3)}e^{-n^2 t}\operatorname{sen} nx$

15. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[\frac{n^2\pi^2\operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1}\right]\operatorname{sen} n\pi x$

$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3} - (-1)^n\frac{2n\pi}{n^4\pi^4 + 1}\right]e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

17. $u(x, t) = (1 - x)\operatorname{sen} t$

$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t} - n^2\pi^2\cos t - \operatorname{sen} t}{n(n^4\pi^4 + 1)}\right]\operatorname{sen} n\pi x.$

Ejercicios 11.7, página 537

1. $u(x, t) = 2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha_n}{(h + \operatorname{sen}^2\alpha_n)}e^{-k\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x,$ donde α_n son las raíces positivas consecutivas de cot $\alpha = \alpha/h$

3. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{senh}\alpha_n y\operatorname{sen}\alpha_n x$, donde

$$A_n = \frac{2h}{\operatorname{senh}\alpha_n b(ah + \cos^2\alpha_n a)}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\alpha_n x\,dx$$

son las raíces positivas consecutivas de tan α
$a = -\alpha/h$

5. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-k(2n-1)^2\pi^2 t/4L^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x,$

donde $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x\,dx$

7. $u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi}$

$\times \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi y$

9. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\operatorname{sen}\alpha_n}{\alpha_n^2(k\alpha_n^2 - 2)(1 + \cos^2\alpha_n)}$
$\times (e^{-2t} - e^{-k\alpha_n^2 t})\operatorname{sen}\alpha_n x$

Ejercicios 11.8, página 541

1. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-k(m^2+n^2)t}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} ny,$

donde $A_{mn} = \frac{4u_0}{mn\pi^2}[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]$

3. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \cos a\sqrt{m^2 + n^2}t,$

donde $A_{mn} = \dfrac{16}{m^3 n^3 \pi^2} [(-1)^m - 1][(-1)^n - 1]$

5. $u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{senh} \omega_{mn} z \operatorname{sen} \dfrac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{b} y,$

donde $\omega_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \operatorname{senh}(c\omega_{mn})} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy$$

7. Utilice $a = b = c = 1$ con $f(x, y) = u_0$ en el problema 5 y $f(x, y) = -u_0$ en el problema 6. Sume las dos soluciones.

Ejercicios de repaso del capítulo 11, página 541

1. $u = c_1 e^{(c_2 x + y/c_2)}$

3. $\psi(x) = u_0 + \dfrac{(u_1 - u_0)}{1 + \pi} x$

5. $u(x, t) = \dfrac{2h}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \right)$
$\times \operatorname{sen} n\pi at \operatorname{sen} n\pi x$

7. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - (-1)^n}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} nx \operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - (-1)^n}{n} e^{-nx} \operatorname{sen} ny$

11. *a)* $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$

13. $u(x, t) = e^{-(x+t)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\sqrt{n^2 + 1} \cos \sqrt{n^2 + 1}t$
$+ \operatorname{sen} \sqrt{n^2 + 1}t] \operatorname{sen} nx$

Ejercicios 12.1, página 547

1. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - (-1)^n}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta$

3. $u(r, \theta) = \dfrac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} r^n \cos n\theta$

5. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$

$A_n = \dfrac{c^n}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$

$B_n = \dfrac{c^n}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta$

7. $u(r, \theta) = A_0 \ln \left(\dfrac{r}{b} \right)$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{b}{r} \right)^n - \left(\dfrac{r}{b} \right)^n \right] (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 \ln \left(\dfrac{a}{b} \right) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$

$\left[\left(\dfrac{b}{a} \right)^n - \left(\dfrac{a}{b} \right)^n \right] A_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$

$\left[\left(\dfrac{b}{a} \right)^n - \left(\dfrac{a}{b} \right)^n \right] B_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta$

9. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(r^{2n} + a^{2n})}{r^n} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$

$\dfrac{(b^{2n} + a^{2n})}{b^n} A_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$

$\dfrac{(b^{2n} + a^{2n})}{b^n} B_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta$

11. $u(r, \theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n} \left(\dfrac{r}{c} \right)^{2n} \cos 2n\theta$

13. $u(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - (-1)^n}{n^3} \dfrac{r^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}} \left(\dfrac{a}{r} \right)^n \operatorname{sen} n\theta$

15. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n} \left(\dfrac{r}{2} \right)^n \cos n\theta$

Ejercicios 12.2, página 553

1. $u(r, t) = \dfrac{2}{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_n at}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n c)} J_0(\alpha_n r)$

3. $u(r, z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{senh} \alpha_n (4 - z)}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

5. $u(r, z) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2 I_0(n\pi)} I_0(n\pi r) \cos n\pi z$

7. $u(r, z) = \dfrac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{I_0\left(\frac{2n - 1}{2} \pi r \right)}{(2n - 1) I_0\left(\frac{2n - 1}{2} \pi \right)} \operatorname{sen} \dfrac{2n - 1}{2} \pi z$

9. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)} \displaystyle\int_0^c r J_0(\alpha_n r) f(r) \, dr$

11. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + h^2) J_0^2(\alpha_n)} \displaystyle\int_0^1 r J_0(\alpha_n r) f(r) \, dr$

13. $u(r, t) = 100 + 50 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n J_1^2(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_n^2 t}$

15. *b)* $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n \sqrt{g}t) J_0(2\alpha_n \sqrt{x}),$

donde $A_n = \dfrac{2}{L J_1^2(2\alpha_n \sqrt{L})} \displaystyle\int_0^{\sqrt{L}} v J_0(2\alpha_n v) f(v^2) \, dv$

Ejercicios 12.3, página 557

1. $u(r,\theta) = 50\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{c}\right)P_1(\cos\theta)\right.$
$\left. - \frac{7}{16}\left(\frac{r}{c}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{32}\left(\frac{r}{c}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

3. $u(r,\theta) = \frac{r}{c}\cos\theta$

5. $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1}r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$,

donde $\frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1}a^{n+1}} A_n$

$= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$

7. $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta)$,

donde $A_{2n} = \frac{4n+1}{c^{2n}}\int_0^{\pi/2} f(\theta)P_{2n}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$

9. $u(r,t) = 100 + \frac{200}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t}\,\mathrm{sen}\, n\pi r$

11. $u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{c}t + B_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi a}{c}t\right)\mathrm{sen}\frac{n\pi}{c}r$,

donde $A_n = \frac{2}{c}\int_0^c rf(r)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{c}r\,dr$,

$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^c rg(r)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{c}r\,dr$

Ejercicios de repaso del capítulo 12, página 588

1. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \mathrm{sen}\, n\theta$

3. $u(r,\theta) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3} r^n\,\mathrm{sen}\, n\theta$

5. $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta$,

donde $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta$

$A_n = \frac{2}{\pi c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$

7. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n} + r^{-4n}}{2^{4n} + 2^{-4n}}\,\frac{1-(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\, 4n\theta$

11. $u(r,t) = 2e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)e^{-\alpha_n^2 t}$

13. $u(r,z) = 50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n z}{\alpha_n\cosh 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

15. $u(r,\theta) = 100\left[\frac{3}{2}rP_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}r^3P_3(\cos\theta)\right.$
$\left. + \frac{11}{16}r^5P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

21. $u(r,z) = 100 + 200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n z}{\alpha_n\cosh\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

Ejercicios 13.1, página 562

1. ***a)*** Sea $\tau = u^2$ en la integral $\mathrm{erf}(\sqrt{t})$.

9. $y(t) = e^{\pi t}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\pi t})$

11. Utilice la propiedad $\int_0^b - \int_0^a = \int_0^b + \int_a^0$

Ejercicios 13.2, página 567

1. $u(x,t) = A\cos\frac{a\pi t}{L}\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L}$

3. $u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right)$

5. $u(x,t) = \left[\frac{1}{2}g\left(t - \frac{x}{a}\right)^2 + A\,\mathrm{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right]$
$\times\,\mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}gt^2$

7. $u(x,t) = a\frac{F_0}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right)\right.$
$\times\,\mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right)$
$\left. - \left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right)\right\}$

9. $u(x,t) = (t - x)\,\mathrm{senh}(t - x)\,\mathcal{U}(t - x) +$
$xe^{-x}\cosh t - e^{-x}t\,\mathrm{senh}\, t$

11. $u(x,t) = u_1 + (u_0 - u_1)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

13. $u(x,t) = u_0\left[1 - \left\{\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right.\right.$
$\left.\left. - e^{x+1}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]$

15. $u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/4\tau}d\tau$

17. $u(x,t) = 60 + 40\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-2}}\right)\mathcal{U}(t-2)$

19. $u(x,t) = 100\left[-e^{1-x+t}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right.$
$\left. + \mathrm{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$

21. $u(x,t) = u_0 + u_0 e^{-(\pi^2/L^2)t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

23. $u(x,t) = u_0 - u_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{kt}}\right)\right.$
$\left. + \mathrm{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$

25. $u(x,t) = u_0 e^{-Gt/C}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)$

27. $u(r,t) = \frac{100}{r}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r-1}{2\sqrt{t}}\right)$

Ejercicios 13.3, página 574

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha x + 3(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha,$

donde $A(\alpha) = \dfrac{3\alpha\operatorname{sen}3\alpha + \cos 3\alpha - 1}{\alpha^2}$

$B(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}3\alpha - 3\alpha\cos 3\alpha}{\alpha^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos\alpha x + \alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha$

7. $f(x) = \dfrac{10}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$

9. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{(\pi\alpha\operatorname{sen}\pi\alpha + \cos\pi\alpha - 1)\cos\alpha x}{\alpha^2}\,d\alpha$

11. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{4+\alpha^4}\,d\alpha$

13. $f(x) = \dfrac{2k}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos\alpha x}{k^2+\alpha^2}\,d\alpha$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{k^2+\alpha^2}\,d\alpha$

15. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{(4-\alpha^2)\cos\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\,d\alpha$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\,d\alpha$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x > 0$

19. Sea $x = 2$ en (7). Utilice una identidad trigonométrica y reemplace α por x. En el inciso *b*) realice el cambio de variable $2x = kt$.

Ejercicios 13.4, página 579

1. $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{-k\alpha^2 t}}{1+\alpha^2}e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

3. $u(x,t) = \dfrac{2u_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{1-e^{-k\alpha^2 t}}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

5. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

7. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\cos\alpha x\,d\alpha$

9. ***a*)** $u(x,t) =$

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \left(F(\alpha)\cos\alpha at + G(\alpha)\dfrac{\operatorname{sen}\alpha at}{\alpha a}\right)e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{senh}\alpha(\pi - x)}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi}\cos\alpha y\,d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}e^{-\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha$

15. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\dfrac{\operatorname{senh}\alpha(2-y)}{\operatorname{senh}2\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

17. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha$

19. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4kt}}e^{-x^2/(1+4kt)}$

21. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha$

Ejercicios 13.5, página 589

3. 1

7.

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 13, página 589

1. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{senh}\alpha y}{\alpha(1+\alpha^2)\cosh\alpha\pi}\cos\alpha x\,d\alpha$

3. $u(x,t) = u_0 e^{-ht}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

5. $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau$

7. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\operatorname{sen}\alpha(\pi - x) + \operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

9. $u(x,y) =$

$\dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + 2e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\dfrac{B\cosh\alpha y}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi} + \dfrac{A}{\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos\alpha x + \alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

17. $u(x,t) = 1 + e^{-4t}\operatorname{sen}2x$

19. $u(x,t) = 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\,e^{-x^2/4t} - x\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

o $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau$

Ejercicios 14.1, página 596

1. $u_{11} = \frac{11}{15}, u_{21} = \frac{14}{15}$

3. $u_{11} = u_{21} = \sqrt{3}/16, u_{22} = u_{12} = 3\sqrt{3}/16$

5. $u_{21} = u_{12} = 12.50, u_{31} = u_{13} = 18.75, u_{32} = u_{23} = 37.50,$ $u_{11} = 6.25, u_{22} = 25.00, u_{33} = 56.25$

7. ***b***) $u_{14} = u_{41} = 0.5427,\ u_{24} = u_{42} = 0.6707,$ $u_{34} = u_{43} = 0.6402, u_{33} = 0.4451, u_{44} = 0.9451$

Ejercicios 14.2, página 601

Las tablas de esta sección proporcionan una selección de la cantidad total en aproximaciones.

1.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.3728	0.6288	0.6800	0.5904	0.3840	0.2176	0.0768
0.200	0.2248	0.3942	0.4708	0.4562	0.3699	0.2517	0.1239
0.300	0.1530	0.2752	0.3448	0.3545	0.3101	0.2262	0.1183
0.400	0.1115	0.2034	0.2607	0.2757	0.2488	0.1865	0.0996
0.500	0.0841	0.1545	0.2002	0.2144	0.1961	0.1487	0.0800
0.600	0.0645	0.1189	0.1548	0.1668	0.1534	0.1169	0.0631
0.700	0.0499	0.0921	0.1201	0.1297	0.1196	0.0914	0.0494
0.800	0.0387	0.0715	0.0933	0.1009	0.0931	0.0712	0.0385
0.900	0.0301	0.0555	0.0725	0.0785	0.0725	0.0554	0.0300
1.000	0.0234	0.0432	0.0564	0.0610	0.0564	0.0431	0.0233

3.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.4015	0.6577	0.7084	0.5837	0.3753	0.1871	0.0684
0.200	0.2430	0.4198	0.4921	0.4617	0.3622	0.2362	0.1132
0.300	0.1643	0.2924	0.3604	0.3626	0.3097	0.2208	0.1136
0.400	0.1187	0.2150	0.2725	0.2843	0.2528	0.1871	0.0989
0.500	0.0891	0.1630	0.2097	0.2228	0.2020	0.1521	0.0814
0.600	0.0683	0.1256	0.1628	0.1746	0.1598	0.1214	0.0653
0.700	0.0530	0.0976	0.1270	0.1369	0.1259	0.0959	0.0518
0.800	0.0413	0.0762	0.0993	0.1073	0.0989	0.0755	0.0408
0.900	0.0323	0.0596	0.0778	0.0841	0.0776	0.0593	0.0321
1.000	0.0253	0.0466	0.0609	0.0659	0.0608	0.0465	0.0252

Los errores absolutos son aproximadamente de 2.2×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

5.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.3972	0.6551	0.7043	0.5883	0.3723	0.1955	0.0653
0.20	0.2409	0.4171	0.4901	0.4620	0.3636	0.2385	0.1145
0.30	0.1631	0.2908	0.3592	0.3624	0.3105	0.2220	0.1145
0.40	0.1181	0.2141	0.2718	0.2840	0.2530	0.1876	0.0993
0.50	0.0888	0.1625	0.2092	0.2226	0.2020	0.1523	0.0816
0.60	0.0681	0.1253	0.1625	0.1744	0.1597	0.1214	0.0654
0.70	0.0528	0.0974	0.1268	0.1366	0.1257	0.0959	0.0518
0.80	0.0412	0.0760	0.0991	0.1071	0.0987	0.0754	0.0408
0.90	0.0322	0.0594	0.0776	0.0839	0.0774	0.0592	0.0320
1.00	0.0252	0.0465	0.0608	0.0657	0.0607	0.0464	0.0251

Los errores absolutos son aproximadamente de 1.8×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

7. ***a***)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	29.9999	29.9970	29.9037	27.6450
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	29.9999	29.9991	29.9805	29.6517	25.6452
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9996	29.9963	29.9421	29.2922	23.9347
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9898	29.9986	29.9898	29.8782	28.8606	22.4612
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9782	29.9964	29.9782	29.7878	28.3831	21.1829

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9973	29.5964
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9893	29.2036
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9762	28.8213
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9993	29.9585	28.4490
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9986	29.9363	28.0864

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5348	38.3465	44.3067	46.3001	44.3067	38.3465	28.5348	15.3312
4.00	13.6371	25.6867	34.9416	40.6988	42.6453	40.6988	34.9416	25.6867	13.6371
6.00	12.3012	23.2863	31.8624	37.2794	39.1273	37.2794	31.8624	23.2863	12.3012
8.00	11.1659	21.1877	29.0757	34.0984	35.8202	34.0984	29.0757	21.1877	11.1659
10.00	10.1665	19.3143	26.5439	31.1662	32.7549	31.1662	26.5439	19.3143	10.1665

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	23.9999	16.0000	8.0000
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9686	23.9993	16.0000	8.0000
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9323	23.9978	15.9999	8.0000
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8844	23.9950	15.9998	8.0000
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7498	31.8265	23.9908	15.9996	8.0000

9. *a*)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	30.0000	29.9990	29.9679	29.2150
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	30.0000	29.9997	29.9935	29.8839	28.5484
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9997	29.9988	29.9807	29.7641	27.9782
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9899	29.9991	29.9966	29.9594	29.6202	27.4870
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9783	29.9976	29.9927	29.9293	29.4610	27.0610

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9991	29.8655
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9964	29.7345
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9921	29.6071
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9862	29.4830
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9995	29.9788	29.3621

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5350	38.3477	44.3130	46.3327	44.4671	39.0872	31.5755	24.6930
4.00	13.6381	25.6913	34.9606	40.7728	42.9127	41.5716	37.4340	31.7086	25.6986
6.00	12.3088	23.3146	31.9546	37.5566	39.8880	39.1565	36.9745	31.2134	25.7128
8.00	11.1946	21.2785	29.3217	34.7092	37.2109	36.9834	34.5032	30.4279	25.4167
10.00	10.2377	19.5150	27.0178	32.1929	34.8117	34.9710	33.0338	29.5224	25.0019

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	24.0000	16.0102	8.6333
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9687	24.0002	16.0391	9.2272
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9324	24.0005	16.0845	9.7846
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8846	24.0012	16.1441	10.3084
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7499	31.8269	24.0023	16.2160	10.8012

11. *a*) $\psi(x) = \frac{1}{2}x + 20$

b)

Tiempo	$x = 4.00$	$x = 8.00$	$x = 12.00$	$x = 16.00$
0.00	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
10.00	32.7433	44.2679	45.4228	38.2971
20.00	29.9946	36.2354	38.3148	35.8160
30.00	26.9487	32.1409	34.0874	32.9644
50.00	24.1178	27.4348	29.4296	30.1207
70.00	22.8995	25.4560	27.4554	28.8998
90.00	22.3817	24.6176	26.6175	28.3817
110.00	22.1619	24.2620	26.2620	28.1619
130.00	22.0687	24.1112	26.1112	28.0687
150.00	22.0291	24.0472	26.0472	28.0291
170.00	22.0124	24.0200	26.0200	28.0124
190.00	22.0052	24.0085	26.0085	28.0052
210.00	22.0022	24.0036	26.0036	28.0022
230.00	22.0009	24.0015	26.0015	28.0009
250.00	22.0004	24.0007	26.0007	28.0004
270.00	22.0002	24.0003	26.0003	28.0002
290.00	22.0001	24.0001	26.0001	28.0001
310.00	22.0000	24.0001	26.0001	28.0000
330.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000
350.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000

Ejercicios 14.3, página 604

1. *a*)

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$
0.00	0.1875	0.2500	0.1875
0.20	0.1491	0.2100	0.1491
0.40	0.0556	0.0938	0.0556
0.60	−0.0501	−0.0682	−0.0501
0.80	−0.1361	−0.2072	−0.1361
1.00	−0.1802	−0.2591	−0.1802

a)

Tiempo	$x = 0.4$	$x = 0.8$	$x = 1.2$	$x = 1.6$
0.00	0.0032	0.5273	0.5273	0.0032
0.20	0.0652	0.4638	0.4638	0.0652
0.40	0.2065	0.3035	0.3035	0.2065
0.60	0.3208	0.1190	0.1190	0.3208
0.80	0.3094	−0.0180	−0.0180	0.3094
1.00	0.1450	−0.0768	−0.0768	0.1450

c)

Tiempo	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$	$x = 0.6$	$x = 0.7$	$x = 0.8$	$x = 0.9$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.12	0.0000	0.0000	0.0082	0.1126	0.3411	0.1589	0.3792	0.3710	0.0462
0.24	0.0071	0.0657	0.2447	0.3159	0.1735	0.2463	−0.1266	−0.3056	−0.0625
0.36	0.1623	0.3197	0.2458	0.1657	0.0877	−0.2853	−0.2843	−0.2104	−0.2887
0.48	0.1965	0.1410	0.1149	−0.1216	−0.3593	−0.2381	−0.1977	−0.1715	0.0800
0.60	−0.2194	−0.2069	−0.3875	−0.3411	−0.1901	−0.1662	−0.0666	0.1140	−0.0446
0.72	−0.3003	−0.6865	−0.5097	−0.3230	−0.1585	0.0156	0.0893	−0.0874	0.0384
0.84	−0.2647	−0.1633	−0.3546	−0.3214	−0.1763	−0.0954	−0.1249	0.0665	−0.0386
0.96	0.3012	0.1081	0.1380	−0.0487	−0.2974	−0.3407	−0.1250	−0.1548	0.0092

3. *a*)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.5599	0.9059	0.9059	0.5599
0.20	0.4788	0.7748	0.7748	0.4788
0.30	0.3524	0.5701	0.5701	0.3524
0.40	0.1924	0.3113	0.3113	0.1924
0.50	0.0142	0.0230	0.0230	0.0142

b)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.05	0.5808	0.9397	0.9397	0.5808
0.10	0.5599	0.9060	0.9060	0.5599
0.15	0.5257	0.8507	0.8507	0.5257
0.20	0.4790	0.7750	0.7750	0.4790
0.25	0.4209	0.6810	0.6810	0.4209
0.30	0.3527	0.5706	0.5706	0.3527
0.35	0.2761	0.4467	0.4467	0.2761
0.40	0.1929	0.3122	0.3122	0.1929
0.45	0.1052	0.1701	0.1701	0.1052
0.50	0.0149	0.0241	0.0241	0.0149

5.

Tiempo	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
0.00000	0.1000	0.2000	0.3000	0.2000	0.1000
0.60134	0.0984	0.1688	0.1406	0.1688	0.0984
1.20268	0.0226	−0.0121	0.0085	−0.0121	0.0226
1.80401	−0.1271	−0.1347	−0.1566	−0.1347	−0.1271
2.40535	−0.0920	−0.2292	−0.2571	−0.2292	−0.0920
3.00669	−0.0932	−0.1445	−0.2018	−0.1445	−0.0932
3.60803	−0.0284	−0.0205	0.0336	−0.0205	−0.0284
4.20936	0.1064	0.1555	0.1265	0.1555	0.1064
4.81070	0.1273	0.2060	0.2612	0.2060	0.1273
5.41204	0.0625	0.1689	0.2038	0.1689	0.0625
6.01338	0.0436	0.0086	−0.0080	0.0086	0.0436
6.61472	−0.0931	−0.1364	−0.1578	−0.1364	−0.0931
7.21605	−0.1436	−0.2173	−0.2240	−0.2173	−0.1436
7.81739	−0.0625	−0.1644	−0.2247	−0.1644	−0.0625
8.41873	−0.0287	−0.0192	−0.0085	−0.0192	−0.0287
9.02007	0.0654	0.1332	0.1755	0.1332	0.0654
9.62140	0.1540	0.2189	0.2089	0.2189	0.1540

Nota: El tiempo está expresado en milisegundos.

Ejercicios de repaso del capítulo 14, página 605

1. $u_{11} = 0.8929$, $u_{21} = 3.5714$, $u_{31} = 13.3929$

3. *a*)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922
0.1883	0.3346	0.3734	0.2512

b)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922

c) Sí; la tabla del inciso *b*) es la tabla del inciso *a*) desplazada hacia abajo.

Ejercicios 15.1, página 612

1. $3 + 3i$ **3.** 1 **5.** $7 - 13i$
7. $-7 + 5i$ **9.** $11 - 10i$ **11.** $-5 + 12i$
13. $-2i$ **15.** $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$ **17.** $8 - i$
19. $\frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$ **21.** $20i$ **23.** $\frac{102}{5} + \frac{116}{5}i$
25. $\frac{7}{130} + \frac{9}{130}i$ **27.** $x/(x^2 + y^2)$
29. $-2y - 4$ **31.** $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$
33. $x = -\frac{9}{2}, y = 1$ **35.** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
37. $11 - 6i$

Ejercicios 15.2, página 616

1. $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ o $2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$

3. $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

7. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

11. $-\frac{53}{2} - \frac{5}{2}i$ **13.** $5.5433 + 2.2961i$

15. $8i$; $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$

17. $30\sqrt{2}\,[\cos(25\pi/12) + i \operatorname{sen}(25\pi/12)]$; $40.9808 + 10.9808i$

19. $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)]$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

21. -512 **23.** $\frac{1}{32}i$ **25.** $-i$

27. $w_0 = 2, w_1 = -1 + \sqrt{3}i, w_2 = -1 - \sqrt{3}i$

29. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

31. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

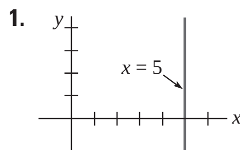
33. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

35. $32\left(\cos\dfrac{13\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{6}\right),\ 16\sqrt{3} + 16i$

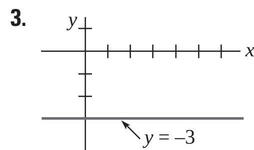
37. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta,\ \ \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

Ejercicios 15.3, página 619

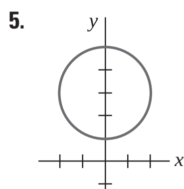
1.



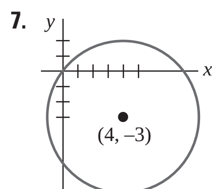
3.



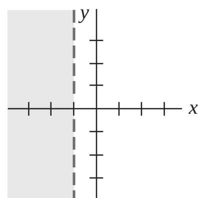
5.



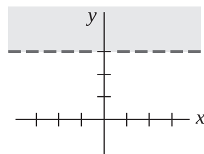
7.



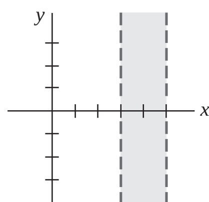
9. dominio



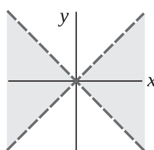
11. dominio



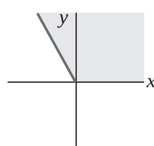
13. dominio



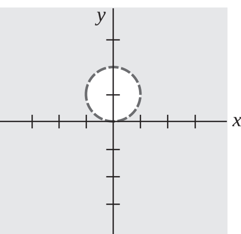
15. no es dominio



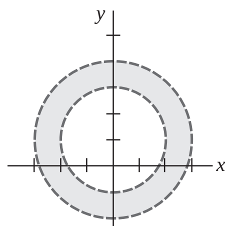
17. no es dominio



19. dominio



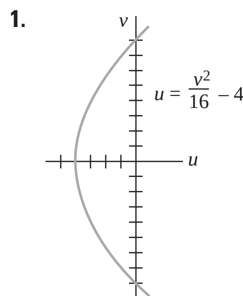
21. dominio



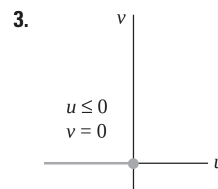
23. la línea $y = -x$ **25.** la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

Ejercicios 15.4, página 623

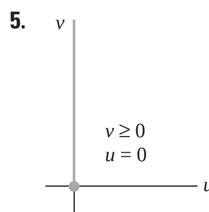
1.



3.



5.



7. $f(z) = (6x - 5) + i(6y + 9)$

9. $f(z) = (x^2 - y^2 - 3x) + i(2xy - 3y + 4)$

11. $f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 4x) + i(3x^2y - y^3 - 4y)$

13. $f(z) = \left(x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

15. $-4 + i;\ 3 - 9i;\ 1 + 86i$

17. $14 - 20i;\ -13 + 43i;\ 3 - 26i$ **19.** $6 - 5i$

21. $-4i$ **27.** $12z^2 - (6 + 2i)z - 5$

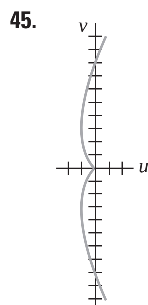
29. $6z^2 - 14z - 4 + 16i$ **31.** $6z(z^2 - 4i)^2$

33. $\dfrac{8 - 13i}{(2z + i)^2}$ **35.** $3i$ **37.** $2i,\ -2i$

41. $x(t) = c_1e^{2t}$ y $y(t) = c_2e^{2t}$; las líneas de corriente pasan por el origen.

43. $y = cx$; las líneas de corriente pasan por el origen.

45.



Ejercicios 15.5, página 628

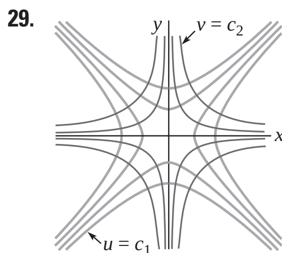
15. $a = 1, b = 3$

21. $f'(z) = e^x\cos y + ie^x\,\text{sen}\,y$

23. $f(z) = x + i(y + C)$

25. $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$

27. $f(z) = \log_e(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + C\right)$

29. 

31. el eje x y el círculo $|z| = 1$

Ejercicios 15.6, página 634

1. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **3.** $e^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
5. $-e^{\pi}$ **7.** $-1.8650 + 4.0752i$
9. $0.2837 - 0.9589i$ **11.** $-0.9659 + 0.2588i$
13. $e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)$
15. $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \operatorname{sen} 2xy)$
23. $1.6094 + i(\pi + 2n\pi)$
25. $1.0397 + i(3\pi/4 + 2n\pi)$
27. $1.0397 + i(\pi/3 + 2n\pi)$
29. $2.1383 -(\pi/4)i$ **31.** $2.5649 + 2.7468i$
33. $3.4657 - (\pi/3)i$ **35.** $1.3863 + i(\pi/2 + 2n\pi)$
37. $3 + i(-\pi/2 + 2n\pi)$ **39.** $e^{(2-8n)\pi}$
41. $e^{-2n\pi}(0.2740 + 0.5837i)$ **43.** e^{2}
47. no; no; sí

Ejercicios 15.7, página 637

1. 10.0677 **3.** $1.0911 + 0.8310i$
5. $0.7616i$ **7.** -0.6481 **9.** -1
11. $0.5876 + 1.3363i$
15. $\pi/2 + 2n\pi - i\log_e(2 \pm \sqrt{3})$
17. $(-\pi/2 + 2n\pi)i$ **19.** $\pi/4 + n\pi$
21. $2n\pi \pm 2i$

Ejercicios 15.8, página 640

1. $n\pi + (-1)^{n+1}i\log_e(1 + \sqrt{2})$ **3.** $n\pi$
5. $2n\pi \pm i \log_e(2 + \sqrt{3})$ **7.** $\pm \pi/3 + 2n\pi$
9. $\pi/4 + n\pi$ **11.** $(-1)^n \log_e 3 + n\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 15, página 646

1. 0; 32 **3.** $-\frac{7}{25}$ **5.** $\frac{4}{5}$ **7.** falso
9. $0.6931 + i\,(\pi/2 + 2n\pi)$ **11.** $-0.3097 + 0.8577i$
13. falso **15.** $3 - \dfrac{\pi}{2}i$ **17.** $58 - 4i$
19. $-8 + 8i$
21. **23.**
25. una elipse con focos $(0, -2)$ y $(0, 2)$
27. $1.0696 - 0.2127i$, $0.2127 + 1.0696i$,
$-1.0696 + 0.2127i$, $-0.2127 - 1.0696i$
29. $5i$ **31.** la parábola $v = u^2 - 2u$

33. $1, -1$ **35.** números imaginarios puros
37. $f'(z) = (-2y - 5) + 2xi$

Ejercicios 16.1, página 647

1. $-28 + 84i$ **3.** $-48 + \frac{736}{3}i$ **5.** $(2 + \pi)i$
7. πi **9.** $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$ **11.** $-e - 1$
13. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ **15.** 0 **17.** $\frac{1}{2}i$ **19.** 0
21. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ **23.** $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ **25.** $\dfrac{5\pi e^5}{12}$
27. $6\sqrt{2}$ **31.** $-11 + 38i$; 0
33. circulación $= 0$, flujo neto $= 4\pi$
35. circulación $= 0$, flujo neto $= 0$

Ejercicios 16.2, página 651

9. $2\pi i$ **11.** $2\pi i$ **13.** 0
15. $2\pi i$; $4\pi i$; 0 **17.** $-8\pi i$; $-6\pi i$
19. $-\pi(1 + i)$ **21.** $-4\pi i$ **23.** $-6\pi i$

Ejercicios 16.3, página 656

1. $2i$ **3.** $48 + 24i$ **5.** $6 + \frac{26}{3}i$ **7.** 0
9. $-\frac{7}{16} - \frac{22}{3}i$ **11.** $-\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi}i$ **13.** $2.3504i$
15. 0 **17.** πi **19.** $\frac{1}{2}i$
21. $11.4928 + 0.9667i$ **23.** $-0.9056 + 1.7699i$

Ejercicios 16.4, página 662

1. $8\pi i$ **3.** $-2\pi i$ **5.** $-\pi(20 + 8i)$
7. -2π; 2π **9.** -8π **11.** $-2\pi e^{-1}i$
13. $\frac{4}{3}\pi i$ **15.** $-5\pi i$; $-5\pi i$; $9\pi i$; 0
17. $-\pi(3 + i)$; $\pi(3 + i)$ **19.** $\pi(\frac{8}{3} + 12i)$
21. 0 **23.** $-\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 16, página 662

1. verdadero **3.** verdadero **5.** 0 **7.** $\pi(6\pi - i)$
9. verdadero **11.** 0 si $n \neq -1$, $2\pi i$ si $n = -1$
13. $-\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{136}{15} + \frac{88}{3}i$ **17.** 0
19. $-14.2144 + 22.9637i$ **21.** $2\pi i$
23. $-\frac{8}{3}\pi i$ **25.** $\frac{2}{5}\pi i$ **27.** 2π **29.** $2n\pi i$

Ejercicios 17.1, página 669

1. $5i, -5, -5i, 5, 5i$ **3.** $0, 2, 0, 2, 0$
5. converge **7.** converge **9.** diverge
11. $\text{lím}_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = 2$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \frac{3}{2}$
13. La serie converge a $1/(1+ 2i)$.
15. divergente
17. convergente, $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
19. convergente, $\frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$
21. $|z - 2i| = \sqrt{5}$, $R = \sqrt{5}$
23. $|z - 1 - i| = 2$, $R = 2$
25. $|z - i| = 1/\sqrt{10}$, $R = 1/\sqrt{10}$
27. $|z - 4 - 3i| = 25$, $R = 25$
29. La serie converge a $z = -2 + i$.

Ejercicios 17.2, página 673

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k$, $R = 1$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(2z)^{k-1}$, $R = \frac{1}{2}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2z)^k,\ R = \infty$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ R = \infty$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\ R = \infty$

11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2},\ R = \infty$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k,\ R = 1$

15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^k}{(3-2i)^{k+1}},\ R = \sqrt{13}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{2^k},\ R = 2$

19. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2$
$+ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots,\ R = \infty$

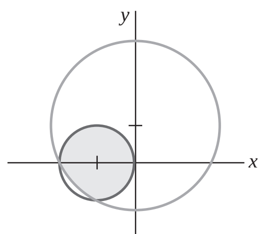
21. $e^{3i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^k}{k!},\ R = \infty$

23. $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$

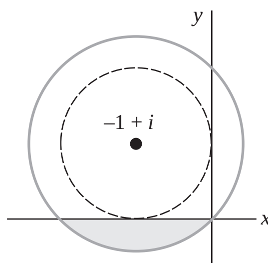
25. $\frac{1}{2i} + \frac{3}{(2i)^2} z + \frac{7}{(2i)^3} z^2 + \frac{15}{(2i)^4} z^3 + \cdots,\ R = 1$

27. $2\sqrt{5}$

29. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z+1)^k,\ R = 1;$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2+i)^{k+1}} (z-i)^k,\ R = \sqrt{5}$



31. *a*) La distancia de z_0 al corte de ramificación es una unidad.
c) La serie converge en el interior del círculo $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$. Aunque la serie converge en la región sombreada, no converge (ni representa) a Ln z en esta región.



33. $1.1 + 0.12i$ 35. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}$

Ejercicios 17.3, página 681

1. $\frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{1! \cdot z^2} + \frac{1}{2! \cdot z^4} - \frac{1}{3! \cdot z^6} + \cdots$

5. $\frac{e}{z-1} + e + \frac{e(z-1)}{2!} + \frac{e(z-1)^2}{3!} + \cdots$

7. $-\frac{1}{3z} - \frac{1}{3^2} - \frac{z}{3^3} - \frac{z^2}{3^4} - \cdots$

9. $\frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3^2} + \frac{z-3}{3^3} - \frac{(z-3)^2}{3^4} + \cdots$

11. $\cdots - \frac{1}{3(z-4)^2} + \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{12} + \frac{z-4}{3 \cdot 4^2}$
$- \frac{(z-4)^2}{3 \cdot 4^3} + \cdots$

13. $\cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots$

15. $\frac{-1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots$

17. $\frac{1}{3(z+1)} - \frac{2}{3^2} - \frac{2(z+1)}{3^3} - \frac{2(z+1)^2}{3^4} - \cdots$

19. $\cdots - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} - \frac{1}{3} - \frac{z}{3 \cdot 2} - \frac{z^2}{3 \cdot 2^2} - \cdots$

21. $\frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \cdots$

23. $\frac{1}{z-2} - 3 + 6(z-2) - 10(z-2)^2 + \cdots$

25. $\frac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - \cdots$

27. $\cdots + \frac{2}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 1 + (z-1)$

Ejercicios 17.4, página 684

1. Defina $f(0) = 2$.
3. $-2 + i$ es un cero de orden 2.
5. $-i$ e i son ceros de orden 1; 0 es un cero de orden 2.
7. $2n\pi i,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son ceros de orden 1.
9. orden 5 11. orden 1
13. $-1 \pm 2i$ son polos simples.
15. -2 es un polo simple; $-i$ es un polo de orden 4.
17. $(2n+1)\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son polos simples.
19. 0 es un polo de orden 2.
21. $2n\pi i,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son polos simples.
23. no aislado

Ejercicios 17.5, página 689

1. $\frac{2}{5}$ 3. -3 5. 0
7. $\text{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{2}$
9. $\text{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f(z), -2) = -\frac{1}{12}$,
$\text{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{4}$
11. $\text{Res}(f(z), -1) = 6$, $\text{Res}(f(z), -2) = -31$,
$\text{Res}(f(z), -3) = 30$
13. $\text{Res}(f(z), 0) = -3/\pi^4$, $\text{Res}(f(z), \pi) = (\pi^2 - 6)/2\pi^4$
15. $\text{Res}(f(z), (2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
17. $0;\ 2\pi i/9;\ 0$ 19. $\pi i;\ \pi i;\ 0$ 21. $\pi/3$

23. 0 **25.** $2\pi i \cosh 1$ **27.** $-4i$ **29.** $6i$

31. $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}i$

Ejercicios 17.6, página 695

1. $4\pi/\sqrt{3}$ **3.** 0 **5.** $\pi/\sqrt{3}$ **7.** $\pi/4$

9. $\pi/6$ **11.** π **13.** $\pi/16$ **15.** $3\pi/8$

17. $\pi/2$ **19.** $\pi/\sqrt{2}$ **21.** πe^{-1} **23.** πe^{-1}

25. πe^{-3} **27.** $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2})$

29. $-\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{e^{-3}}{3} - e^{-1}\right)$

Ejercicios de repaso del capítulo 17, página 696

1. verdadero **3.** falso **5.** verdadero **7.** verdadero

9. $\dfrac{1}{\pi}$ **11.** $|z - i| = \sqrt{5}$

13. $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k \cos(k\pi/4)}{k!} z^k$

15. $-\dfrac{i}{z^3} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{i}{3!z} - \dfrac{1}{4!} - \dfrac{i}{5!}z + \cdots$

17. $\cdots + \dfrac{1}{5!(z-i)^3} - \dfrac{1}{3!(z-i)} + (z - i)$

19. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9}z + \dfrac{26}{27}z^2 + \cdots;$

$\cdots - \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{z}{3^2} - \dfrac{z^2}{3^3} - \cdots;$

$\dfrac{2}{z^2} + \dfrac{8}{z^3} + \dfrac{26}{z^4} + \cdots;$

$-\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{z-1}{2^2} - \dfrac{(z-1)^2}{2^3} - \cdots$

21. $\dfrac{404\pi}{81}i$ **23.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}i$

25. $(\pi + \pi e^{-2}\cos 2)i$ **27.** $-\pi i$

29. $\dfrac{9\pi^3 + 2}{\pi^2}i$ **31.** $7\pi/50$

33. $\pi\left(\dfrac{90 - 52\sqrt{3}}{12 - 7\sqrt{3}}\right)$

Ejercicios para el apéndice II, página APÉ-5

1. 24; 720; $4\sqrt{\pi}/3$; $-8\sqrt{\pi}/15$ **3.** 0.297

5. $\Gamma(x) > \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt > e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{xe}$ para $x > 0$.
A medida que $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS DE NÚMERO IMPAR

Ejercicios 1.1, página 9

1. lineal, segundo orden

3. lineal, cuarto orden

5. no lineal, segundo orden

7. lineal, tercer orden

9. lineal en x pero no lineal en y

15. el dominio de la función es $-2 \leq x < \infty$; el intervalo más grande de la definición para la solución es $-2 < x < \infty$.

17. el dominio de la función es el conjunto de números reales excepto $x = 2$ y $x = -2$; los intervalos más grandes de la definición para la solución son $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, o $2 < x < \infty$.

19. $X = \dfrac{e^t - 1}{e^t - 2}$ definida en $(-\infty, \ln 2)$ o en $(\ln 2, \infty)$

27. ***a***) $m = -2$ ***b***) $m = 2, m = 3$

29. $y = 2$

31. no existen soluciones constantes

Ejercicios 1.2, página 15

1. $y = 1/(1 - 4e^{-x})$

3. $y = 1/(x^2 - 1)$; $1 < x < \infty$

5. $y = 1/(x^2 + 1)$; $-\infty < x < \infty$

7. $x = -\cos t + 8 \operatorname{sen} t$

9. $x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} t$

11. $y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

13. $y = 5e^{-x-1}$

15. $y = 0, y = x^3$

17. semiplanos definidos por $y > 0$ o $y < 0$

19. semiplanos definidos por $x > 0$ o $x < 0$

21. las regiones definidas por $y > 2$, $y < -2$, o $-2 < y < 2$

23. cualquier región que no contenga a (0, 0)

25. sí

27. no

29. ***a***) $y = cx$ ***b***) cualquier región rectangular que no toque el eje y

c) No, la función no es diferenciable en $x = 0$.

31. ***b***) $y = 1/(1 - x)$ en $(-\infty, 1)$; $y = -1/(x + 1)$ en $(-1, \infty)$

45. 35 individuos al año; 95 individuos al año

Ejercicios 1.3, página 24

1. $\dfrac{dP}{dt} = kP + r$; $\dfrac{dP}{dt} = kP - r$

3. $\dfrac{dP}{dt} = k_1P - k_2P^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = kx(1\,000 - x)$

9. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{1}{100}A = 0$; $A(0) = 50$

11. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{7}{600 - t}A = 6$

13. $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{c\pi}{450}\sqrt{h}$

15. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E(t)$

17. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$

19. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

21. $x\dfrac{d^2x}{dt^2} + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160$

23. $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \dfrac{gR^2}{r^2} = 0$

25. $\dfrac{dA}{dt} = k(M - A), k > 0$

27. $\dfrac{dx}{dt} + kx = r, k > 0$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$

Ejercicios de repaso del capítulo 1, página 29

1. $\dfrac{dy}{dx} = ky$

3. $y'' + k^2y = 0$

5. $y'' - 2y' + y = 0$

7. a), d)

9. b)

11. b)

13. $y = c_1$ y $y = c_2e^x$, c_1 y c_2 constantes

15. $y' = x^2 + y^2$

17. ***a***) El dominio es el conjunto de todos los números reales

b) ya sea $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$

19. Para $x_0 = -1$, el intervalo es $(-\infty, 0)$ y para $x_0 = 2$, el intervalo es $(0, \infty)$.

21. ***c***) $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

23. $(-\infty, \infty)$

25. $(0, \infty)$

27. $y_0 = -3, y_1 = 0$

29. $m\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dm}{dt} + kv = -mg + R$

Ejercicios 2.1, página 38

21. 0 es asintóticamente estable (atractor); 3 es inestable (repulsor).

23. 2 es semiestable.

25. -2 es inestable (repulsor); 0 es semiestable; 2 es asintóticamente estable (atractor).

27. -1 es asintóticamente estable (atractor); 0 es inestable (repulsor).

39. ***a***) mg/k ***b***) $\sqrt{mg/k}$

Ejercicios 2.2, página 45

1. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

3. $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

5. $y = cx^4$

7. $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$

9. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| + c$

11. $4\cos y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c$

13. $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

15. $S = ce^{kr}$

17. $P = \dfrac{ce^t}{1 + ce^t}$

19. $(y + 3)^5 e^x = c(x + 4)^5 e^y$

21. $y = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x^2 + c)$

23. $x = \tan(4t - \frac{3}{4}\pi)$

25. $y = \dfrac{e^{-(1+1/x)}}{x}$

27. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$

29. ***a***) $y = 2, y = -2, y = 2\,\dfrac{3 - e^{4x-1}}{3 + e^{4x-1}}$

33. $y = 1$

35. $y = 1 + \frac{1}{10}\tan(\frac{1}{10}x)$

39. ***a***) $y = -\sqrt{x^2 + x - 1}$ ***c***) $(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$

47. $y(x) = (4h/L^2)x^2 + a$

Ejercicios 2.3, página 53

1. $y = ce^{5x}, (-\infty, \infty)$

3. $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}, (-\infty, \infty)$

5. $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}, (-\infty, \infty)$

7. $y = x^{-1}\ln x + cx^{-1}, (0, \infty)$

9. $y = cx - x\cos x, (0, \infty)$

11. $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + cx^{-4}, (0, \infty)$

13. $y = \frac{1}{2}x^{-2}e^x + cx^{-2}e^{-x}, (0, \infty)$

15. $x = 2y^6 + cy^4, (0, \infty)$

17. $y = \operatorname{sen} x + c\cos x, (-\pi/2, \pi/2)$

19. $(x + 1)e^x y = x^2 + c, (-1, \infty)$

21. $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + c, (-\pi/2, \pi/2)$

23. $y = e^{-3x} + cx^{-1}e^{-3x}, (0, \infty)$

25. $y = x^{-1}e^x + (2 - e)x^{-1}, (0, \infty)$

27. $i = \dfrac{E}{R} + \left(i_0 - \dfrac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}, (-\infty, \infty)$

29. $(x + 1)y = x\ln x - x + 21, (0, \infty)$

31. $y = (2\sqrt{x} + e^2 - 2)e^{-2\sqrt{x}}, (0, \infty)$

33. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(e^6 - 1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$

35. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ (\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})e^{-x^2}, & x \ge 1 \end{cases}$

37. $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2\ln x + (1 + 4e^{-2})x^2, & x > 1 \end{cases}$

39. $y = e^{x^2-1} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{x^2}(\operatorname{erf}(x) - \operatorname{erf}(1))$

49. $E(t) = E_0 e^{-(t-4)/RC}$

Ejercicios 2.4, página 59

1. $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$

3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$

5. $x^2y^2 - 3x + 4y = c$

7. no es exacto

9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$

11. no es exacto

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

15. $x^3y^3 - \tan^{-1} 3x = c$

17. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = c$

19. $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = c$

21. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$

25. $y^2\operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$

27. $k = 10$

29. $x^2y^2\cos x = c$

31. $x^2y^2 + x^3 = c$

33. $3x^2y^3 + y^4 = c$

35. $-2ye^{3x} + \frac{10}{3}e^{3x} + x = c$

37. $e^{y^2}(x^2 + 4) = 20$

39. ***c***) $y_1(x) = -x^2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4},$
$y_2(x) = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$

45. ***a***) $v(x) = 8\sqrt{\dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{x^2}}$ ***b***) 12.7 ft/s

Ejercicios 2.5, página 64

1. $y + x\ln|x| + y = cx$

3. $(x - y)\ln|x - y| = y + c(x - y)$

5. $x + y\ln|x| = cy$

7. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = c$

9. $4x = y(\ln|y| - c)^2$

11. $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8x^3$

13. $\ln|x| = e^{y/x} - 1$

15. $y^3 = 1 + cx^{-3}$

17. $y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$

19. $e^{t/y} = ct$

21. $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$

23. $y = -x - 1 + \tan(x + c)$

25. $2y - 2x + \operatorname{sen} 2(x + y) = c$

27. $4(y - 2x + 3) = (x + c)^2$

29. $-\cot(x + y) + \csc(x + y) = x + \sqrt{2} - 1$

35. ***b***) $y = \dfrac{2}{x} + (-\frac{1}{4}x + cx^{-3})^{-1}$

Ejercicios 2.6, página 69

1. $y_2 = 2.9800$, $y_4 = 3.1151$

3. $y_{10} = 2.5937$, $y_{20} = 2.6533$; $y = e^x$

5. $y_5 = 0.4198$, $y_{10} = 0.4124$

7. $y_5 = 0.5639$, $y_{10} = 0.5565$

9. $y_5 = 1.2194$, $y_{10} = 1.2696$

13. Euler: $y_{10} = 3.8191$, $y_{20} = 5.9363$
RK4: $y_{10} = 42.9931$, $y_{20} = 84.0132$

Ejercicios 2.7, página 75

1. 7.9 años; 10 años

3. 760; aproximadamente 11 personas/año

5. 11 h **7.** 136.5 h

9. $I(15) = 0.00098I_0$ o aproximadamente 0.1% de I_0

11. 15 963 años

13. $T(1) = 36.76$ °F; aproximadamente 3.06 min

15. aproximadamente 82.1 s; aproximadamente 145.7 s

17. 390° **19.** 1.6 h aproximadamente

21. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$

23. $A(t) = 1\,000 - 1\,000e^{-t/100}$

25. $A(t) = 1\,000 - 10t - \frac{1}{10}(100 - t)^2$; 100 min

27. 64.38 lb

29. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$; $i \to \frac{3}{5}$ conforme $t \to \infty$

31. $q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$; $i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$

33. $i(t) = \begin{cases} 60 - 60e^{-t/10}, & 0 \le t \le 20 \\ 60(e^2 - 1)e^{-t/10}, & t > 20 \end{cases}$

35. ***a)*** $v(t) = \dfrac{mg}{k} + \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$

b) $v \to \dfrac{mg}{k}$ como $t \to \infty$

c)

$$s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) + s_0$$

39. ***a)*** $v(t) = \dfrac{\rho g}{4k}\left(\dfrac{k}{\rho}t + r_0\right) - \dfrac{\rho g r_0}{4k}\left(\dfrac{r_0}{\dfrac{k}{\rho}t + r_0}\right)^3$

b) $33\frac{1}{3}$ min

41. ***a)*** $P(t) = P_0e^{(k_1 - k_2)t}$

43. ***a)*** Como $t \to \infty$, $x(t) \to r/k$.

b) $x(t) = r/k - (r/k)e^{-kt}$; $(\ln 2)/k$

45. ***a)*** $t_b = 50$ s ***b)*** 70 m/s

c) 1 250 m ***e)*** $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{50}v = -9.8$

Ejercicios 2.8, página 84

1. ***a)*** $N = 2\,000$

b) $N(t) = \dfrac{2\,000e^t}{1\,999 + e^t}$; $N(10) = 1\,834$

3. 1 000 000; 5.29 mo

5. ***b)*** $P(t) = \dfrac{4(P_0 - 1) - (P_0 - 4)e^{-3t}}{(P_0 - 1) - (P_0 - 4)e^{-3t}}$

c) Para $0 < P_0 < 1$, el tiempo de extinción es

$t = -\frac{1}{3}\ln\dfrac{4(P_0 - 1)}{P_0 - 4}$.

7. $P(t) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tan^{-1}\left(\dfrac{2P_0 - 5}{\sqrt{3}}\right)\right]$;

el tiempo de extinción es

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\left(\frac{2P_0 - 5}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

9. 29.3 g; $X \to 60$ conforme $t \to \infty$; 0 g de A y 30 g de B

11. ***a)*** $h(t) = \left(\sqrt{H} - \dfrac{4A_h}{A_w}t\right)^2$; I es $0 \le t \le \sqrt{H}A_w/4A_h$

b) $576\sqrt{10}$ s o 30.36 min

13. ***a)*** aproximadamente 856.65 s o 14.31 min

b) 243 s o 4.05 min

15. ***a)*** $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right)$

donde $c_1 = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0\right)$

b) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

c) $s(t) = \dfrac{m}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right) + c_2$

donde $c_2 = -(m/k)\ln\cosh c_1$

17. ***a)*** $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2 - \rho V$, donde ρ es la densidad del peso del agua

b) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}\tanh\left(\dfrac{\sqrt{kmg - k\rho V}}{m}t + c_1\right)$

c) $\sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}$

19. ***a)*** $W = 0$ y $W = 2$

b) $W(x) = 2\,\text{sech}^2(x - c_1)$

c) $W(x) = 2\,\text{sech}^2 x$

Ejercicios 2.9, página 91

1. $x(t) = x_0e^{-\lambda_1 t}$

$y(t) = \dfrac{x_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$

$z(t) = x_0\left(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right)$

3. 5, 20, 147 días. El tiempo cuando $y(t)$ y $z(t)$ son iguales tiene sentido porque la mayor parte de A y la mitad de B ya no están, se debió haber formado la mitad de C.

5. $\frac{dx_1}{dt} = 6 - \frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2$

7. ***a)*** $\frac{dx_1}{dt} = 3\frac{x_2}{100 - t} - 2\frac{x_1}{100 + t}$

$\frac{dx_2}{dt} = 2\frac{x_1}{100 + t} - 3\frac{x_2}{100 - t}$

b) $x_1(t) + x_2(t) = 150$; $x_2(30) \approx 47.4$ lb

13. $L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t)$

$L_2\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + (R_1 + R_3)i_3 = E(t)$

15. $i(0) = i_0$, $s(0) = n - i_0$, $r(0) = 0$

Ejercicios de repaso del capítulo 2, página 93

1. $-A/k$, un repulsor para $k > 0$, un atractor para $k < 0$

3. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2(y - 3)^2$

5. semiestable para n par e inestable para n impar; semiestable para n par y asintóticamente estable para n impar

9. $2x + \text{sen}\, 2x = 2\ln(y^2 + 1) + c$

11. $(6x + 1)y^3 = -3x^3 + c$

13. $Q = ct^{-1} + \frac{1}{25}t^4(-1 + 5\ln t)$

15. $y = \frac{1}{4} + c(x^2 + 4)^{-4}$

17. $y = \csc x$, $\pi < x < 2\pi$

19. ***b)*** $y = \frac{1}{4}(x + 2\sqrt{y_0} - x_0)^2$, $x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$

23. $P(45) = 8.99$ miles de millones

25. ***b)*** 3 257 a.C., aproximadamente

27. $x = 10\ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{100 - y^2}$

29. ***a)*** $\frac{BT_1 + T_2}{1 + B}, \frac{BT_1 + T_2}{1 + B}$

b) $T(t) = \frac{BT_1 + T_2}{1 + B} + \frac{T_1 - T_2}{1 + B}e^{k(1+B)t}$

31. $i(t) = \begin{cases} 4t - \frac{1}{5}t^2, & 0 \leq t < 10 \\ 20, & t \geq 10 \end{cases}$

33. $h(t) = (\sqrt{2} - 0.00000163t)^2$

35. no

37. $x(t) = \frac{\alpha c_1 e^{\alpha k_1 t}}{1 + c_1 e^{\alpha k_1 t}}$, $y(t) = c_2(1 + c_1 e^{\alpha k_1 t})^{k_2/k_1}$

39. $x = -y + 1 + c_2 e^{-y}$

Ejercicios 3.1, página 108

1. $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

3. $y = 3x - 4x\ln x$

9. $(-\infty, 2)$

11. ***a)*** $y = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x})$ ***b)*** $y = \frac{\text{senh}\, x}{\text{senh}\, 1}$

13. ***a)*** $y = e^x\cos x - e^x\,\text{sen}\, x$

b) no tiene solución

c) $y = e^x\cos x + e^{-\pi/2}e^x\,\text{sen}\, x$

d) $y = c_2 e^x\,\text{sen}\, x$, donde c_2 es arbitraria

15. dependiente

17. dependiente

19. dependiente

21. independiente

23. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(e^{-3x}, e^{4x}) = 7e^x \neq 0$; $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$.

25. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(e^x\cos 2x, e^x\,\text{sen}\, 2x) = 2e^{2x} \neq 0$; $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\,\text{sen}\, 2x$.

27. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(x^3, x^4) = x^6 \neq 0$; $y = c_1x^3 + c_2x^4$.

29. Las funciones satisfacen la ecuación diferencial y son linealmente independientes en el intervalo puesto que $W(x, x^{-2}, x^{-2}\ln x) = 9x^{-6} \neq 0$; $y = c_1x + c_2x^{-2} + c_3x^{-2}\ln x$.

35. ***b)*** $y_p = x^2 + 3x + 3e^{2x}$; $y_p = -2x^2 - 6x - \frac{1}{3}e^{2x}$

Ejercicios 3.2, página 111

1. $y_2 = xe^{2x}$

3. $y_2 = \text{sen}\, 4x$

5. $y_2 = \text{senh}\, x$

7. $y_2 = xe^{2x/3}$

9. $y_2 = x^4\ln|x|$

11. $y_2 = 1$

13. $y_2 = x\cos(\ln x)$

15. $y_2 = x^2 + x + 2$

17. $y_2 = e^{2x}$, $y_p = -\frac{1}{2}$

19. $y_2 = e^{2x}$, $y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$

Ejercicios 3.3, página 117

1. $y = c_1 + c_2e^{-x/4}$

3. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

5. $y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}$

7. $y = c_1e^{2x/3} + c_2e^{-x/4}$

9. $y = c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen}\, 3x$

11. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\, x)$

13. $y = e^{-x/3}(c_1\cos\frac{1}{3}\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\sqrt{2}x)$

15. $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{5x}$

17. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x}$

19. $u = c_1e^t + e^{-t}(c_2\cos t + c_3\,\text{sen}\, t)$

21. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$

23. $y = c_1 + c_2x + e^{-x/2}(c_3\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x)$

25. $y = c_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4x\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}x$

27. $u = c_1e^r + c_2re^r + c_3e^{-r} + c_4re^{-r} + c_5e^{-5r}$

29. $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 4x$

31. $y = -\frac{1}{3}e^{-(t-1)} + \frac{1}{3}e^{5(t-1)}$

33. $y = 0$

35. $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$

37. $y = e^{5x} - xe^{5x}$

39. $y = 0$

41. $y = \frac{1}{2}(1 - \frac{5}{\sqrt{3}})e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{2}(1 + \frac{5}{\sqrt{3}})e^{\sqrt{3}x}$;

$y = \cosh\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\text{senh}\,\sqrt{3}x$

Ejercicios 3.4, página 127

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 3$

3. $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$

5. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

7. $y = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + (-4x^2 + 4x - \frac{4}{3})e^{3x}$

9. $y = c_1 + c_2e^x + 3x$

11. $y = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2e^{x/2}$

13. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x \cos 2x$

15. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$

17. $y = c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}xe^x \operatorname{sen} 2x$

19. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\operatorname{sen} 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$

21. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\operatorname{sen} x$

23. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$

25. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3$

27. $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$

29. $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$

31. $y = -10e^{-2x} \cos x + 9e^{-2x} \operatorname{sen} x + 7e^{-4x}$

33. $x = \dfrac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \dfrac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$

35. $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \frac{1}{2}e^{5x}$

37. $y = 6 \cos x - 6(\cot 1) \operatorname{sen} x + x^2 - 1$

39. $y = \dfrac{-4 \operatorname{sen} \sqrt{3}x}{\operatorname{sen} \sqrt{3} + \sqrt{3} \cos \sqrt{3}} + 2x$

41. $y = \begin{cases} \cos 2x + \frac{5}{6} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{5}{6} \operatorname{sen} 2x, & x > \pi/2 \end{cases}$

Ejercicios 3.5, página 132

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$

3. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x$

5. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x$

7. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2} x \operatorname{senh} x$

9. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{4t}}{t}\, dt\right), x_0 > 0$

11. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x)$

13. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - e^{-2x} \operatorname{sen} e^x$

15. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \ln t - \frac{3}{4}t^2e^{-t}$

17. $y = c_1e^x \operatorname{sen} x + c_2e^x \cos x + \frac{1}{3}xe^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}e^x \cos x \ln|\cos x|$

19. $y = \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{8}x^2e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$

21. $y = \frac{4}{9}e^{-4x} + \frac{25}{36}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$

23. $y = c_1x^{-1/2} \cos x + c_2x^{-1/2} \operatorname{sen} x + x^{-1/2}$

25. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$

Ejercicios 3.6, página 138

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$

3. $y = c_1 + c_2 \ln x$

5. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$

7. $y = c_1x^{(2-\sqrt{6})} + c_2x^{(2+\sqrt{6})}$

9. $y = c_1 \cos(\frac{1}{5} \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{5} \ln x)$

11. $y = c_1x^{-2} + c_2x^{-2} \ln x$

13. $y = x^{-1/2}[c_1 \cos(\frac{1}{6}\sqrt{3} \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{6}\sqrt{3} \ln x)]$

15. $y = c_1x^3 + c_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)$

17. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^{-3}$

19. $y = c_1 + c_2x^5 + \frac{1}{5}x^5 \ln x$

21. $y = c_1x + c_2x \ln x + x(\ln x)^2$

23. $y = c_1x^{-1} + c_2x - \ln x$

25. $y = 2 - 2x^{-2}$

27. $y = \cos(\ln x) + 2 \operatorname{sen}(\ln x)$

29. $y = \frac{3}{4} - \ln x + \frac{1}{4}x^2$

31. $y = c_1x^{-10} + c_2x^2$

33. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$

35. $y = x^2[c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3 \ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$

37. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2} \ln(-x), x < 0$

Ejercicios 3.7, página 142

3. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$

5. $y = \dfrac{1}{c_1^2} \ln|c_1x + 1| - \dfrac{1}{c_1}x + c_2$

7. $\frac{1}{3}y^3 - c_1y = x + c_2$

9. $y = \tan(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x), -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

11. $y = -\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1 - c_1^2x^2} + c_2$

13. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$

15. $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \cdots$

17. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

Ejercicios 3.8, página 154

1. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$

3. $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 4\sqrt{6}t$

5. ***a)*** $x(\pi/12) = -\frac{1}{4};\ x(\pi/8) = -\frac{1}{2};\ x(\pi/6) = -\frac{1}{4};\ x(\pi/4) = \frac{1}{2};\ x(9\pi/32) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) 4 ft/s; hacia abajo

c) $t = \dfrac{(2n + 1)\pi}{16}, n = 0, 1, 2, \ldots$

7. ***a)*** la masa de 20 kilogramos

b) la masa de 20 kilogramos; la masa de 50 kilogramos

c) $t = n\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$; en la posición de equilibrio; la masa de 50 kilogramos se mueve hacia arriba mientras que la masa de 20 kilogramos se mueve hacia arriba cuando n es par y hacia abajo cuando n es impar.

9. $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{sen}(2t + 0.5880)$

11. ***a)*** $x(t) = -\frac{2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10t$
$= \frac{5}{6}\operatorname{sen}(10t - 0.927)$

b) $\frac{5}{6}$ ft; $\frac{\pi}{5}$

c) 15 ciclos

d) 0.721 s

e) $\dfrac{(2n+1)\pi}{20} + 0.0927,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

f) $x(3) = -0.597$ ft

g) $x'(3) = -5.814$ ft/s

h) $x''(3) = 59.702$ ft/s^2

i) $\pm 8\frac{1}{3}$ ft/s

j) $0.1451 + \dfrac{n\pi}{5};\ 0.3545 + \dfrac{n\pi}{5},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

k) $0.3545 + \dfrac{n\pi}{5},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

13. 120 lb/ft; $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{sen} 8\sqrt{3}t$

17. ***a)*** arriba ***b)*** hacia arriba

19. ***a)*** abajo ***b)*** hacia arriba

21. $\frac{1}{4}$ s; $\frac{1}{2}$ s, $x(\frac{1}{2}) = e^{-2}$; esto es, la posición es aproximadamente de 0.14 pies por debajo de la posición de equilibrio.

23. ***a)*** $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$

b) $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$

25. ***a)*** $x(t) = e^{-2t}(-\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t)$

b) $x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(4t + 4.249)$

c) $t = 1.294$ s

27. ***a)*** $\beta > \frac{5}{2}$ ***b)*** $\beta = \frac{5}{2}$ ***c)*** $0 < \beta < \frac{5}{2}$

29. $x(t) = e^{-t/2}(-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t) +$
$\frac{10}{3}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$

31. $x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$

33. $x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

35. ***a)*** $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-h) - \beta\dfrac{dx}{dt}$ o

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = \omega^2 h(t),$

donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$

b) $x(t) = e^{-2t}(-\frac{56}{13}\cos 2t - \frac{72}{13}\operatorname{sen} 2t) + \frac{56}{13}\cos t +$
$\frac{32}{13}\operatorname{sen} t$

37. $x(t) = -\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$

39. ***b)*** $\dfrac{F_0}{2\omega}t\operatorname{sen}\omega t$

45. 4.568 C; 0.0509 s

47. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$
$i(t) = 60e^{-3t}\operatorname{sen} 3t$; 10.432 C

49. $q_p = \frac{100}{13}\operatorname{sen} t + \frac{150}{13}\cos t,\ i_p = \frac{100}{13}\cos t - \frac{150}{13}\operatorname{sen} t$

53. $q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ C

57. $q(t) = \left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} +$
$\sqrt{LC}i_0\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\cos\gamma t$

$i(t) = i_0\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} - \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$
$- \dfrac{E_0C\gamma}{1-\gamma^2LC}\operatorname{sen}\gamma t$

Ejercicios 3.9, página 164

1. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)$

3. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{48EI}(3L^2x^2 - 5Lx^3 + 2x^4)$

5. ***a)*** $y(x) = \dfrac{w_0}{360EI}(7L^4x - 10L^2x^3 + 3x^5)$

c) $x \approx 0.51933,\ y_{\text{máx}} \approx 0.234799$

7. $y(x) = -\dfrac{w_0EI}{P^2}\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x$

$+ \left(\dfrac{w_0EI}{P^2}\operatorname{senh}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L - \dfrac{w_0L\sqrt{EI}}{P\sqrt{P}}\right)\dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x}{\cosh\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L}$

$+ \dfrac{w_0}{2P}x^2 + \dfrac{w_0EI}{P^2}$

9. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen} nx$

11. $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots;$

$y = \cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$

13. $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ y = \cos nx$

15. $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{25},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = e^{-x}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$

17. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen}(n\ln x)$

19. $\lambda_n = n^4\pi^4,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen} n\pi x$

21. $x = L/4,\ x = L/2,\ x = 3L/4$

25. $\omega_n = \dfrac{n\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ y = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$

27. $u(r) = \left(\dfrac{u_0 - u_1}{b-a}\right)\dfrac{ab}{r} + \dfrac{u_1b - u_0a}{b-a}$

Ejercicios 3.10, página 176

1. $y_p(x) = \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\operatorname{senh} 4(x-t)f(t)\,dt$

3. $y_p(x) = \int_{x_0}^{x}(x-t)e^{-(x-t)}f(t)\,dt$

5. $y_p(x) = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sen} 3(x-t)f(t)\,dt$

7. $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\operatorname{senh} 4(x-t)te^{-2t}dt$

9. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \int_{x_0}^{x}(x-t)e^{-(x-t)}e^{-t}dt$

11. $y = c_1\cos 3x + c_2\text{sen } 3x + \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\text{sen } 3(x - t)(t + \text{sen } t)\,dt$

13. $y_p(x) = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x}$

15. $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{5x}$

17. $y_p(x) = -\cos x + \dfrac{\pi}{2}\text{sen } x - x\,\text{sen } x - \cos x \ln|\text{sen } x|$

19. $y = \frac{25}{16}e^{-2x} - \frac{9}{16}e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$

21. $y = -e^{5x} + 6xe^{5x} + \frac{1}{2}x^2e^{5x}$

23. $y = -x\,\text{sen } x - \cos x \ln|\text{sen } x|$

25. $y = (\cos 1 - 2)e^{-x} + (1 + \text{sen } 1 - \cos 1)e^{-2x}$
$\quad - e^{-2x}\,\text{sen } e^x$

27. $y = 4x - 2x^2 - x\ln x$

29. $y = \frac{46}{45}x^3 - \frac{1}{20}x^{-2} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6}\ln x$

31. $y(x) = 5e^x + 3e^{-x} + y_p(x)$,

donde $y_p(x) = \begin{cases} 1 - \cosh x, & x < 0 \\ -1 + \cosh x, & x \geq 0 \end{cases}$

33. $y = \cos x - \text{sen } x + y_p(x)$,

donde $y_p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10 - 10\cos x, & 0 \leq x \leq 3\pi \\ -20\cos x, & x > 3\pi \end{cases}$

35. $y_p(x) = (x - 1)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 (t - 1)f(t)\,dt$

37. $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

39. $y_p(x) = \dfrac{\text{sen }(x - 1)}{\text{sen } 1} - \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 1} + 1$

41. $y_p(x) = -e^x\cos x - e^x\,\text{sen } x + e^x$

43. $y_p(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}\ln x$

Ejercicios 3.11, página 183

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

15. ***a)*** 5 ft ***b)*** $4\sqrt{10}$ ft/s ***c)*** $0 \leq t \leq \frac{3}{8}\sqrt{10}$; 7.5 ft

17. ***a)*** $xv\dfrac{dv}{dx} + v^2 = 32x$

b) $\frac{1}{2}v^2x^2 - \frac{32}{3}x^3 = -288$

c) aproximadamente 0.66 s

19. ***a)*** $xy'' = r\sqrt{1 + (y')^2}$. Cuando $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $dy/dx = 0$.

b) Cuando $r \neq 1$,

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1 + r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+r} - \frac{1}{1 - r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-r}\right] + \frac{ar}{1 - r^2}.$$

Cuando $r = 1$,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a}(x^2 - a^2) + \frac{1}{a}\ln\frac{a}{x}\right].$$

c) Las trayectorias se intersecan cuando $r < 1$.

Ejercicios 3.12, página 191

1. $x = c_1e^t + c_2te^t$
$y = (c_1 - c_2)e^t + c_2te^t$

3. $x = c_1\cos t + c_2\,\text{sen } t + t + 1$
$y = c_1\,\text{sen } t - c_2\cos t + t - 1$

5. $x = \frac{1}{2}c_1\,\text{sen } t + \frac{1}{2}c_2\cos t - 2c_3\,\text{sen}\sqrt{6}t - 2c_4\cos\sqrt{6}t$
$y = c_1\,\text{sen } t + c_2\cos t + c_3\,\text{sen}\sqrt{6}t + c_4\cos\sqrt{6}t$

7. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\,\text{sen } 2t + c_4\cos 2t + \frac{1}{5}e^t$
$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\,\text{sen } 2t - c_4\cos 2t - \frac{1}{5}e^t$

9. $x = c_1 - c_2\cos t + c_3\,\text{sen } t + \frac{17}{15}e^{3t}$
$y = c_1 + c_2\,\text{sen } t + c_3\cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$

11. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\,\text{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$y = (-\frac{3}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{3}{2}c_3)e^{-t/2}\,\text{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

13. $x = c_1e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$
$y = -\frac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t$

15. $x = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
$y = (c_1 - c_2 + 2) + (c_2 + 1)t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$

17. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\,\text{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$y = c_1e^t + (-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)\,e^{-t/2}\,\text{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3)\,e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
$z = c_1e^t + (-\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3)\,e^{-t/2}\,\text{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t +$
$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3)\,e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

19. $x = -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
$z = 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

21. $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3}$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$

25. $mx'' = 0$
$my'' = -mg$;
$x = c_1t + c_2$
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_4$

Ejercicios de repaso del capítulo 3, página 193

1. $y = 0$ **3.** falso **5.** 8 pies

7. $\frac{3}{4}$ **9.** $(-\infty, 0)$; $(0, \infty)$

11. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x} + c_4e^x + c_5xe^x + c_6x^2e^x$,
$y = c_1x^3 + c_2x^{-5} + c_3x^{-5}\ln x + c_4x + c_5x\ln x +$
$c_6x(\ln x)^2$

13. $y = c_1e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$

15. $y = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x}$

17. $y = c_1e^{-x/3} + e^{-3x/2}(c_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_3\,\text{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x)$

19. $y = e^{3x/2}(c_2\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_3\,\text{sen}\frac{\sqrt{11}}{2}x) + \frac{4}{5}x^3 +$
$\frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$

21. $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{5}\,\text{sen } x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{4}{3}x$

23. $y = e^x(c_1\cos x + c_2\,\text{sen } x) - e^x\cos x\ln|\sec x + \tan x|$

25. $y = c_1x^{-1/3} + c_2x^{1/2}$

27. $y = c_1x^2 + c_2x^3 + x^4 - x^2 \ln x$

29. ***a)*** $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x$, $\omega \neq \alpha$, $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + Ax \cos \omega x + Bx \operatorname{sen} \omega x$, $\omega = \alpha$

b) $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Ae^{\alpha x}$, $\omega \neq \alpha$,
$y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Axe^{\omega x}$, $\omega = \alpha$

31. ***a)*** $y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x + c_3x \cosh x + c_4x \operatorname{senh} x$

b) $y_p = Ax^2 \cosh x + Bx^2 \operatorname{senh} x$

33. $y = e^{x-\pi} \cos x$

35. $y = \frac{13}{4}e^x - \frac{5}{4}e^{-x} - x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

37. $y = x^2 + 4$

41. $x = -c_1e^t - \frac{3}{2}c_2e^{2t} + \frac{5}{2}$
$y = c_1e^t + c_2e^{2t} - 3$

43. $x = c_1e^t + c_2e^{5t} + te^t$
$y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t} - te^t + 2e^t$

45. 14.4 lb

47. $0 < m \leq 2$

49. ***a)*** $q(t) = -\frac{1}{150} \operatorname{sen} 100t + \frac{1}{75} \operatorname{sen} 50t$

b) $i(t) = -\frac{2}{3} \cos 100t + \frac{2}{3} \cos 50t$

c) $t = \dfrac{n\pi}{50}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

53. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

55. $y(x) = 2\cos x - 5\operatorname{sen} x + \int_0^x \operatorname{sen}(x - t)\tan t\, dt$
$= 2\cos x - 4\operatorname{sen} x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

57. ***a)*** $\theta(t) = \omega_0\sqrt{l/g}\operatorname{sen}\sqrt{g/l}\,t$

Ejercicios 4.1, página 201

1. $\dfrac{2}{s}e^{-s} - \dfrac{1}{s}$

3. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

5. $\dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

7. $\dfrac{1}{s}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

9. $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^2}e^{-s}$

11. $\dfrac{e^7}{s - 1}$

13. $\dfrac{1}{(s - 4)^2}$

15. $\dfrac{1}{s^2 + 2s + 2}$

17. $\dfrac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$

19. $\dfrac{48}{s^5}$

21. $\dfrac{4}{s^2} - \dfrac{10}{s}$

23. $\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} - \dfrac{3}{s}$

25. $\dfrac{6}{s^4} + \dfrac{6}{s^3} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

27. $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s - 4}$

29. $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s - 2} + \dfrac{1}{s - 4}$

31. $\dfrac{8}{s^3} - \dfrac{15}{s^2 + 9}$

33. Utilice $\operatorname{senh} kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

35. $\dfrac{1}{2(s - 2)} - \dfrac{1}{2s}$

37. $\dfrac{2}{s^2 + 16}$

39. $\dfrac{4 \cos 5 + (\operatorname{sen} 5)s}{s^2 + 16}$

Ejercicios 4.2, página 209

1. $\frac{1}{2}t^2$

3. $t - 2t^4$

5. $1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

7. $t - 1 + e^{2t}$

9. $\frac{1}{4}e^{-t/4}$

11. $\frac{5}{7} \operatorname{sen} 7t$

13. $\cos \dfrac{t}{2}$

15. $2 \cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t$

17. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$

19. $\frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$

21. $0.3e^{0.1t} + 0.6e^{-0.2t}$

23. $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$

25. $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos\sqrt{5}t$

27. $-4 + 3e^{-t} + \cos t + 3 \operatorname{sen} t$

29. $\frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t$

31. $y = -1 + e^t$

33. $y = \frac{1}{10}e^{4t} + \frac{19}{10}e^{-6t}$

35. $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

37. $y = 10 \cos t + 2 \operatorname{sen} t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t$

39. $y = -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$

41. $y = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\cos 2t + \frac{1}{4}e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$

Ejercicios 4.3, página 217

1. $\dfrac{1}{(s - 10)^2}$

3. $\dfrac{6}{(s + 2)^4}$

5. $\dfrac{1}{(s - 2)^2} + \dfrac{2}{(s - 3)^2} + \dfrac{1}{(s - 4)^2}$

7. $\dfrac{3}{(s - 1)^2 + 9}$

9. $\dfrac{s}{s^2 + 25} - \dfrac{s - 1}{(s - 1)^2 + 25} + 3\dfrac{s + 4}{(s + 4)^2 + 25}$

11. $\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$

13. $e^{3t} \operatorname{sen} t$

15. $e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$

17. $e^{-t} - te^{-t}$

19. $5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}$

21. $y = te^{-4t} + 2e^{-4t}$

23. $y = e^{-t} + 2te^{-t}$

25. $y = \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$

27. $y = -\frac{3}{2}e^{3t} \operatorname{sen} 2t$

29. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t$

31. $y = (e + 1)te^{-t} + (e - 1)e^{-t}$

33. $x(t) = -\frac{3}{2}e^{-7t/2}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t - \frac{7\sqrt{15}}{10}e^{-7t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{2}t$

37. $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

39. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

41. $\dfrac{s}{s^2 + 4}e^{-\pi s}$

43. $\frac{1}{2}(t - 2)^2\,\mathcal{U}(t - 2)$

45. $-\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t - \pi)$

47. $\mathcal{U}(t - 1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t - 1)$

49. *c)*

51. *f)*

53. *a)*

55. $f(t) = 2 - 4\,\mathcal{U}(t - 3)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-3s}$

57. $f(t) = t^2\,\mathcal{U}(t - 1)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = 2\dfrac{e^{-s}}{s^3} + 2\dfrac{e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-s}}{s}$

59. $f(t) = t - t\,\mathcal{U}(t - 2)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

61. $f(t) = \mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-as}}{s} - \dfrac{e^{-bs}}{s}$

63. $y = [5 - 5e^{-(t-1)}]\,\mathcal{U}(t - 1)$

65. $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\mathcal{U}(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)\mathcal{U}(t-1) + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$

67. $y = \cos 2t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$

69. $y = \operatorname{sen} t + [1-\cos(t-\pi)]\mathcal{U}(t-\pi) - [1-\cos(t-2\pi)]\mathcal{U}(t-2\pi)$

71. $x(t) = \frac{5}{4}t - \frac{5}{16}\operatorname{sen} 4t - \frac{5}{4}(t-5)\mathcal{U}(t-5) + \frac{5}{16}\operatorname{sen} 4(t-5)\mathcal{U}(t-5) - \frac{25}{4}\mathcal{U}(t-5) + \frac{25}{4}\cos 4(t-5)\mathcal{U}(t-5)$

73. $q(t) = \frac{2}{5}\mathcal{U}(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}\mathcal{U}(t-3)$

75. ***a)*** $i(t) = \frac{1}{101}e^{-10t} - \frac{1}{101}\cos t + \frac{10}{101}\operatorname{sen} t - \frac{1}{101}e^{-10(t-3\pi/2)}\mathcal{U}(t-3\pi/2) + \frac{10}{101}\cos(t-3\pi/2)\mathcal{U}(t-3\pi/2) + \frac{1}{101}\operatorname{sen}(t-3\pi/2)$

b) $i_{\text{máx}} \approx 0.1$ en $t \approx 1.6$, $i_{\text{mín}} \approx -0.1$ en $t \approx 4.7$

77. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{16EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{12EI}x^3 + \dfrac{w_0}{24EI}x^4 - \dfrac{w_0}{24EI}(x-\frac{1}{2}L)^4\mathcal{U}(x-\frac{1}{2}L)$

79. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{24EI}x^3 + \dfrac{w_0}{60EI}[\frac{5}{2}Lx^4 - x^5 + (x-\frac{1}{2}L)^5\mathcal{U}(x-\frac{1}{2}L)]$

81. ***a)*** $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 70 - 57.5t - (230 - 57.5t)\mathcal{U}(t-4))$

Ejercicios 4.4, página 228

1. $\dfrac{1}{(s+10)^2}$

3. $\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

5. $\dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

7. $\dfrac{12s-24}{[(s-2)^2+36]^2}$

9. $y = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

11. $y = 2\cos 3t + \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{6}t\operatorname{sen} 3t$

13. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{8}(t-\pi)\operatorname{sen} 4(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$

17. $y = \frac{2}{3}t^3 + c_1t^2$

19. $\dfrac{6}{s^5}$

21. $\dfrac{s-1}{(s+1)[(s-1)^2+1]}$

23. $\dfrac{1}{s(s-1)}$

25. $\dfrac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}$

27. $\dfrac{1}{s^2(s-1)}$

29. $\dfrac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$

31. $e^t - 1$

33. $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1$

37. $f(t) = \operatorname{sen} t$

39. $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$

41. $f(t) = e^{-t}$

43. $f(t) = \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$

45. $y(t) = \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

47. $i(t) = 100[e^{-10(t-1)} - e^{-20(t-1)}]\mathcal{U}(t-1) - 100[e^{-10(t-2)} - e^{-20(t-2)}]\mathcal{U}(t-2)$

49. $\dfrac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

51. $\dfrac{a}{s}\left(\dfrac{1}{bs} - \dfrac{1}{e^{bs}-1}\right)$

53. $\dfrac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}$

55. $i(t) = \dfrac{1}{R}(1-e^{-Rt/L}) + \dfrac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-e^{-R(t-n)/L})\mathcal{U}(t-n)$

57. $x(t) = 2(1 - e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t) + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1 - e^{-(t-n\pi)}\cos 3(t-n\pi) - \frac{1}{3}e^{-(t-n\pi)}\operatorname{sen} 3(t-n\pi)]\mathcal{U}(t-n\pi)$

Ejercicios 4.5, página 233

1. $y = e^{3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$

3. $y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

5. $y = -\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi/2) + \cos t\,\mathcal{U}(t-3\pi/2)$

7. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}]\mathcal{U}(t-1)$

9. $y = e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

11. $y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-2t}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen} 3(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) + \frac{1}{3}e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen} 3(t-3\pi)\mathcal{U}(t-3\pi)$

13. $y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{EI}(\frac{1}{4}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3), & 0 \le x < L/2 \\ \dfrac{P_0L^2}{4EI}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}L), & L/2 \le x \le L \end{cases}$

Ejercicios 4.6, página 236

1. $x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$
$y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$

3. $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t$
$y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$

5. $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$
$y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$

7. $x = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$
$y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$

9. $x = 8 + \dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$
$y = -\dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$

11. $x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t}$
$y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

13. $x_1 = \frac{1}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}t + \frac{2}{5}\cos t - \frac{2}{5}\cos\sqrt{6}t$
$x_2 = \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}t + \frac{4}{5}\cos t + \frac{1}{5}\cos\sqrt{6}t$

15. ***b)*** $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$
$i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$

c) $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

17. $i_2 = -\frac{20}{13}e^{-2t} + \frac{375}{1\,469}e^{-15t} + \frac{145}{113}\cos t + \frac{85}{113}\operatorname{sen} t$

$i_3 = \frac{30}{13}e^{-2t} + \frac{250}{1\,469}e^{-15t} - \frac{280}{113}\cos t + \frac{810}{113}\operatorname{sen} t$

19. $i_1 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{9\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}t$

$i_2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}t - \frac{6\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}t$

Ejercicios de repaso del capítulo 4, página 238

1. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s^2}e^{-s}$

3. falso

5. verdadero

7. $\dfrac{1}{s+7}$

9. $\dfrac{2}{s^2+4}$

11. $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

13. $\frac{1}{6}t^5$

15. $\frac{1}{2}t^2e^{5t}$

17. $e^{5t}\cos 2t + \frac{5}{2}e^{5t}\operatorname{sen} 2t$

19. $\cos\pi(t-1)\,\mathscr{U}(t-1) + \operatorname{sen}\pi(t-1)\,\mathscr{U}(t-1)$

21. -5

23. $e^{-k(s-a)}F(s-a)$

25. $f(t)\,\mathscr{U}(t-t_0)$

27. $f(t-t_0)\,\mathscr{U}(t-t_0)$

29. $f(t) = t - (t-1)\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-4)$;

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-4s};$$

$$\mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2}e^{-(s-1)} - \frac{1}{s-1}e^{-4(s-1)}$$

31. $f(t) = 2 + (t-2)\mathscr{U}(t-2)$;

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s};$$

$$\mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}e^{-2(s-1)}$$

33. $y = 5te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$

35. $y = -\frac{6}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{13}{50}e^{-5t} - \frac{4}{25}\mathscr{U}(t-2) - \frac{1}{5}(t-2)\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\mathscr{U}(t-2) - \frac{9}{100}e^{-5(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$

37. $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

39. $x = -\frac{1}{4} + \frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}$

$y = t + \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$

41. $i(t) = -9 + 2t + 9e^{-t/5}$

43. $y(x) = \dfrac{w_0}{12EIL}\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}Lx^4 - \frac{1}{2}L^2x^3 + \frac{1}{4}L^3x^2 + \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{2}L\right)^5\mathscr{U}\left(x - \frac{1}{2}L\right)\right]$

45. $\theta_1(t) = \dfrac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos\omega t + \dfrac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2K}t$

$\theta_2(t) = \dfrac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos\omega t - \dfrac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2K}t$

Ejercicios 5.1, página 250

1. $R = \frac{1}{2}, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3. $R = 10, (-5, 15)$

5. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots$

7. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, (-\pi/2, \pi/2)$

9. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_{k-2}x^k$

11. $2c_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k$

15. 5; 4

17. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{3\cdot 2}x^3 + \dfrac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \dfrac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{4\cdot 3}x^4 + \dfrac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \dfrac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

19. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{2!}x^2 - \dfrac{3}{4!}x^4 - \dfrac{21}{6!}x^6 - \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{5}{5!}x^5 + \dfrac{45}{7!}x^7 + \cdots\right]$

21. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{4^2}{6!}x^6 - \dfrac{7^2\cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{2^2}{4!}x^4 + \dfrac{5^2\cdot 2^2}{7!}x^7 - \dfrac{8^2\cdot 5^2\cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

23. $y_1(x) = c_0;\ y_2(x) = c_1\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

25. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots\right]$

27. $y_1(x) = c_0\left[1 + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{7}{4\cdot 4!}x^4 + \dfrac{23\cdot 7}{8\cdot 6!}x^6 - \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{14}{2\cdot 5!}x^5 + \dfrac{34\cdot 14}{4\cdot 7!}x^7 - \cdots\right]$

29. $y(x) = -2\left[1 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] + 6x$

$= 8x - 2e^x$

31. $y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$

33. $y_1(x) = c_0\left[1 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{180}x^6 + \cdots\right]$

Ejercicios 5.2, página 258

1. $x = 0$, punto singular irregular

3. $x = -3$, punto singular regular; $x = 3$, punto singular irregular

5. $x = 0, 2i, -2i$, puntos singulares regulares

7. $x = -3, 2$, puntos singulares regulares

9. $x = 0$, punto singular irregular; $x = -5, 5, 2$, puntos singulares regulares

11. para $x = 1$: $p(x) = 5$, $q(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x+1}$

para $x = -1$: $p(x) = \dfrac{5(x+1)}{x-1}$, $q(x) = x^2 + x$

13. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -1$

15. $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{3/2}\left[1 - \frac{2}{5}x + \frac{2^2}{7\cdot 5\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + 2x - 2x^2 + \frac{2^3}{3\cdot 3!}x^3 - \cdots\right]$$

17. $r_1 = \frac{7}{8}, r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{7/8}\left[1 - \frac{2}{15}x + \frac{2^2}{23\cdot 15\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{31\cdot 23\cdot 15\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 - 2x + \frac{2^2}{9\cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{17\cdot 9\cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$$

19. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{1/3}\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2\cdot 2}x^2 + \frac{1}{3^3\cdot 3!}x^3 + \cdots\right] + C_2\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5\cdot 2}x^2 + \frac{1}{8\cdot 5\cdot 2}x^3 + \cdots\right]$$

21. $r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x^{5/2}\left[1 + \frac{2\cdot 2}{7}x + \frac{2^2\cdot 3}{9\cdot 7}x^2 + \frac{2^3\cdot 4}{11\cdot 9\cdot 7}x^3 + \cdots\right]$$

23. $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{3}$

$$y(x) = C_1 x^{2/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots\right] + C_2 x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \cdots\right]$$

25. $r_1 = 0, r_2 = -1$

$$y(x) = C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} + C_2 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$= C_1 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + C_2 x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$= \frac{1}{x}[C_1 \operatorname{senh} x + C_2\cosh x]$$

27. $r_1 = 1, r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 x + C_2\left[x\ln x - 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{72}x^4 + \cdots\right]$$

29. $r_1 = r_2 = 0$

$$y(x) = C_1 y(x) + C_2\left[y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4\cdot 4!}x^4 - \cdots\right)\right]$$

donde $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x$

33. ***b)*** $y_1(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}t}$

$y_2(t) = t^{-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{\lambda}t)^{2n} = \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)}{t}$

c) $y = c_1 x\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}\right) + c_2 x\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$

Ejercicios 5.3, página 269

1. $y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$

3. $y = c_1 J_{5/2}(x) + c_2 J_{-5/2}(x)$

5. $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$

7. $y = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$

9. $y = c_1 J_{2/3}(5x) + c_2 J_{-2/3}(5x)$

11. $y = c_1 x^{-1/2}J_{1/2}(\alpha x) + c_2 x^{-1/2}J_{-1/2}(\alpha x)$

13. $y = x^{-1/2}[c_1 J_1(4x^{1/2}) + c_2 Y_1(4x^{1/2})]$

15. $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

17. $y = x^{1/2}[c_1 J_{3/2}(x) + c_2 Y_{3/2}(x)]$

19. $y = x^{-1}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{2}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{2}x^2)]$

23. $y = x^{1/2}[c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)]$
$= C_1 \operatorname{sen} x + C_2\cos x$

25. $y = x^{-1/2}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{8}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{8}x^2)]$
$= C_1 x^{-3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{8}x^2) + C_2 x^{-3/2}\cos(\frac{1}{8}x^2)$

35. $y = c_1 x^{1/2}J_{1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}) + c_2 x^{1/2}J_{-1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$

45. $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$ se proporcionan en el texto
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$,
$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

47. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 30$

Ejercicios de repaso del capítulo 5, página 272

1. falso

3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

7. $x^2(x-1)y'' + y' + y = 0$

9. $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1 x^{1/2}[1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{630}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \cdots]$

11. $y_1(x) = c_0[1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots]$

13. $r_1 = 3, r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1x^3[1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{120}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 + x + \frac{1}{2}x^2]$

15. $y(x) = 3[1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^6 + \cdots] - 2[x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{48}x^7 + \cdots]$

17. $\frac{1}{6}\pi$

19. $x = 0$ es un punto ordinario

21. $$y(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right] + c_1\left[x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4 \cdot 7}x^7 - \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10}x^{10} + \cdots\right] + \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right]$$

23. ***a***) $y = c_1J_{3/2}(4x) + c_2Y_{3/2}(4x)$
b) $y = c_1I_3(6x) + c_2K_3(6x)$

Ejercicios 6.1, página 279

1. para $h = 0.1$, $y_5 = 2.0801$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 2.0592$
3. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5470$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5465$
5. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.4053$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4054$
7. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5503$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5495$
9. para $h = 0.1$, $y_5 = 1.3260$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 1.3315$
11. para $h = 0.1$, $y_5 = 3.8254$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 3.8840$;
para $x = 0.5$ el valor real es $y(0.5) = 3.9082$
13. ***a***) $y_1 = 1.2$
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 = 4e^{2c}\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.02e^{2c} \le 0.02e^{0.2} = 0.0244$
c) El valor real es $y(0.1) = 1.2214$. El error es 0.0214.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 1.21$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0214. El error con $h =$ 0.05 es 0.0114.
15. ***a***) $y_1 = 0.8$
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 = 5e^{-2c}\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.025e^{-2c} \le 0.025$ para $0 \le c \le 0.1$
c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234$. El error es 0.0234.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.8125$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0234. El error con $h =$ 0.05 es 0.0109.
17. ***a***) El error es $19h^2e^{-3(c-1)}$.
b) $y''(c)\frac{1}{2}h^2 \le 19(0.1)^2(1) = 0.19$
c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 1.8207$. Si $h = 0.05$, $y_{10} = 1.9424$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.2325. El error con $h =$ 0.05 es 0.1109.
19. ***a***) El error es $\dfrac{1}{(c + 1)^2}\frac{1}{2}h^2$.
b) $\left|y''(c)\frac{1}{2}h^2\right| \le (1)\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.005$
c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 0.4198$. Si $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4124$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.0143. El error con $h =$ 0.05 es 0.0069.

Ejercicios 6.2, página 283

1. $y_5 = 3.9078$; el valor real es $y(0.5) = 3.9082$
3. $y_5 = 2.0533$
5. $y_5 = 0.5463$
7. $y_5 = 0.4055$
9. $y_5 = 0.5493$
11. $y_5 = 1.3333$
13. ***a***) 35.7678
c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t$; $\quad v(5) = 35.7678$
15. ***a***) $h = 0.1$, $y_4 = 903.0282$;
$h = 0.05$, $y_8 = 1.1 \times 10^{15}$
17. ***a***) $y_1 = 0.82341667$
b) $y^{(5)}c)\dfrac{h^5}{5!} = 40e^{-2c}\dfrac{h^5}{5!} \le 40e^{2(0)}\dfrac{(0.1)^5}{5!} = 3.333 \times 10^{-6}$
c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234134413$. El error es $3.225 \times 10^{-6} \le 3.333 \times 10^{-6}$.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.82341363$.
e) Error con $h = 0.1$ es 3.225×10^{-6}. Error con $h = 0.05$ es 1.854×10^{-7}.
19. ***a***) $y^{(5)}(c)\dfrac{h^5}{5!} = \dfrac{24}{(c + 1)^5}\dfrac{h^5}{5!}$
b) $\dfrac{24}{(c + 1)^5}\dfrac{h^5}{5!} \le 24\dfrac{(0.1)^5}{5!} = 2.0000 \times 10^{-6}$
c) A partir de los cálculos con $h = 0.1$, $y_5 = 0.40546517$.
A partir de los cálculos con $h = 0.05$, $y_{10} = 0.40546511$.

Ejercicios 6.3, página 286

1. $y(x) = -x + e^x$; los valores reales son $y(0.2) = 1.0214$, $y(0.4) = 1.0918$, $y(0.6) = 1.2221$, $y(0.8) = 1.4255$; las aproximaciones se proporcionan en el ejemplo 1
3. $y_4 = 0.7232$
5. para $h = 0.2$, $y_5 = 1.5569$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 1.5576$
7. para $h = 0.2$, $y_5 = 0.2385$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 0.2384$

Ejercicios 6.4, página 290

1. $y(x) = -2e^{2x} + 5xe^{2x}$; $y(0.2) = -1.4918$, $y_2 = -1.6800$
3. $y_1 = -1.4928$, $y_2 = -1.4919$
5. $y_1 = 1.4640$, $y_2 = 1.4640$
7. $x_1 = 8.3055$, $y_1 = 3.4199$; $x_2 = 8.3055$, $y_2 = 3.4199$
9. $x_1 = -3.9123$, $y_1 = 4.2857$; $x_2 = -3.9123$, $y_2 = 4.2857$
11. $x_1 = 0.4179$, $y_1 = -2.1824$; $x_2 = 0.4173$, $y_2 = -2.1821$

Ejercicios 6.5, página 293

1. $y_1 = -5.6774$, $y_2 = -2.5807$, $y_3 = 6.3226$
3. $y_1 = -0.2259$, $y_2 = -0.3356$, $y_3 = -0.3308$, $y_4 = -0.2167$
5. $y_1 = 3.3751$, $y_2 = 3.6306$, $y_3 = 3.6448$, $y_4 = 3.2355$, $y_5 = 2.1411$
7. $y_1 = 3.8842$, $y_2 = 2.9640$, $y_3 = 2.2064$, $y_4 = 1.5826$, $y_5 = 1.0681$, $y_6 = 0.6430$, $y_7 = 0.2913$
9. $y_1 = 0.2660$, $y_2 = 0.5097$, $y_3 = 0.7357$, $y_4 = 0.9471$, $y_5 = 1.1465$, $y_6 = 1.3353$, $y_7 = 1.5149$, $y_8 = 1.6855$, $y_9 = 1.8474$
11. $y_1 = 0.3492$, $y_2 = 0.7202$, $y_3 = 1.1363$, $y_4 = 1.6233$, $y_5 = 2.2118$, $y_6 = 2.9386$, $y_7 = 3.8490$
13. *c)* $y_0 = -2.2755$, $y_1 = -2.0755$, $y_2 = -1.8589$, $y_3 = -1.6126$, $y_4 = -1.3275$

Ejercicios de repaso del capítulo 6, página 294

1. Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1386	2.1549	2.1556
1.20	2.3097	2.3439	2.3454
1.30	2.5136	2.5672	2.5695
1.40	2.7504	2.8246	2.8278
1.50	3.0201	3.1157	3.1197

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1469	2.1554	2.1556
1.20	2.3272	2.3450	2.3454
1.30	2.5410	2.5689	2.5695
1.40	2.7883	2.8269	2.8278
1.50	3.0690	3.1187	3.1197

3. Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6000	0.6048	0.6049
0.70	0.7095	0.7191	0.7194
0.80	0.8283	0.8427	0.8431
0.90	0.9559	0.9752	0.9757
1.00	1.0921	1.1163	1.1169

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6024	0.6049	0.6049
0.70	0.7144	0.7194	0.7194
0.80	0.8356	0.8431	0.8431
0.90	0.9657	0.9757	0.9757
1.00	1.1044	1.1170	1.1169

5. $h = 0.2$: $y(0.2) \approx 3.2$; $h = 0.1$: $y(0.2) \approx 3.23$
7. $x(0.2) \approx 1.62$, $y(0.2) \approx 1.84$

Ejercicios 7.1, página 302

1. 2×4 **3.** 3×3 **5.** 3×4
7. no es igual **9.** no es igual
11. $x = 2, y = 4$ **13.** $c_{23} = 9, c_{12} = 12$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 14 & -19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix};$
$\begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

21. $180; \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \end{pmatrix}$ **29.** 4×5

37. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

39. **AB** no es necesariamente igual a **BA**.

41. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

45. *b)* $M_R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$

$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $x_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 6}{8} \approx 1.4072$

$y_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 2}{8} \approx 0.2948$

$z_S = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} \approx 0.9659$

Ejercicios 7.2, página 314

1. $x_1 = 4, x_2 = -7$ **3.** $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$
5. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$ **7.** $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 0$
9. inconsistente **11.** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
13. $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 4$ **15.** $x_1 = 1, x_2 = 2 - t, x_3 = t$
17. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$
19. inconsistente
21. $x_1 = 0.3, x_2 = -0.12, x_3 = 4.1$
23. $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$
25. $Fe_3O_4 + 4C \rightarrow 3Fe + 4CO$
27. $3Cu + 8HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$
29. $i_1 = \frac{35}{9}, i_2 = \frac{38}{9}, i_3 = \frac{1}{3}$
31. Intercambie los renglones 1 y 2 en $\mathbf{I}_3$.
33. Multiplique el segundo renglón de $\mathbf{I}_3$ por c y súmelo al tercer renglón.

35. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

37. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{21} + a_{31} & ca_{22} + a_{32} & ca_{23} + a_{33} \end{pmatrix}$

39. $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$

41. $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 7.3, página 319

1. 2 **3.** 1 **5.** 3

7. 2 **9.** 3 **11.** linealmente independiente

13. linealmente independiente **15.** 5

17. rango(**A**) = 2

Ejercicios 7.4, página 325

1. 9 **3.** 1 **5.** 2 **7.** 10 **9.** –7

11. 17 **13.** $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ **15.** –48

17. 62 **19.** 0 **21.** –85

23. $-x + 2y - z$ **25.** –104 **27.** 48

29. $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 7$

Ejercicios 7.5, página 331

1. Teorema 7.5.4 **3.** Teorema 7.5.7

5. Teorema 7.5.5 **7.** Teorema 7.5.3

9. Teorema 7.5.1 **11.** –5 **13.** –5

15. 80 **17.** –105 **23.** 0 **25.** –15

27. –9 **29.** 0 **31.** 16

Ejercicios 7.6, página 340

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{13}{30} & -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{27} & \frac{17}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{17}{9} \\ \frac{4}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

19. Matriz singular **21.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **31.** $x = 5$

35. Mediante el teorema 7.5.6, det **AB** = det **A** det **B**. Puesto que det **A** ≠ 0 y det **B** ≠ 0, se puede deducir que det **AB** ≠ 0. De acuerdo con el teorema 7.6.3, **AB** es no singular.

37. El resultado se deduce a partir de det $(\mathbf{AA}^{-1})$ = det **I**.

39. Multiplique **AB** = **0** por $\mathbf{A}^{-1}$. **41.** no

43. $x_1 = 6, x_2 = -2$ **45.** $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}$

47. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -6$ **49.** $x_1 = 21, x_2 = 1, x_3 = -11$

51. $x_1 = \frac{9}{10}, x_2 = \frac{13}{20}$;
$x_1 = 6, x_2 = 16$;
$x_1 = -2, x_2 = -7$

53. El sistema tiene solamente una solución trivial.

55. El sistema tiene soluciones no triviales.

57. $i_1 = \dfrac{-R_3E_2 + R_3E_1 + R_2E_1 - R_2E_3}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$,

$i_2 = \dfrac{R_3E_2 - R_3E_1 - R_1E_3 + R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$,

$i_3 = \dfrac{-R_2E_1 + R_1E_3 + R_2E_3 - R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$

Ejercicios 7.7, página 344

1. $x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ **3.** $x_1 = 0.1, x_2 = -0.3$

5. $x = 4, y = -7$ **7.** $x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -5$

9. $u = 4, v = \frac{3}{2}, w = 1$ **11.** $k = \frac{6}{5}$

13. $T_1 \approx 450.8$ lb, $T_2 \approx 423$ lb

Ejercicios 7.8, página 349

1. $\mathbf{K}_3, \lambda = -1$ **3.** $\mathbf{K}_3, \lambda = 0$

5. $\mathbf{K}_2, \lambda = 3; \mathbf{K}_3, \lambda = 1$

7. $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$

13. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$

15. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$$

21. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -7$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

23. Para $\mathbf{A}$, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

25. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$

Ejercicios 7.9, página 353

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{7}[3(-1)^m 2^{m+1} + 5^m] & -\frac{3}{7}[(-2)^m - 5^m] \\ -\frac{2}{7}[(-2)^m - 5^m] & \frac{1}{7}[(-2)^m - 6(5)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 11 & 57 \\ 38 & 106 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + (-1)^m] & \frac{5}{3}2^{m-2}[5^m - (-1)^m] \\ \frac{1}{3}[10^m - (-2)^m] & \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + 5(-1)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 83328 & 41680 \\ 33344 & 16640 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 & 2^m - 1 \\ 0 & \frac{1}{3}[2^{m+1} + (-1)^m] & \frac{2}{3}[2^m - (-1)^m] \\ 0 & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 1023 & 1023 \\ 0 & 683 & 682 \\ 0 & 341 & 342 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} - (-1)^m 2^{m+1}] & \frac{1}{3}[4^m + (-1)^m 2^{m+1}] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m - 3] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 1 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 699392 & 349184 & 0 \\ 698368 & 350208 & 0 \\ 699391 & 349184 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 7m4^{m+1} + (1-m)4^m & 3m4^{m-1} \\ -3m4^{m-1} & m4^{m-1} + (1-m)4^m \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 22528 & 18432 \\ -18432 & -14336 \end{pmatrix}$

13. ***a)*** $4^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, m > 1$

b) $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}, m > 1$

c)

$$\begin{pmatrix} 2(3)^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ \frac{1}{6}[9(2)^m - 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m - 2(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m - 2(3)^m] \\ \frac{1}{6}[-9(2)^m + 8(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m + 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m + 4(3)^m] \end{pmatrix}$$

15. $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ **17.** *b)-f)*

Ejercicios 7.10, página 360

1. ***b)*** $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 16$

3. ***b)*** $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = \lambda_3 = -8$ **5.** ortogonal

7. ortogonal **9.** no ortogonal

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

19. $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{3}{5}$

21. ***b)*** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

c) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

23. Utilice $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Ejercicios 7.11, página 367

1. $2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3.** $14, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **5.** $10, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

7. 7 y 2 **9.** 4, 3 y 1

11. aproximadamente 0.2087

13. ***c)*** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) 0.59

e) aproximadamente 9.44 EI/L^2

Ejercicios 7.12, página 375

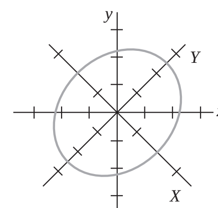
1. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. no diagonalizable

5. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$



11. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. no diagonalizable

17. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

31. Elipse; utilizando

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\mathbf{X}'$

obtenemos $X^2/4 + Y^2/6 = 1$.

33. Hipérbola; utilizando

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\mathbf{X}'$

obtenemos $X^2/4 - Y^2/4 = 1$.

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}$

Ejercicios 7.13, página 379

1. *a*) $\begin{pmatrix} 35 & 15 & 38 & 36 & 0 \\ 27 & 10 & 26 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

3. *a*) $\begin{pmatrix} 48 & 64 & 120 & 107 & 40 \\ 32 & 40 & 75 & 67 & 25 \end{pmatrix}$

5. *a*) $\begin{pmatrix} 31 & 44 & 15 & 61 & 50 & 49 & 41 \\ 24 & 29 & 15 & 47 & 35 & 31 & 21 \\ 1 & -15 & 15 & 0 & -15 & -5 & -19 \end{pmatrix}$

7. STUDY_HARD

9. MATH_IS_IMPORTANT_

11. DAD_I_NEED_MONEY_TODAY

13. *a*) $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 21 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 23 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 26 & 12 \end{pmatrix}$

Ejercicios 7.14, página 384

1. (0 1 1 0)
3. (0 0 0 1 1)
5. (1 0 1 0 1 0 0 1)
7. (1 0 0)
9. error de paridad
11. (1 0 0 1 1)
13. (0 0 1 0 1 1 0)
15. (0 1 0 0 1 0 1)
17. (1 1 0 0 1 1 0)
19. palabra de código; (0 0 0 0)
21. (0 0 0 1)
23. palabra de código (1 1 1 1)
25. (1 0 0 1)
27. (1 0 1 0)
29. *a*) $2^7 = 128$ *b*) $2^4 = 16$
c) (0 0 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 1 0 1), (0 1 1 0 0 1 1), (0 1 0 1 0 1 0), (0 1 1 1 1 0 0), (0 0 1 0 1 1 0), (0 0 1 1 0 0 1), (0 0 0 1 1 1 1), (1 0 0 0 0 1 1), (1 1 0 0 1 1 0), (1 0 1 0 1 0 1), (1 0 0 1 1 0 0), (1 1 1 0 0 0 0), (1 1 0 1 0 0 1), (1 0 1 1 0 1 0), (1 1 1 1 1 1 1)

Ejercicios 7.15, página 387

1. $y = 0.4x + 0.6$
3. $y = 1.1x - 0.3$
5. $y = 1.3571x + 1.9286$
7. $v = -0.84T + 234$, 116.4, 99.6

Ejercicios 7.16, página 391

1. *a*) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 96 \\ 54 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 98.4 \\ 51.6 \end{pmatrix}$ *c*) $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$

3. *a*) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ 72 \end{pmatrix}$ *d*) $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$

Ejercicios de repaso del capítulo 7, página 392

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, (11) **5.** falso

7. $\frac{5}{8}$, -5 **9.** 0 **11.** falso **13.** verdadero

15. falso **17.** verdadero

19. falso

23. *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

25. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 7, x_3 = \frac{1}{2}$

29. 240

31. solamente la solución trivial



33. $I_2 + 10HNO_3 \rightarrow 2HIO_3 + 10NO_2 + 4H_2O$

35. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{2}{3}$

37. $x = X\cos\theta - Y \operatorname{sen}\theta$,
$y = X \operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta$

39. $x_1 = 7, x_2 = 5, x_3 = 23$

41. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

43. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$,
$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

45. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$,
$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

49. hipérbola

51.
$$\begin{pmatrix} 204 & 13 & 208 & 55 & 124 & 120 & 105 & 214 & 50 & 6 & 138 & 19 & 210 \\ 185 & 12 & 188 & 50 & 112 & 108 & 96 & 194 & 45 & 6 & 126 & 18 & 189 \end{pmatrix}$$

53. HELP_IS_ON_THE_WAY

55. (1 1 0 0 1); error de paridad

Ejercicios 8.1, página 402

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 6 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

7. $\frac{dx}{dt} = 4x + 2y + e^t$
$\frac{dy}{dt} = -x + 3y - e^t$

9. $\frac{dx}{dt} = x - y + 2z + e^{-t} - 3t$
$\frac{dy}{dt} = 3x - 4y + z + 2e^{-t} + t$
$\frac{dz}{dt} = -2x + 5y + 6z + 2e^{-t} - t$

17. Sí; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -2e^{-8t} \neq 0$ implica que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes e $(-\infty, \infty)$.

19. No; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$ para toda t. Los vectores solución son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Observe que $\mathbf{X}_3 = 2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$.

Ejercicios 8.2, página 414

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}e^{t}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}e^{-10t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t/2}$

13. $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t/2} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right]$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}te^{5t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t}\right]$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^t\right]$

$+ c_3\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}e^t\right]$

29. $\mathbf{X} = -7\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t} + 13\begin{pmatrix}2t+1\\t+1\end{pmatrix}e^{4t}$

31. Correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad cinco, los vectores propios son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

33. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\2\cos t + \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\2\operatorname{sen} t - \cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

35. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\cos t - \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix}e^{4t}$

37. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}5\cos 3t\\4\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} 3t\\4\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t\end{pmatrix}$

39. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\cos t\\\cos t\\\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t\\\cos t\end{pmatrix}$

41. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\\cos t\\\cos t\end{pmatrix}e^t + c_3\begin{pmatrix}\cos t\\-\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t$

43. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}28\\-5\\25\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}5\cos 3t\\-4\cos 3t - 3\operatorname{sen} 3t\\0\end{pmatrix}e^{-2t}$

$+ c_3\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} 3t\\-4\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t\\0\end{pmatrix}e^{-2t}$

45. $\mathbf{X} = -\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}\cos 5t - 5\operatorname{sen} 5t\\\cos 5t\\\cos 5t\end{pmatrix}$

$+ 6\begin{pmatrix}5\cos 5t + \operatorname{sen} 5t\\\operatorname{sen} 5t\\\operatorname{sen} 5t\end{pmatrix}$

Ejercicios 8.3, página 417

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}3c_1e^{7t} - 2c_2e^{-4t}\\c_1e^{7t} + 3c_2e^{-4t}\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{t/2} + c_2e^{3t/2}\\-2c_1e^{t/2} + 2c_2e^{3t/2}\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}-c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}\\c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}\\c_2e^{2t} + c_3e^{6t}\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{-t} - c_2e^{2t} - c_3e^{2t}\\c_1e^{-t} + c_2e^{2t}\\c_1e^{-t} + c_3e^{2t}\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t}\\c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 4c_3e^{3t}\\c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} + 5c_3e^{3t}\end{pmatrix}$

11. *a*) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix}k_1 + k_2 & -k_2\\-k_2 & k_2\end{pmatrix}$

Puesto que **M** es una matriz diagonal donde m_1 y m_2 son diferentes de cero, tiene una inversa.

b) $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix}\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1}\\-\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2}\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cos t + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\operatorname{sen} t$

$+ c_3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cos\sqrt{6}t + c_4\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen}\sqrt{6}t$

Ejercicios 8.4, página 424

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}t^2$

$+ \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}e^{7t} + \begin{pmatrix}\frac{55}{36}\\-\frac{19}{4}\end{pmatrix}e^t$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\\2\end{pmatrix}e^{4t}$

9. $\mathbf{X} = 13\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t + 2\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

13.

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t/2} + c_2\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}e^{3t/2} - \begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{13}{4}\end{pmatrix}te^{t/2} - \begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}e^{t/2}$

15. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}te^t$

17. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}-t\\\frac{1}{2} - t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}te^t$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t\tan t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}3\operatorname{sen} t\\ \frac{3}{2}\cos t\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\operatorname{sen} t| + \begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\cos t|$

29. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ -e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ \frac{1}{2}t^2e^{3t}\end{pmatrix}$

31. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}te^{4t} + \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}e^{4t}$

33. $\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}e^{-12t} - \frac{4}{29}\begin{pmatrix}19\\ 42\end{pmatrix}\cos t + \frac{4}{29}\begin{pmatrix}83\\ 69\end{pmatrix}\operatorname{sen} t$

35. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2 - \frac{41}{10}t - \frac{41}{110} + c_1 + c_2e^{10t}\\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{39}{10}t - \frac{41}{110} - c_1 + c_2e^{10t}\end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}e^{-12t} + \begin{pmatrix}\frac{332}{29}\\ \frac{276}{29}\end{pmatrix}\operatorname{sen} t - \begin{pmatrix}\frac{76}{29}\\ \frac{168}{29}\end{pmatrix}\cos t$

Ejercicios 8.5, página 428

1. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$; $e^{-\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$

3. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}t+1 & t & t\\ t & t+1 & t\\ -2t & -2t & -2t+1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + c_4\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cosh t\\ \operatorname{senh} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{senh} t\\ \cosh t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}e^{2t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^{-2t}$

17. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{2t} + 3te^{2t} & -9te^{2t}\\ te^{2t} & e^{2t} - 3te^{2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1 + 3t\\ t\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}-9t\\ 1 - 3t\end{pmatrix}e^{2t}$

19. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{6t} & \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\\ \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{6t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{6t}\\ \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{6t}\\ \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{6t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^t + c_4\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^{6t}$

21. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{3t} & -2e^{-t} + 2e^{3t}\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t} + 2e^{3t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{3t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{5t}\\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t}\\ -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t} + c_4\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{5t}$

Ejercicios de repaso del capítulo 8, página 429

1. $k = \frac{1}{3}$ **5.** $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^t\right]$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}e^t$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{4t} + c_1\begin{pmatrix}7\\ 12\\ -16\end{pmatrix}e^{-3t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}16\\ -4\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}11\\ -1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t - \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix}\ln|\csc t - \cot t|$

15. *b)* $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t}$

Ejercicios 9.1, página 437

1. $x' = y$
$y' = -9 \text{ sen } x$; puntos críticos en $(\pm n\pi, 0)$

3. $x' = y$
$y' = x^2 + y(x^3 - 1)$; punto crítico en $(0, 0)$

5. $x' = y$
$y' = \epsilon x^3 - x$;
puntos críticos en $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right)$

7. $(0, 0)$ y $(-1, -1)$

9. $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

11. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 16)$ y $(4, 12)$

13. $(0, y)$, y arbitrariamente

15. $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$

17. *a*) $x = c_1e^{5t} - c_2e^{-t}$
$y = 2c_1e^{5t} + c_2e^{-t}$
b) $x = -2e^{-t}$
$y = 2e^{-t}$

19. *a*) $x = c_1(4 \cos 3t - 3 \text{ sen } 3t) + c_2(4 \text{ sen } 3t + 3 \cos 3t)$
$y = c_1(5 \cos 3t) + c_2(5 \text{ sen } 3t)$
b) $x = 4 \cos 3t - 3 \text{ sen } 3t$
$y = 5 \cos 3t$

21. *a*) $x = c_1(\text{sen } t - \cos t)e^{4t} + c_2(-\text{sen } t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2c_1(\cos t)e^{4t} + 2c_2(\text{sen } t)e^{4t}$
b) $x = (\text{sen } t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2(\cos t)e^{4t}$

23. $r = \frac{1}{\sqrt[4]{4t + c_1}}, \theta = t + c_2; r = 4\frac{1}{\sqrt[4]{1\,024t + 1}}, \theta = t;$
$\theta = t$; las espirales solución hacia el origen a medida que aumenta t.

25. $r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_1e^{-2t}}}, \theta = t + c_2;$; $r = 1, \theta = t$ (o $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$) es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$; $r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}}$, $\theta = t$ es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$. Esta solución forma una espiral hacia el círculo $r = 1$ a medida que aumenta t.

27. No existen puntos críticos y, por lo tanto, no hay soluciones periódicas.

29. Parece ser una solución periódica que encierra al punto crítico $(0, 0)$.

Ejercicios 9.2, página 444

1. *a*) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está sobre la línea $y = 2x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de esta línea. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ desde la dirección determinada por la línea $y = -x/2$.

3. *a*) Todas las soluciones son espirales inestables que no tienen límite a medida que t aumenta.

5. *a*) Todas las soluciones se aproximan a $(0, 0)$ en la dirección especificada por la línea $y = x$.

7. *a*) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está sobre la línea $y = 3x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de esta línea. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ no tiene límites y $y = x$ sirve como la asíntota.

9. punto de equilibrio **11.** punto de equilibrio

13. nodo estable degenerado **15.** espiral estable

17. $|\mu| < 1$

19. $\mu < -1$ para un punto de equilibrio; $-1 < \mu < 3$ para un punto espiral inestable.

23. *a*) $(-3, 4)$
b) nodo inestable o punto de equilibrio
c) $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

25. *a*) $(\frac{1}{2}, 2)$
b) punto espiral inestable
c) $(0, 0)$ es un punto espiral inestable.

Ejercicios 9.3, página 452

1. $r = r_0e^{\alpha t}$

3. $x = 0$ es inestable; $x = n + 1$ es asintóticamente estable.

5. $T = T_0$ es inestable.

7. $x = \alpha$ es inestable; $x = \beta$ es asintóticamente estable.

9. $P = a/b$ es asintóticamente estable; $P = c$ es inestable.

11. $(\frac{1}{2}, 1)$ es un punto espiral estable.

13. $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ son puntos silla; $(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ es un punto espiral estable.

15. $(1, 1)$ es un nodo estable; $(1, -1)$ es un punto de equilibrio; $(2, 2)$ es un punto de equilibrio; $(2, -2)$ es un punto espiral inestable.

17. $(0, -1)$ es un punto de equilibrio; $(0, 0)$ es no clasificado; $(0, 1)$ es estable, sin embargo, no podemos clasificarlo.

19. $(0, 0)$ es un nodo inestable; $(10, 0)$ es un punto de equilibrio; $(0, 16)$ es un punto de equilibrio; $(4, 12)$ es un nodo estable.

21. $\theta = 0$ es un punto de equilibrio. No es posible clasificar $\theta = \pi/3$ o $\theta = -\pi/3$.

23. No es posible clasificar $x = 0$.

25. No es posible clasificar $x = 0$, sin embargo $x = 1/\sqrt{\varepsilon}$ y $x = -1/\sqrt{\varepsilon}$ son puntos de equilibrio.

29. *a*) $(0, 0)$ es un punto espiral estable.

33. *a*) $(1, 0)$, $(-1, 0)$ **35.** $|v_0| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

37. Si $\beta > 0$, $(0, 0)$ es el único punto crítico y es estable. Si $\beta < 0$, $(0, 0)$, $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$, donde $\hat{x}^2 = -\alpha/\beta$, son puntos críticos. $(0, 0)$ es estable, mientras que $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$ son puntos silla.

39. *b*) $(5\pi/6, 0)$ es un punto de equilibrio.
c) $(\pi/6, 0)$ es un centro.

Ejercicios 9.4, página 459

1. $|\omega_0| < \sqrt{3g/L}$

5. *a*) Primero demuestre que $y^2 = v_0^2 + g \ln\left(\frac{1 + x^2}{1 + x_0^2}\right)$.

9. *a*) El nuevo punto crítico es $(d/c - \epsilon_2/c, a/b + \epsilon_1/b)$.
b) sí

11. $(0, 0)$ es un nodo inestable, $(0, 100)$ es un nodo estable, $(50, 0)$ es un nodo estable, y $(20, 40)$ es un punto de equilibrio.

17. *a*) $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Ejercicios 9.5, página 467

1. El sistema no tiene puntos críticos.

3. $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -2 < 0$

5. $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\mu + 9y^2 > 0$ si $\mu < 0$

7. El único punto crítico $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

9. $\delta(x, y) = e^{-y/2}$

11. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 4(1 - x^2 - 3y^2) > 0$ para $x^2 + 3y^2 < 1$

13. Utilice $\delta(x, y) = 1/(xy)$ y demuestre que,
$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta Q)}{\partial y} = -\frac{r}{Kx}.$$

15. Si $\mathbf{n} = (-2x, -2y)$, demuestre que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 2(x - y)^2 + 2y^4$.

17. Sí; el único punto crítico (0, 0) está ubicado fuera de la región invariante $\frac{1}{16} \le x^2 + y^2 \le 1$, por lo que se puede aplicar el teorema 9.5.5*ii*).

19. $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 2y^2(1 - x^2) \ge 2y^2(1 - r^2)$ y $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = x^2 - 1 < 0$. El único punto crítico es (0, 0) y es un punto espiral estable. Por lo tanto, el teorema 9.5.6*ii*) se puede aplicar.

21. *a*) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xy - 1 - x^2 \le 2x - 1 - x^2 = -(x - 1)^2 \le 0$

b) $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (\frac{3}{2}, \frac{2}{9})$, es un punto espiral estable

Ejercicios de repaso del capítulo 9, página 469

1. verdadero
3. centro o punto de equilibrio
5. falso
7. falso
9. verdadero

11. $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3t + 1}}$, $\theta = t$; la curva solución forma una espiral hacia el origen.

13. centro; nodo estable degenerado

15. nodo estable para $\mu < -2$; punto espiral estable para $-2 < \mu < 0$; punto espiral inestable para $0 < \mu < 2$; nodo inestable para $\mu > 2$

17. Demuestre que $y^2 = (1 + x_0^2 - x^2)^2 - 1$.

19. $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1$

21. *a*) *Sugerencia*: Utilice el criterio negativo de Bendixson.

d) En *b*), (0, 0) es un punto espiral estable cuando $\beta < 2ml \times \sqrt{g/l - \omega^2}$. En *c*), $(\hat{x}, 0)$ y $(-\hat{x}, 0)$ son puntos espirales estables cuando $\beta < 2ml\sqrt{\omega^2 - g^2/(\omega^2 l^2)}$.

Ejercicios 10.1, página 477

7. $\sqrt{\pi}/2$
9. $\sqrt{\pi/2}$

11. $\|1\| = \sqrt{p}$; $\left\|\cos\dfrac{n\pi}{p}x\right\| = \sqrt{\dfrac{p}{2}}$

21. *a*) $T = 1$ *b*) $T = \pi L/2$ *c*) $T = 2\pi$ *d*) $T = \pi$ *e*) $T = 2\pi$ *f*) $T = 2p$

Ejercicios 10.2, página 482

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

5. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right)\operatorname{sen} nx\right\}$

7. $f(x) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}\cos nx$

11. $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{3}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x\right\}$

13. $f(x) = \dfrac{9}{4} + 5\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{5}x + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}x\right\}$

15. $f(x) = \dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 + n^2}(\cos nx - n\operatorname{sen} nx)\right]$

19. Fije el valor de $x = \pi/2$.

Ejercicios 10.3, página 487

1. impar
3. ni par ni impar
5. par
7. impar
9. ni par ni impar

11. $f(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

13. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$

17. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$

19. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n(1 + \pi)}{n}\operatorname{sen} nx$

21. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$

23. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2}\cos nx$

25. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\cos n\pi x$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

27. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}\cos 2nx$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2 - 1}\operatorname{sen} 2nx$

29. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen} nx$

31. $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos\frac{n\pi}{2}x$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x$

33. $f(x) = \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x$

$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}\right\}\operatorname{sen} n\pi x$

35. $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\operatorname{sen} nx\right\}$

37. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} 2n\pi x$

39. $x_p(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n(10 - n^2)}\operatorname{sen} nt$

41. $x_p(t) = \frac{\pi^2}{18} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2 - 48)}\cos nt$

43. $x(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{10 - n^2}\left\{\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt - \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{sen}\sqrt{10}t\right\}$

45. ***b)*** $y(x) = \frac{2w_0L^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$

Ejercicios 10.4, página 492

1. $f(x) = \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n\pi i}e^{in\pi x/2}$

3. $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\frac{1 - e^{-in\pi/2}}{2n\pi i}e^{2in\pi x}$

5. $f(x) = \pi + \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}$

Ejercicios 10.5, página 498

1. $y = \cos\alpha_n x$; α definido por $\cot\alpha = \alpha$;
$\lambda_1 = 0.7402$, $\lambda_2 = 11.7349$,
$\lambda_3 = 41.4388$, $\lambda_4 = 90.8082$
$y_1 = \cos 0.8603x$, $y_2 = \cos 3.4256x$,
$y_3 = \cos 6.4373x$, $y_4 = \cos 9.5293x$

5. $\frac{1}{2}[1 + \operatorname{sen}^2\alpha_n]$

7. ***a)*** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln 5}\right)^2$, $y_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x}y = 0$

c) $\int_1^5 \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ln 5}\ln x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)dx = 0,\ m \neq n$

9. $\frac{d}{dx}[xe^{-x}y'] + ne^{-x}y = 0;$

$\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

11. ***a)*** $\lambda_n = 16n^2$, $y_n = \operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\operatorname{sen}(4m\tan^{-1}x)\operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x)\,dx = 0,$
$m \neq n$

Ejercicios 10.6, página 504

1. $\alpha_1 = 1.277$, $\alpha_2 = 2.339$, $\alpha_3 = 3.391$, $\alpha_4 = 4.441$

3. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

5. $f(x) = 4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}{(4\alpha_i^2 + 1)J_0^2(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

7. $f(x) = 20\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i J_2(4\alpha_i)}{(2\alpha_i^2 + 1)J_1^2(4\alpha_i)}J_1(\alpha_i x)$

9. $f(x) = \frac{9}{2} - 4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_2(3\alpha_i)}{\alpha_i^2 J_0^2(3\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

15. $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$

21. $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots,$
$f(x) = |x|$ en $(-1, 1)$

Ejercicios de repaso del capítulo 10, página 505

1. verdadero
3. coseno
5. falso
7. 5.5, 1, 0
9. verdadero

13. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos n\pi x + \frac{2}{n}(-1)^n\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

15. $f(x) = 1 - e^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2\pi^2}\cos n\pi x;$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi[1 - (-1)^n e^{-1}]}{1 + n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x$

17. $\lambda_n = \frac{(2n - 1)^2\pi^2}{36}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$y_n = \cos\left(\frac{2n - 1}{2}\pi\ln x\right)$

19. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 \le x \le 1$,

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

21. $f(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(2\alpha_i)}{\alpha_i J_1^2(4\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

Ejercicios 11.1, página 510

1. Los casos posibles pueden resumirse en una forma $u = c_1 e^{c_2(x+y)}$, donde c_1 y c_2 son constantes.

3. $u = c_1 e^{y + c_2(x - y)}$

5. $u = c_1(xy)^{c_2}$

7. no separable

9. $u = e^{-t}(A_1 e^{k\alpha^2 t}\cosh\alpha x + B_1 e^{k\alpha^2 t}\operatorname{senh}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_2 e^{-k\alpha^2 t}\cos\alpha x + B_2 e^{-k\alpha^2 t}\operatorname{sen}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_3 x + B_3)$

11. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cosh\alpha at + c_4\operatorname{senh}\alpha at)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cos\alpha at + c_8\operatorname{sen}\alpha at)$
$u = (c_9 x + c_{10})(c_{11}t + c_{12})$

13. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cos\alpha y + c_4\operatorname{sen}\alpha y)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cosh\alpha y + c_8\operatorname{senh}\alpha y)$
$u = (c_9 x + c_{10})(c_{11}y + c_{12})$

15. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$ existen tres posibilidades:

i) Para $0 < \alpha^2 < 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cosh\sqrt{1-\alpha^2}y + c_4 \operatorname{senh} \sqrt{1-\alpha^2}y).$$

ii) Para $\alpha^2 > 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cos \sqrt{\alpha^2 - 1}y + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha^2-1}y).$$

iii) Para $\alpha^2 = 1$,

$$u = (c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x)(c_3 y + c_4).$$

Los resultados para el caso $\lambda = -\alpha^2$ son similares.
Para $\lambda = 0$:

$$u = (c_1 x + c_2)(c_3 \cosh y + c_4 \operatorname{senh} y)$$

17. elíptica **19.** parabólica
21. hiperbólica **23.** parabólica
25. hiperbólica

Ejercicios 11.2, página 515

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

3. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0$

$u(0, t) = 100,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -hu(L, t),\ t > 0$

$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

5. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0,\ h$ es una constante

$u(0, t) = \operatorname{sen}(\pi t/L),\ u(L, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < L,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ u(L, t) = 0,\ t > 0$

$u(x, 0) = x(L - x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < L$

9. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < L,\ t > 0$

$u(0, t) = 0,\ u(L, t) = \operatorname{sen} \pi t,\ t > 0$

$u(x, 0) = f(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < L$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < 4,\ 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ u(4, y) = f(y),\ 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ u(x, 2) = 0,\ 0 < x < 4$

Ejercicios 11.3, página 517

1. $$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n}\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

5. $$u(x, t) = e^{-ht}\left[\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]$$

7. $$u(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}e^{-k(n\pi/L)^2t}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{L}x + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}\,dx,\ B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}\,dx$$

Ejercicios 11.4, página 521

1. $$u(x, t) = \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi a}{L}t \times \operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{7\pi}{L}x - \cdots\right)$$

5. $u(x, t) = \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} at\operatorname{sen} x$

7. $$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

9. $$u(x, t) = e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\cos q_n t + \frac{\beta}{q_n}\operatorname{sen} q_n t\right\}\operatorname{sen} nx,$$

donde $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ y $q_n = \sqrt{n^2-\beta^2}$

13. $u(x, t) = t + \operatorname{sen} x\cos 2at$

15. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a}\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 2at$

17. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2}{L^2}at + B_n\operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2}{L^2}at\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x,$$

donde $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$$B_n = \frac{2L}{n^2\pi^2 a}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

Ejercicios 11.5, página 526

1. $$u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx\right) \times \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$$

3. $u(x, y) = \dfrac{2}{a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{a}x\,dx\right)$

$\times \operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{a}(b - y)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{a}x$

5. $u(x, y) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n^2\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{senh} n\pi x\cos n\pi y$

7. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{[1 - (-1)^n]}{n}$

$\times \dfrac{n\cosh nx + \operatorname{senh} nx}{n\cosh n\pi + \operatorname{senh} n\pi}\operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh n\pi y + B_n\operatorname{senh} n\pi y)\operatorname{sen} n\pi x,$

donde $A_n = 200\,\dfrac{1 - (-1)^n}{n\pi}$

$B_n = 200\,\dfrac{[1 - (-1)^n]}{n\pi}\,\dfrac{[2 - \cosh n\pi]}{\operatorname{senh} n\pi}$

11. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right)e^{-ny}\operatorname{sen} nx$

13. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\dfrac{n\pi}{a}y + B_n\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{a}y\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{a}x,$

donde $A_n = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{a}x\,dx$

$B_n = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{a}b}\left(\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\dfrac{n\pi}{a}b\right)$

15. $u = u_1 + u_2$ donde

$u_1(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{senh} ny\operatorname{sen} nx$

$u_2(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n}$

$\times \dfrac{\operatorname{senh} nx + \operatorname{senh} n(\pi - x)}{\operatorname{senh} n\pi}\operatorname{sen} ny$

17. la temperatura máxima es $u = 1$

Ejercicios 11.6, página 533

1. $u(x, t) = 100 + \dfrac{200}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - 1}{n}e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

3. $u(x, t) = u_0 - \dfrac{r}{2k}x(x - 1) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{u_0}{n\pi} + \dfrac{r}{kn^3\pi^3}\right]$

$\times [(-1)^n - 1]e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

5. $u(x, t) = \psi(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x,$

donde $\psi(x) = \dfrac{A}{k\beta^2}[-e^{-\beta x} + (e^{-\beta} - 1)x + 1]$

$A_n = 2\displaystyle\int_0^1 [f(x) - \psi(x)]\operatorname{sen} n\pi x\,dx$

7. $\psi(x) = u_0\left[1 - \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}\,x}{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}}\right]$

9. $u(x, t) = \dfrac{A}{6a^2}(x - x^3)$

$+ \dfrac{2A}{a^2\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi at\operatorname{sen} n\pi x$

11. $u(x, y) = (u_0 - u_1)y + u_1$

$+ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_0(-1)^n - u_1}{n}e^{-n\pi x}\operatorname{sen} n\pi y$

13. $u(x, t) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n^2 - 3)}e^{-3t}\operatorname{sen} nx$

$+ 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n^2 - 3)}e^{-n^2 t}\operatorname{sen} nx$

15. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\left[\dfrac{n^2\pi^2\operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1}\right]\operatorname{sen} n\pi x$

$+ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{4 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3} - (-1)^n\dfrac{2n\pi}{n^4\pi^4 + 1}\right]e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi x$

17. $u(x, t) = (1 - x)\operatorname{sen} t$

$+ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t} - n^2\pi^2\cos t - \operatorname{sen} t}{n(n^4\pi^4 + 1)}\right]\operatorname{sen} n\pi x.$

Ejercicios 11.7, página 537

1. $u(x, t) = 2h\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_n}{(h + \operatorname{sen}^2\alpha_n)}e^{-k\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x,$ donde α_n son las raíces positivas consecutivas de $\cot\alpha = \alpha/h$

3. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{senh}\alpha_n y\operatorname{sen}\alpha_n x$, donde

$A_n = \dfrac{2h}{\operatorname{senh}\alpha_n b(ah + \cos^2\alpha_n a)}\displaystyle\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\alpha_n x\,dx$

son las raíces positivas consecutivas de $\tan\alpha$
$a = -\alpha/h$

5. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-k(2n-1)^2\pi^2 t/4L^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n - 1}{2L}\right)\pi x,$

donde $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n - 1}{2L}\right)\pi x\,dx$

7. $u(x, y) = \dfrac{4u_0}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n - 1)\cosh\left(\dfrac{2n - 1}{2}\right)\pi}$

$\times \cosh\left(\dfrac{2n - 1}{2}\right)\pi x\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n - 1}{2}\right)\pi y$

9. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\operatorname{sen}\alpha_n}{\alpha_n^2(k\alpha_n^2 - 2)(1 + \cos^2\alpha_n)}$
$\times (e^{-2t} - e^{-k\alpha_n^2 t})\operatorname{sen}\alpha_n x$

Ejercicios 11.8, página 541

1. $u(x, y, t) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-k(m^2 + n^2)t}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} ny,$

donde $A_{mn} = \dfrac{4u_0}{mn\pi^2}[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]$

3. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \cos a\sqrt{m^2 + n^2}t,$

donde $A_{mn} = \dfrac{16}{m^3n^3\pi^2}[(-1)^m - 1][(-1)^n - 1]$

5. $u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{senh} \omega_{mn}z \operatorname{sen} \dfrac{m\pi}{a}x \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{b}y,$

donde $\omega_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \operatorname{senh}(c\omega_{mn})}\int_0^b\int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a}x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b}y\, dx\, dy$$

7. Utilice $a = b = c = 1$ con $f(x, y) = u_0$ en el problema 5 y $f(x, y) = -u_0$ en el problema 6. Sume las dos soluciones.

Ejercicios de repaso del capítulo 11, página 541

1. $u = c_1 e^{(c_2x + y/c_2)}$

3. $\psi(x) = u_0 + \dfrac{(u_1 - u_0)}{1 + \pi}x$

5. $u(x, t) = \dfrac{2h}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\right)$
$\times \operatorname{sen} n\pi at \operatorname{sen} n\pi x$

7. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} nx \operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n} e^{-nx} \operatorname{sen} ny$

11. *a)* $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$

13. $u(x, t) = e^{-(x+t)}\sum_{n=1}^{\infty} A_n[\sqrt{n^2 + 1}\cos\sqrt{n^2 + 1}t$
$+ \operatorname{sen}\sqrt{n^2 + 1}t] \operatorname{sen} nx$

Ejercicios 12.1, página 547

1. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta$

3. $u(r, \theta) = \dfrac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} r^n \cos n\theta$

5. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$$A_n = \frac{c^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$B_n = \frac{c^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta$$

7. $u(r, \theta) = A_0 \ln\left(\dfrac{r}{b}\right)$
$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{b}{r}\right)^n - \left(\dfrac{r}{b}\right)^n\right](A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{b}\right)^n\right]A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{b}\right)^n\right]B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

9. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(r^{2n} + a^{2n})}{r^n}(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$$\frac{(b^{2n} + a^{2n})}{b^n}A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$\frac{(b^{2n} + a^{2n})}{b^n}B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

11. $u(r, \theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\dfrac{r}{c}\right)^{2n}\cos 2n\theta$

13. $u(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n^3}\dfrac{r^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n \operatorname{sen} n\theta$

15. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\dfrac{r}{2}\right)^n\cos n\theta$

Ejercicios 12.2, página 553

1. $u(r, t) = \dfrac{2}{ac}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_n at}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n c)}J_0(\alpha_n r)$

3. $u(r, z) = u_0\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{senh}\alpha_n(4 - z)}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)$

5. $u(r, z) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2 I_0(n\pi)}I_0(n\pi r)\cos n\pi z$

7. $u(r, z) = \dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{I_0\left(\frac{2n - 1}{2}\pi r\right)}{(2n - 1)I_0\left(\frac{2n - 1}{2}\pi\right)} \operatorname{sen}\dfrac{2n - 1}{2}\pi z$

9. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)}\displaystyle\int_0^c rJ_0(\alpha_n r)f(r)\, dr$

11. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + h^2)J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 rJ_0(\alpha_n r)f(r)\, dr$

13. $u(r, t) = 100 + 50\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n J_1^2(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)e^{-\alpha_n^2 t}$

15. *b)* $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n\sqrt{g}t)J_0(2\alpha_n\sqrt{x}),$

donde $A_n = \dfrac{2}{LJ_1^2(2\alpha_n\sqrt{L})}\displaystyle\int_0^{\sqrt{L}} vJ_0(2\alpha_n v)f(v^2)\, dv$

Ejercicios 12.3, página 557

1. $u(r,\theta) = 50\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{c}\right)P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}\left(\frac{r}{c}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{32}\left(\frac{r}{c}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

3. $u(r,\theta) = \frac{r}{c}\cos\theta$

5. $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1}r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$,

donde $\frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1}a^{n+1}} A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$

7. $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta)$,

donde $A_{2n} = \frac{4n+1}{c^{2n}}\int_0^{\pi/2} f(\theta)P_{2n}(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$

9. $u(r,t) = 100 + \frac{200}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t}\,\text{sen}\,n\pi r$

11. $u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{c}t + B_n\,\text{sen}\frac{n\pi a}{c}t\right)\text{sen}\frac{n\pi}{c}r$,

donde $A_n = \frac{2}{c}\int_0^c rf(r)\,\text{sen}\frac{n\pi}{c}r\,dr$,

$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^c rg(r)\,\text{sen}\frac{n\pi}{c}r\,dr$

Ejercicios de repaso del capítulo 12, página 588

1. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \text{sen}\,n\theta$

3. $u(r,\theta) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3} r^n\,\text{sen}\,n\theta$

5. $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta$,

donde $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta$

$A_n = \frac{2}{\pi c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$

7. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n} + r^{-4n}}{2^{4n} + 2^{-4n}}\frac{1-(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,4n\theta$

11. $u(r,t) = 2e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)e^{-\alpha_n^2 t}$

13. $u(r,z) = 50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n z}{\alpha_n \cosh 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

15. $u(r,\theta) = 100\left[\frac{3}{2}rP_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}r^3P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}r^5P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

21. $u(r,z) = 100 + 200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n z}{\alpha_n\cosh\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

Ejercicios 13.1, página 562

1. *a*) Sea $\tau = u^2$ en la integral $\text{erf}(\sqrt{t})$.

9. $y(t) = e^{\pi t}\,\text{erf}(\sqrt{\pi t})$

11. Utilice la propiedad $\int_0^b - \int_0^a = \int_0^b + \int_a^0$

Ejercicios 13.2, página 567

1. $u(x,t) = A\cos\frac{a\pi t}{L}\,\text{sen}\frac{\pi x}{L}$

3. $u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right)$

5. $u(x,t) = \left[\frac{1}{2}g\left(t - \frac{x}{a}\right)^2 + A\,\text{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] \times \mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}gt^2$

7. $u(x,t) = a\frac{F_0}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right) \times \mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right) - \left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right)\right\}$

9. $u(x,t) = (t - x)\,\text{senh}(t - x)\,\mathcal{U}(t - x) + xe^{-x}\cosh t - e^{-x}t\,\text{senh}\,t$

11. $u(x,t) = u_1 + (u_0 - u_1)\,\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

13. $u(x,t) = u_0\left[1 - \left\{\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{x+1}\text{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]$

15. $u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/4\tau}d\tau$

17. $u(x,t) = 60 + 40\,\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-2}}\right)\mathcal{U}(t-2)$

19. $u(x,t) = 100\left[-e^{1-x+t}\text{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$

21. $u(x,t) = u_0 + u_0 e^{-(\pi^2/L^2)t}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

23. $u(x,t) = u_0 - u_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\text{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$

25. $u(x,t) = u_0 e^{-Gt/C}\text{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)$

27. $u(r,t) = \frac{100}{r}\,\text{erfc}\left(\frac{r-1}{2\sqrt{t}}\right)$

Ejercicios 13.3, página 574

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha x + 3(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha,$

donde $A(\alpha) = \dfrac{3\alpha\operatorname{sen}3\alpha + \cos 3\alpha - 1}{\alpha^2}$

$B(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}3\alpha - 3\alpha\cos 3\alpha}{\alpha^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha$

7. $f(x) = \dfrac{10}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$

9. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\pi\alpha\operatorname{sen}\pi\alpha + \cos\pi\alpha - 1)\cos\alpha x}{\alpha^2}\,d\alpha$

11. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{4+\alpha^4}\,d\alpha$

13. $f(x) = \dfrac{2k}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{k^2+\alpha^2}\,d\alpha$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{k^2+\alpha^2}\,d\alpha$

15. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(4-\alpha^2)\cos\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\,d\alpha$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{(4+\alpha^2)^2}\,d\alpha$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x > 0$

19. Sea $x = 2$ en (7). Utilice una identidad trigonométrica y reemplace α por x. En el inciso b) realice el cambio de variable $2x = kt$.

Ejercicios 13.4, página 579

1. $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{1+\alpha^2}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}\,e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

3. $u(x,t) = \dfrac{2u_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{-k\alpha^2 t}}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

5. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,e^{-k\alpha^2 t}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

7. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,e^{-k\alpha^2 t}\cos\alpha x\,d\alpha$

9. ***a***) $u(x,t) =$

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \left(F(\alpha)\cos\alpha at + G(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\alpha at}{\alpha a}\right)e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\alpha(\pi - x)}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi}\cos\alpha y\,d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,e^{-\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha$

15. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\frac{\operatorname{senh}\alpha(2-y)}{\operatorname{senh}2\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

17. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha}{1+\alpha^2}[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha$

19. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4kt}}\,e^{-x^2/(1+4kt)}$

21. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha$

Ejercicios 13.5, página 589

3. 1

7.

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 13, página 589

1. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\alpha y}{\alpha(1+\alpha^2)\cosh\alpha\pi}\cos\alpha x\,d\alpha$

3. $u(x,t) = u_0 e^{-ht}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

5. $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau$

7. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha(\pi - x) + \operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

9. $u(x,y) =$

$\dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + 2e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{B\cosh\alpha y}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi} + \frac{A}{\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha$

17. $u(x,t) = 1 + e^{-4t}\operatorname{sen}2x$

19. $u(x,t) = 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\,e^{-x^2/4t} - x\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

o $\quad u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau$

Ejercicios 14.1, página 596

1. $u_{11} = \frac{11}{15}, u_{21} = \frac{14}{15}$

3. $u_{11} = u_{21} = \sqrt{3}/16, u_{22} = u_{12} = 3\sqrt{3}/16$

5. $u_{21} = u_{12} = 12.50, u_{31} = u_{13} = 18.75, u_{32} = u_{23} = 37.50,$ $u_{11} = 6.25, u_{22} = 25.00, u_{33} = 56.25$

7. ***b*)** $u_{14} = u_{41} = 0.5427, u_{24} = u_{42} = 0.6707,$ $u_{34} = u_{43} = 0.6402, u_{33} = 0.4451, u_{44} = 0.9451$

Ejercicios 14.2, página 601

Las tablas de esta sección proporcionan una selección de la cantidad total en aproximaciones.

1.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.3728	0.6288	0.6800	0.5904	0.3840	0.2176	0.0768
0.200	0.2248	0.3942	0.4708	0.4562	0.3699	0.2517	0.1239
0.300	0.1530	0.2752	0.3448	0.3545	0.3101	0.2262	0.1183
0.400	0.1115	0.2034	0.2607	0.2757	0.2488	0.1865	0.0996
0.500	0.0841	0.1545	0.2002	0.2144	0.1961	0.1487	0.0800
0.600	0.0645	0.1189	0.1548	0.1668	0.1534	0.1169	0.0631
0.700	0.0499	0.0921	0.1201	0.1297	0.1196	0.0914	0.0494
0.800	0.0387	0.0715	0.0933	0.1009	0.0931	0.0712	0.0385
0.900	0.0301	0.0555	0.0725	0.0785	0.0725	0.0554	0.0300
1.000	0.0234	0.0432	0.0564	0.0610	0.0564	0.0431	0.0233

3.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.4015	0.6577	0.7084	0.5837	0.3753	0.1871	0.0684
0.200	0.2430	0.4198	0.4921	0.4617	0.3622	0.2362	0.1132
0.300	0.1643	0.2924	0.3604	0.3626	0.3097	0.2208	0.1136
0.400	0.1187	0.2150	0.2725	0.2843	0.2528	0.1871	0.0989
0.500	0.0891	0.1630	0.2097	0.2228	0.2020	0.1521	0.0814
0.600	0.0683	0.1256	0.1628	0.1746	0.1598	0.1214	0.0653
0.700	0.0530	0.0976	0.1270	0.1369	0.1259	0.0959	0.0518
0.800	0.0413	0.0762	0.0993	0.1073	0.0989	0.0755	0.0408
0.900	0.0323	0.0596	0.0778	0.0841	0.0776	0.0593	0.0321
1.000	0.0253	0.0466	0.0609	0.0659	0.0608	0.0465	0.0252

Los errores absolutos son aproximadamente de 2.2×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

5.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.3972	0.6551	0.7043	0.5883	0.3723	0.1955	0.0653
0.20	0.2409	0.4171	0.4901	0.4620	0.3636	0.2385	0.1145
0.30	0.1631	0.2908	0.3592	0.3624	0.3105	0.2220	0.1145
0.40	0.1181	0.2141	0.2718	0.2840	0.2530	0.1876	0.0993
0.50	0.0888	0.1625	0.2092	0.2226	0.2020	0.1523	0.0816
0.60	0.0681	0.1253	0.1625	0.1744	0.1597	0.1214	0.0654
0.70	0.0528	0.0974	0.1268	0.1366	0.1257	0.0959	0.0518
0.80	0.0412	0.0760	0.0991	0.1071	0.0987	0.0754	0.0408
0.90	0.0322	0.0594	0.0776	0.0839	0.0774	0.0592	0.0320
1.00	0.0252	0.0465	0.0608	0.0657	0.0607	0.0464	0.0251

Los errores absolutos son aproximadamente de 1.8×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

7. ***a*)**

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	29.9999	29.9970	29.9037	27.6450
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	29.9999	29.9991	29.9805	29.6517	25.6452
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9996	29.9963	29.9421	29.2922	23.9347
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9898	29.9986	29.9898	29.8782	28.8606	22.4612
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9782	29.9964	29.9782	29.7878	28.3831	21.1829

***b*)**

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9973	29.5964
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9893	29.2036
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9762	28.8213
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9993	29.9585	28.4490
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9986	29.9363	28.0864

***c*)**

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5348	38.3465	44.3067	46.3001	44.3067	38.3465	28.5348	15.3312
4.00	13.6371	25.6867	34.9416	40.6988	42.6453	40.6988	34.9416	25.6867	13.6371
6.00	12.3012	23.2863	31.8624	37.2794	39.1273	37.2794	31.8624	23.2863	12.3012
8.00	11.1659	21.1877	29.0757	34.0984	35.8202	34.0984	29.0757	21.1877	11.1659
10.00	10.1665	19.3143	26.5439	31.1662	32.7549	31.1662	26.5439	19.3143	10.1665

***d*)**

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	23.9999	16.0000	8.0000
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9686	23.9993	16.0000	8.0000
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9323	23.9978	15.9999	8.0000
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8844	23.9950	15.9998	8.0000
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7498	31.8265	23.9908	15.9996	8.0000

9. *a*)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	30.0000	29.9990	29.9679	29.2150
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	30.0000	29.9997	29.9935	29.8839	28.5484
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9997	29.9988	29.9807	29.7641	27.9782
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9899	29.9991	29.9966	29.9594	29.6202	27.4870
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9783	29.9976	29.9927	29.9293	29.4610	27.0610

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9991	29.8655
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9964	29.7345
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9921	29.6071
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9862	29.4830
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9995	29.9788	29.3621

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5350	38.3477	44.3130	46.3327	44.4671	39.0872	31.5755	24.6930
4.00	13.6381	25.6913	34.9606	40.7728	42.9127	41.5716	37.4340	31.7086	25.6986
6.00	12.3088	23.3146	31.9546	37.5566	39.8880	39.1565	36.9745	31.2134	25.7128
8.00	11.1946	21.2785	29.3217	34.7092	37.2109	36.9834	34.5032	30.4279	25.4167
10.00	10.2377	19.5150	27.0178	32.1929	34.8117	34.9710	33.0338	29.5224	25.0019

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	24.0000	16.0102	8.6333
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9687	24.0002	16.0391	9.2272
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9324	24.0005	16.0845	9.7846
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8846	24.0012	16.1441	10.3084
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7499	31.8269	24.0023	16.2160	10.8012

11. *a*) $\psi(x) = \frac{1}{2}x + 20$

b)

Tiempo	$x = 4.00$	$x = 8.00$	$x = 12.00$	$x = 16.00$
0.00	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
10.00	32.7433	44.2679	45.4228	38.2971
20.00	29.9946	36.2354	38.3148	35.8160
30.00	26.9487	32.1409	34.0874	32.9644
50.00	24.1178	27.4348	29.4296	30.1207
70.00	22.8995	25.4560	27.4554	28.8998
90.00	22.3817	24.6176	26.6175	28.3817
110.00	22.1619	24.2620	26.2620	28.1619
130.00	22.0687	24.1112	26.1112	28.0687
150.00	22.0291	24.0472	26.0472	28.0291
170.00	22.0124	24.0200	26.0200	28.0124
190.00	22.0052	24.0085	26.0085	28.0052
210.00	22.0022	24.0036	26.0036	28.0022
230.00	22.0009	24.0015	26.0015	28.0009
250.00	22.0004	24.0007	26.0007	28.0004
270.00	22.0002	24.0003	26.0003	28.0002
290.00	22.0001	24.0001	26.0001	28.0001
310.00	22.0000	24.0001	26.0001	28.0000
330.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000
350.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000

Ejercicios 14.3, página 604

1. *a*)

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$
0.00	0.1875	0.2500	0.1875
0.20	0.1491	0.2100	0.1491
0.40	0.0556	0.0938	0.0556
0.60	−0.0501	−0.0682	−0.0501
0.80	−0.1361	−0.2072	−0.1361
1.00	−0.1802	−0.2591	−0.1802

a)

Tiempo	$x = 0.4$	$x = 0.8$	$x = 1.2$	$x = 1.6$
0.00	0.0032	0.5273	0.5273	0.0032
0.20	0.0652	0.4638	0.4638	0.0652
0.40	0.2065	0.3035	0.3035	0.2065
0.60	0.3208	0.1190	0.1190	0.3208
0.80	0.3094	−0.0180	−0.0180	0.3094
1.00	0.1450	−0.0768	−0.0768	0.1450

c)

Tiempo	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$	$x = 0.6$	$x = 0.7$	$x = 0.8$	$x = 0.9$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.12	0.0000	0.0000	0.0082	0.1126	0.3411	0.1589	0.3792	0.3710	0.0462
0.24	0.0071	0.0657	0.2447	0.3159	0.1735	0.2463	−0.1266	−0.3056	−0.0625
0.36	0.1623	0.3197	0.2458	0.1657	0.0877	−0.2853	−0.2843	−0.2104	−0.2887
0.48	0.1965	0.1410	0.1149	−0.1216	−0.3593	−0.2381	−0.1977	−0.1715	0.0800
0.60	−0.2194	−0.2069	−0.3875	−0.3411	−0.1901	−0.1662	−0.0666	0.1140	−0.0446
0.72	−0.3003	−0.6865	−0.5097	−0.3230	−0.1585	0.0156	0.0893	−0.0874	0.0384
0.84	−0.2647	−0.1633	−0.3546	−0.3214	−0.1763	−0.0954	−0.1249	0.0665	−0.0386
0.96	0.3012	0.1081	0.1380	−0.0487	−0.2974	−0.3407	−0.1250	−0.1548	0.0092

3. *a*)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.5599	0.9059	0.9059	0.5599
0.20	0.4788	0.7748	0.7748	0.4788
0.30	0.3524	0.5701	0.5701	0.3524
0.40	0.1924	0.3113	0.3113	0.1924
0.50	0.0142	0.0230	0.0230	0.0142

b)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.05	0.5808	0.9397	0.9397	0.5808
0.10	0.5599	0.9060	0.9060	0.5599
0.15	0.5257	0.8507	0.8507	0.5257
0.20	0.4790	0.7750	0.7750	0.4790
0.25	0.4209	0.6810	0.6810	0.4209
0.30	0.3527	0.5706	0.5706	0.3527
0.35	0.2761	0.4467	0.4467	0.2761
0.40	0.1929	0.3122	0.3122	0.1929
0.45	0.1052	0.1701	0.1701	0.1052
0.50	0.0149	0.0241	0.0241	0.0149

5.

Tiempo	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
0.00000	0.1000	0.2000	0.3000	0.2000	0.1000
0.60134	0.0984	0.1688	0.1406	0.1688	0.0984
1.20268	0.0226	−0.0121	0.0085	−0.0121	0.0226
1.80401	−0.1271	−0.1347	−0.1566	−0.1347	−0.1271
2.40535	−0.0920	−0.2292	−0.2571	−0.2292	−0.0920
3.00669	−0.0932	−0.1445	−0.2018	−0.1445	−0.0932
3.60803	−0.0284	−0.0205	0.0336	−0.0205	−0.0284
4.20936	0.1064	0.1555	0.1265	0.1555	0.1064
4.81070	0.1273	0.2060	0.2612	0.2060	0.1273
5.41204	0.0625	0.1689	0.2038	0.1689	0.0625
6.01338	0.0436	0.0086	−0.0080	0.0086	0.0436
6.61472	−0.0931	−0.1364	−0.1578	−0.1364	−0.0931
7.21605	−0.1436	−0.2173	−0.2240	−0.2173	−0.1436
7.81739	−0.0625	−0.1644	−0.2247	−0.1644	−0.0625
8.41873	−0.0287	−0.0192	−0.0085	−0.0192	−0.0287
9.02007	0.0654	0.1332	0.1755	0.1332	0.0654
9.62140	0.1540	0.2189	0.2089	0.2189	0.1540

Nota: El tiempo está expresado en milisegundos.

Ejercicios de repaso del capítulo 14, página 605

1. $u_{11} = 0.8929$, $u_{21} = 3.5714$, $u_{31} = 13.3929$

3. *a*)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922
0.1883	0.3346	0.3734	0.2512

b)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922

c) Sí; la tabla del inciso *b*) es la tabla del inciso *a*) desplazada hacia abajo.

Ejercicios 15.1, página 612

1. $3 + 3i$ **3.** 1 **5.** $7 - 13i$
7. $-7 + 5i$ **9.** $11 - 10i$ **11.** $-5 + 12i$
13. $-2i$ **15.** $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$ **17.** $8 - i$
19. $\frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$ **21.** $20i$ **23.** $\frac{102}{5} + \frac{116}{5}i$
25. $\frac{7}{130} + \frac{9}{130}i$ **27.** $x/(x^2 + y^2)$
29. $-2y - 4$ **31.** $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$
33. $x = -\frac{9}{2}, y = 1$ **35.** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
37. $11 - 6i$

Ejercicios 15.2, página 616

1. $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ o $2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$

3. $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

7. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

11. $-\frac{53}{2} - \frac{5}{2}i$ **13.** $5.5433 + 2.2961i$

15. $8i$; $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$

17. $30\sqrt{2}\,[\cos(25\pi/12) + i \operatorname{sen}(25\pi/12)]$; $40.9808 + 10.9808i$

19. $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)]$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

21. -512 **23.** $\frac{1}{32}i$ **25.** $-i$

27. $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$

29. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

31. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

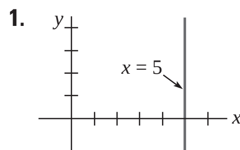
33. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),\quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

35. $32\left(\cos\dfrac{13\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \dfrac{13\pi}{6}\right),\ 16\sqrt{3} + 16i$

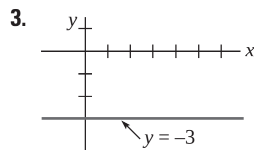
37. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta,\ \ \text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta$

Ejercicios 15.3, página 619

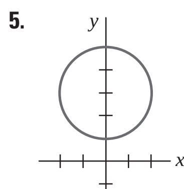
1.



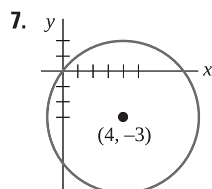
3.



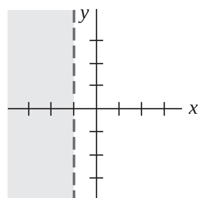
5.



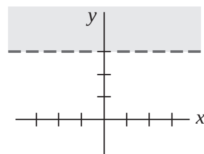
7.



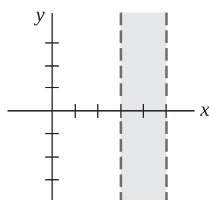
9. dominio



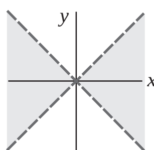
11. dominio



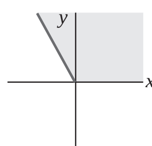
13. dominio



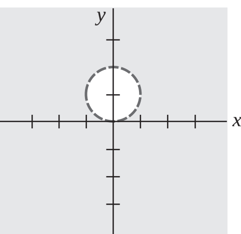
15. no es dominio



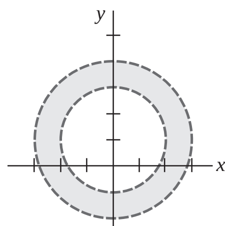
17. no es dominio



19. dominio



21. dominio

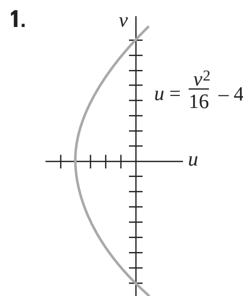


23. la línea $y = -x$

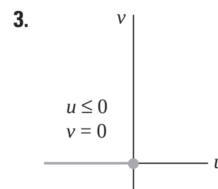
25. la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

Ejercicios 15.4, página 623

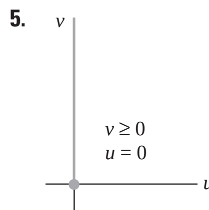
1.



3.



5.



7. $f(z) = (6x - 5) + i(6y + 9)$

9. $f(z) = (x^2 - y^2 - 3x) + i(2xy - 3y + 4)$

11. $f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 4x) + i(3x^2y - y^3 - 4y)$

13. $f(z) = \left(x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

15. $-4 + i;\ 3 - 9i;\ 1 + 86i$

17. $14 - 20i;\ -13 + 43i;\ 3 - 26i$

19. $6 - 5i$

21. $-4i$

27. $12z^2 - (6 + 2i)z - 5$

29. $6z^2 - 14z - 4 + 16i$

31. $6z(z^2 - 4i)^2$

33. $\dfrac{8 - 13i}{(2z + i)^2}$

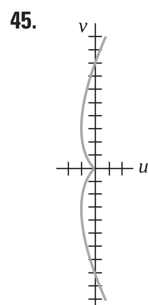
35. $3i$

37. $2i,\ -2i$

41. $x(t) = c_1e^{2t}$ y $y(t) = c_2e^{2t}$; las líneas de corriente pasan por el origen.

43. $y = cx$; las líneas de corriente pasan por el origen.

45.



Ejercicios 15.5, página 628

15. $a = 1,\ b = 3$

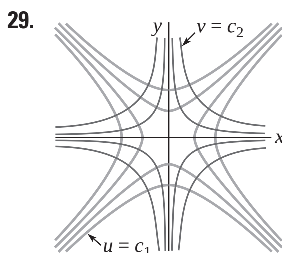
21. $f'(z) = e^x\cos y + ie^x\ \text{sen}\ y$

23. $f(z) = x + i(y + C)$

25. $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$

27. $f(z) = \log_e(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + C\right)$

29.



31. el eje x y el círculo $|z| = 1$

Ejercicios 15.6, página 634

1. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **3.** $e^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
5. $-e^{\pi}$ **7.** $-1.8650 + 4.0752i$
9. $0.2837 - 0.9589i$ **11.** $-0.9659 + 0.2588i$
13. $e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)$
15. $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \operatorname{sen} 2xy)$
23. $1.6094 + i(\pi + 2n\pi)$
25. $1.0397 + i(3\pi/4 + 2n\pi)$
27. $1.0397 + i(\pi/3 + 2n\pi)$
29. $2.1383 -(\pi/4)i$ **31.** $2.5649 + 2.7468i$
33. $3.4657 - (\pi/3)i$ **35.** $1.3863 + i(\pi/2 + 2n\pi)$
37. $3 + i(-\pi/2 + 2n\pi)$ **39.** $e^{(2-8n)\pi}$
41. $e^{-2n\pi}(0.2740 + 0.5837i)$ **43.** e^2
47. no; no; sí

Ejercicios 15.7, página 637

1. 10.0677 **3.** $1.0911 + 0.8310i$
5. $0.7616i$ **7.** -0.6481 **9.** -1
11. $0.5876 + 1.3363i$
15. $\pi/2 + 2n\pi - i\log_e(2 \pm \sqrt{3})$
17. $(-\pi/2 + 2n\pi)i$ **19.** $\pi/4 + n\pi$
21. $2n\pi \pm 2i$

Ejercicios 15.8, página 640

1. $n\pi + (-1)^{n+1}i\log_e(1 + \sqrt{2})$ **3.** $n\pi$
5. $2n\pi \pm i \log_e(2 + \sqrt{3})$ **7.** $\pm \pi/3 + 2n\pi$
9. $\pi/4 + n\pi$ **11.** $(-1)^n \log_e 3 + n\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 15, página 646

1. 0; 32 **3.** $-\frac{7}{25}$ **5.** $\frac{4}{5}$ **7.** falso
9. $0.6931 + i(\pi/2 + 2n\pi)$ **11.** $-0.3097 + 0.8577i$
13. falso **15.** $3 - \dfrac{\pi}{2}i$ **17.** $58 - 4i$
19. $-8 + 8i$
21. **23.**

25. una elipse con focos $(0, -2)$ y $(0, 2)$
27. $1.0696 - 0.2127i,\quad 0.2127 + 1.0696i,$
$-1.0696 + 0.2127i,\quad -0.2127 - 1.0696i$
29. $5i$ **31.** la parábola $v = u^2 - 2u$

33. $1, -1$ **35.** números imaginarios puros
37. $f'(z) = (-2y - 5) + 2xi$

Ejercicios 16.1, página 647

1. $-28 + 84i$ **3.** $-48 + \frac{736}{3}i$ **5.** $(2 + \pi)i$
7. πi **9.** $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$ **11.** $-e - 1$
13. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ **15.** 0 **17.** $\frac{1}{2}i$ **19.** 0
21. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ **23.** $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ **25.** $\dfrac{5\pi e^5}{12}$
27. $6\sqrt{2}$ **31.** $-11 + 38i$; 0
33. circulación $= 0$, flujo neto $= 4\pi$
35. circulación $= 0$, flujo neto $= 0$

Ejercicios 16.2, página 651

9. $2\pi i$ **11.** $2\pi i$ **13.** 0
15. $2\pi i$; $4\pi i$; 0 **17.** $-8\pi i$; $-6\pi i$
19. $-\pi(1 + i)$ **21.** $-4\pi i$ **23.** $-6\pi i$

Ejercicios 16.3, página 656

1. $2i$ **3.** $48 + 24i$ **5.** $6 + \frac{26}{3}i$ **7.** 0
9. $-\frac{7}{16} - \frac{22}{3}i$ **11.** $-\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi}i$ **13.** $2.3504i$
15. 0 **17.** πi **19.** $\frac{1}{2}i$
21. $11.4928 + 0.9667i$ **23.** $-0.9056 + 1.7699i$

Ejercicios 16.4, página 662

1. $8\pi i$ **3.** $-2\pi i$ **5.** $-\pi(20 + 8i)$
7. -2π; 2π **9.** -8π **11.** $-2\pi e^{-1}i$
13. $\frac{4}{3}\pi i$ **15.** $-5\pi i$; $-5\pi i$; $9\pi i$; 0
17. $-\pi(3 + i)$; $\pi(3 + i)$ **19.** $\pi(\frac{8}{3} + 12i)$
21. 0 **23.** $-\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 16, página 662

1. verdadero **3.** verdadero **5.** 0 **7.** $\pi(6\pi - i)$
9. verdadero **11.** 0 si $n \neq -1$, $2\pi i$ si $n = -1$
13. $-\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{136}{15} + \frac{88}{3}i$ **17.** 0
19. $-14.2144 + 22.9637i$ **21.** $2\pi i$
23. $-\frac{8}{3}\pi i$ **25.** $\frac{2}{5}\pi i$ **27.** 2π **29.** $2n\pi i$

Ejercicios 17.1, página 669

1. $5i, -5, -5i, 5, 5i$ **3.** 0, 2, 0, 2, 0
5. converge **7.** converge **9.** diverge
11. $\text{lím}_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = 2$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \frac{3}{2}$
13. La serie converge a $1/(1+ 2i)$.
15. divergente
17. convergente, $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
19. convergente, $\frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$
21. $|z - 2i| = \sqrt{5}$, $R = \sqrt{5}$
23. $|z - 1 - i| = 2$, $R = 2$
25. $|z - i| = 1/\sqrt{10}$, $R = 1/\sqrt{10}$
27. $|z - 4 - 3i| = 25$, $R = 25$
29. La serie converge a $z = -2 + i$.

Ejercicios 17.2, página 673

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k$, $R = 1$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(2z)^{k-1}$, $R = \frac{1}{2}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2z)^k,\ R = \infty$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ R = \infty$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\ R = \infty$

11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2},\ R = \infty$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k,\ R = 1$

15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^k}{(3-2i)^{k+1}},\ R = \sqrt{13}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{2^k},\ R = 2$

19. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2$
$+ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots,\ R = \infty$

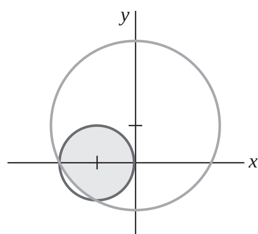
21. $e^{3i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^k}{k!},\ R = \infty$

23. $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$

25. $\frac{1}{2i} + \frac{3}{(2i)^2}z + \frac{7}{(2i)^3}z^2 + \frac{15}{(2i)^4}z^3 + \cdots,\ R = 1$

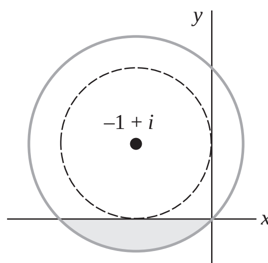
27. $2\sqrt{5}$

29. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z+1)^k,\ R = 1;$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2+i)^{k+1}}(z-i)^k,\ R = \sqrt{5}$



31. ***a*)** La distancia de z_0 al corte de ramificación es una unidad.

***c*)** La serie converge en el interior del círculo $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$. Aunque la serie converge en la región sombreada, no converge (ni representa) a Ln z en esta región.



33. $1.1 + 0.12i$ **35.** $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}$

Ejercicios 17.3, página 681

1. $\frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{1! \cdot z^2} + \frac{1}{2! \cdot z^4} - \frac{1}{3! \cdot z^6} + \cdots$

5. $\frac{e}{z-1} + e + \frac{e(z-1)}{2!} + \frac{e(z-1)^2}{3!} + \cdots$

7. $-\frac{1}{3z} - \frac{1}{3^2} - \frac{z}{3^3} - \frac{z^2}{3^4} - \cdots$

9. $\frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3^2} + \frac{z-3}{3^3} - \frac{(z-3)^2}{3^4} + \cdots$

11. $\cdots - \frac{1}{3(z-4)^2} + \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{12} + \frac{z-4}{3 \cdot 4^2}$
$- \frac{(z-4)^2}{3 \cdot 4^3} + \cdots$

13. $\cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots$

15. $\frac{-1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots$

17. $\frac{1}{3(z+1)} - \frac{2}{3^2} - \frac{2(z+1)}{3^3} - \frac{2(z+1)^2}{3^4} - \cdots$

19. $\cdots - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} - \frac{1}{3} - \frac{z}{3 \cdot 2} - \frac{z^2}{3 \cdot 2^2} - \cdots$

21. $\frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \cdots$

23. $\frac{1}{z-2} - 3 + 6(z-2) - 10(z-2)^2 + \cdots$

25. $\frac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - \cdots$

27. $\cdots + \frac{2}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 1 + (z-1)$

Ejercicios 17.4, página 684

1. Defina $f(0) = 2$.
3. $-2 + i$ es un cero de orden 2.
5. $-i$ e i son ceros de orden 1; 0 es un cero de orden 2.
7. $2n\pi i,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son ceros de orden 1.
9. orden 5 **11.** orden 1
13. $-1 \pm 2i$ son polos simples.
15. -2 es un polo simple; $-i$ es un polo de orden 4.
17. $(2n + 1)\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son polos simples.
19. 0 es un polo de orden 2.
21. $2n\pi i,\ n = 0, \pm 1, \ldots,$ son polos simples.
23. no aislado

Ejercicios 17.5, página 689

1. $\frac{2}{5}$ **3.** -3 **5.** 0
7. $\text{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{2}$
9. $\text{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f(z), -2) = -\frac{1}{12}$, $\text{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{4}$
11. $\text{Res}(f(z), -1) = 6$, $\text{Res}(f(z), -2) = -31$, $\text{Res}(f(z), -3) = 30$
13. $\text{Res}(f(z), 0) = -3/\pi^4$, $\text{Res}(f(z), \pi) = (\pi^2 - 6)/2\pi^4$
15. $\text{Res}(f(z), (2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
17. $0;\ 2\pi i/9;\ 0$ **19.** $\pi i;\ \pi i;\ 0$ **21.** $\pi/3$

23. 0 **25.** $2\pi i \cosh 1$ **27.** $-4i$ **29.** $6i$

31. $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} i$

Ejercicios 17.6, página 695

1. $4\pi/\sqrt{3}$ **3.** 0 **5.** $\pi/\sqrt{3}$ **7.** $\pi/4$
9. $\pi/6$ **11.** π **13.** $\pi/16$ **15.** $3\pi/8$
17. $\pi/2$ **19.** $\pi/\sqrt{2}$ **21.** πe^{-1} **23.** πe^{-1}

25. πe^{-3} **27.** $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2})$

29. $-\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{e^{-3}}{3} - e^{-1}\right)$

Ejercicios de repaso del capítulo 17, página 696

1. verdadero **3.** falso **5.** verdadero **7.** verdadero

9. $\dfrac{1}{\pi}$ **11.** $|z - i| = \sqrt{5}$

13. $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k \cos(k\pi/4)}{k!} z^k$

15. $-\dfrac{i}{z^3} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{i}{3!z} - \dfrac{1}{4!} - \dfrac{i}{5!}z + \cdots$

17. $\cdots + \dfrac{1}{5!(z-i)^3} - \dfrac{1}{3!(z-i)} + (z - i)$

19. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9}z + \dfrac{26}{27}z^2 + \cdots;$

$\cdots - \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{z}{3^2} - \dfrac{z^2}{3^3} - \cdots;$

$\dfrac{2}{z^2} + \dfrac{8}{z^3} + \dfrac{26}{z^4} + \cdots;$

$-\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{z-1}{2^2} - \dfrac{(z-1)^2}{2^3} - \cdots$

21. $\dfrac{404\pi}{81} i$ **23.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} i$

25. $(\pi + \pi e^{-2}\cos 2)i$ **27.** $-\pi i$

29. $\dfrac{9\pi^3 + 2}{\pi^2} i$ **31.** $7\pi/50$

33. $\pi\left(\dfrac{90 - 52\sqrt{3}}{12 - 7\sqrt{3}}\right)$

Ejercicios para el apéndice II, página APÉ-5

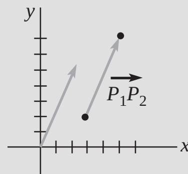
1. $24; 720; 4\sqrt{\pi}/3; -8\sqrt{\pi}/15$ **3.** 0.297

5. $\Gamma(x) > \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt > e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{xe}$ para $x > 0$.
A medida que $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$.

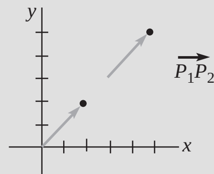
RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS DE NÚMERO IMPAR

Ejercicios 18.1, página 702

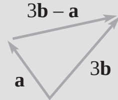
1. $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $3\mathbf{i}$; $\sqrt{65}$; 3
3. $\langle 12, 0\rangle$; $\langle 4, -5\rangle$; $\langle 4, 5\rangle$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{41}$
5. $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $3\sqrt{10}$; $\sqrt{34}$
7. $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$; $\mathbf{0}$; $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$; 0; $2\sqrt{85}$
9. $\langle 6, -14\rangle$; $\langle 2, 4\rangle$
11. $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$
13. $\langle 20, 52\rangle$; $\langle -2, 0\rangle$
15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$



17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



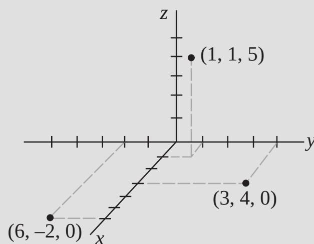
19. (1, 18)
21. a, b, c, e, f
23. $\langle 6, 15\rangle$
25. $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$; $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$
27. $\langle 0, -1\rangle$; $\langle 0, 1\rangle$
29. $\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\rangle$
31. $\frac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \frac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$
33. $\langle -3, -\frac{15}{2}\rangle$
35.



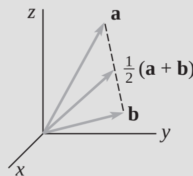
37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
41. $\mathbf{a} = \frac{5}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
43. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
45. *b*) aproximadamente 31°
47. $\mathbf{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{L\sqrt{L^2 + a^2}}\mathbf{i}$

Ejercicios 18.2, página 708

1. -5



7. El conjunto $\{(x, y, 5) | x, y$ son números reales$\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades por arriba del plano xy.
9. El conjunto $\{(2, 3, z) | z$ es un número real$\}$ es una línea perpendicular al plano xy en (2, 3, 0).
11. (0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 8), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 8)
13. (–2, 5, 0), (–2, 0, 4), (0, 5, 4); (–2, 5, −2); (3, 5, 4)
15. la unión de los planos coordenados
17. el punto $(-1, 2, -3)$
19. la unión de los planos $z = -5$ y $z = 5$
21. $\sqrt{70}$
23. 7; 5
25. triángulo rectángulo
27. isósceles
29. $d(P_1, P_2) + d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3)$
31. 6 o -2
33. $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
35. $P_1(-4, -11, 10)$
37. $\langle -3, -6, 1\rangle$
39. $\langle 2, 1, 1\rangle$
41. $\langle 2, 4, 12\rangle$
43. $\langle -11, -41, -49\rangle$
45. $\sqrt{139}$
47. 6
49. $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$
51. $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
53.



Ejercicios 18.3, página 713

1. 12
3. –16
5. 48
7. 29
9. 25
11. $\langle -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\rangle$
13. $25\sqrt{2}$
15. *a*) y *f*), *c*) y *d*), *b*) y *e*)
17. $\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1\rangle$
21. 1.11 radianes o 63.43°
23. 1.89 radianes o 108.43°
25. $\cos\alpha = 1/\sqrt{14}$, $\cos\beta = 2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma = 3/\sqrt{14}$; $\alpha = 74.5°$, $\beta = 57.69°$, $\gamma = 36.7°$
27. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -\sqrt{3}/2$; $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 150°$
29. 0.955 radianes o 54.74°; 0.616 radianes o 35.26°
31. $\alpha = 58.19°$, $\beta = 42.45°$, $\gamma = 65.06°$
33. $\frac{5}{7}$
35. $-6\sqrt{11}/11$
37. $72\sqrt{109}/109$
39. $\langle -\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\rangle$
41. $\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}\rangle$
43. $\langle \frac{72}{25}, \frac{96}{25}\rangle$
45. 1 000 ft-lb
47. 0; 150 N-m
49. aproximadamente 1.80 angstroms

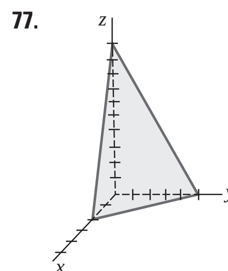
Ejercicios 18.4, página 720

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
3. $\langle -12, -2, 6\rangle$
5. $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
7. $\langle -3, 2, 3\rangle$
9. $\mathbf{0}$
11. $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
13. $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

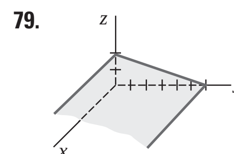
17. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **19.** $2\mathbf{k}$ **21.** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
23. $-24\mathbf{k}$ **25.** $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **27.** $\mathbf{0}$
29. $\sqrt{41}$ **31.** $-\mathbf{j}$ **33.** $\mathbf{0}$ **35.** 6
37. $12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ **39.** $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
41. $-21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ **43.** -10
45. 14 unidades cuadradas **47.** $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada
49. $\frac{7}{2}$ de unidades cuadradas **51.** 10 unidades cúbicas
53. son coplanares
55. 32; en el plano *xy*, 30° desde el eje *x* positivo en la dirección del eje *y* negativo; $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$
57. $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{k}$

Ejercicios 18.5, página 727

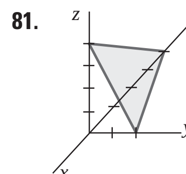
1. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle 2, 3, -3\rangle$
3. $\langle x, y, z\rangle = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle + t\langle -2, 3, -\frac{3}{2}\rangle$
5. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, -1\rangle + t\langle 5, 0, 0\rangle$
7. $x = 2 + 4t, y = 3 - 4t, z = 5 + 3t$
9. $x = 1 + 2t, y = -2t, z = -7t$
11. $x = 4 + 10t, y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t, z = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t$
13. $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-4}{10} = \dfrac{z+9}{7}$
15. $\dfrac{x+7}{11} = \dfrac{z-5}{-4}, y = 2$
17. $x = 5, \dfrac{y-10}{9} = \dfrac{z+2}{12}$
19. $x = 4 + 3t, y = 6 + \frac{1}{2}t, z = -7 - \frac{3}{2}t$; $\dfrac{x-4}{3} = 2y - 12 = \dfrac{2z+14}{-3}$
21. $x = 5t, y = 9t, z = 4t$; $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z}{4}$
23. $x = 6 + 2t, y = 4 - 3t, z = -2 + 6t$
25. $x = 2 + t, y = -2, z = 15$
27. Ambas líneas pasan por el origen y tienen vectores de dirección paralelos.
29. $(0, 5, 15), (5, 0, \frac{15}{2}), (10, -5, 0)$
31. $(2, 3, -5)$ **33.** Las líneas no se intersecan.
35. 40.37° **37.** $x = 4 - 6t, y = 1 + 3t, z = 6 + 3t$
39. $2x - 3y + 4z = 19$ **41.** $5x - 3z = 51$
43. $6x + 8y - 4z = 11$ **45.** $5x - 3y + z = 2$
47. $3x - 4y + z = 0$ **49.** Los puntos son colineales.
51. $x + y - 4z = 25$ **53.** $z = 12$
55. $-3x + y + 10z = 18$ **57.** $9x - 7y + 5z = 17$
59. $6x - 2y + z = 12$
61. ortogonales: *a*) y *d*), *b*) y *c*), *d*) y *f*), *b*) y *e*); paralelos: *a*) y *f*), *c*) y *e*)
63. *c*) y *d*) **65.** $x = 2 + t, y = \frac{1}{2} - t, z = t$
67. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, z = t$
69. $(-5, 5, 9)$ **71.** $(1, 2, -5)$
73. $x = 5 + t, y = 6 + 3t, z = -12 + t$
75. $3x - y - 2z = 10$
77.



79.



81.



Ejercicios 18.6, página 734

1. no es un espacio vectorial, el axioma *vi*) no se satisface
3. no es un espacio vectorial, el axioma *x*) no se satisface
5. espacio vectorial
7. no es un espacio vectorial, el axioma *ii*) no se satisface
9. espacio vectorial **11.** un subespacio
13. no es un subespacio **15.** un subespacio
17. un subespacio **19.** no es un subespacio
23. *b*) $\mathbf{a} = 7\mathbf{u}_1 - 12\mathbf{u}_2 + 8\mathbf{u}_3$
25. linealmente dependiente
27. linealmente independiente
29. *f* es discontinua en $x = -1$ y en $x = -3$.
31. $2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{2/3}, \sqrt{\pi}$

Ejercicios 18.7, página 740

1. $\mathbf{u} = \frac{58}{13}\mathbf{w}_1 - \frac{4}{13}\mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1 = \langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13}\rangle, \mathbf{w}_2 = \langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\rangle$
3. $\mathbf{u} = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - \frac{23}{2}\mathbf{v}_3$, donde $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle, \mathbf{v}_2 = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{v}_3 = \langle -1, 0, 1\rangle$
5. *a*) $B'' = \{\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\rangle, \langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\rangle\}$
b) $B'' = \{\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle, \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\}$
7. *a*) $B'' = \{\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle, \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\}$
b) $B'' = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
9. $B'' = \{\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\rangle, \langle -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\rangle, \langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle\}$
11. $B'' = \{\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\rangle, \langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\rangle, \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}\rangle\}$
13. $B'' = \{\langle \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\rangle, \langle -\frac{13}{\sqrt{186}}, \frac{1}{\sqrt{186}}, \frac{4}{\sqrt{186}}\rangle\}$
15. $B'' = \{\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \langle \frac{7}{2\sqrt{35}}, \frac{9}{2\sqrt{35}}, \frac{3}{2\sqrt{35}}, \frac{1}{2\sqrt{35}}\rangle\}$
17. $B' = \{1, x, \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)\}$
19. $B'' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}x, \frac{5}{2\sqrt{10}}(3x^2 - 1)\}$

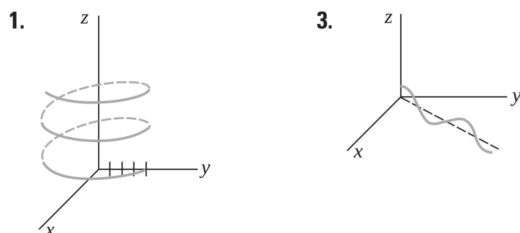
21. $p(x) = \frac{41}{\sqrt{15}}\, q_1(x) + 3\sqrt{6}\, q_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\, q_3(x)$, donde $q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q_2(x) = \frac{3}{\sqrt{6}}\, x$, $q_2(x) = \frac{5}{2\sqrt{10}}\,(3x^2 - 1)$

Ejercicios de repaso del capítulo 18, página 741

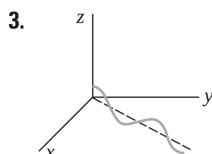
1. verdadero **3.** falso **5.** verdadero **7.** verdadero
9. verdadero **11.** $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **13.** $5\mathbf{i}$
15. 14 **17.** $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ **19.** (4, 7, 5)
21. (5, 6, 3) **23.** $-36\sqrt{2}$ **25.** 12, -8 y 6
27. $3\sqrt{10}/2$ **29.** 2 unidades
31. $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})/\sqrt{11}$ **33.** 2
35. $\frac{26}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{20}{9}\mathbf{k}$ **37.** esfera; plano
39. $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{6}$
41. Los vectores de dirección son ortogonales y el punto de intersección es (3, –3, 0).
43. $14x - 5y - 3z = 0$ **45.** $30\sqrt{2}$ N-m
47. aproximadamente 153 libras
49. no es un espacio vectorial **51.** un subespacio; 1, x

Ejercicios 19.1, página 749

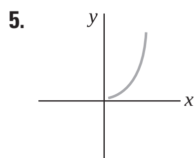
1.



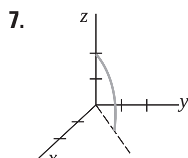
3.



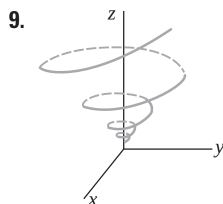
5.



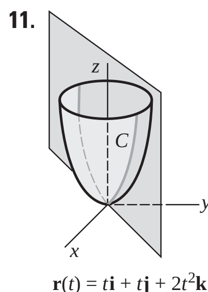
7.



9.

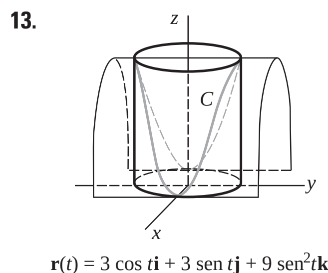


11.



$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

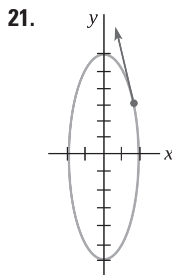
13.



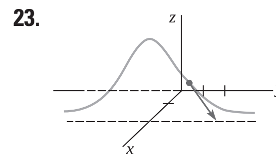
$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \text{ sen } t\mathbf{j} + 9 \text{ sen}^2 t\mathbf{k}$

15. $2\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$
17. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$
19. $\langle e^{2t}(2t + 1), 3t^2, 8t - 1\rangle$; $\langle 4e^{2t}(t + 1), 6t, 8\rangle$

21.



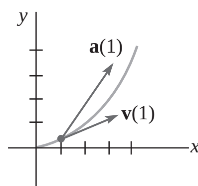
23.



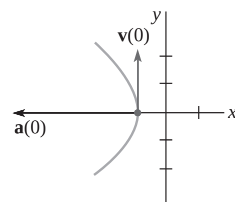
25. $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = \frac{8}{3} + 4t$
27. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ **29.** $\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$
31. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$ **33.** $\frac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$
35. $e^t(t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \frac{1}{2}e^{t2}\mathbf{k} + \mathbf{c}$
37. $(6t + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$
39. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$
41. $2\sqrt{a^2 + c^2}\pi$ **43.** $6(e^{3\pi} - 1)$
45. $a \cos(s/a)\mathbf{i} + a \text{ sen}(s/a)\mathbf{j}$
47. Diferenciar $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$.

Ejercicios 19.2, página 752

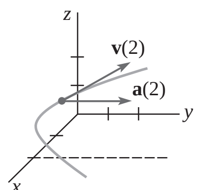
1. La rapidez es $\sqrt{5}$.



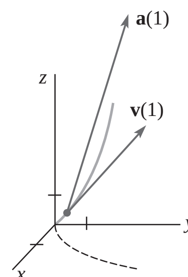
3. La rapidez es 2.



5. La rapidez es $\sqrt{5}$.



7. La rapidez es $\sqrt{14}$.



9. (0, 0, 0) y (25, 115, 0);
$\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = (-16t^2 + 240t)\mathbf{j} + 240\sqrt{3}\,t\,\mathbf{i}$ y $x(t) = 240\sqrt{3}\,t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$; 900 ft; aproximadamente 6 235 ft; 480 ft/s
13. 72.11 ft/s
15. 97.98 ft/s
17. Suponga que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del objetivo en $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0 \cos\theta) = y_0/(v_0 \text{ sen } \theta)$. Esto implica que $\tan\theta = y_0/x_0$.

En otras palabras, apunta directamente al objetivo en $t = 0$.

21. 191.33 lb

23. $y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + s_0$ es la ecuación de una parábola.

25. $\mathbf{r}(t) = k_1e^{2t^3}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2t^2 + k_2}\mathbf{j} + (k_3e^{t^2} - 1)\mathbf{k}$

27. Dado que $\mathbf{F}$ está dirigido a lo largo de $\mathbf{r}$, debemos hacer que $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$ para alguna constante c. Por lo tanto $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (c\mathbf{r}) = c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$. Esto implica que $\mathbf{L}$ es una constante.

Ejercicios 19.3, página 758

1. $\mathbf{T} = (\sqrt{5}/5)(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$

3. $\mathbf{T} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(-a\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k})$,
$\mathbf{N} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$,
$\mathbf{B} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(c\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - c\cos t\,\mathbf{j} + a\,\mathbf{k})$,
$\kappa = a/(a^2 + c^2)$

5. $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$

7. $4t/\sqrt{1 + 4t^2}, \quad 2/\sqrt{1 + 4t^2}$

9. $2\sqrt{6}, 0, t > 0$ **11.** $2t/\sqrt{1 + t^2}, \quad 2/\sqrt{1 + t^2}$

13. 0, 5 **15.** $-\sqrt{3}e^{-t}, 0$

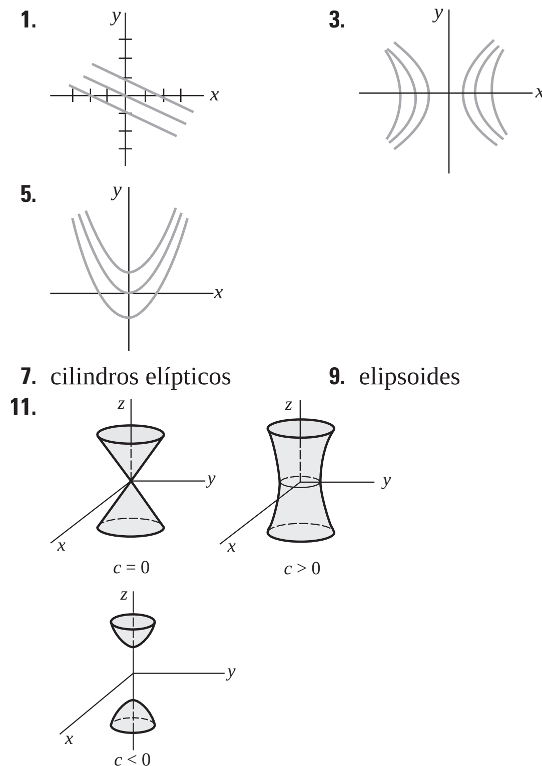
17. $\kappa = \dfrac{\sqrt{b^2c^2\operatorname{sen}^2 t + a^2c^2\cos^2 t + a^2b^2}}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t + c^2)^{3/2}}$

23. $\kappa = 2, \rho = \frac{1}{2}; \kappa = 2/\sqrt{125} \approx 0.18$,
$\rho = \sqrt{125}/2 \approx 5.59$; la curva es más aguda en (0, 0).

25. κ es cercana a cero

Ejercicios 19.4, página 763

1. **3.** **5.**



7. cilindros elípticos **9.** elipsoides

11.

13. $\partial z/\partial x = 2x - y^2, \partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$

15. $\partial z/\partial x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 30x^4$,
$\partial z/\partial y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$

17. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1)$,
$\partial z/\partial y = -24\sqrt{xy}/(3y^2 + 1)^2$

19. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}$,
$\partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$

21. $\partial z/\partial x = -10\cos 5x \operatorname{sen} 5x$,
$\partial z/\partial y = 10\operatorname{sen} 5y \cos 5y$

23. $f_x = e^{x^3y}(3x^3y + 1), f_y = x^4e^{x^3y}$

25. $f_x = 7y/(x + 2y)^2, f_y = -7x/(x + 2y)^2$

27. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3), g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$

29. $w_x = x^{-1/2}y, w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}$,
$w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$

31. $F_u = 2uw^2 - v^3 - vwt^2\operatorname{sen}(ut^2)$,
$F_v = -3uv^2 + w\cos(ut^2), F_x = 128x^7t^4$,
$F_t = -2uvwt\operatorname{sen}(ut^2) + 64x^8t^3$

39. $\partial z/\partial x = 3x^2v^2e^{uv^2} + 2uve^{uv^2}, \partial z/\partial y = -4yuve^{uv^2}$

41. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v)$,
$\partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$

43. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta$
$\qquad -3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta$,
$\partial w/\partial\theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta$
$\qquad -3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta$

45. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2}$,
$\partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{xu}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{y\cosh rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{xs}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{sty\cosh rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{xt}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{ty\cosh rs}{u^2(x^2 + y^2)^{1/2}}$

49. $dz/dt = (4ut - 4vt^{-3})/(u^2 + v^2)$

51. $dw/dt|_{t=\pi} = -2$ **57.** 5.31 cm^2/s

Ejercicios 19.5, página 768

1. $(2x - 3x^2y^2)\,\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\,\mathbf{j}$

3. $(y^2/z^3)\,\mathbf{i} + (2xy/z^3)\,\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\,\mathbf{k}$

5. $4\,\mathbf{i} - 32\,\mathbf{j}$ **7.** $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$

9. $\sqrt{3}x + y$ **11.** $\frac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$

13. $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$ **15.** $98/\sqrt{5}$ **17.** $-3\sqrt{2}$

19. -1 **21.** $-12/\sqrt{17}$

23. $\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\mathbf{j}, \sqrt{5/2}$

25. $-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}, 2\sqrt{6}$

27. $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\mathbf{j}, -8\sqrt{\pi/3}$

29. $-\frac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, -\sqrt{83\,281}/24$

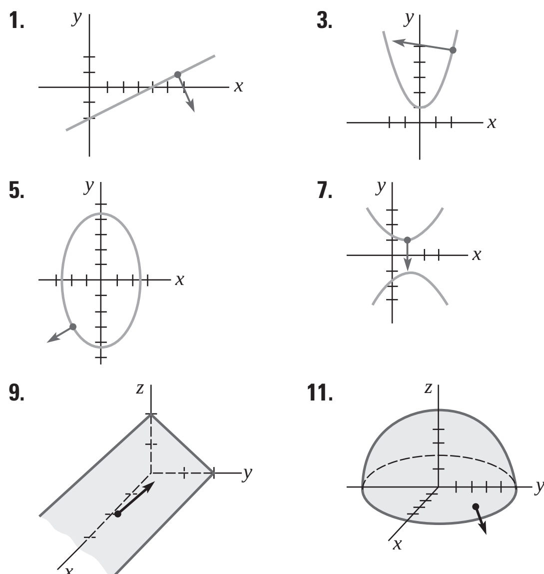
31. $\pm 31\sqrt{17}$

33. $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j}; \mathbf{u} = \frac{4}{5}\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\,\mathbf{j}; \mathbf{u} = -\frac{4}{5}\,\mathbf{i} - \frac{3}{5}\,\mathbf{j}$

35. $D_{\mathbf{u}}f = (9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)/\sqrt{10}$;
$D_{\mathbf{u}}F = (-6x^2 - 54y^2 + 54x + 6y - 72xy)/10$
37. $(2, 5), (-2, 5)$
39. $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
41. $x = 3e^{-4t}, y = 4e^{-2t}$
43. Una función posible es $f(x, y) = x^3 - \frac{2}{3}y^3 + xy^3 + e^{xy}$.

Ejercicios 19.6, página 773

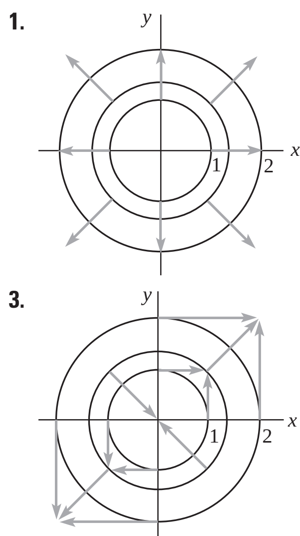
1. **3.** **5.** **7.** **9.** **11.**



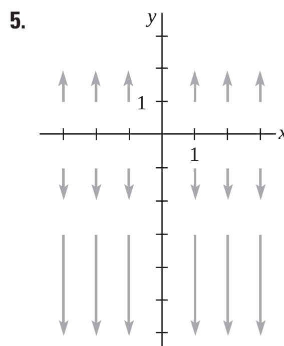
13. $(-4, -1, 17)$
15. $-2x + 2y + z = 9$
17. $6x - 2y - 9z = 5$
19. $6x - 8y + z = 50$
21. $2x + y - \sqrt{2}z = (4 + 5\pi)/4$
23. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$
25. $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$
27. $(-2, 0, 5), (-2, 0, -3)$
33. $x = 1 + 2t, y = -1 - 4t, z = 1 + 2t$
35. $(x - \frac{1}{2})/4 = (y - \frac{1}{3})/6 = -(z - 3)$

Ejercicios 19.7, página 777

1. **3.**



5.



7. $(x - y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$; $2z$ **9.** $\mathbf{0}$; $4y + 8z$
11. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$; $6xy$
13. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}$; $e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$
15. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j} + (-3x^2yze^z - xe^x)\mathbf{k}$; $xye^x + ye^x - x^3ze^z$
35. $2\mathbf{i} + (1 - 8y)\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$
45. div $\mathbf{F} = 1 \neq 0$. Si existiera un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}$, entonces necesariamente div $\mathbf{F} = \text{div curl } \mathbf{G} = 0$.

Ejercicios 19.8, página 786

1. $-125/3\sqrt{2}$; $-250(\sqrt{2} - 4)/12$; $\frac{125}{2}$
3. $3; 6; 3\sqrt{5}$ **5.** $-1; (\pi - 2)/2; \pi^2/8; \sqrt{2}\pi^2/8$
7. 21 **9.** 30 **11.** 1 **13.** 1
15. 460 **17.** $\frac{26}{9}$ **19.** $-\frac{64}{3}$ **21.** $-\frac{8}{3}$
23. 0 **25.** $\frac{123}{2}$ **27.** 70 **29.** $-\frac{19}{8}$
31. e **33.** -4 **35.** 0
37. En cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.
41. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = 2/\pi$

Ejercicios 19.9, página 796

1. $\frac{16}{3}$ **3.** 14 **5.** 3 **7.** 330
9. 1 096 **11.** $\phi = x^4y^3 + 3x + y$
13. no es un campo conservativo **15.** $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4$
17. $3 + e^{-1}$ **19.** 63 **21.** $8 + 2e^3$
23. 16 **25.** $\pi - 4$ **27.** $\phi = (Gm_1m_2)/|\mathbf{r}|$

Ejercicios 19.10, página 803

1. $24y - 20e^y$ **3.** $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$ **5.** $\dfrac{x}{2}\ln 5$
7. $2 - \text{sen } y$
9. **11.**
13. $\frac{1}{21}$ **15.** $\frac{25}{84}$ **17.** 96
19. $2 \ln 2 - 1$ **21.** $\frac{14}{3}$ **23.** c, 16π
25. 18 **27.** 2π **29.** 4 **31.** $30 \ln 6$
33. $15\pi/4$ **35.** $(2^{3/2} - 1)/18$ **37.** $\frac{2}{3}$ sen 8
39. $\pi/8$ **41.** $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$ **43.** $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$

45. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ **47.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$

49. $\bar{x} = (3e^4 + 1)/[4(e^4 - 1)]$,
$\bar{y} = 16(e^5 - 1)/[25(e^4 - 1)]$

51. $\frac{1}{105}$ **53.** $4k/9$ **55.** $\frac{256}{21}$ **57.** $\frac{941}{10}$

59. $a\sqrt{10}/5$ **61.** $ab^3\pi/4$; $a^3b\pi/4$; $b/2$; $a/2$

63. $ka^4/6$ **65.** $16\sqrt{2}k/3$ **67.** $a\sqrt{3}/3$

Ejercicios 19.11, página 808

1. $27\pi/2$ **3.** $(4\pi - 3\sqrt{3})/6$ **5.** $25\pi/3$

7. $(2\pi/3)(15^{3/2} - 7^{3/2})$ **9.** $\frac{5}{4}$

11. $\bar{x} = 13/3\pi, \bar{y} = 13/3\pi$ **13.** $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = 3\sqrt{3}/2$

15. $\bar{x} = (4 + 3\pi)/6, \bar{y} = \frac{4}{3}$ **17.** $\pi a^4 k/4$

19. $(ka/12)(15\sqrt{3} - 4\pi)$ **21.** $\pi a^4 k/2$

23. $4k$ **25.** 9π **27.** $(\pi/4)(e - 1)$

29. $3\pi/8$ **31.** 250

33. aproximadamente 1 450 m^3 **35.** $\sqrt{\pi}/2$

Ejercicios 19.12, página 813

1. 3 **3.** 0 **5.** 75π **7.** 48π

9. $\frac{56}{3}$ **11.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{1}{8}$

15. $(b \times a) \times$ (área de la región acotada por C)

19. $3a^2\pi/8$ **23.** $45\pi/2$ **25.** π

27. $27\pi/2$ **29.** $3\pi/2$ **33.** 3π

Ejercicios 19.13, página 820

1. $3\sqrt{29}$ **3.** $10\pi/3$ **5.** $(\pi/6)(17^{3/2} - 1)$

7. $25\pi/6$ **9.** $2a^2(\pi - 2)$ **11.** $8a^2$

13. $2\pi a(c_2 - c_1)$ **15.** $\frac{26}{3}$ **17.** 0

19. 972π **21.** $(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)/15$

23. $9(17^{3/2} - 1)$ **25.** $12\sqrt{14}$ **27.** $k\sqrt{3}/12$

29. 18 **31.** 28π **33.** 8π **35.** $5\pi/2$

37. $-8\pi a^3$ **39.** $4\pi kq$ **41.** $(1, \frac{2}{3}, 2)$

Ejercicios 19.14, página 826

1. -40π **3.** $\frac{45}{2}$ **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** -3

9. $-3\pi/2$ **11.** π **13.** -152π **15.** 112

17. Considere que la superficie es $z = 0$; $81\pi/4$.

Ejercicios 19.15, página 835

1. 48 **3.** 36 **5.** $\pi - 2$

7. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e$ **9.** 50

11. $\int_0^4 \int_0^{2-(x/2)} \int_{x+2y}^4 F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$;

$\int_0^2 \int_{2y}^4 \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$;

$\int_0^4 \int_0^{z/2} \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$;

$\int_0^4 \int_x^4 \int_0^{(z-x)/2} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$;

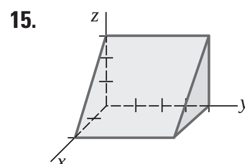
$\int_0^4 \int_0^z \int_0^{(z-x)/2} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

13. $\int_0^2 \int_{x^3}^8 \int_0^4 dz\, dy\, dx$;

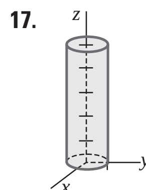
$\int_0^8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{y}} dx\, dz\, dy$;

$\int_0^4 \int_0^2 \int_{x^3}^8 dy\, dx\, dz$

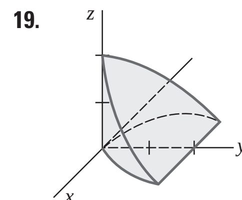
15.



17.



19.



21. $16\sqrt{2}$ **23.** 16π

25. $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{32}{7}, \bar{z} = \frac{8}{3}$ **27.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2, \bar{z} = 0$

29. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2y+2}^{8-y} (x + y + 4)\, dz\, dy\, dx$

31. $2\,560k/3$; $\sqrt{80/9}$ **33.** $k/30$

35. $(-10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 5)$ **37.** $(\sqrt{3}/2, \frac{3}{2}, -4)$

39. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$ **41.** $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$

43. $r^2 + z^2 = 25$ **45.** $r^2 - z^2 = 1$

47. $z = x^2 + y^2$ **49.** $x = 5$

51. $(2\pi/3)(64 - 12^{3/2})$ **53.** $625\pi/2$

55. $(0, 0, 3a/8)$ **57.** $8\pi k/3$

59. $(\sqrt{3}/3, \frac{1}{3}, 0)$; $(\frac{2}{3}, \pi/6, 0)$

61. $(-4, 4, 4\sqrt{2})$; $(4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$

63. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$ **65.** $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$

67. $\rho = 8$ **69.** $\phi = \pi/6, \phi = 5\pi/6$

71. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ **73.** $z = 2$

75. $9\pi(2 - \sqrt{2})$ **77.** $2\pi/9$

79. $(0, 0, \frac{7}{6})$ **81.** πk

Ejercicios 19.16, página 842

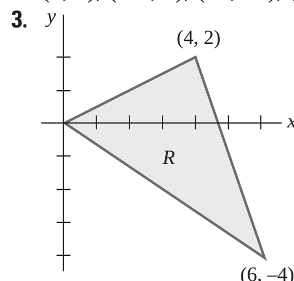
1. $\frac{3}{2}$ **3.** $12a^5\pi/5$ **5.** 256π **7.** $62\pi/5$

9. $4\pi(b - a)$ **11.** 128 **13.** $\pi/2$

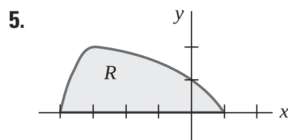
Ejercicios 19.17, página 848

1. (0, 0), (−2, 8), (16, 20), (14, 28)

3.

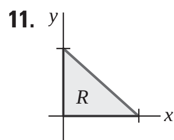


5.



7. $-2v$ **9.** $-\frac{1}{3}u^2$

11.



(0,0) es la imagen de cada punto en la frontera $u = 0$.

13. 16 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}(b - a)(d - c)$
19. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ **21.** $\frac{315}{4}$ **23.** $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$
25. 126 **27.** $\frac{5}{2}(b - a) \ln \frac{d}{c}$ **29.** $15\pi/2$

Ejercicios de repaso del capítulo 19, página 849

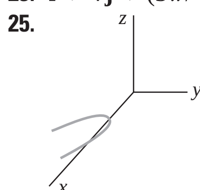
1. verdadero **3.** verdadero **5.** falso **7.** verdadero
9. falso **11.** falso **13.** verdadero
15. verdadero **17.** verdadero

19. $\nabla\phi = -\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$

21. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k}$ para toda t

23. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$

25.



27. $(6x^2 - 2y^2 - 8xy)/\sqrt{40}$ **29.** $2; -2/\sqrt{2}; 4$

31. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$

33. $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x} \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx$;

$\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{y} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy + \int_1^2\int_{y/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy; \frac{1}{3}$

35. $41k/1\,512$ **37.** 8π **39.** $6xy$
41. 0 **43.** $56\sqrt{2}\,\pi^3/3$
45. 12 **47.** $2 + 2/3\pi$ **49.** $\pi^2/2$
51. $(\ln 3)(17^{3/2} - 5^{3/2})/12$
53. $-4\pi c$ **55.** 0 **57.** 125π **59.** 3π
61. $\frac{5}{3}$ **63.** 0 **65.** π

Ejercicios 20.1, página 856

1. la línea $v = -u$ **3.** la línea $v = 2$
5. segmento abierto de línea desde 0 hasta πi
7. el rayo $\theta = \frac{1}{2}\theta_0$ **9.** la línea $u = 1$
11. el cuarto cuadrante
13. la cuña $\pi/4 \le \text{Arg } w \le \pi/2$
15. el círculo con centro $w = 4i$ y radio $r = 1$
17. la franja $-1 \le u \le 0$
19. la cuña $0 \le \text{Arg } w \le 3\pi/4$
21. $w = -i(z - i) = -iz - 1$
23. $w = 2(z - 1)$ **25.** $w = -z^4$
27. $w = e^{3z/2}$ **29.** $w = -z + i$

Ejercicios 20.2, página 862

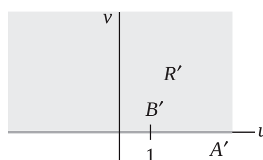
1. conforme en todos los puntos menos $z = \pm 1$
3. conforme en todos los puntos menos $z = \pi i \pm 2n\pi i$
5. conforme en todos los puntos fuera del intervalo $[-1, 1]$ del eje x
7. La imagen es la región mostrada en la figura 20.2.2*b*). Un segmento horizontal $z(t) = t + ib$, donde $0 < t < \pi$, se transforma en la porción inferior o superior de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\text{senh}^2 b} = 1$$

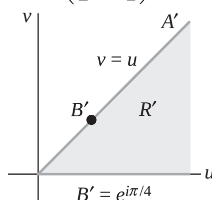
según sea $b > 0$ o $b < 0$.

9. La imagen de la región es la cuña $0 \le \text{Arg } w \le \pi/4$. La imagen del segmento de línea $[-\pi/2, \pi/2]$ es la unión de los segmentos de línea que unen a $e^{i\pi/4}$ con 0 y a 0 con 1.

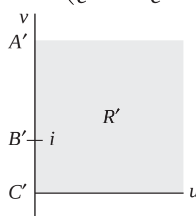
11. $w = \cos(\pi z/2)$ utilizando H-4



13. $w = \left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right)^{1/2}$ utilizando H-5 y $w = z^{1/4}$



15. $w = \left(\dfrac{e^{\pi/z} + e^{-\pi/z}}{e^{\pi/z} - e^{-\pi/z}}\right)^{1/2}$ utilizando H-6 y $w = z^{1/2}$



17. $w = \text{sen}(-i\text{Ln } z - \pi/2)$; $A'B'$ es el intervalo real $(-\infty, -1]$.

19. $u = \dfrac{1}{\pi}\text{Arg}(z^4)$ o $u(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi}\theta$

21. $u = \dfrac{1}{\pi}\text{Arg}\left(i\dfrac{1 - z}{1 + z}\right) = \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right)$

23. $u = \dfrac{1}{\pi}[\text{Arg}(z^2 - 1) - \text{Arg}(z^2 + 1)]$

25. $u = \dfrac{10}{\pi}[\text{Arg}(e^{\pi z} - 1) - \text{Arg}(e^{\pi z} + 1)]$

Ejercicios 20.3, página 868

1. $T(0) = \infty$, $T(1) = i$, $T(\infty) = 0$; $|w| = 1$ y la línea $v = \frac{1}{2}$; $|w| \ge 1$

3. $T(0) = -1$, $T(1) = \infty$, $T(\infty) = 1$; la línea $u = 0$ y el círculo $|w - 1| = 2$; el semiplano $u \le 0$

5. $S^{-1}(w) = \dfrac{-w-1}{-w+i} = \dfrac{w+1}{w-i}$, $S^{-1}(T(z)) = \dfrac{(1+i)z-1}{2z+i}$

7. $S^{-1}(w) = \dfrac{-w+2}{-w+1} = \dfrac{w-2}{w-1}$, $S^{-1}(T(z)) = \dfrac{3}{z}$

9. $w = -2\dfrac{z+1}{z-2}$ **11.** $w = \dfrac{2z}{z-1-2i}$

13. $w = \dfrac{i}{2}\dfrac{z-1}{z}$

15. $w = 3\dfrac{(1+i)z+1-i}{(-3+5i)z-3-5i}$

17. $u = \dfrac{1}{\log_e 2}\log_e\left|\dfrac{z+2}{z-1}\right|$. Las curvas de nivel son las imágenes de los círculos $|w| = r$, donde $1 < r < 2$, bajo la transformación fraccional lineal $T(w) = (w+2)/(w-1)$. Puesto que los círculos no pasan por el polo en $w = 1$, las imágenes son círculos.

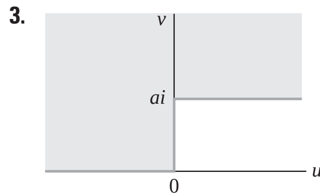
19. Construya la transformación fraccional lineal que envía a $1, i, -i$ hacia $0, 1, -1$.

21. Simplifique $T_2(T_1(z)) = \dfrac{a_2\left(\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+b_2}{c_2\left(\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+d_2}$.

Ejercicios 20.4, página 872

1. primer cuadrante

3.



5. $f'(z) = A(z+1)^{-1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/2}$ para alguna constante A

7. $f'(z) = A(z+1)^{-1/3}z^{-1/3}$ para alguna constante A

9. Demuestre que $f'(z) = \dfrac{A}{(z^2-1)^{1/2}}$ y concluya que $f(z) = \cosh^{-1} z$.

11. Demuestre que $f'(z) \to A/z$ cuando $w_1 \to \infty$ y concluya que $f(z) = \operatorname{Ln} z$.

13. Demuestre que $f'(z) \to A(z+1)^{-1/2}z(z-1)^{-1/2} = Az/(z^2-1)^{1/2}$ cuando $u_1 \to 0$.

Ejercicios 20.5, página 876

1. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-1}{z}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

3. $u = \dfrac{5}{\pi}[\pi - \operatorname{Arg}(z-1)] + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z+1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z+2}\right)$

5. $u = \dfrac{y}{\pi}\left\{1 + \dfrac{y^2-x^2}{y}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right] + x\log_e\left[\dfrac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]\right\}$

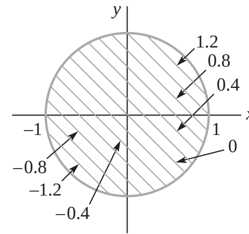
7. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z^2-1}{z^2}\right) + \dfrac{5}{\pi}\operatorname{Arg}(z^2+1)$

9. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{(1-i)z-(1+i)}{1-z}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1-z}{-(1+i)z+1-i}\right)$

11. $u(0, 0) = \frac{1}{3}$, $u(-0.5, 0) = 0.5693$, $u(0.5, 0) = 0.1516$

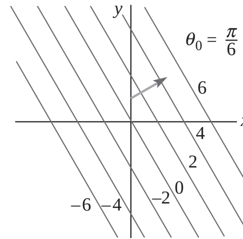
13. Demuestre que $u(0, 0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\,dt$.

15. $u(r, \theta) = r\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$ o $u(x, y) = x + y$

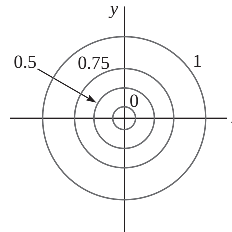


Ejercicios 20.6, página 881

1. $g(z) = e^{-i\theta_0}$ es analítica en cualquier punto y $G(z) = e^{-i\theta_0}z$ es un potencial complejo. Las líneas equipotenciales son $x\cos\theta_0 + y\operatorname{sen}\theta_0 = c$.



3. $g(z) = 1/z$ es analítica para $z \neq 0$ y $G(z) = \operatorname{Ln} z$ es analítica excepto en $z = x \le 0$. Las líneas equipotenciales son los círculos $x^2 + y^2 = e^{2c}$.



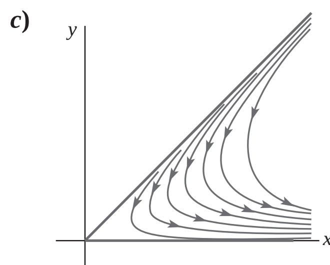
5. $\phi = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{Arg} z$ o $\phi(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi}\theta$ y $G(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{Ln} z$ es un potencial complejo. Las líneas equipotenciales son los rayos $\theta = \dfrac{\pi}{4}c$ y $\mathbf{F} = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

7. Las líneas equipotenciales son las imágenes de los rayos $\theta = \theta_0$ bajo las transformaciones sucesivas $\zeta = w^{1/2}$ y $z = (\zeta+1)/(-\zeta+1)$. La transformación $\zeta = w^{1/2}$ transforma el rayo $\theta = \theta_0$ en el rayo $\theta = \theta_0/2$ en el plano ζ, y $z = (\zeta+1)/(-\zeta+1)$ transforma este rayo en un arco de círculo que pasa por $z = -1$ y $z = 1$.

9. ***a***) $\psi(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$ o, en coordenadas polares, $\psi(r, \theta) = r^4$ sen 4θ. Nótese que $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = \overline{4z^3} = 4(x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$

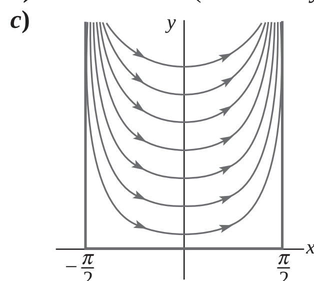
c)



11. ***a***) $\psi(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y$ y $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = \overline{\cos z} = (\cos x \cosh y, \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)$

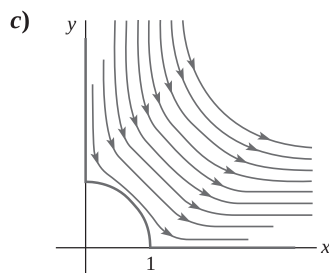
c)



13. ***a***) $\psi(x, y) = 2xy - \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ o, en coordenadas polares, $\psi(r, \theta) = (r^2 - 1/r^2)$ sen 2θ. Nótese que $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = 2\bar{z} - 2/\bar{z}^3$

c)



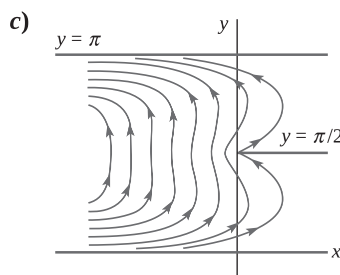
15. ***a***) $f(t) = \pi i - \dfrac{1}{2}[\log_e|t + 1| + \log_e|t - 1| + i \operatorname{Arg}(t + 1) + i \operatorname{Arg}(t - 1)]$ y así

$$\operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \pi/2, & -1 < t < 1 \\ \pi, & t > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Im}(G(z)) = \psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

b) $x = -\frac{1}{2}[\log_e|t + 1 + ic| + \log_e|t - 1 + ic|]$
$y = \pi - \frac{1}{2}[\operatorname{Arg}(t + 1 + ic) + \operatorname{Arg}(t - 1 + ic)]$, para $c > 0$

c)



17. ***a***) $f(t) = \dfrac{1}{\pi}((t^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} t) = \dfrac{1}{\pi}((t^2 - 1)^{1/2} + \operatorname{Ln}(t + (t^2 - 1)^{1/2}))$ y así $\operatorname{Im}(f(t)) =$

$\begin{cases} 1, & t < -1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$ y $\operatorname{Re}(f(t)) = 0$ para $-1 < t < 1$.

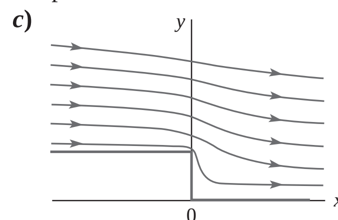
Por lo tanto, $\operatorname{Im}(G(z)) = \psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

b) $x = \operatorname{Re}\left[\dfrac{1}{\pi}\left(((t + ic)^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(t + ic)\right)\right]$

$y = \operatorname{Im}\left[\dfrac{1}{\pi}\left(((t + ic)^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(t + ic)\right)\right]$

para $c > 0$

c)



19. $z = 0$ en el ejemplo 5; $z = 1$, $z = -1$ en el ejemplo 6

21. Las líneas de corriente son las ramas de la familia de hipérbolas $x^2 + Bxy - y^2 - 1 = 0$ que se encuentran en el primer cuadrante. Todos los miembros de la familia pasan por $(1, 0)$.

23. *Sugerencia:* Para z en el semiplano superior,

$$k[\operatorname{Arg}(z - 1) - \operatorname{Arg}(z + 1)] = k \operatorname{Arg}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right).$$

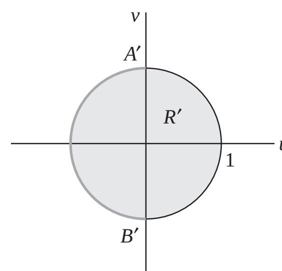
Ejercicios de repaso del capítulo 20, página 883

1. $v = 4$ **3.** la cuña $0 \le \operatorname{Arg} w \le 2\pi/3$

5. verdadero **7.** $0, 1, \infty$ **9.** falso

11. La imagen del primer cuadrante es la franja $0 < v < \pi/2$. Los rayos $\theta = \theta_0$ se transforman en las líneas horizontales $v = \theta_0$ del plano w.

13. $w = \dfrac{i - \cos \pi z}{i + \cos \pi z}$



15. $u = 2 - 2y/(x^2 + y^2)$

17. ***a***) Nótese que $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 2\pi$ y $\alpha_3 \to 0$ cuando $u_1 \to \infty$.

b) *Sugerencia:* Escriba $f(t) = \frac{1}{2} A[\log_e |t + 1| + \log_e |t - 1| + i \operatorname{Arg}(t + 1) + i \operatorname{Arg}(t - 1)] + B$.

19. $G(z) = f^{-1}(z)$ transforma a R en la franja $0 \leq v \leq \pi$, y $U(u, v) = v/\pi$ es la solución al problema de la frontera transferida. Por lo tanto, $\phi(x, y) = (1/\pi)\operatorname{Im}(G(z)) = (1/\pi)\psi(x, y)$, por lo que las líneas equipotenciales $\phi(x, y) = c$ son las líneas de corriente $\psi(x, y) = c\pi$.

ÍNDICE ANALÍTICO

La *n* después de un número de página indica que la referencia se encuentra en las notas.

D

E

F

N

O

P

R

S

T

U

V

W

Y